

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт Математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование кафедры полностью)

01.03.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки, специальности)

Математическое и компьютерное моделирование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему «Моделирование эффектов распространения волн шепчущей галереи в цилиндрической области»

Студент

Т.А. Зайнутдинов

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Руководитель

д.ф. – м.н., доцент С.В. Талалов

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Консультант

М. В. Дайнеко

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Аннотация

Работа была выполнена студентом Тольяттинского Государственного Университета, института математики, физики и информационных технологий, группы ПМИп-1702б, Зайнутдиновым Тагиром Асхатовичем.

Выпускная квалификационная работа на тему «Моделирование распространения волн шепчущей галереи в цилиндрической области» посвящена изучению эффектов распространения волн шепчущей галереи и решению уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах.

Цель выпускной квалификационной работы – провести исследование по распространению волн шепчущей галереи в цилиндрических областях при наличии специальных начальных условий.

Объект исследования – волны шепчущей галереи в цилиндрической области.

Предмет исследования – процесс исследования эффектов распространения волн шепчущей галереи в определенной области.

Задачи работы:

1. Изучить распространение волн в цилиндрической области.
2. Провести численное исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи.
3. Продемонстрировать проявление эффекта шепчущей галереи в определенной области.

При написании выпускной квалификационной работы нами были использованы книги, учебные пособия и научные статьи. Информационная база исследования сформирована на основе научных трудов исследователей по эффекту распространения волн шепчущей галереи, результатов наблюдений, материалов научных периодических изданий и научных конференций.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемых источников и приложений.

Во введении обозначена актуальность темы, определены объект и предмет исследования, сформулированы цель и задачи работы.

В первой главе был изучен теоретический материал по модам шепчущей галереи, уравнению Гельмгольца, уравнению и функциям Бесселя.

Во второй главе была сделана практическая часть работы, с использованием программной среды MatLab.

В заключении подведены итоги по двум главам.

В списке использованных источников представлены материалы, использованные при написании выпускной квалификационной работы.

В приложении находятся скриншоты практической части работы, выполненной в программной среде MatLab.

Ключевые слова: шепчущая галерея, моды шепчущей галереи, уравнение Гельмгольца, уравнение Бесселя, цилиндрический резонатор.

Abstract

The title of the graduation work is «Modeling the propagation of whispering gallery waves in a cylindrical region».

This graduation work is devoted to the study of the effects of the propagation of whispering gallery waves and the solution of the Helmholtz equation in cylindrical coordinates.

The work was performed by a student of Togliatti State University, Institute of Mathematics, Physics and Information Technologies, PMIp-1702b group, Zainutdinov Tagir Askhatovich.

The aim of the work is to conduct a study on the propagation of whispering gallery waves in cylindrical areas in the presence of special initial conditions.

The object of the graduation work is the waves of a whispering gallery in a cylindrical region.

The subject of the graduation work is the process of studying the effects of the propagation of whispering gallery waves in a certain area.

To achieve the purpose, the following tasks have to be performed:

1. To study the propagation of waves in a cylindrical region.
2. To conduct a numerical study of the effect of wave propagation of the whispering gallery.
3. Demonstrate the manifestation of the whispering gallery effect in a certain area.

When writing the final qualifying work, we used books, textbooks and scientific articles. The information base of the research is formed on the basis of scientific works of researchers in the effect of the whispering gallery wave propagation, the results of observations, material of scientific periodicals and scientific conferences.

The graduation work consists of an introduction, two chapters, a conclusion, a list of sources used and appendices.

In the introduction, the relevance of the topic is indicated, the object and subject of the study are defined, the purpose and objectives of the work are formulated.

In the first chapter, we studied theoretical material on the whispering gallery modes, the Helmholtz equation, the Bessel equation and functions. In the second chapter, the practical part of the work was done using the MatLab software environment.

In conclusion, the results of two chapters are summarized.

The list of sources used contains materials used in writing the final qualifying work.

The application contains screenshots of the practical part of the work performed in the MatLab software environment.

Keywords: whispering gallery, whispering gallery modes, Helmholtz equation, Bessel equation, cylindrical resonator.

Оглавление

Введение.....	7
Глава 1 Теоретические аспекты распространения волн в цилиндрической области.....	9
1.1 Понятие и описание эффекта шепчущей галереи.....	9
1.2 Особенности волнового уравнения.....	11
1.3 Вывод и решение уравнение Гельмгольца.....	14
1.4 Описание уравнения Бесселя и функции Бесселя.....	17
Глава 2 Практическое исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи.....	19
2.1 Выбор специальных параметров, при которых возникает эффект шепчущей галереи при наличии начальных критериев..	19
2.2 Описание решения задачи Коши.....	23
2.3 Выбор подходящей среды программирования.....	27
2.4 Построение волнового фронта в цилиндрическом резонаторе.....	29
Заключение.....	38
Список используемых источников.....	39
Приложение А Программа показа волнового фронта единой частоты....	42
Приложение Б Программа показа волнового фронта различных частот..	43

Введение

В современной математической физике большое внимание уделяют исследованию волновых процессов. Их можно классифицировать по типу среды, так же можно выделить упругие или электромагнитные волны.

Упругие волны также называют акустическими. В исследованиях этих волн большое внимание уделяется их распространению в присутствии направляющих поверхностей. Когда они ограничивают определенную полость – это акустический резонатор. Здесь будут только волны определенного вида – «моды резонатора». Важный аспект этих решений – моды шепчущей галереи.

Актуальность работы: исследование мод шепчущей галереи всегда было актуальной задачей. На модах шепчущей галереи применяется большое количество оптических и акустических резонаторов. Многие работы посвящены конструированию оптических резонаторов на данных модах. И, так как оптоэлектроника сейчас бурно развивается – эти данные являются очень важными. Также, эти знания важны при проектировании помещений, где важно учитывать особенности распространения звука.

Цель выпускной квалификационной работы: провести исследование по распространению волн шепчущей галереи в цилиндрических областях при наличии специальных начальных условий.

Задачи работы:

1. Изучить распространение волн в цилиндрической области.
2. Провести численное исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи.
3. Продемонстрировать проявление эффекта шепчущей галереи в определенной области.

Объект исследования: волны шепчущей галереи в цилиндрической области.

Предмет исследования: процесс исследования эффектов распространения волн шепчущей галереи в определенной области.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемых источников и приложений.

Во введении обозначена актуальность темы, определены объект и предмет исследования, сформулированы цель и задачи работы.

В первой главе был изучен теоретический материал по модам шепчущей галереи, уравнению Гельмгольца, уравнению и функциям Бесселя. Были приведены основные понятия и термины, связанные с поставленными задачами. Было решено уравнение Гельмгольца и задача Коши для волнового уравнения с определенными начальными данными.

Во второй главе была сделана практическая часть работы, с использованием программной среды MatLab. Приведена визуализация распространения волн шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе.

В заключении подведены итоги по двум главам.

В списке использованных источников представлены материалы, использованные при написании выпускной квалификационной работы.

В приложении находятся скриншоты практической части работы, выполненной в программной среде MatLab.

Глава 1 Теоретические аспекты распространение волн в цилиндрической области

1.1 Понятие и описание эффекта шепчущей галереи

Шепчущая галерея – помещение, где шепот, который распределяется вдоль стен не будет слышен в оставшейся части данного помещения.

Эффект шепчущей галереи можно детально увидеть на рисунке 1. Этот эффект происходит в связи с распространением акустической волны у стены, которая имеет большое внутреннее отражение. Это происходит в помещениях, которые имеют круглую форму. Образуется так называемая стоячая волна, прижимающаяся к стенкам галереи. Именно ее и называют модами шепчущей галереи. [3]

Таким образом, моды шепчущей галереи – резонансные стоячие волны, которые возбуждаются в осесимметричных системах. Это зависит от эффекта внутреннего отражения.

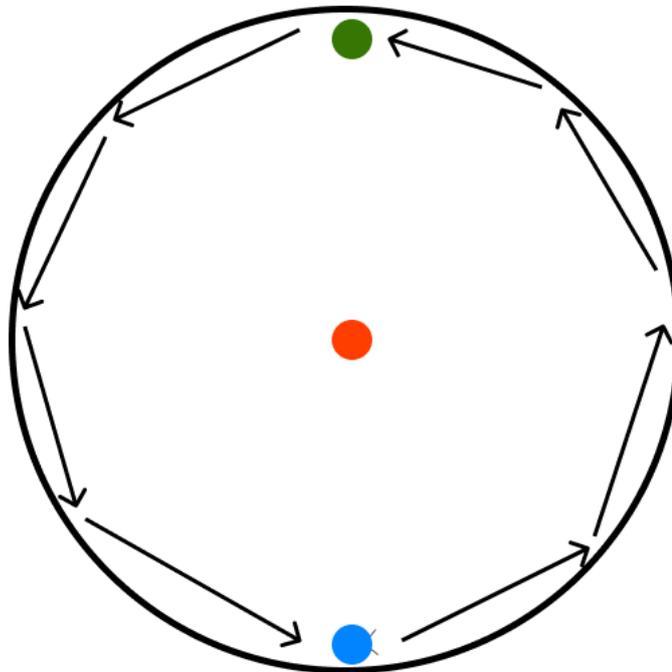


Рисунок 1 – Эффект шепчущей галереи

Таким образом, если рядом с округлой стеной стоит какой-либо человек и что-то шепчет, этот шепот распространяется в направлении некоторого луча. Получается, что в кольцевом цилиндре появляется определенная зона слышимости, так как шепот человека рядом со стеной является направленным. Именно это и называется эффектом шепчущей галереи, представленным на рисунке 1.1. [7]

Рассматриваемый эффект известен очень давно. Его применение началось еще со строительства гражданских и культовых учреждений. Любая вогнутая, акустически жесткая поверхность может быть направляющей структурой квазиодномерного распространения звуковой волны. [21]

Так, еще в конце XIX века Рэлеем была доказана волновая природа рассматриваемого эффекта. Свои наблюдения он проводил в таких известных сооружениях, как собор Святого Петра в Риме, Храм Неба в Пекине, собор Святого Павла в Лондоне, арочная плотина. Рассмотрим подробнее собор Святого Павла в Лондоне, который был построен в 1703 году. В нем посетителям открывается вид на огромный по тем временам купол – главную достопримечательность собора. На 30-ти метровой высоте, в самом основании купола, расположен карниз, поддерживающий «Галерею шепотов». Такое название связано с непредусмотренными архитектором нестандартных акустических свойств. Как было описано выше, любое слово, сказанное в одной части галереи будет слышно и в другом ее конце. [11]

Что касается Храма неба в Пекине, который был построен 5 веков назад, цилиндрическая стена шепотов составляет 65 метров. Если ударить в ладоши у ее основания, то только спустя 600 метров ухо перестанет воспринимать этот хлопок.

До изучения Рэлеем эффекта шепчущей галереи, королевским астрономом было выдвинуто предположение, что от поверхности, которая расположена вблизи купола отражаются звуковые лучи. Но усиление звука

будет только в том месте, которое диаметрально противоположно источнику звука. [18]

Помимо этого, существует эффект, который позволяет звука удерживаться на поверхности стен и идти вдоль них. Вполне вероятно, что это будет идти вдоль той дуги, к которой звук обращен лицом.

Известно, что частотные свойства речи присутствуют в диапазоне от нескольких сотен до полутора тысяч колебаний в секунду. Так, частоты шепота превышают частоты обычной речи. В тот момент, когда человек стоит рядом со стеной с круговым основанием и шепчет вдоль стены – можно утверждать, что он делает это в направлении некоторого луча. Так как шепот является направленным – зона слышимости находится в кольцевом цилиндре. Шепот будет слышен тем, кто находится именно в этом цилиндре. И не будет слышен совсем тем, кто находится в зоне звуковой тени. Это и называется эффектом шепчущей галереи. [1]

1.2 Особенности волнового уравнения

От природы у человека есть органы чувств, благодаря которым он воспринимает информацию из окружающего мира. Одним из них является полость рта, с помощью которой человек издает такие звуки, как голос, крик, шепот. Затем они начинают распространяться по определенному месту.

Звуком называются механические колебания, которые распространяются в окружающей среде и воспринимаются органом слуха человека. [22]

Волновые явления имеют способность разворачиваться как во времени, так и в пространстве, в отличие от изменений физических величин. Здесь следует сказать о волновых полях. Так, данное поле задается функцией многих переменных, одна из которых время «t», а другие являются пространственными координатами. Такие поля могут быть одномерными,

двухмерными и трехмерными. Это зависит от характера рассматриваемой задачи. [2]

С помощью линейного уравнения можно описать волновые процессы. Обычно, они связаны с минимальными возмущениями упругой среды. Так, волновое уравнение обрисовывает колебательные процессы в сплошных средах и имеет вид:

$$\Delta U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где:

– $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа;

– $U = U(t, x, y, z)$ - функция, значение которой отличается в зависимости от задачи;

– v – постоянная, имеющая значение фазовой скорости волны. [23]

Когда мы работаем с физическими процессами в трехмерном пространстве, мы получаем волновое уравнение из уравнения плоской волны. [12]

Ниже представлено уравнение плоской волны:

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0),$$

где:

$A(x, t)$ – возмущение в точке x в момент времени t ;

A_0 – волновая амплитуда;

ω – круговая частота;

\vec{k} – волновой вектор;

$\vec{k} = \vec{k}(x, y, z)$ – радиус-вектор в точке;

x, y, z, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Мы можем получить систему уравнений в частных производных, если продифференцируем его по переменным x, y, z, t :

$$\partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial t_2 = -\omega_2 A_0 \cos(\omega t - (r \rightarrow, t) + \varphi_0) = -\omega_2 A(r \rightarrow, t), \quad (2)$$

$$\partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial x_2 = -k_{2x} A_0 \cos(\omega t - (r \rightarrow, t) + \varphi_0) = -k_{2x} A(r \rightarrow, t), \quad (3)$$

$$\partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial y_2 = -k_{2y} A_0 \cos(\omega t - (r \rightarrow, t) + \varphi_0) = -k_{2y} A(r \rightarrow, t), \quad (4)$$

$$\partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial z_2 = -k_{2z} A_0 \cos(\omega t - (r \rightarrow, t) + \varphi_0) = -k_{2z} A(r \rightarrow, t). \quad (5)$$

Если сложить уравнения (3), (4), и (5), то получим:

$$\partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial x_2 + \partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial y_2 + \partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial z_2 = -k_2 A(r \rightarrow, t), \quad (6)$$

Так, из уравнений (2) и (6) можно сделать вывод, что:

$$k_2 \omega_2 = 1 v_2, \quad (7)$$

Из этого можно вывести следующее уравнение:

$$\partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial x_2 + \partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial y_2 + \partial_2 A(r \rightarrow, t) \partial z_2 = 1 v_2 * \partial_2 u \partial t_2. \quad (8)$$

Итак, из суммы уравнений плоской волны в частных производных мы выводим общее волновое уравнение.

При необходимости получить уравнение в n -мерных пространствах, нужно применить систему дифференциальных уравнений в производных по времени t и по каждому из n измерений. [19]

Уравнением колебания струны его можно назвать для одномерного пространства. Оно выглядит следующим образом:

$$\partial_2 u \partial x_2 = 1 v_2 * \partial_2 u \partial t_2. \quad (9)$$

Таким образом, применение численных методов нужно для решения волновых задач. Однако, в некоторых случаях можно использовать аналитические решения.

1.3 Вывод и решение уравнение Гельмгольца

Ниже рассмотрим частные решения волнового уравнения (1):

$$U(t, r) = e^{i\omega t} U(r), \quad (10)$$

где ω – константа, содержащая значение частоты гармонических колебаний частиц среды. [4]

В уравнении это будет выглядеть следующим образом (1):

$$(\Delta + k^2)U(r) = 0, \quad (11)$$

где $k = \frac{\omega}{v}$.

Данное уравнение и будет называться уравнением Гельмгольца. Так, за пределы области не могут проникнуть те звуковые волны, у которых источник находится внутри данной области. Поэтому рассмотрим способы решения задачи Дирихле, если представлено уравнение (11), где есть нулевые критерии:

$$U(r) = 0, r \in S. \quad (12)$$

Рисунок 2 показывает область, ограниченную цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0$ и $z = H$. [24]

Попробуем найти решение рассматриваемого уравнения в цилиндрической системе координат. Для этого используем метод деления переменных:

$$U(r) = W(\rho, \varphi)Z(z), \quad (13)$$

Подставив это в уравнение Гельмгольца, мы получим:

$$Z(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial(W(\rho, \varphi))}{\partial \rho} \right) + W(\rho, \varphi) \frac{\partial^2(Z(z))}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2(W(\rho, \varphi))}{\partial \varphi^2} Z(z) + k^2 W(\rho, \varphi) Z(z) = 0$$

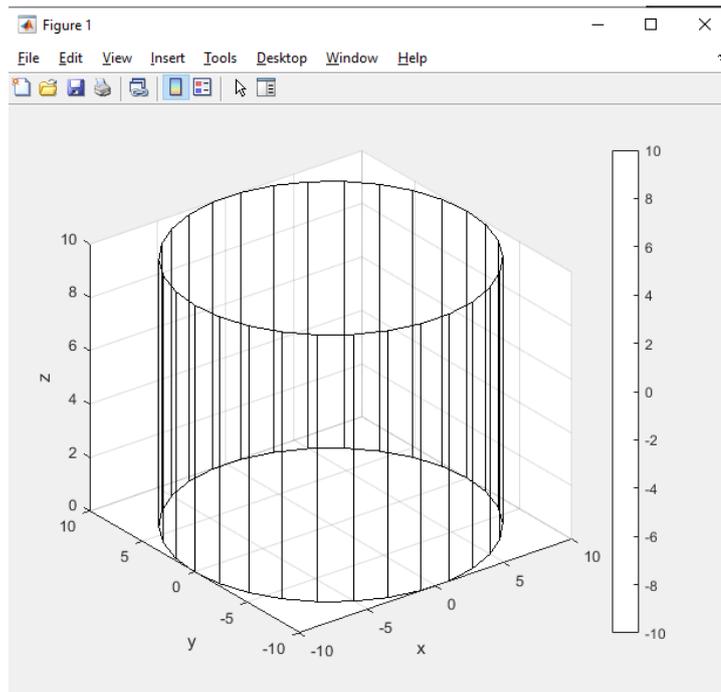


Рисунок 2 – Цилиндрический резонатор

Если разделить переменные, мы придем к уравнению гармонических колебаний для функции $Z(z)$. Найдем $Z(z)$ на плоскости $z = 0$, не забывая о граничных условиях (12):

$$Z(z) = \sin hz, \quad (14)$$

где h – константа деления переменных. Если

$$W(\rho, \varphi) = J(\rho)\Phi(\varphi), \quad (15)$$

то:

$$\frac{1}{\rho J(\rho)\Phi(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \Phi(\varphi) \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 J(\rho)\Phi(\varphi)} J(\rho) \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 = -h^2.$$

Делаем разделение переменных для функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi(\varphi) = e^{in\varphi}, \quad (16)$$

где число n является целым. Это связано с однозначностью искомого решения. [25]

Если $k^2 + h^2 = \lambda^2$, то уравнение, которое осталось для функции $J(\rho)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) J(\rho) = 0. \quad (17)$$

Итак, данное уравнение является уравнением Бесселя. Ниже представлено его решение:

$$J(\rho) = J_n(\lambda\rho), \quad (18)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя.

Таким образом, искомое решение U^{\circledast} , которое обращается в ноль на плоскости $z = 0$, выглядит так:

$$U(r) = J_n(\lambda\rho) e^{in\varphi} \sin hZ. \quad (19)$$

Ниже решим задачу Дирихле, которая связана с областью резонатора. Однако, есть определенные условия на плоскости $z = H$ и, так же, на боковой поверхности, про которые не следует забывать.

Сначала учтем условия на плоскости $z = H$:

$$Z(z) = \sin hz, \quad (20)$$

$$\sin hH = 0 \Rightarrow hH = \pi m \Rightarrow h = \frac{\pi m}{H}, \quad (21)$$

где H – высота резонатора.

Далее выведем уравнение с условиями боковой поверхности:

$$J(\rho) = J_n(\lambda\rho), \quad (22)$$

$$\lambda R = b_k^{(n)} \Rightarrow \lambda_k^{(n)} = \frac{b_k^{(n)}}{R}, \quad (23)$$

где:

- $b_k^{(n)}$ – k -ый ноль функции J_n Бесселя n -го порядка;
- R – радиус резонатора. [20]

Итак, ниже представлено решение задачи Дирихле:

$$U(r) = J_n \left(b_k^{(n)} \frac{\rho}{R} \right) e^{in\varphi} \sin \left(\pi m \frac{z}{H} \right), \quad (24)$$

где n, k, m – целые числа.

1.4 Описание уравнения Бесселя и функции Бесселя

Функция Бесселя помогает решить разнообразные задачи в атомной и ядерной физике, акустики и других направлений. Ее широкое распространение связано с наличием уравнений, содержащих оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

Автором функции является немецкий астроном – Фридрих Бессель. В 1824 году он:

- вывел соотношения для функций Бесселя;
- получил интегральное представление функций;
- обосновал присутствие большого количества нулей функции;
- составил первые таблицы. [5]

В предыдущих параграфах мы рассматривали уравнение Бесселя. Однако стоит рассмотреть этот вопрос подробнее, в связи с наличием специфических функций у мод шепчущей галереи.

Ниже представлено данное уравнение, которое выглядит следующим образом:

$$J'' + \frac{1}{x}J' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J = 0. \quad (25)$$

Его решение можно найти в виде ряда:

$$J(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^{k+s}. \quad (26)$$

Если $s = +n$, то

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+n)^2 - n^2} = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2n)}, \quad (27)$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2)^{2k} k! (1+n)(2+n) \dots (k+n)}. \quad (28)$$

Имея полученное равенство, вернемся к формуле (26) и найдем решение уравнения:

$$J(\rho)_1 = J_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \rho^{2k+n}}{(2)^{2k} k! (1+n)(2+n)\dots(k+n)}, \quad (29)$$

где $J_n(\rho)$ – функция первого ряда порядка n .

На рисунке 3 можно увидеть различные порядки функции Бесселя: 1 порядка – зеленая; 10 порядка – синяя; 50 порядка – черная; 200 порядка – красная.

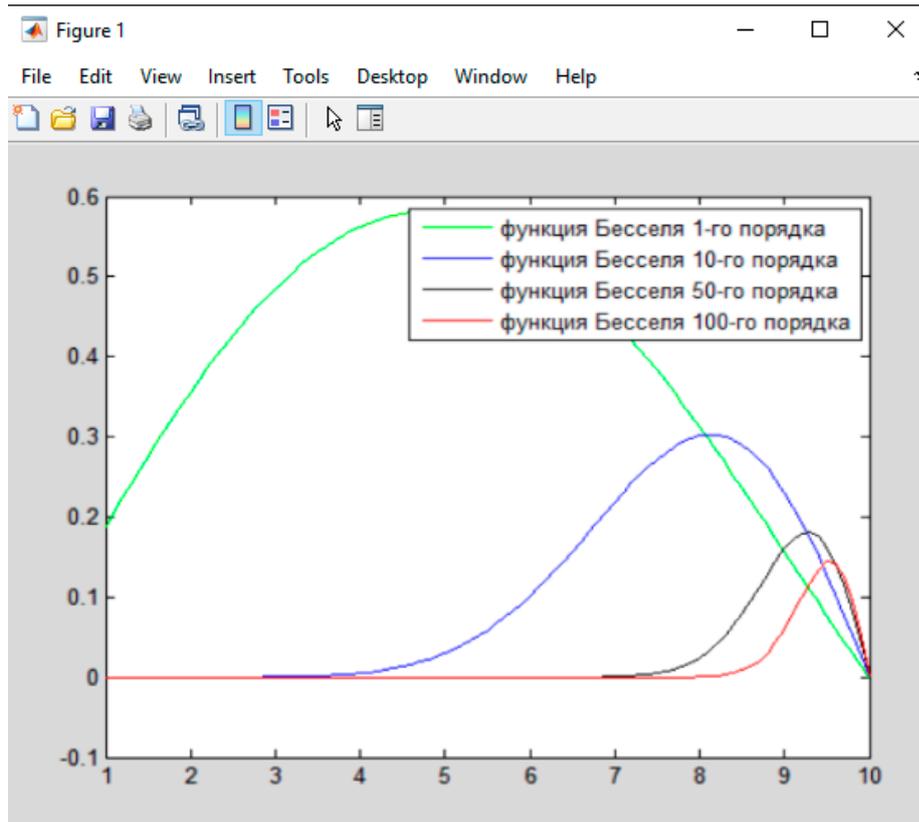


Рисунок 3 – порядки функции Бесселя

Таким образом, функция «почти» = 0 до $b_1^{(n)}$. Это работает в случае с функциями больших порядков. В следствие этого, функция Бесселя неразрывна с наличием мод шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе. Они и есть решение задачи Дирихле, и они отвечают высоким значениям порядка функции n . Вблизи цилиндрической поверхности эти функции соответствуют звуковым волнам.

Глава 2 Практическое исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи

2.1 Выбор специальных параметров, при которых возникает эффект шепчущей галереи при наличии начальных критериев

Как мы уже знаем, функция, представленная ниже, - частное решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

$$U(t, r) = e^{i\omega t} J_n \left(b_k^{(n)} \frac{\rho}{R} \right) e^{in\varphi} \sin \left(\pi m \frac{z}{H} \right).$$

Изучим, в каких случаях моды шепчущей галереи будут доминирующими.

Так, на рисунке 4 мы можем увидеть вид цилиндрического резонатора сверху.

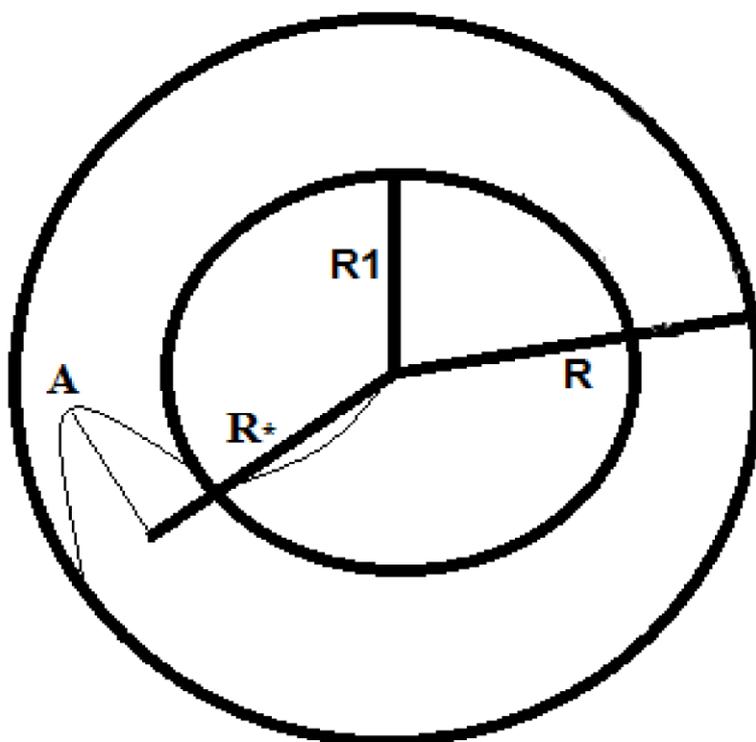


Рисунок 4 – Вид цилиндрического резонатора сверху

Чтобы ознакомиться с рисунком подробнее, будем учитывать, что:

1. R – радиус резонатора.
2. R_1 – радиус области резонатора, где порог слышимости звука выше интенсивности звуковых волн.
3. R_* – расстояние от центра до точки A .
4. A – точка с самой сильной амплитудой. [17]

Никакой звук не будет слышен только в одном месте, он распространяется по всему резонатору. Например, вдоль стен звуки будут гораздо сильнее, чем в центре.

Возьмем из данной области отрезок $R_1 < R$, где уровень звуковых волн меньше порога слышимости.

Обратимся к понятию интенсивности звука – скалярная величина, которая описывает мощность, переносимую звуковой волной в направлении распространения. Она имеет разные значения, которые зависят от типа звука. [6]

Максимальный порог слышимости – 10^{-10} мкВт/см², а болевое ощущение барабанной перепонки – 10^2 мкВт/см². Таким образом, мы получаем данное неравенство:

$$I_{min} < I < I_{max} \quad , \text{ где } I_{min} = 10^{-10} \text{ мкВт/см}^2, I_{max} = 10^2 \text{ мкВт/см}^2.$$

Следует учесть, что человек в центре комнаты не слышит человека, находящегося около стены (или цилиндрической поверхности резонатора). И так как отношение интенсивностей равно 10^{12} , мы применяем $\frac{I_{max}}{I_{min}} = 10^{12}$.

Нами было выбрано расстояние от центра до R_1 к радиусу R . Так, отношение $\rho < R_1$ и при $\rho > R_1$ примерно равно 10^6 , что связано с пропорциональностью интенсивности звука квадрату амплитуды. [10]

Таким образом, из этого получается следующая формула:

$$\left(\frac{U(R_*)}{U(R1)}\right)^2 \geq \frac{I_{max}}{I_{min}}, \quad (30)$$

$$\left(\frac{J_n(R_*)e^{in\varphi} \sin hz}{J_n(R1)e^{in\varphi} \sin hz}\right)^2 \geq \frac{I_{max}}{I_{min}}. \quad (31)$$

Сократим левую часть неравенства и подставим значения в правую:

$$\frac{J_n(q_1^{(n)})}{J_n\left(\frac{R1}{R}b_1^{(n)}\right)} \geq 10^6, \quad (32)$$

где $q_1^{(n)}$ – производная первого нуля функции Бесселя n-го порядка,

$b_1^{(n)}$ – первый нуль функции Бесселя n-го порядка.

Построим рисунок 5, который поможет найти отношение $\frac{R1}{R}$ и выполнить неравенство.

На рисунке 6 представлена часть реализованного проекта.

Нами был установлен радиус резонатора и выбран порядок функции Бесселя – 100.

Далее найдем первый нуль функции 100-го порядка и его производной.

Затем сформируем цикл, перебирающий возможные значения для $\frac{R1}{R}$.

Если данное условие будет выполнено успешно – на экране появится оптимальное отношение R1 к R.

В том случае, если условие не будет выполнено – значение $\frac{R1}{R}$ увеличится на 0.1 и будет проверяться еще раз.

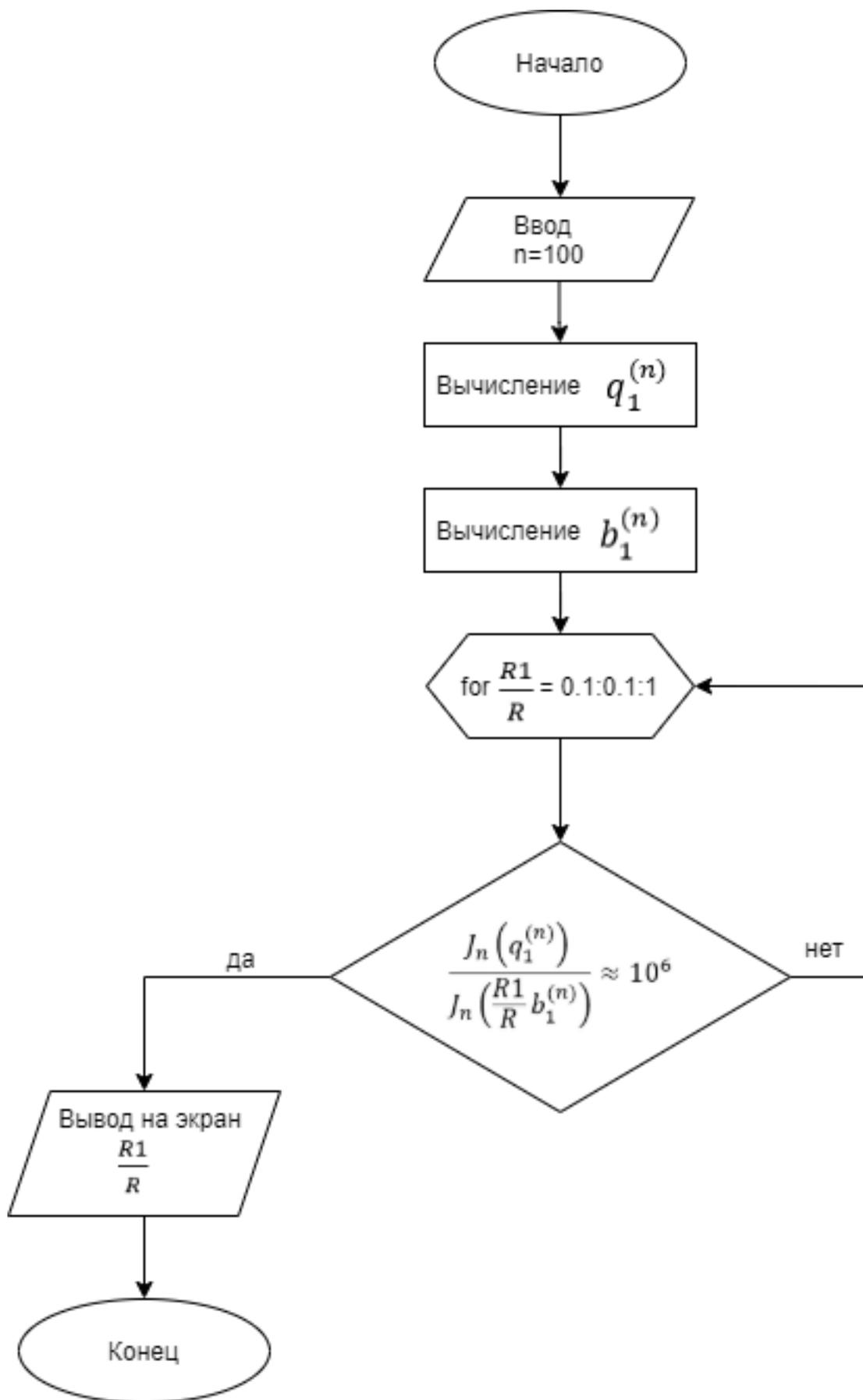


Рисунок 5 – Алгоритм для нахождения оптимального отношения $\frac{R1}{R}$

```

1 - R=10;
2 - b=R1/R;
3 - n=100;
4 - %первый нуль функции Бесселя n-го порядка
5 - j(n,1)=n+1.8557571*n^(1/3)+1.03315*n^(-1/3)-0.00397*n^(-1);
6
7 - %первый нуль функции Бесселя n-го порядка
8 - j1(n,1)=n+0.8086165*n^(1/3)+0.072490*n^(-1/3)-0.05097*n^(-1);
9
10 - for b=0.1:0.1:1
11
12 -     if((bessely(n,j1(v,1))) / (bessely(n,j(v,1)*b)))>10^6
13 -         disp(n);
14 -     end
15
16 - end

```

Рисунок 6 – Фрагмент кода для нахождения оптимального отношения $\frac{R_1}{R}$

Таким образом, с помощью реализации кода мы установили, что отношение R_1 к R должно превышать 0.7, в случае, когда порядок функции Бесселя равен 100. Когда он превышает данное число, эффект также будет наблюдаться, но его пороговое значение будет еще выше.

2.2 Описание решения задачи Коши

Обратимся к задаче Коши – одной из главных задач теории как обыкновенных, так и дифференциальных уравнений с частными производными. Она заключается в поиске решения уравнения, которое будет удовлетворять начальным условиям. [8]

Так, нам следует найти решение следующего волнового уравнения:

$$\Delta U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

в котором установлены такие начальные данные, как:

$$\begin{cases} U(0, r) = \alpha(\rho, \varphi, z), \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} (r) = \beta(\rho, \varphi, z). \end{cases} \quad (33)$$

Чтобы упростить формулу, установим, что $\beta(\rho, \varphi, z) = 0$.

Начальные данные устанавливаются так, чтобы носитель функций находился в компактной области рядом с цилиндрической поверхностью. Она представлена на рисунке 7. Это равнозначно появлению в цилиндрической комнате звуковых волн, издающихся человеком, стоящим у стены. [14]

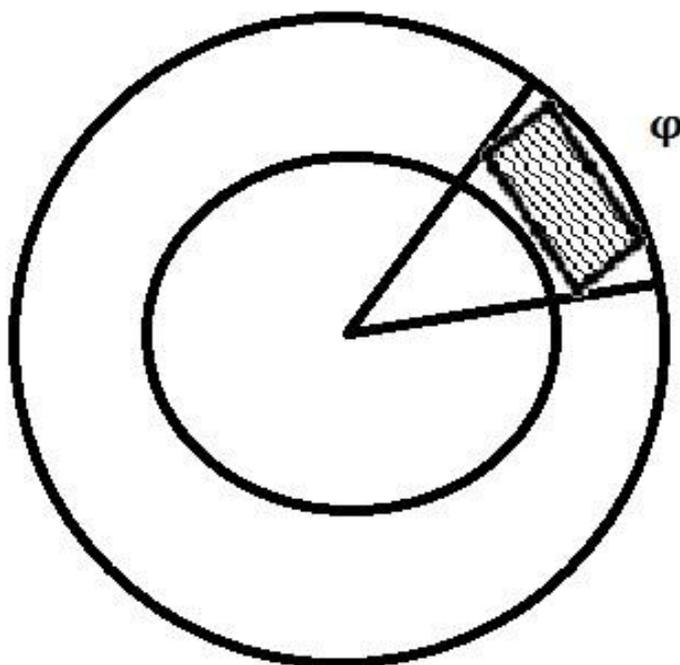


Рисунок 7 – Область вдоль стены резонатора

Соединим носителя функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ в переменную φ .

Соединение начальных условий по переменной z учитывать не будем.

В углу φ , в прямоугольнике, изображенном на рисунке 7 будут возникать волны из-за процесса говорения человека.

Ранее мы установили определенные ограничивающие условия на начальные. Ниже мы видим решение волнового уравнения (1), которое соблюдает эти условия:

$$U(t, r) = \sum C_{n,k,m}^+ [e^{+i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}] U_{n,k,m}(r), \quad (34)$$

где:

– $U_{n,k,m}(r)$ – функции решения задачи Дирихле, которые были найдены ранее;

– $C_{n,k,m}^+$ – константы, которые определяются видом функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$.

Итак, если представить функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ следующим образом, то задача Коши будет решена:

$$\alpha(\rho, \varphi, z) = 2 \sum_{n>100, k=1} [C_{n,k,m}^+] U_{nkm}(\rho, \varphi, z). \quad (35)$$

О том, что носитель функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ по переменной ρ находится в области $\rho > R1$, нам говорит суммирование, которое начинается от индекса $n = 100$.

Далее выявим константы $C_{n,k,m}^+$. Они должны соответствовать предположениям о функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ и создавать эффект шепчущей галереи.

Не забываем об ограничениях звука, упомянутых выше.

Найдем данные коэффициентов с помощью соотношения ортогональности.

$$\int_0^\pi e^{in_1\varphi} e^{-in_2\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, n_1 \neq n_2 \\ 2\pi, n_1 = n_2 \end{cases}, \quad (36)$$

$$\int_0^H e^{in_1\varphi} e^{-in_2\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, n_1 \neq n_2 \\ 2\pi, n_1 = n_2 \end{cases}, \quad (37)$$

$$\left(\int_0^1 t J_\nu(b_{k1}t) J_\nu(b_{k2}t) dt \right) = \begin{cases} 0, k1 \neq k2 \\ \frac{1}{2} [J_{\nu+1}(b_k)]^2, k1 = k2 \end{cases}. \quad (38)$$

Учитывая гипотезу о структуре функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$, получаем:

$$\alpha(\rho, \varphi, z) \propto f(\varphi), \quad (39)$$

где периодическая функция $f(\varphi)$ выглядит следующим образом:

$$f(\varphi) = \begin{cases} f_1(\varphi), -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0, \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi \end{cases}. \quad (40)$$

Обратимся к функции $f_1(\varphi)$:

$$f_1(\varphi) = f_0 e^{iN\varphi}, \quad (41)$$

где N – некоторое целое число.

Итак, для коэффициентов C_n Фурье функции $f(\varphi)$ мы имеем:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{f_0}{2\pi} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} e^{-iN\varphi} e^{-im\varphi} d\varphi = \frac{f_0}{2\pi} \frac{1}{i(N-n)} e^{i(N-n)\varphi} \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = \frac{f_0}{\pi(N-n)} \sin(N-n)\varphi_0, \quad (42)$$

На рисунке 8 представлен график зависимости амплитуды моды C_{nkm} от n . В данной случае мы установили, что $N=100$. По оси O_x откладывается n , а по оси O_y C_{nkm} .

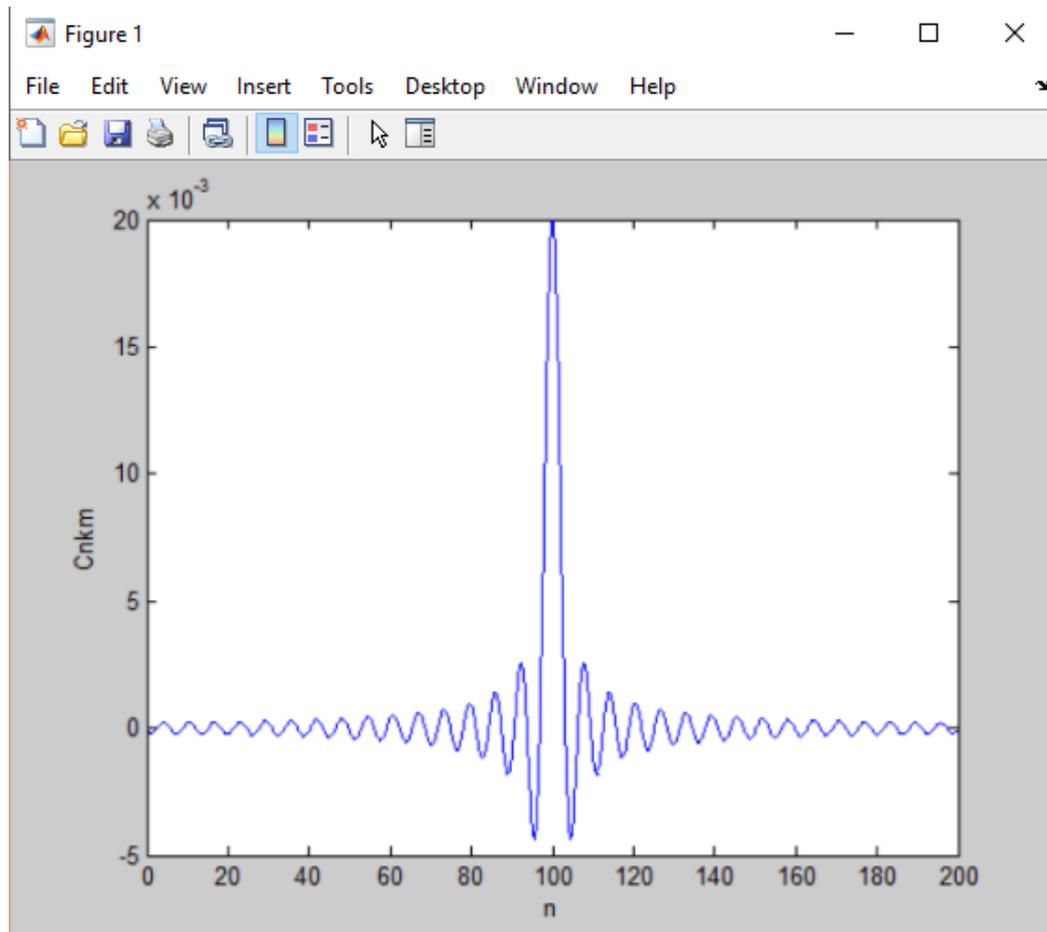


Рисунок 8 – График зависимости C_{nkm} от n

Можно сделать вывод, что имея рассматриваемые начальные условия, коэффициент Фурье будет иметь четкий максимум при заданном $N = 100$ во время разложения в ряд по угловой переменной. Так, номер коэффициента по углу будет соответствовать порядку Бесселевой функции в общем разложении решения по модам. Соответственно, выбранные начальные данные подходят и в разложении (35) мы получим:

$$C_{nkm} \propto \frac{1}{(N-n)} \sin(N-n)\varphi_0, \quad (43).$$

2.3 Выбор подходящей среды программирования

Для решения поставленных задач важно правильно выбрать среду программирования.

В данной работе большое значение имеют стандартные математические функции. Например, квадратный корень и функция Бесселя. Так же, стоит учитывать время выполнения программы.

Наш выбор остановился на пакете прикладных программ MATLAB. Он имеет большое количество возможностей и превосходит своих конкурентов по скорости выполнения задач. Часто используется в математическом моделировании устройств, систем, в динамике, акустике, энергетике и т.д. MATLAB позволяет производить операции с комплексными числами, обработками данных и изображений, анализом сигналов и многое другое.
[15]

Основные причины использования MATLAB:

- математические расчеты;
- возможность создать алгоритмы;
- анализ различных данных;
- визуализация и графика;

– создание приложений.

MATLAB содержит огромную библиотеку математических функций, начиная от элементарных: сумма, синус, косинус до наиболее сложных – функции Бесселя, быстрое преобразование Фурье.

Так же, данная программная среда позволяет построить графики и сделать визуализацию объемных фигур. Важное условие – они должны быть размещены на одном листе и могут быть покрашены каждый в свой цвет. Чтобы построить цилиндрический резонатор нам понадобится 3D эффект.
[9]

Соответственно, в выбранной программной среде есть все, что нам нужно для решения поставленной задачи.

Далее опишем основные понятия и команды, которые мы будем использовать в реализации программы.

На рисунке 9 представлено условие, использование которого поможет запросить выполнение определенных действий.

```
if (условие)
команды;
end
```

Рисунок 9 – Команда для создания условия

Для повторения действия будем использовать другую команду (рисунок 10):

```
for N=start:step:final
команды;
end
```

Рисунок 10 – Команда для создания цикла

Для общего понимания, следует указать значение используемых обозначений:

- N – счетчик цикла;
- start – изначальное условие;
- step – шаг;
- final – конечное значение.

С помощью MATLAB мы можем сделать визуализацию двумерных и трехмерных изображений.

Чтобы построить график в формате 2D мы будем использовать такую команду, как plot(x,y). В данном случае график выйдет в линейном масштабе.

При необходимости построить 3D будем использовать команду plot3(x,y,z). Тогда линии и точки выйдут в трехмерном пространстве. [13]

Рассмотрим так же команды, которые будем использовать для надписей и описания:

- title– заголовки;
- xlabel, ylabel, zlabel –оси;
- text– добавление текста;
- legend – пояснение;
- alpha – прозрачность.

2.4 Построение волнового фронта в цилиндрическом резонаторе

В параграфах выше мы указали, что решениями волнового уравнения (1) будут следующие формулы (10). А уравнение (27) позволяет решить уравнение Гельмгольца (11).

Теперь подставим (27) в (18):

$$U = J_n \left(b_k^{(n)} \frac{\rho}{R} \right) e^{i(n\varphi \pm \omega_{nkm}t)} \sin \left(\pi m \frac{z}{H} \right), \quad (44)$$

Нами было принято решение, что волновой фронт – условное место точек:

$$n\varphi - \omega_{nkm}t + \pi m \frac{z}{H} = const, \quad (45)$$

где ω_{nkm} – частота волны, t – задано.

В связи с тем, что $k^2 + h^2 = \lambda^2 \Rightarrow k = \sqrt{\lambda^2 + h^2}$, где $h = \frac{\pi m}{H}$, что выходит из выражения (21), а $\lambda = \frac{b_k^{(n)}}{R}$ из (23).

Не забывая об этой формуле:

$$k = \frac{\omega}{v}, \quad (46)$$

выведем выражение допустимых частот:

$$\omega_{nkm} = v \sqrt{\left(\frac{b_k^{(n)}}{R}\right)^2 + \frac{\pi^2 m^2}{H^2}}, \quad (47)$$

Итак, есть разные частоты для волнового уравнения, которые соответствуют каждой моде. Они описываются тройкой n, k, m .

Так, сначала данная тройка будет неизменна и волновой фронт построится на одной частоте. Значит скорость волн тоже будет одна.

Создадим цилиндрический резонатор, где будет происходить распределение волнового фронта. Откроем программную среду MatLab и создадим команду `cylinder`. Укажем радиус и количество ребер цилиндра. Не забываем про прозрачность стен.

Рассматриваемый код указан на рисунке 11.

```

1 %10-радиус,30-количество стенок
2 [X,Y,Z]=cylinder(10,30);
3 %выводит на экран сетчатую поверхность для значений массива Z,
4 %определенных на множестве значений массивов X и Y
5 surf(X, Y, Z*10,X)
6 %прозрачность
7 alpha .0
8 %размещение шкалы
9 colorbar
10 %цвет комнаты
11 colormap(white)
12 %подпись осей
13 xlabel('x')
14 ylabel('y')
15 zlabel('z')

```

Рисунок 11 – Код построения резонатора

Итак, у нас есть цилиндрический резонатор с $R=10$ и $H=10$. Он находится в осях x,y,z и представлен на рисунке 12.

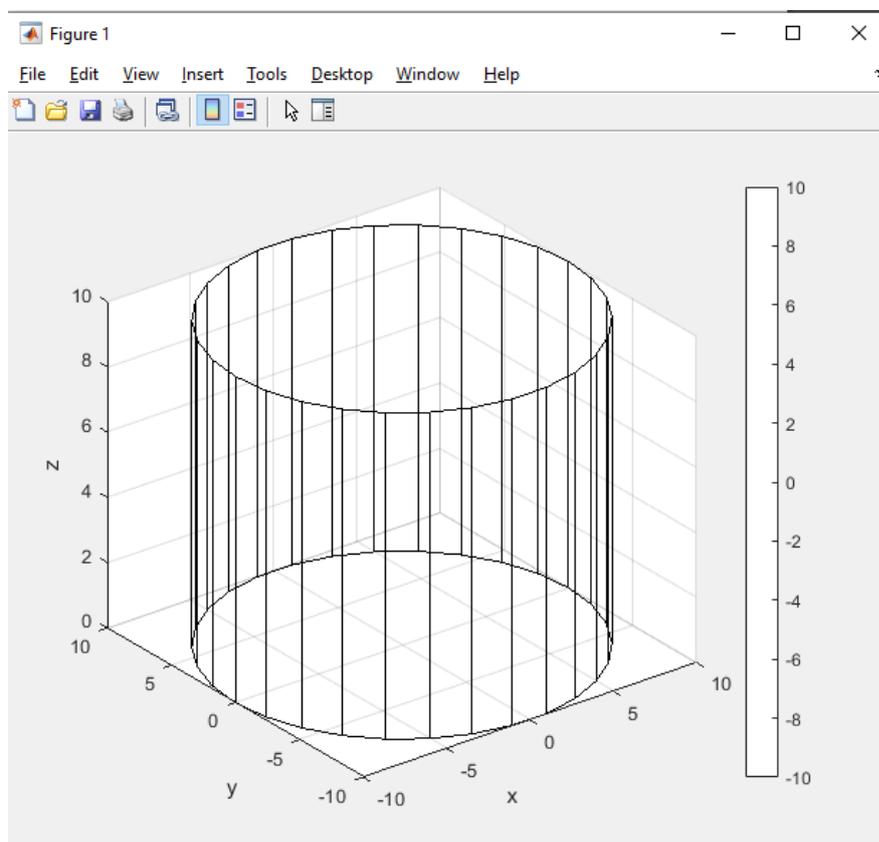


Рисунок 12 – Цилиндрический резонатор

Рисунок 13 показывает распространение волнового фронта единой частоты.

Укажем начальные критерии для H , R , const , v , k , n , m . Запустим цикл отсчета времени, далее цикл распространения волн от $0.7R$ до R и по всей высоте цилиндрического резонатора. Вычисляем φ и выявим цилиндрические координаты X , Y , Z . Для этого воспользуемся следующими формулами:

$$X = \rho \cos\varphi, Y = \rho \sin\varphi, Z = z, \quad (48)$$

Далее построим волновой фронт, который будет распределяться по стенам цилиндрического резонатора.

Ниже, на рисунке 14, можно ознакомиться с кодом для показа волнового фронта.

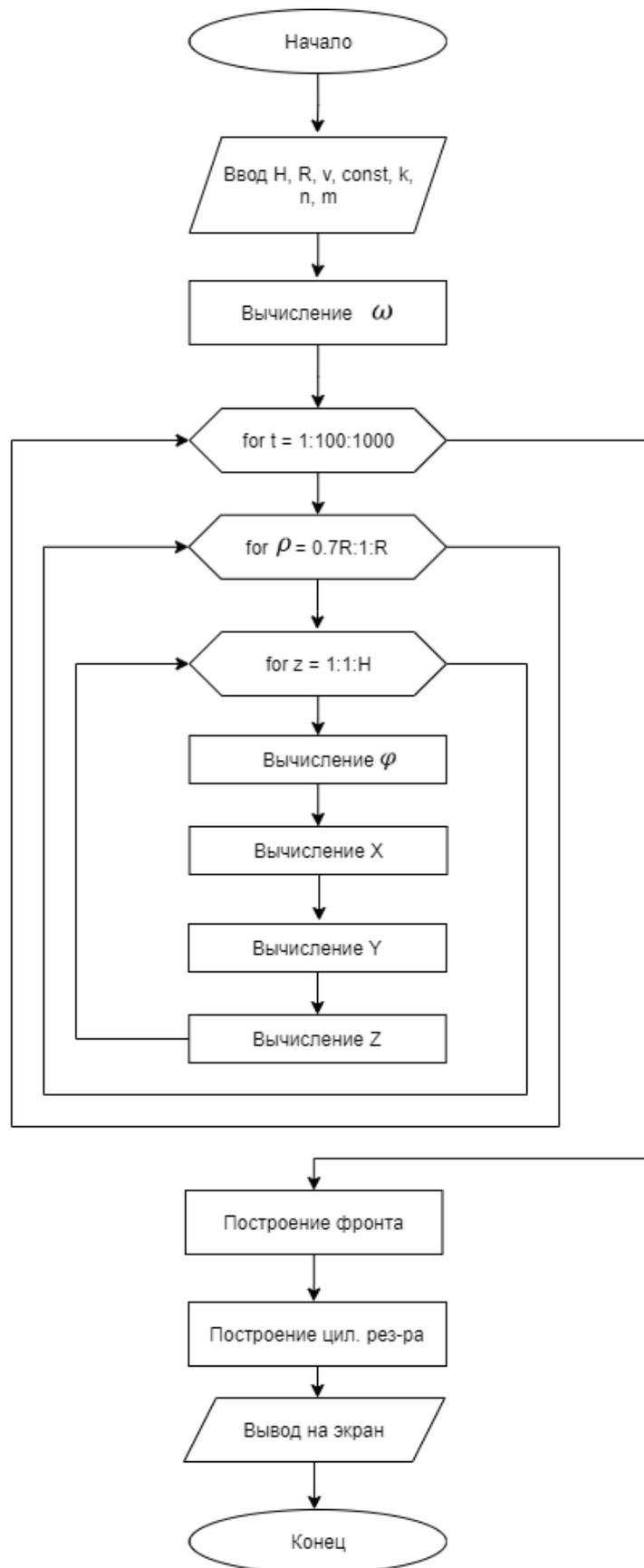


Рисунок 13 – Алгоритм показа волнового фронта единой частоты

```

1 - n=100;
2 - m=1000;
3 - const=150;
4 - H=10;
5 - R=10;
6 - %омега при первом нуле 100-го порядка
7 - v=330;
8 - k=1;
9 - b(n,k)=n+1.8557571*n^(1/3)+1.03315*n^(-1/3)-0.00397*n^(-1)-0.0908*n^(-5/3)+0.043*n^(-7/3);
10 - w=v*sqrt((b(n,k)/R)^2+(pi*pi*m*m)/(H*H));
11 - %цикл по времени
12 - for k=1:10
13 -     ht=1;
14 -     t(k)=k*ht;
15 -     disp('k=');disp(k);
16 -     disp('t=');disp(t(k));
17 -     %цикл по расстоянию
18 -     for j=1:6
19 -         hro=0.5;
20 -         ro(j)=0.7*R+j*hro;
21 -         disp('j=');disp(j);
22 -         disp('ro=');disp(ro(j));
23 -         %цикл по высоте
24 -         for i=1:10
25 -             hz=1;
26 -             z(i)=i*hz;
27 -             %вычисление fi
28 -             fi(i)=const./n+(t(k).*w)./n-(z(i).*m.*pi)./(H.*n);
29 -             X(i)=ro(j)*cosd(fi(i));
30 -             Y(i)=ro(j)*sind(fi(i));
31 -             Z(i)=z(i);
32 -         end

```

Рисунок 14 – Показ волнового фронта единой частоты

После того, как мы указали начальные критерии, мы найдем частоту, позволяющую построить волновой фронт. Запустим циклы и выпишем координаты. Сделав это, мы и получим движение волнового фронта в резонаторе.

Теперь обратим внимание на волновой фронт на рисунке 15 и на вид сверху на рисунке 16.

Из этого можно сделать вывод, что волны осуществляют движение по всему резонатору на расстоянии $0.7R$ до R . Они распределяются по стенам и всей высоте цилиндрического резонатора.

Построим рисунок 17, где будут волновые фронты разных частот.

Введем начальные критерии для H , R , $const$, v , k . Запустим циклы, описанные выше. Укажем значения $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$. Для каждой

частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ найдем значение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Затем определим координаты X, Y, Z с помощью формул (48).

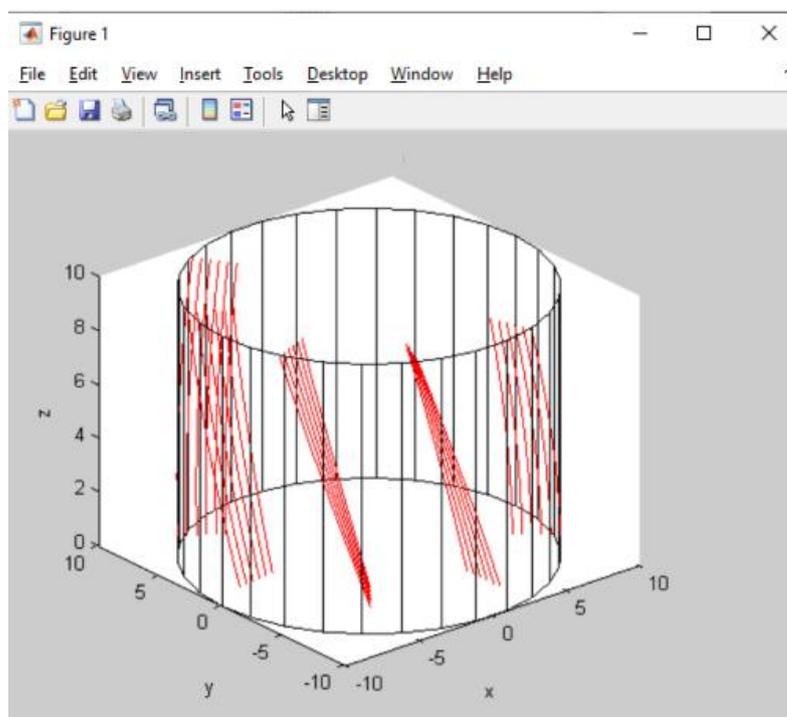


Рисунок 15 – Волновой фронт в резонаторе

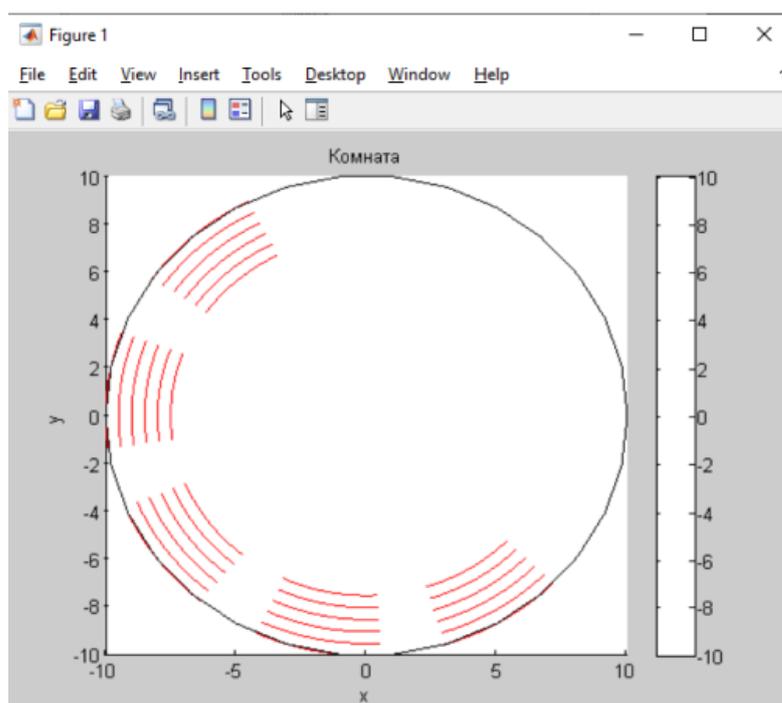


Рисунок 16 – Волновой фронт сверху

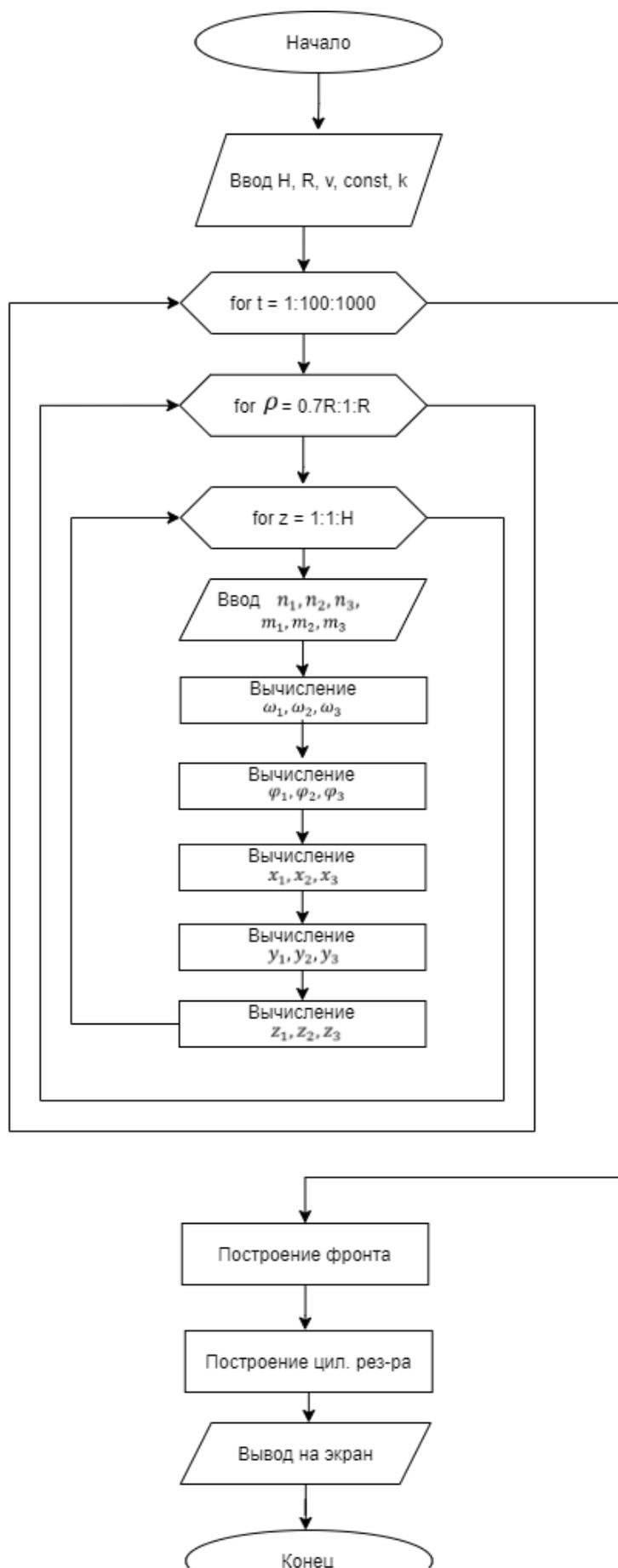


Рисунок 17 – Алгоритм показа волнового фронта различных частот

Введем начальные критерии для H , R , const , v , k . Запустим циклы, описанные выше. Укажем значения $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$. Для каждой частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ найдем значение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Затем определим координаты X, Y, Z с помощью формул (48).

Имея координаты, мы можем построить волновые фронты разных частот. Не забываем, что двигаться они должны одновременно, но цвета иметь разные.

Ознакомимся с кодом на рисунке 18. Нами уже были введены все необходимые данные и выполнены три цикла. Теперь мы вводим различные порядки функции Бесселя, с помощью которых сможем построить волновые фронты различных цветов.

Таким образом, в цилиндрическом резонаторе мы имеем синхронное движение трех волновых фронтов.

Теперь на рисунке 19 мы можем это увидеть, а на рисунке 20 ознакомиться с видом сверху.

```

23 ~~~~~
24 ~~~~~ %порядок функции Бесселя
25 ~~~~~ n1=100;
26 ~~~~~ n2=600;
27 ~~~~~ n3=1100;
28 ~~~~~ m1=500;
29 ~~~~~ m2=1500;
30 ~~~~~ m3=2500;
31 ~~~~~ b1(n1, kw)=n1+1.8557571*n1^(1/3)+1.03315*n1^(-1/3)-0.00397*n1^(-1)-0.0908*n1^(-5/3)+0.043*n1^(-7/3);
32 ~~~~~ w1=v*sqrt((b1(n1, kw)/R)^2+(pi*pi*m1*m1)/(H*H));
33 ~~~~~ b2(n2, kw)=n2+1.8557571*n2^(1/3)+1.03315*n2^(-1/3)-0.00397*n2^(-1)-0.0908*n2^(-5/3)+0.043*n2^(-7/3);
34 ~~~~~ w2=v*sqrt((b2(n2, kw)/R)^2+(pi*pi*m2*m2)/(H*H));
35 ~~~~~ b3(n3, kw)=n3+1.8557571*n3^(1/3)+1.03315*n3^(-1/3)-0.00397*n3^(-1)-0.0908*n3^(-5/3)+0.043*n3^(-7/3);
36 ~~~~~ w3=v*sqrt((b3(n3, kw)/R)^2+(pi*pi*m3*m3)/(H*H));
37 ~~~~~ %частоты
38 ~~~~~ disp('w1='); disp(w1);
39 ~~~~~ disp('w2='); disp(w2);
40 ~~~~~ disp('w3='); disp(w3);
41 ~~~~~ disp('b1='); disp(b1(n1, kw));
42 ~~~~~ disp('b2='); disp(b2(n2, kw));
43 ~~~~~ disp('b3='); disp(b3(n3, kw));
44 ~~~~~ fi1(i)=const./n1+(t(k).*w1)./n1-(z(i).*m1.*pi)/(H.*n1);
45 ~~~~~ X1(i)=ro(j)*cosd(fi1(i));
46 ~~~~~ Y1(i)=ro(j)*sind(fi1(i));
47 ~~~~~ Z1(i)=z(i);
48 ~~~~~ fi2(i)=const./n2+(t(k).*w2)./n2-(z(i).*m2.*pi)/(H.*n2);
49 ~~~~~ X2(i)=ro(j)*cosd(fi2(i));
50 ~~~~~ Y2(i)=ro(j)*sind(fi2(i));
51 ~~~~~ Z2(i)=z(i);
52 ~~~~~ fi3(i)=const./n3+(t(k).*w3)./n3-(z(i).*m3.*pi)/(H.*n3);
53 ~~~~~ X3(i)=ro(j)*cosd(fi3(i));
54 ~~~~~ Y3(i)=ro(j)*sind(fi3(i));
55 ~~~~~ Z3(i)=z(i);
56 ~~~~~ disp('i='); disp(i);
57 ~~~~~ disp('fi1='); disp(fi1(i));
58 ~~~~~ disp('fi2='); disp(fi2(i));
59 ~~~~~ disp('fi3='); disp(fi3(i));
60 ~~~~~ end
61 ~~~~~ hold on;

```

Рисунок 18 – Код показа волнового фронта различных частот

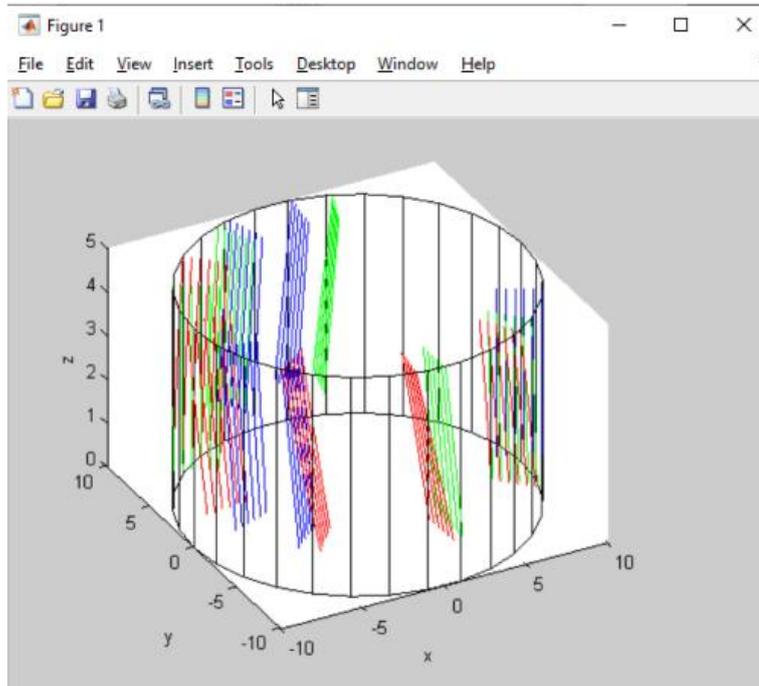


Рисунок 19 – Волновые фронты в цилиндрическом резонаторе

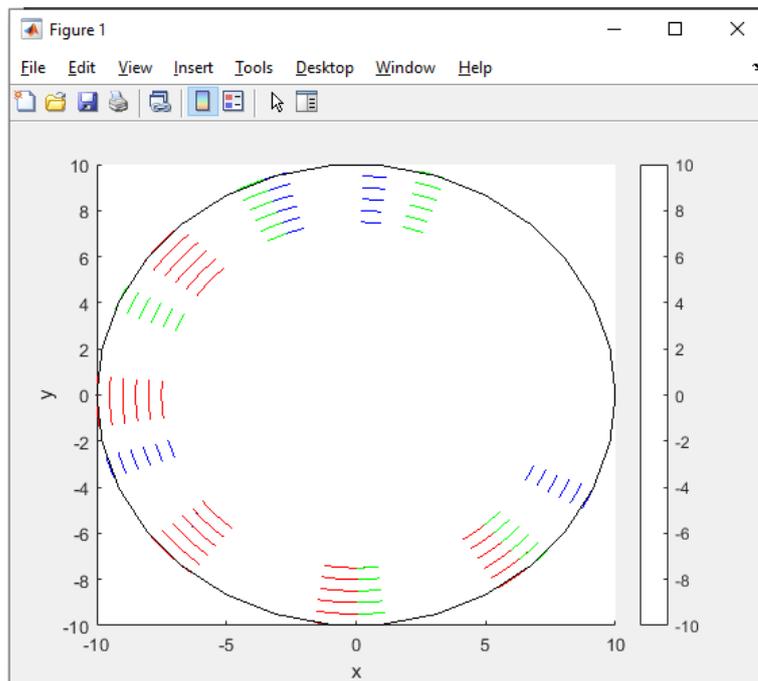


Рисунок 20 – Волновые фронты сверху

Итак, в зависимости от частот, по цилиндрическому резонатору могут распределяться волны шепчущей галереи. Также, все они имеют совершенно разную скорость.

Заключение

Таким образом, при написании выпускной квалификационной работы нами были описаны особенности распространения звуковых волн шепчущей галереи. Они рассматривались в цилиндрическом резонаторе и имели определенными начальными критерии.

Нами было проведено исследование по распространению волн шепчущей галереи в цилиндрических областях при наличии специальных начальных условий, и достигнута поставленная в работе цель.

Также нами были решены следующие задачи:

1. Изучить распространение волн в цилиндрической области.
2. Провести численное исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи.
3. Продемонстрировать проявление эффекта шепчущей галереи в определенной области.

Во время написания работы нам удалось выявить частные решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

Так же, мы отметили, что существуют критерии, говорящие о том, что отдельные моды можно классифицировать как моды шепчущей галереи. Однако, не стоит забывать об особенностях восприятия звуков людьми.

Помимо этого, было выявлено, при каких условиях возникает эффект шепчущей галереи и какие начальные критерии задачи Коши на это влияют.

Для решения описанных выше задач нами было принято решение использовать программную среду MATLAB, которая часто используется в математическом моделировании устройств, систем, в динамике, акустике и других направлениях.

В итоге работы нами была представлена визуализация данного эффекта в цилиндрическом резонаторе.

Список используемых источников

1. Бутко, Я.А. Элементы функционального анализа и методы математической физики: учеб. пособие/ Я.А. Бутко. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана (Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана), 2011. – 68 с.

2. Васильева, М.В. Численное моделирование упругих волн разрывным методом Галеркина в неоднородных средах/ М.В. Васильева, У.С. Гаврильева. – СФВУ.: Вестник северо-восточного федерального университета им. М.К. Аммосова, 2017. – 49 с.

3. Волчкова, Н.П. Различные подходы к доказательству полноты системы функции Бесселя / Н.П. Волчкова, В.В. Волчков. – ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»: Дидактика математики: проблемы и исследования, 2015. – 73 с.

4. Городецкий, М.Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью/ М.Л. Городецкий. – Монография – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.

5. Горюнов, А.Ф. Методы математической физики в примерах и задачах: учеб. пособие / А.Ф. Горюнов. – М. : Физматлит, 2015. – 868 с.

6. Гринченко, В.Т. Основы акустики: учеб. пособие/ В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура. – Киев: Наукова думка, 2007. – 640 с.

7. Дьяконов, В. П. MATLAB: Самоучитель / В. П. Дьяконов. – ДМК Пресс, 2009. – 768 с.

8. Кафтanova, Ю.В. Специальные функции математической физики/ Ю.В. Кафтanova. – «Новое слово». – Харьков, 2009. – 91 с.

9. Киреев, А.П. Интегралы, содержащие функции Бесселя/ А.П. Киреев, В.Н. Степанов. – ОГТУ: Актуальные проблемы преподавания математики в техническом ВУЗе, 2016. – 45 с.

10. Кондратьев, Н. М. Электрооптическое взаимодействие в резонаторах с модами шепчущей галереи и СВЧ модуляторы на его основе/ Н. М. Кондратьев, М. Л. Городецкий. – журнал радиоэлектроники, №11, 2011. – 8 с.

11. Ораевский, А. Н. К теории мод шепчущей галереи шарового слоя/ Д. В. Гузатов, А. Н. Ораевский. – Квантовая электроника, том 33, №4, 2003. – 8 с.

12. Ораевский, А. Н. Волны шепчущей галереи/ А.В. Виноградов, А. Н. Ораевский. – Физика, 2001. – 96 с.

13. Полупроводниковые лазеры: физика и технология/ материалы 3-го симпозиума – Санкт-Петербург, 2012. – 70 с.

14. Поршневу, С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB/ С.В. Поршневу. – СПб.: Лань, 2011. – 727 с.

15. Проемкину, А.С. Расчет параметров связи высокочастотного диэлектрического резонатора с диэлектрическим волноводом/ А.С. Проемкину, В.А. Бажилов. – НГТУ им. Р.Е. Алексеева: Информационные системы и технологии ИСТ, 2018. – 19 с.

16. Прокопенко, Ю.В. Моды «шепчущей галереи» в полусферическом изотропном диэлектрическом резонаторе с идеально проводящей плоской поверхностью/ Ю.В. Прокопенко, Ю.Ф.Филиппов, И.А. Шипилова, В.М. Яковенко. – журнал технической физики, том 76, вып. 2, 2006. – 10 с.

17. Сахненко, Н. К. Установление волн шепчущей галереи в диэлектрическом цилиндре при возбуждении импульсным

источником/ Н. К. Сахненко. – Всеукраинский межведомственный научно – технический сборник. – Харьков: ХНУР, 2008. – 355 с.

18. Сухинин, С. Эффект шепчущей галереи/ С. Сухинин. – журнал «Наука из первых рук», №3, 2006. – 3 с.

19. Тарасевич, Ю. Ю. Использование пакетов Maple, Mathcad и LATEX2 при решении математических задач и подготовке математических и естественно-научных текстов/ Ю.Ю. Тарасевич.– Либроком, 2009. – 136 с.

20. Юшков, Ю.В. Инженерная и компьютерная графика/ Ю.В. Юшков. – Курс лекций. – Красноярск.: СибГТУ, – 2011. – 171 с.

21. Giuseppe Annino, Mario Cassettari, and Massimo Martinelli: Study on planar whispering gallery dielectric.– March 05, 2002.

22. Gorodetsky L., Fomin E.: Geometric optics of whispering gallery modes, 2006//arXiv:physics/0603050.

23. Gorodetsky L., Fomin E.: Geometrical theory of whispering gallery modes, 2005//arXiv:physics/0509226.

24. Matsko A. B., Savchenkov A. A., Ilchenko V. S., Seidel D., and Maleki L.: Opto-mechanics with surface acoustic wave whispering gallery modes, 2009//arXiv:0908.0306[physics.optics].

25. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis. – Germany: University of Frankfurt, 1999. – p. 48.

Приложение А

Программа показа волнового фронта единой частоты

```
1 - n=100;
2 - m=1000;
3 - const=150;
4 - H=10;
5 - R=10;
6 - %омега при первом нуле 100-го порядка
7 - v=330;
8 - k=1;
9 - b(n,k)=n+1.8557571*n^(1/3)+1.03315*n^(-1/3)-0.00397*n^(-1)-0.0908*n^(-5/3)+0.043*n^(-7/3);
10 - w=v*sqrt((b(n,k)/R)^2+(pi*pi*m*m)/(H*H));
11 - %цикл по времени
12 - for k=1:10
13 -     ht=1;
14 -     t(k)=k*ht;
15 -     disp('k=');disp(k);
16 -     disp('t=');disp(t(k));
17 -     %цикл по расстоянию
18 -     for j=1:6
19 -         hro=0.5;
20 -         ro(j)=0.7*R+j*hro;
21 -         disp('j=');disp(j);
22 -         disp('ro=');disp(ro(j));
23 -         %цикл по высоте
24 -         for i=1:10
25 -             hz=1;
26 -             z(i)=i*hz;
27 -             %вычисление fi
28 -             fi(i)=const./n+(t(k).*w)./n-(z(i).*m.*pi)/(H.*n);
29 -             X(i)=ro(j)*cosd(fi(i));
30 -             Y(i)=ro(j)*sind(fi(i));
31 -             Z(i)=z(i);
32 -         end
33 -         hold on;
34 -         plot3(X,Y,Z,'red')
```

Рисунок А.1 – Программа показа волнового фронта единой частоты –
часть один

```
34 - plot3(X,Y,Z,'red')
35 - end
36 - hold on;
37 - hM = plot3(X,Y,Z,'red');
38 - pause(1)
39 - refreshdata(hM)
40 - end
41 - hold on
42 - %10-радиус,30-количество стенок
43 - [X,Y,Z]=cylinder(10,30);
44 - %выводит на экран сетчатую поверхность для значений массива Z, определенных на множестве значений массивов X и Y
45 - surf(X, Y, Z*10,X)
46 - %прозрачность
47 - alpha .0
48 - %размещение шкалы
49 - colorbar
50 - %цвет комнаты
51 - colormap(white)
52 - title('Комната')
53 - %подпись осей
54 - xlabel('x')
55 - ylabel('y')
56 - zlabel('z')
```

Рисунок А.2 - Программа показа волнового фронта единой частоты –
часть два

Приложение Б

Программа показа волнового фронта различных частот

```
1 - const=150;
2 - H=5;
3 - R=10;
4 - v=330;
5 - %kw-первый ноль функции Бесселя
6 - kw=1;
7 - %цикл по времени
8 - for k=1:5
9 - ht=1;
10 - t(k)=k*ht;
11 - %disp('k='); disp(k);
12 - %disp('t='); disp(t(k));
13 - %цикл по расстоянию
14 - for j=1:6
15 - hro=0.5;
16 - ro(j)=0.7*R+j*hro;
17 - %disp('j='); disp(j);
18 - %disp('ro='); disp(ro(j));
19 - %цикл по высоте
20 - for i=1:5
21 - hz=1;
22 - z(i)=i*hz;
23 - %порядок функции Бесселя
24 - n1=100;
25 - n2=600;
26 - n3=1100;
27 - m1=500;
28 - m2=1500;
29 - m3=2500;
30 - b1(n1,kw)=n1+1.8557571*n1^(1/3)+1.03315*n1^(-1/3)-0.00397*n1^(-1)-0.0908*n1^(-5/3)+0.043*n1^(-7/3);
31 - w1=v*sqrt((b1(n1,kw)/R)^2+(pi*pi*m1*m1)/(H*H));
32 - b2(n2,kw)=n2+1.8557571*n2^(1/3)+1.03315*n2^(-1/3)-0.00397*n2^(-1)-0.0908*n2^(-5/3)+0.043*n2^(-7/3);
33 - w2=v*sqrt((b2(n2,kw)/R)^2+(pi*pi*m2*m2)/(H*H));
34 - b3(n3,kw)=n3+1.8557571*n3^(1/3)+1.03315*n3^(-1/3)-0.00397*n3^(-1)-0.0908*n3^(-5/3)+0.043*n3^(-7/3);
```

Рисунок Б.1 - Программа показа волнового фронта различных частот –
часть один

```
34 - b3(n3,kw)=n3+1.8557571*n3^(1/3)+1.03315*n3^(-1/3)-0.00397*n3^(-1)-0.0908*n3^(-5/3)+0.043*n3^(-7/3);
35 - w3=v*sqrt((b3(n3,kw)/R)^2+(pi*pi*m3*m3)/(H*H));
36 - %частоты
37 - disp('w1='); disp(w1);
38 - disp('w2='); disp(w2);
39 - disp('w3='); disp(w3);
40 - disp('b1='); disp(b1(n1,kw));
41 - disp('b2='); disp(b2(n2,kw));
42 - disp('b3='); disp(b3(n3,kw));
43 - fi1(i)=const./n1+(t(k).*w1)./n1-(z(i).*m1.*pi)./(H.*n1);
44 - X1(i)=ro(j)*cosd(fi1(i));
45 - Y1(i)=ro(j)*sind(fi1(i));
46 - Z1(i)=z(i);
47 - fi2(i)=const./n2+(t(k).*w2)./n2-(z(i).*m2.*pi)./(H.*n2);
48 - X2(i)=ro(j)*cosd(fi2(i));
49 - Y2(i)=ro(j)*sind(fi2(i));
50 - Z2(i)=z(i);
51 - fi3(i)=const./n3+(t(k).*w3)./n3-(z(i).*m3.*pi)./(H.*n3);
52 - X3(i)=ro(j)*cosd(fi3(i));
53 - Y3(i)=ro(j)*sind(fi3(i));
54 - Z3(i)=z(i);
55 - disp('i='); disp(i);
56 - disp('fi1='); disp(fi1(i));
57 - disp('fi2='); disp(fi2(i));
58 - disp('fi3='); disp(fi3(i));
59 - end
60 - hold on;
61 - plot3(X1,Y1,Z1,'red')
62 - plot3(X2,Y2,Z2,'green')
63 - plot3(X3,Y3,Z3,'blue')
64 - end
65 - hold on;
66 - hM=plot3(X1,Y1,Z1,'red')
67 - pause(1)
```

Рисунок Б.2 - Программа показа волнового фронта различных частот –
часть два

Продолжение приложения Б

```
67 - pause(1)
68 - refreshdata(hM)
69 - hN=plot3(X2,Y2,Z2,'green')
70 - pause(1)
71 - refreshdata(hN)
72 - hF=plot3(X3,Y3,Z3,'blue')
73 - pause(0.001)
74 - refreshdata(hF)
75 - end
76 - hold on
77 - %10-радиус,30-количество стенок
78 - [X,Y,Z]=cylinder(10,30);
79 - %выводит на экран сетчатую поверхность для значений массива Z, определенных на множестве значений массивов X и Y
80 - surf(X, Y, Z*5,X)
81 - %прозрачность
82 - alpha .0
83 - %размещение шкалы
84 - colorbar
85 - %цвет комнаты
86 - colormap(white)
87 - title('Комната')
88 - %подпись осей
89 - xlabel('x')
90 - ylabel('y')
91 - zlabel('z')
```

Рисунок Б.3 - Программа показа волнового фронта различных частот –
часть три