МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методические приемы обучения решению геометрических задач в старших классах общеобразовательной школы»

Студент И.А. Платонова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования

Важнейшей задачей методики обучения геометрии является формирование умений решения разнообразных типов геометрических задач. Геометрические задачи являются необходимым средством усвоения и закрепления учебного материала. Существенное значение для интеллектуального развития учащихся представляют геометрические задачи на нахождение расстояний и углов в пространстве, навыки их решения, которые необходимы в практической деятельности. Геометрические задачи на нахождение расстояний и углов в пространстве представляют сложный этап обучения геометрии, поэтому, умение решать такие задачи рассматривается как высокий уровень математического развития. Геометрия, как учебная дисциплина, выполняет методическую функцию, направленную на формирование умений доказывать и решать геометрические задачи. Обучение геометрии невозможно представить без доказательства теорем, свойств или признаков. Геометрические задачи на нахождение расстояний и углов в пространстве являются основным методическим компонентом в обучении геометрии, поэтому, главное направление методики обучения решения геометрических задач – найти совокупность методов или подходов к их решению.

Теоретические основы обучения решению геометрических задач разработаны В.А. Гусевым [16], Г.И. Саранцевым [62], И.М. Смирновой [65], Е.В. Потоскуевым [43], [44], [56] и другими учеными.

Проблема обучения решению геометрических задач рассмотрена в ряде диссертационных исследований, в частности ей посвящены диссертации Н.Г. Воробьевой [11], Л.С. Капкаевой[21], С.И. Кийко [22], О.С. Куликовой [25], [26], О.К. Огурцовой [34], И.В. Ульяновой [68]. Остановимся коротко на основных результатах указанных выше исследований.

Так, кандидатская диссертация Н.Г. Воробьевой [11] посвящена формированию познавательной активности учащихся в процессе решения геометрических задач в 6-8 классах. В докторской диссертации Л.С. Капкаевой [21] разработана концепция интеграции алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании и методики её реализации в школьном учебном процессе.

В кандидатской диссертации О.К. Огурцовой [34] основное внимание уделено частным эвристикам, которые автор рассматривает как условие включения учащихся в поисковую деятельность на уроках стереометрии.

Обучение школьников методам решения геометрических задач в контексте укрупнения дидактических единиц раскрывается в диссертации О.К. Огурцовой [34].

Диссертация И.В. Ульяновой [68] посвящена обучению школьников методам решения геометрических задач в контексте укрупнения дидактических единиц.

Под руководством профессора Е.В. Потоскуева выполнены ряд бакалаврских работ и магистерских диссертаций, в которых основное внимание было уделено методике обучения решения задач в углубленном курсе геометрии в старших классах: Ю.Г. Гранкиной [14], Е. В. Ивановой [19], Н.М. Руськиной [61], М. М. Филипченковой [71].

Таким образом, в теории и методике обучения математике как научной области на данный момент накоплен значительный опыт и получены результаты в решении проблемы обучения школьников решению геометрических задач.

Однако, анализ научно-методической литературы, результатов ЕГЭ по математике в части решения геометрических задач свидетельствуют о том, что большинство старшеклассников испытывают затруднения в решении стереометрических задач. Такое положение нельзя объяснить только недостаточным количеством часов, отводимых на изучение геометрии в общеобразовательной школе.

Таким образом, в современной практике возникает *противоречие* между необходимостью обучения старшеклассников умению решать стереометрические задачи и недостаточной сформированностью у них методов и приемов, среди которых наибольшую трудность вызывают векторный и координатный методы, а также эвристические приемы.

Указанное противоречие обусловило следующую **проблему исследования:** какие методические приемы обучения решению геометрических задач будут способствовать овладению обучающимися векторным и координатно-векторным методами на профильном (углубленном) уровне.

Объект исследования: процесс обучения геометрии учащихся 10 - 11 классов общеобразовательной школы (углубленный уровень).

Предмет исследования: методические приемы обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами.

Цель исследования заключается в обосновании методических приемов обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами с иллюстрацией их на модели правильной шестиугольной призмы.

Гипотеза исследования: если выделить основные методические приемы обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами и на её основе разработать систему задач, то она будет способствовать достижению предметных результатов на углубленном уровне.

Поставленная цель привела к необходимости решения следующих **задач**:

1. Определить роль и место геометрических задач в школьном курсе геометрии старших классов.

2. Рассмотреть подходы ученых к векторно-координатному методу решения геометрических задач.

3. Выполнить анализ понятия «методические приемы» обучения решению геометрических задач.

4. Описать эвристические приемы на примере задач на нахождение расстояний и углов в пространстве векторно-координатным методом

5. Разработать программу элективного курса «Правильная призма и ее замечательные свойства» для учащихся математического профиля.

6. Проверить гипотезу исследования экспериментальным путем.

Теоретико-методологическая основа данного исследования: концепции развивающего обучения решению задач, в том числе геометрических, ученых В.А. Гусева [16], [17], В.И. Мишина [28], Ю.М. Колягина [23], [24], Г.И. Саранцева [62], Л.М. Фридмана [72].

Базовыми для настоящего исследования явились УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [49], работы Е.В. Потоскуева [42-53], Э.Г. Готмана [13], Е.И. Лященко [27], И.М. Смирновой [65].

В диссертации применялись различные **методы исследования:**

– теоретические (анализ, систематизация, обобщение);

– эмпирические (наблюдение, анкетирование, эксперимент).

Основные этапы исследования:

*1 этап (*2019-2020 уч.г.): выявление роли и места геометрических задач в школьном курсе математики; характеристика векторно-координатного метода решения задач стереометрии.

*2этап (*2020-2021 уч.г.): анализ различных подходов к понятию приемы, эвристические приемы и методы; разработка элективного курса по теме «Правильная призма и ее замечательные свойства»; подбор и апробация системы задач на нахождение углов и расстояний в пространстве.

*3этап (*2020-2021 уч.г.): корректировка текста диссертации, анализ результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Самарская область, г. о. Тольятти, МБУ «Школа №93».

Научная новизна исследования состоит в том, что в нем проблема выявления методических приемов обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами с иллюстрацией их на модели правильной шестиугольной призмы решается на основе выделения общих и частных эвристических приемов, и их реализации в системах задач.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем раскрыта сущность методики обучения решению задач векторно-координатным методом на основе системы задач и элективного курса. Результаты исследования расширяют представления учителей математики и магистров математического образования о сущности понятия «методические приемы» обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами.

Практическая значимость исследования определяется тем, что:

– представленные в нем образцы решения задач на нахождение расстояний и углов в пространстве векторно-координатным методом с использованием модели правильной шестиугольной призмы могут быть рекомендованы к использованию на практике учителями математики в общеобразовательной школе;

– программа и методические рекомендации по элективному курсу «Правильная призма и ее замечательные свойства» могут быть рекомендованы к использованию при проведении элективных курсов в профильных математических классах.

Достоверность результатов и выводов основывается на их согласованности с ранее полученными результатами других авторов и обеспечиваются практикой работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в постановке и решении задач исследования, разработке элективного курса «Правильная призма и ее замечательные свойства» для учащихся математического профиля, проведении педагогического эксперимента с обучающимися 10 «а» класса и описании его результатов.

Апробация и внедрение результатов проводились на каждом этапе исследования. Они докладывались и обсуждались на всероссийской и международной научных конференциях (Тольятти, ТГУ, 2021; Донецк, Донецкий национальный университет, май 2021 г.) и «Студенческих дней науки в ТГУ» (диплом за 3 место, г. Тольятти,2020, 2021г.г.);

Они также отражены в 3-х публикациях [36], [37], [38].

На защиту выносятся:

1. Методика реализации эвристических приемов при обучении решению геометрических задач в 10-11 классах векторно-координатным методом с использованием модели правильной шестиугольной призмы.

2. Элективный курс «Правильная призма и ее замечательные свойства» для учащихся математического профиля.

Структура диссертации: Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 24 рисунка, 8 таблиц, список используемой литературы (80 источников). Основной текст работы изложен на 71 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения решению геометрических задач в старших классах общеобразовательной школы

1.1 Роль и место геометрических задач в школьном курсе математики и основные этапы их решения

На современном этапе развития школьного образования сложилось новое понимание основной цели учителя. Ученик должен получить способность к саморазвитию: уметь ставить цели, организовать свою деятельность, оценивать результаты своего труда. Актуальными стали личностные качества: ум, воля, чувства и эмоции, интуиция, образное мышление, нестандартные творческие способности.

Е. И. Лященко выражает мнение, что «основным средством, которое используется при обучении математике для формирования знаний, умений и навыков учащихся, являются задачи» [27].

Г. И. Саранцев в свою очередь считает, что «решение математических задач вызывает определенную умственную деятельность, которая обусловлена не только их содержанием, но и последовательностью их решения, количеством однотипных задач, комбинацией с другими задачами» [62].

В. А. Гусев в пособии [16] представил большой материал по истории развития геометрического образования в России и за рубежом; также изложены проблема взаимосвязи психологии и обучения геометрии в школе, изложены новые направления в преподавании геометрического материала.

«Задачи по стереометрии - прекрасные упражнения, способствующие развитию пространственных представлений, умения логически мыслить, способствующие более глубокому усвоению всего школьного курса математики», отмечает автор УМК по геометрии Е.В. Потоскуев [49, с. 167].

Для успешного решения задач по стереометрии необходимо повторять теоремы и формулы планиметрии, так как чаще всего они сводятся к планиметрическим задачам.

Геометрические задачи существенно отличаются от алгебраических задач, так как при их решении практически отсутствуют алгоритмы.

Для успешного восприятия и осмысления задачи, осознанного применения теории на практике, необходимо постоянно анализировать свою деятельность по решению задач, выделять их типы, находить общие подходы, методы, приемы, этапы решения.

По характеру требований в теории и методике обучения математике выделяют только пять различных типов задач:

«1) задачи на нахождение искомых (вычисление);

2) задачи на преобразование;

3) задачи на доказательство;

4) задачи на построение;

5) задачи на объяснение» [23,24,28,62].

При использовании векторно-координатного метода задач можно выделить задачи на вычисление и задачи на доказательство.

Л. М. Фридман и Е. Н. Турецкий отмечают: «Если под процессом решения задач понимать процесс, начинающийся с момента получения задачи до момента полного завершения ее решения, то, очевидно, этот процесс состоит не только из изложения уже найденного решения, а из ряда этапов, одним из которых и является изложение решения» [72, с. 26].

Авторами выявлены такие «этапы решения задач:

- анализ задачи;
- построение модели задачи;
- поиск способа решения (доказательства) задачи;
- осуществление решения (доказательство) задачи;
- проверка решения задачи;
- исследование задачи;
- формулирование ответа задачи» [72].

Важно уметь выделять в задаче условие (что дано?) и требование (что необходимо найти?). Чем точнее условие и требование задачи, тем точнее её формулировка.

Анализ задачи подразумевает, что в задаче выявлены все условия и требования. Для упрощения последующего решения задачи желательно полученные результаты предварительного анализа зафиксировать или оформить. Одним из таких вариантов оформления является схематическая запись задачи.

При выполнении схематической записи геометрической задачи Л. М. Фридман акцентирует внимание на соблюдении целого ряда требований:

1. «Чертёж должен представлять собой схематический рисунок основного объекта задачи (геометрической фигуры, или совокупности фигур, или какой-то части этих фигур) с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых её характеристик.
2. Этот чертёж должен соответствовать задаче. Это означает, что если в задаче в качестве основного объекта назван, например, треугольник и при этом не указан его вид (прямоугольный, равнобедренный и др.), то надо построить какой-либо разносторонний треугольник.
3. При построении чертежа нет необходимости выдерживать строго какой-либо определённый масштаб. Однако желательно соблюдать какие-то пропорции в построении отдельных элементов фигуры.
4. При построении чертежей пространственных фигур необходимо соблюдать все правила черчения этих фигур. Там, где это можно и целесообразно, лучше строить какие-либо плоскостные сечения этих фигур.

Кроме чертежа, для схематической записи геометрических задач используется ещё краткая запись всех условий и требований задачи. В этой краткой записи, пользуясь принятыми на чертеже обозначениями, записываются все характеристики и отношения, указанные в условиях задачи.

Анализ задачи и построение её схематической записи необходимо главным образом для того, чтобы найти способ решения задачи. Этот поиск способа решения и составляет третий этап процесс решения задачи» [72, с. 16, 28].

На четвертом этапе процесса решения задачи излагается решение (доказательство), после которого необходимо убедиться, что решение удовлетворяет всем требования задачи (устно или письменно).

При решении геометрических задач не всегда достаточно проведение только проверки ответа. Часто требуется рассмотреть возможные решения или его отсутствие.

Ответ задачи должен быть сформулирован правильно и четко.

Закономерности поиска решения геометрических задач, соблюдая все этапы решения — важная методическая проблема, решение которой будет способствовать совершенствованию преподавания геометрии.

1.2 Векторно-координатный метод решения задач стереометрии

Векторно-координатный метод решения геометрических задач является одним из основных и важных методов, используемых в школьном курсе математики. Его роль можно охарактеризовать высказыванием А. Д. Александрова: «Через метод координат алгебра и геометрия, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделенными» [6, с. 382].

Раскроем особенности данного метода.

Е. И. Лященко описывает следующими словами суть *координатного метода*: «Это способ определения положения точки (на прямой, на плоскости, в пространстве) с помощью чисел (для декартовой системы координат). Используя координатный метод, алгебраические уравнения можно истолковать в виде геометрических образов (графиков) и, наоборот, искать решение геометрических задач с помощью аналитических формул (уравнений и их систем)» [27, с. 141].

Автор отмечает, что «об осознанности применения координатного метода можно судить, если учащиеся:

– а) дают обоснование применения графического или аналитического языка в зависимости от конкретной ситуации задачи;

– б) умеют наиболее рационально разместить фигуру на координатной плоскости для применения координатного метода при решении математической задачи» [27, с. 145].

В указанном пособии автор также выделяет основные компоненты *векторного метода* решения задач:

1. «Перевод условия задачи на язык векторов, в том числе:

– введение в рассмотрение векторов;

– выбор системы координат (если это необходимо);

– выбор базисных векторов;

– разложение всех введенных векторов по базисным.

2. Составление системы векторных равенств (или одного равенства).

3. Упрощение векторных равенств.

4. Замена векторных равенств алгебраическими уравнениями и их решение.

5. Объяснение геометрического смысла полученного решения этой системы (или одного уравнения)» [27, с.146].

Для успешного применения *векторного метода* при решении геометрических задач ученик должен:

- знать основные понятия: что такое вектор; где начало (конец) вектора, какие векторы называются сонаправленными, противоположно направленными;
- уметь выполнять основные действия с векторами: складывать векторы, используя три основных правила («правило треугольника», «правило

параллелограмма», «правило параллелепипеда»);

- переводить геометрические термины на язык векторов и решение обратной задачи; переводить условия задачи на язык векторов, т.е. составлять систему векторных равенств по условию задачи; выбирать базисные векторы, раскладывать все введенные в рассмотрение векторы по базисным векторам; упрощать систему векторных равенств; заменять векторные равенства алгебраическими.

Таким образом, умение пользоваться векторами требует определённых навыков. Не лишним будет научиться выражать геометрические утверждения векторным языком, а также, верно истолковывать векторные соотношения на языке геометрии. Векторный метод, как и любой другой, применим не всегда. Умение заранее предвидеть, годится ли он для решения конкретной задачи или нет, вырабатывается опытом.

Некоторые метрические задачи удобно решать при помощи координат. Действительно, многогранники очень удобно представлять в прямоугольной системе координат в пространстве таким образом, чтобы в зависимости от условия задачи располагать ту или иную вершину в начале координат, тем самым упрощая вычисления.

Анализ решения геометрических задач с помощью векторно-координатного методов позволяет выделить следующие виды задач:

«1) задача на нахождение расстояния между двумя точками;

2) задача на нахождение координат середины отрезка;

3) задача на вычисление угла между двумя векторами;

4) задача на вычисление угла между прямой и плоскостью;

5) задача на вычисление угла между плоскостями;

6) задача на нахождение расстояния от произвольной точки до плоскости» [52].

Г. И. Саранцев для решения геометрических задач с помощью *метода координат* выделяет следующие этапы:

«1. Выбор системы координат в пространстве.

2. Нахождение координат необходимых точек и векторов, или уравнения кривых и фигур.

3. Решение примера, используя ключевые задачи или формулы данного метода.

4. Переход от аналитических соотношений к метрическим» [62, с. 134].

Векторно-координатный метод решения геометрических задач в отличие от других методов, в большей степени относится к алгоритмическим методам. Как отмечалось выше, этот метод является связующим звеном между предметами «алгебра» и «геометрия». От того, как в курсе алгебры основной школы, учащиеся освоили метод координат, зависит успешность решения геометрических задач в старших классах.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) образования[69] включает в себя требования к предметным результатам освоения курса геометрии на углубленном уровне:

– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;

– сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

– владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

– сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений.

В программе по математике на *углубленном уровне* обучающийся должен:

– «владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;

– иметь представление о скрещивающихся прямых в пространстве и уметь находить угол и расстояние между ними;

– применять теоремы о параллельности прямых и плоскостей в пространстве при решении задач;

– уметь применять перпендикулярности прямой и плоскости при решении задач;

– владеть понятиями ортогональное проектирование, наклонные и их проекции, уметь применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач;

– владеть понятиями расстояние между фигурами в пространстве, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых и уметь применять их при решении задач;

– владеть понятием угол между прямой и плоскостью и уметь применять его при решении задач;

– владеть понятиями двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярные плоскости и уметь применять их при решении задач;

– решать задачи геометрического содержания, в том числе в ситуациях, когда алгоритм решения не следует явно из условия, выполнять необходимые для решения задачи дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

– составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат» [59, с. 9].

Анализ содержания темы «Векторно-координатный метод решения геометрических задач» в различных учебниках из федерального перечня учебников, рекомендованных Министерством Просвещения РФ, представлен в Таблице 1.

Таблица 1 – Анализ темы «Векторно-координатный метод решения геометрических задач»

Авторы учебника	Класс, кол-во часов	Содержания векторно-координатного метода решения стереометрических задач
Александров А.Д., А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [5]	11 класс, Глава 6. Координаты и векторы, 16ч.	1) понятие базиса и разложение вектора по базисным векторам в одномерном, двумерном и трехмерном случаях; 2) вывод уравнения плоскости и формулы расстояния от точки до плоскости через скалярное произведение векторов; 3) выражение в координатах различных геометрических соотношений; 4) отсутствие нахождения угла между прямыми, плоскостями и прямой и плоскостью.
Атанасян Л.С. [8]	10 класс, Глава 4. Векторы в пространстве, 7 ч. 11 класс, Глава 5. Метод координат в пространстве, 15 ч.	1) главенствующим методом решения задач является метод координат; 2) рассматриваются формулы для вычисления углов и расстояний; 3) выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатной форме.
Погорелов А.В. [39]	10 класс, Параграф 4. Декартовы координаты и векторы в пространстве, 15 ч.	1) введение понятия векторного базиса; 2) нахождение объёма параллелепипеда и тетраэдра по заданным координатам вершин многогранников; 3) задание уравнения прямой в пространстве в координатах; 4) нахождение расстояния от точки до плоскости с помощью системы координат; 5) нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, заданными в системе координат.
Потоскуев Е.В., Л.И. Звавич [45]	10 класс, Глава 6. Векторный метод в пространстве, 10 ч. Глава 7. Координатный метод в пространстве, 10 ч.	1) перевод условия геометрической задачи на «векторный язык»; 2) безошибочное выполнение необходимых алгебраических операций над векторами; 3) перевод результата, полученного в векторной форме, на геометрический язык; 4) выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатной форме; использование определителей второго и третьего порядков.

Продолжение таблицы 1

Авторы учебника	Класс, кол-во часов	Содержания векторно-координатного метода решения стереометрических задач
Смирнова И.М., Смирнов В.А. [64]	11 класс, Глава 7. Координаты и векторы, 23 ч.	1) расстояние между точками в пространстве; 2) координаты вектора; 3) скалярное произведение векторов; 4) уравнение плоскости в пространстве; 5) уравнение прямой в пространстве; 6) аналитическое задание пространственных фигур.
Шарыгин И.Ф. [73]	11 класс, Глава 8. Координаты и векторы в пространстве, 6ч.	1) метод координат включает в себя формулу расстояния между двумя точками, уравнения сферы, плоскости, прямой, векторов и их скалярное произведение; 2) нахождения угла между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями вовсе не рассматривается .

Основным учебником математики для математического профиля выбран учебник авторов Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича [45]. Это обусловлено тем, что большое внимание направлено на изучение элементов векторной алгебры и координатного метода в пространстве.

«Дело в том, что векторный и координатный, а также векторно-координатный методы могут быть успешно использованы при решении широкого круга содержательных геометрических задач на параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, нахождение углов и расстояний между ними, вычисление площадей поверхностей и объёмов геометрических фигур. Следует заметить, что векторный метод решения задач иногда оказывается проще «элементарно-геометрического метода».

Кроме того, методы векторной алгебры широко используются при учебе в вузах» [45, с. 5].

Помимо УМК авторы также разработали рабочую программу [49] и методическое пособие для учителей [44].

На изучение учебного материала по геометрии на углубленном уровне отводится 3 часа в неделю (всего 102 часа в 10 классе).

Приведем содержание рассматриваемых тем: «*Векторный метод в пространстве (9 ч)*

– Вектор в пространстве. Единичный и нулевой вектор.

– Противоположные векторы. Единственность отложения от данной точки вектора, равного данному вектору. Коллинеарность двух векторов и ее геометрический смысл. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на число) и их свойства.

– Компланарность трех векторов. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, компланарным с данным вектором. Три некомпланарных вектора. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Векторный базис в пространстве. Разложение вектора и его координаты в данном векторном базисе. Условие коллинеарности двух векторов и компланарности трех векторов в пространстве.

– Угол между двумя векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства. Формулы, связанные со скалярным произведением векторов. Признак перпендикулярности двух векторов. Векторное доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости, теоремы о трех перпендикулярах» [49].

Приведем содержание рассматриваемых тем в программе: «*Координатный метод в пространстве (13ч)*

1. Ортонормированный базис в пространстве. Прямоугольная декартовая система координат в пространстве. Координаты вектора, действия над векторами в координатах. Условие коллинеарности двух векторов в координатах.

2. Скалярное произведение векторов в координатах. Условие перпендикулярности двух векторов в координатах. Проекция вектора на ось в координатах.

3. Декартовы прямоугольные координаты точки. Формулы нахождения: расстояния между двумя точками в координатах; координат точки, делящей отрезок в данном отношении, середины отрезка. Уравнения и неравенства, задающие множества точек в пространстве. Уравнение сферы и неравенство шара. Общее уравнение плоскости в декартовых прямоугольных координатах. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Частные случаи общего уравнения плоскости и их графическая иллюстрация. Уравнение плоскости в отрезках.

4. Угол между двумя плоскостями в координатах. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей в координатах.

5. Уравнения прямой по точке и направляющему вектору; канонические и параметрические уравнения прямой. Уравнения прямой по двум ее точкам. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Угол между двумя прямыми в координатах.

6. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах. Угол между прямой и плоскостью в координатах. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости» [49].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в учебниках Л. С. Атанасяна и Е. В. Потоскуева последовательно рассматриваются, сначала векторный и только затем координатный методы решения геометрических задач.

Теоретический и задачный материал наиболее полно представлен в УМК Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» представлена статья Мугаллимовой С. Р. «Векторный метод в школьном курсе геометрии» [29]. Автор рассматривает основные свойства векторов и приводит классификацию задач и приемов их решения с использованием векторного метода.

Большой практический интерес для учителей математики и старшеклассников представляет учебное пособие Е.В. Потоскуева «Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач» для проведения элективных курсов в 10-11 профильных классов.

Итак, векторно-координатному методу решения геометрических задач уделено особое внимание, так как этот метод является одним из эффективных методов решения многих аффинных и метрических задач стереометрии. В то же время, он вызывает определенные затруднения у обучающихся.

1.3. Эвристические приемы обучения решению геометрических задач

Обучение решению задач, особенно геометрических – сложнейшая методическая проблема, решением которой занимались многие известные ученые: Дж. Пойа [40], Ю. М Колягин [24], Л. М. Фридман [72], Г. И. Саранцев [62] и др.

Согласно Т. А. Ивановой «обучать решению математических задач – значит формировать у учащихся последовательно и целенаправленно умения», начиная с умения «анализировать условие задачи: выделять данные и требования» и завершая умением «решать задачи разными методами» [20 , с. 173-174].

Подробный анализ понятия «метод» представлен в докторской диссертации Л. С. Капкаевой, которая рассматривает это понятие как сложный объект, включающий в себя: 1) цель применения метода; 2) прием, составляющий метод; 3) теоретический базис приема.

«Геометрический метод – способ познавательной деятельности учащихся, основанный на системе геометрических знаний и на геометрических (наглядных) представлениях» [21].

Как известно, большинство геометрических задач имеют различные способы решения, часто они требуют применения нестандартных приемов и методов. Одним из таких методов при обучении математике является эвристический.

Понятие эвристического приема однозначного определения не имеет.

Обратимся к трактовке данного понятия в учебно-методической литературе. Т. А. Иванова и др. определяют *эвристические методы* как «методы, с помощью которых осуществляется накопление фактов и выдвижение гипотез, т.е. методы, способствующие открытиям» [20, с. 13].

С. И. Архангельский акцентирует внимание на интуицию и творчество, как составляющие данного метода: «Эвристические методы – это система принципов и правил, которые задают наиболее вероятностные стратегии и тактики деятельности, стимулируют интуитивное мышление в процессе решения, генерирование новых идей и тем самым значительно повышают эффективность решения определенного класса творческих задач» [7, с. 241].

Г. И. Саранцев раскрывает «общие эвристические приемы» в решении математических задач: «В поиске способа обоснования утверждения и открытии закономерностей используются общие эвристические приемы: аналогии, обобщение, прием элементарных задач, прием рассмотрения предельного случая, прием вспомогательной фигуры и т.п.» [62, с. 107-110].

Л. М. Фридман перечисляет приемы решения математических задач: «сведение задачи к ранее решенной, замена переменных, достраивание, прием дополнения, замена уравнения или неравенства равносильным ему, переформулировка» [72].

Применение эвристического метода при решении задач сопряжено с проблемой организации эвристической деятельности учащихся.

В теории и методике обучения математике учеными предлагаются различные методики и технологии применения эвристических методов при организации эвристической деятельности. Так, например, авторы статьи описывают, как на основе современных компьютерных средств обучения геометрии обучающихся основной школы можно эффективно управлять их эвристической деятельностью [33].

В работах С. Р. Мугаллимовой достаточно полно представлены понятия: «эвристики», «эвристический прием» и «эвристическое предписание». «Эвристики рассматриваются как такие общедидактические приемы, целенаправленное применение которых способствует формированию у учащихся многообразия методов решения задач.

Эвристический прием подразумевает:

1) элемент эвристического метода;

2) вид эвристик, содержащих указание на преобразующее действие, позволяющее найти ключевую идею для решения проблемной задачи и свести ее решение к использованию уже известных алгоритмов» [29-33].

В указанных работах выделены «шесть видов общих эвристических приемов, используемых в процессе решения: акцентуация, варьирование объекта, редукция, трансляция, реверсия и варьирование пространства условий.

1. Прием акцентуации заключается в выделении из совокупности объектов, включенных в задачу, ключевого элемента (группы ключевых элементов) с целью сведения данной проблемы к проблеме более узкой, с меньшей структурой или с меньшим количеством связей. Данный прием предполагает: выделение ключевого объекта (ключевое слово, ключевая величина, ключевая конструкция), выделение свойств, выделение структуры.

2. Прием варьирования объекта заключается в изменении одной или нескольких характеристик исходной совокупности элементов или связей

внутри этой совокупности: комбинирование, трансформация, трансфигурация (замена другим объектом, перемещение, адаптация, оценивание величины).

3. Прием редукции представляет собой динамическое действие, требующее расширения (сужения) совокупности элементов, составляющих проблему, и установления закономерности внутри новой совокупности для перехода к ранее решенной задаче: выделение подзадачи; переход от части к целому; поиск более сильного или более слабого утверждения; аналогия; поиск сходной задачи; рассмотрение частного случая; обобщение.

4. Прием трансляции заключается в поиске инструментария, позволяющего с помощью аналогий перейти к другой проблеме, через применение специфических средств, таких как переформулировка, перевод с одного языка на другой, формализация текста в модель.

Прием реверсии основан на поиске в противоположном направлении, приводящем к заданному условию или же к обнаружению противоречий: доказательство «от противного»; поиск контрпримера; движение от конца к началу; критика очевидных решений» [31, с.71-72]. Автор описывает эвристики как «приемы организации деятельности учащихся по разрешению проблемной ситуации. Исходя из этого систему эвристик, используемых в процессе решения проблемной задачи, Мугаллимова С. Р. представила в виде схемы (рисунок 1)» [30]:

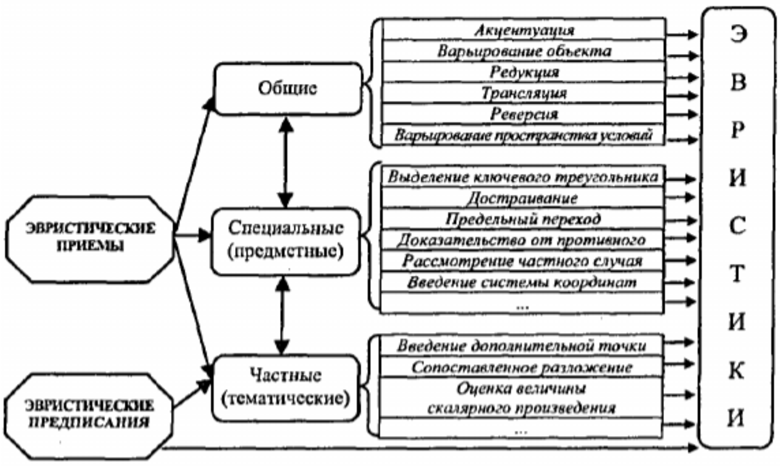

Рисунок 1 – Схема эвристик, предложенная С. Р. Мугаллимовой

Другой подход представлен в работе Т. С. Жуковой, которая обозначила четыре группы эвристик, «отличающиеся количеством действий, входящих в эвристику, степенью определенности и их сложностью: базовые эвристики, специальные эвристики, эвристические приемы, общие эвристики» [18, с. 8].

Проанализировав методики и технологии применения эвристических методов, предлагаемых вышеуказанными авторами, можно выделить следующие этапы методики обучения эвристикам при решении задач векторно-координатным методом:

1) акцентуация;
2) трансляция;
3) варьирование пространства условий;
4) варьирование объекта;
5) редукция;
6) варьирование объекта;
7) трансляция, реверсия.

«В качестве частных эвристик можно выделить:

− эвристики ввода (ввод «ключевых» векторов, выбор единичных векторов, выбор базисных векторов, использование вспомогательных векторов, ввод системы координат),

− эвристики перевода, используемые при переводе текста задачи на векторный язык (выбор коллинеарных векторов, связанных с заданными параллельными прямыми, выбор коллинеарных векторов, связанных с заданными коллинеарными пропорциональными отрезками, рассмотрение направляющего или нормального вектора, рассмотрение скалярного квадрата для нахождения длины отрезка, рассмотрение скалярного произведения для нахождения величины угла),

− эвристики вывода, направленные на составление, преобразование и получение векторных отношений (прием введения дополнительной точки, прием сопоставленного разложения векторов, прием введения единичных векторов, прием оценки величины скалярного произведения векторов, прием алгебраических преобразований). Эвристики вывода, представляют собой частные эвристические приемы, используемые в решении задач векторным методом» [30].

Определенные эвристические приемы можно применять и при решении типовых задач. Это делается с целью помочь учащимся правильно определить условие задачи и на основе этого найти наиболее подходящий способ решения.

При решении различных задач будут использоваться различные частные эвристики и приемы.

Использование эвристического метода и приемов на уроках геометрии в старших классах средней школы способствуют повышению качества обучения только в тех случаях, когда: процесс обучения математике строится и реализуется на основе принципов эвристического обучения; система эвристических задач, разработанная для применения на практике, соответствует видам эвристической деятельности.

Выводы по первой главе

В первой главе были получены следующие результаты:

1. Рассмотрены роль и место геометрических задач в школьном курсе математики. Указано, что на современном этапе развития школьного образования цели обучения должны быть направлены как на получение учащимися способности к саморазвитию (уметь ставить цели, организовывать свою деятельность и т.д.), так и на развитие у них личных качеств (ум, интуиция, образное мышление, творческие способности и т.д.). Многие авторы (Е.И. Лященко, Г.И. Саранцев и др.) сходятся во мнении, что основным средством достижения поставленной цели являются математические задачи. Особое положение отводится геометрическим задачам, а именно

стереометрическим, которые способствуют развитию пространственных представлений и умению логически мыслить.

2. Перечислены типы задач по характеру требований: задачи на нахождение искомых (вычисление), задачи на преобразование, задачи на доказательство, задачи на построение, задачи на объяснение. Выделены этапы решения задач, указанные Л. М. Фридманом и Е. Н. Турецким. Указан ряд требований для схематической записи геометрической задачи (Л. М. Фридман). Также перечислены ключевые задачи, при решении которых применяется векторно-координатный метод (нахождение расстояния между двумя точками, нахождение координат середины отрезка, нахождение угла между двумя векторами и пр.).

3. Раскрыты особенности векторно-координатного метода решения задач стереометрии. Определена сущность координатного метода по Е.И. Лященко. Указаны требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся, необходимые для решения задач векторным методом.

4. Рассмотрены методические приемы обучения решению геометрических задач. Большое внимание уделено одному из таких приемов - эвристическому методу.

Приведены трактовки данного понятия в учебно-методической литературе. Перечислены различные методики и технологии применения эвристических методов при организации эвристической деятельности. Обоснована схема эвристик, предложенная С. Р. Мугаллимовой.

На основе анализа эвристик выделены этапы методики обучения эвристикам при решении задач векторно-координатным методом («акцентуация, трансляция, варьирование пространства условий, варьирование объекта, редукция, варьирование объекта, трансляция, реверсия»).

Глава 2. Реализация методических приемов обучения решению геометрических задач в старших классах общеобразовательной школы векторно-координатным методом с использованием модели правильной шестиугольной призмы

2.1 Эвристические приемы обучения решению задач на нахождение расстояний в пространстве векторно-координатным методом

Роль задач на нахождение расстояний от точки до прямой, задач на нахождение расстояний от точки до плоскости, задач на нахождение расстояний между двумя плоскостями авторы методического пособия определяют так:

«Умение видеть и вычислять различные расстояния, углы между прямыми и плоскостями является фундаментом, опорой для успешного изучения всей метрической стереометрии» [43, с. 120].

Успешное решение учащимися задач на нахождения расстояний в пространстве векторно-координатным методом зависит от постепенного перехода от решения подготовительных задач к основным.

Г. Д. Глейзер отмечает: «Сначала учащиеся должны научиться решать задачи на построение точек в прямоугольной системе координат (7.028, 7.046-7.048), нахождение координат вектора (7.031-7.033) и на изображение многогранников в прямоугольной системе координат (7.035, 7.056, 7.057, 7.035, 7.065).

Также, необходимо научиться решать задачи на составление уравнения плоскости (7.081-7.085, 7.089-7.090) и на составление уравнения прямой (7.141, 7.149-7.152)» [12].

Рассмотрим более подробно решения каждого вида задач на нахождения расстояний.

2.2.1 Расстояние от точки до прямой

В работе Е.В. Потоскуева говорится о том, что «для нахождения расстояний ρ(M; *a*) от точки *M*, не лежащей в плоскости α, до прямой *a,* лежащей в этой плоскости, достаточно провести из точки *M* перпендикуляр *MP* (*P*∈α) наплоскостьα, тогда длина отрезка MP (величина $|MP| = h$) равна расстоянию от точки *M* до плоскости α. При этом, если точка P∈*a,* то расстояние ρ (M; *a*) =$|MP| = h$. Если точка P∉*a,* то из точки *P* проводим в плоскости α перпендикуляр *PK* к прямой *a, K*∈*a.* Тогда ρ (M; *a*) = *M K*=$\sqrt{MP^2 + PK^2}$» [48].

Определение 1. «*Расстоянием от данной точки M до данной прямой a, не проходящей через точку M, является длина перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a* (рисунок 2)*; основание этого перпендикуляра есть ближайшая к M точка прямой a»* [1, с. 87].

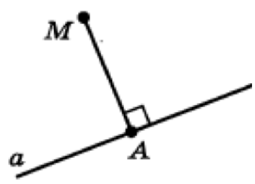

Рисунок 2 – К определению 1

Схожесть в решении рассматриваемой в диссертации проблемы можно отметить и у зарубежных авторов [73] – [79], которые отмечают роль пространственного мышления в умении правильно построить чертеж и вообразить ту или и иную пространственную фигуру.

«Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить ее нижнее (или верхнее) основание - правильный шестиугольник (рисунок 3).

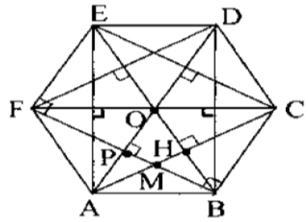

Рисунок 3 - Правильный шестиугольник ABCDEF

Данный рисунок позволяет увидеть свойства правильного шестиугольника такие как: взаимное расположение диагоналей и сторон, их длины и величины углов между ними» [43, с. 39].

При решении этой задачи можно воспользоваться и *координатным методом*. «Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку A перпендикулярно данной прямой m. Затем решить систему, состоящую из этого уравнения и уравнений прямой m. Решением этой системы являются координаты точки K = α $\cap m$. Тогда расстояние между точками A и K равно искомому расстоянию от точки A до прямой *m»* [44, с. 178].

Задача 1. «В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: B($\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\frac{1}{2}$;0), C(0;1;0), D(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\frac{1}{2}$;0), C_1(0;1;1). Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите расстояние: а) от вершины B до прямой A_1C; б) от вершины A до прямой BC_1; B) от вершины F до прямой AD_1» [48, с. 122].

Решение.

а) На (рисунке 4) изобразим расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней A1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 1), B_1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1).

Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку B перпендикулярно прямой A_1C. Так как B$\in$ α и α $\perp$ A_1C, то за вектора нормали плоскости α примем вектор ($\sqrt{3}$; -3; 2). Получим уравнение плоскости α: $\sqrt{3}x$ - 3y + 2z = 0.

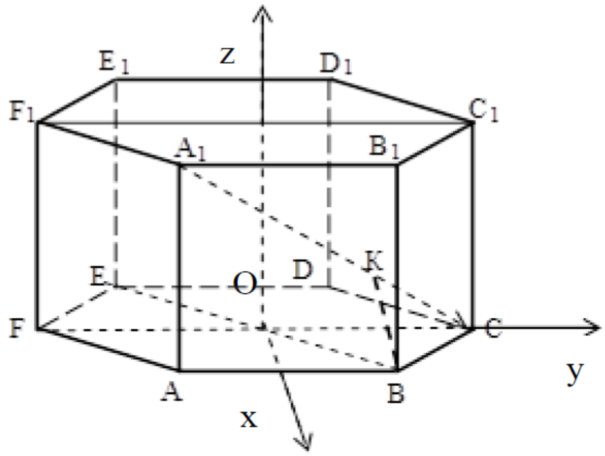

Рисунок 4 – К задаче 1

Далее составим уравнение прямой A_1C. В качестве ее направляющего вектора примем вектор $\overrightarrow{CA}_1$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$; - $\frac{3}{2}$; 1). Для удобства вычислений, вместо вектора $\overrightarrow{CA_1}$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$; -$\frac{3}{2}$; 1), возьмем вектор $\vec{p}$($\sqrt{3}$; -3; 2), такой что $\vec{p} \parallel \overrightarrow{CA_1}$. Тогда параметрические уравнения прямой A_1C имеют вид: $\{x = \sqrt{3}t y = 1 - 3t z = 2t$ ⇒t∈R.

Обозначим: K = A_1C⋂α, тогда BK = ρ(B; A_1C).

Решив следующую систему уравнений, найдем координаты точки K: $\{\sqrt{3}t - 3y + 2z = 0 \; x = \sqrt{3}t \; z = 2t$

⇒3 t - 3(1-3t) +2·2 t = 0 ⇒ t = $\frac{3}{16}$.

Следовательно, точка K имеет координаты: x =$\frac{3\sqrt{3}}{16}$; y = 1-3t =$\frac{7}{16}$;

z = 2t =$\frac{6}{16}$, то есть: K ($\frac{3\sqrt{3}}{16}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{6}{16}$)

Тогда ρ(B; A_1C) = BK =$\sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{7}{16} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{6}{16})^2}$ =$\frac{\sqrt{112}}{16} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Ответ: $\rho(\text{B};\ A1C) = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Задача 2. «В правильной шестиугольной призме $A…F1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой $D1F1$» [65, с. 8].

Решение.

Так как прямая $D1F1$ перпендикулярна плоскости $AFF1$ (рисунок 5),

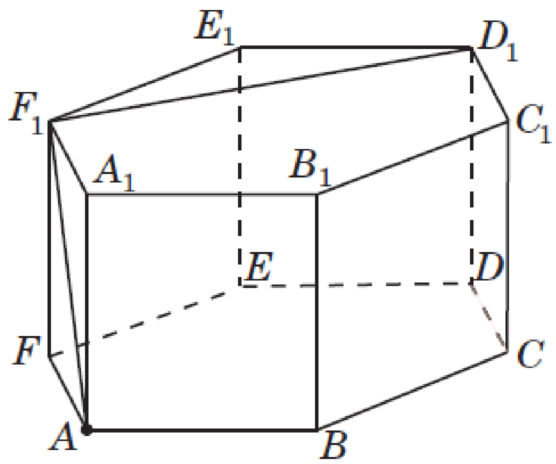

Рисунок 5 – К задаче 2

то отрезок $AF1$ будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую$D1F1$. Его длина равна $\sqrt{2}$.

Ответ.$\sqrt{2}$.

2.2.2. Расстояния от точки до плоскости

Определение 2. « *Расстояние от точки М до плоскости α равно длине перпендикуляра МК (К ∈α), проведенного из точки М на плоскость α*» [15, с. 298].

Расстояние от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости β: $Ax + By + Cz + D= 0$ находится по формуле:

$$\rho(M;\beta) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (1)$$

Задача 3. «В системе координат $Oxyz$ расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1.

Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0), C(0; 1; 0), D($-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0), C_1(0; 1; 1). Постройте эту призму и векторно-координатным методом найдите расстояние: а) от вершины B до плоскости D_1AC; б) от вершины B до плоскости AB_1C; в) от вершины E до плоскости B_1FD» [56, с. 97]

Решение.

а) Указание: пусть α = (D_1AC). T = BE ∩ AC. BT : TE = 1:3 ⇒ρ(B; α) = (1/3)ρ(E; α). На (рисунке 6) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней A ($\frac{\sqrt{3}}{2}$;$-\frac{1}{2}$; 0), D_1($-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1).

Требуется найти расстояние от точки B до плоскости (D_1AC) = α, то есть ρ(B; α).

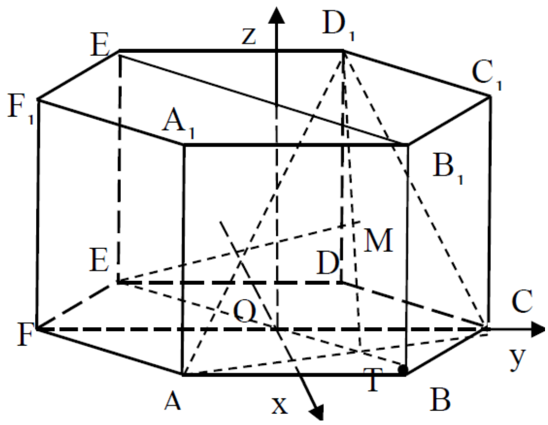

Рисунок 6 – К задаче 3

Пусть уравнение плоскости α имеет вид: ax+by+cz+d=0. Точки D1($-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1), A ($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0) и C (0; 1; 0) принадлежат данной плоскости. Тогда

$$\{\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+c+d=0, \frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+0\cdot c+d=0, 0\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+d=0 \leftrightarrow \{\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+c+d=0, \frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0, b+d=0 \leftrightarrow$$

$$\{c+2d=0, \frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0, b=-d \leftrightarrow \{c=-2d, a=-\sqrt{3}d, b=-d$$

Пологая d = -1, получаем a = , b = 1, c = 2. Следовательно, получаем уравнение плоскости α: x+y+2z-1=0.

Теперь находим искомое расстояние по формуле (1): ρ(B; α) = $\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 0-1\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2+2^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ: ρ(B; (D_1AC))=$\frac{\sqrt{2}}{4}$

Задача 4. «В правильной шестиугольной призме *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *A* до плоскости *BFE*1» [66, с. 8].

Первое решение. Пусть *O* и *O*1—центры оснований призмы (рисунок 7).

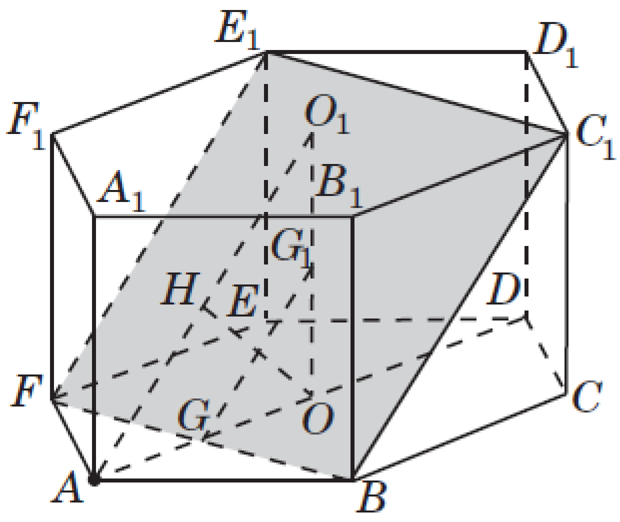

Рисунок 7 – К первому решению задачи 4

ПрямаяAO1 параллельна плоскости *BFE*1 и, следовательно, расстояние от точки *A* до плоскости *BFE*1 равно расстоянию от прямой *AO*1 до плоскости *BFE*1. Плоскость *AOO*1 перпендикулярна плоскости *BFE*1 и, следовательно, расстояние от прямой *AO*1 до плоскости *BFE*1 равно расстоянию от прямой *AO*1 до линии пересечения *GG*1 плоскостей *AOO*1 и *BFE*1. Треугольник *AOO*1 прямоугольный, *AO* = *OO*1 = 1,*GG*1—его средняя линия. Следовательно, расстояние между прямыми*AO*1 и *GG*1 равно половине высоты *OH* треугольника *AOO*1, т. е. равно $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ *.* $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Второе решение (геометрическое) может быть предложено учащимся для самостоятельного поиска и сравнения с векторным решением.

Указание: Пусть *G*—точка пересечения прямых *AD* и *BF* (рисунок 8).

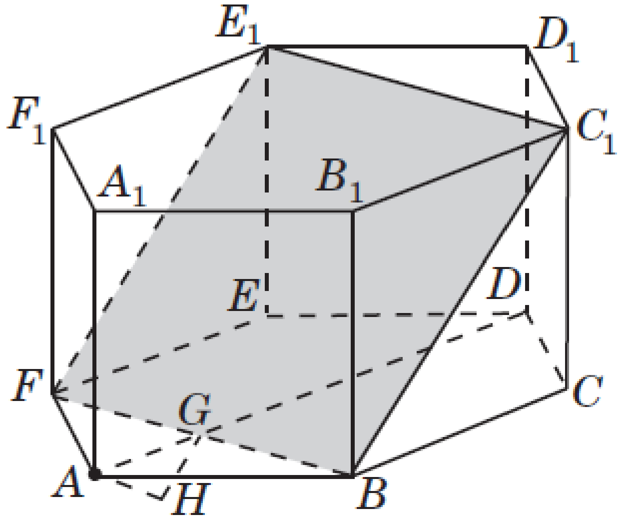

Рисунок 8 – Ко второму решению задачи 4

2.2.3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Определение 3. «*Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра*» [67, с. 212].

А. А. Прокофьев считает, что для «решения задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми можно выделить несколько подходов: метод построения общего перпендикуляра, метод параллельных прямой и плоскости, метод параллельных плоскостей, метод ортогонального проектирования»[60].

«Задачи данного вида можно свести к задаче о вычислении расстояния от точки до плоскости, поэтому можно применить формулу расстояния от точки до плоскости, применяя координатный метод» [7, с. 173].

Задача 5. «В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0), C(0; 1; 0), D(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0), C1(0; 1; 1). Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите расстояние: а) между прямыми A_1F и AB_1; б) C_1D и B_1C; в) BE_1 и F_1E» [57, с. 31]

Решение:

а) Указание: воспользуйтесь **задачей 3**б).

На (рисунке 9) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней A_1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 1), B_1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1), A($\frac{\sqrt{3}}{2}$;$-\frac{1}{2}$; 0),

F(0; -1; 0).

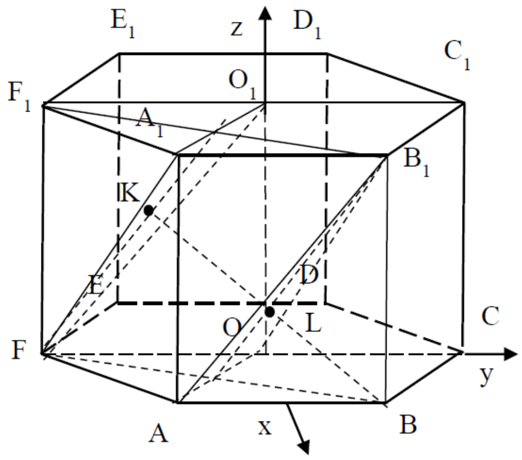

Рисунок 9 – К задаче 5

Задача может быть предложена для решения либо под руководством учителя у доски (фронтальная работа), либо для работы в группах.

При решении этой задачи, учащиеся используют ранее составленные схемы и эвристические приемы.

В конечном итоге, в ходе решения, получают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{FA_1}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{p}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{p} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a + b + 2c = 0, \\ 0 \cdot a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + b + 2c = 0, \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a + b + 2c = 0, \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a + c = 0, \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\sqrt{3}a, \\ b = \sqrt{3}a. \end{cases}$$

Полагая a $=\sqrt{3}$, получаем b = 3, c = -3.

Значит вектор $\vec{n}$ имеет координаты $\vec{n}$ ($\sqrt{3}$; 3; -3).

Тогда $\alpha(F; \vec{n})$: $\sqrt{3}$ (x-0)+3(y+1)-3(z-0)=0 $\Rightarrow \alpha$ (F; $\vec{n}$): $\sqrt{3}$x+3y-3z+3=0.

Теперь расстояние :

$$\rho(A_1F;AB_1) = \rho(B_1; \alpha) =$$

$$= \frac{\left|\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 + 3\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 + 3\right|}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Ответ: $\rho(A_1F;AB_1)= \frac{\sqrt{21}}{7}$

Итак, можно сделать вывод, что решение каждого типа задач на нахождение расстояний в пространстве с использованием векторно-координатного метода сводится к выделению общего алгоритма решения.

2.2 Эвристические приемы обучения решению задач на вычисление углов в пространстве векторно-координатным методом

«Одним из видов задач по стереометрии являются задачи на нахождение различных углов геометрических фигур.

При решении таких задач учащиеся сталкиваются с рядом трудностей связанных с построением на чертеже искомого угла и доказательством того, что именно этот угол является искомым.

Преимущество решения такой задачи векторно-координатного методом заключается в том, что построение искомого угла не требуется» [54, с 102].

2.3.1. Угол между двумя прямыми

Определение 4. «*За величину угла между двумя скрещивающимися прямыми a и b принимается величина угла между параллельными им пересекающимися в некоторой точке M прямыми* a_1 *и* $b_1 \angle(a;b) = \angle(a_1;b_1) = \varphi$, *где* $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $a_1 \cap b_1 = M$. (рисунок 10)» [15, с. 96].

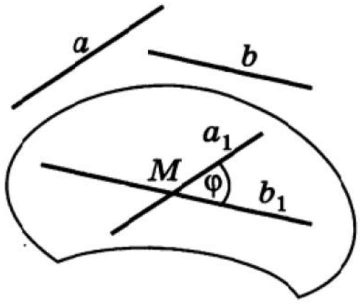

Рисунок 10 – К определению 4

Прямые a и b, имеющие направляющие векторы $\overrightarrow{p_1}$ $(a_1;a_2;a_3)$ и $\overrightarrow{p_2}$ $(b_1;b_2;b_3)$ и проходящие соответственно через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, задаются параметрическими уравнениями соответственно:

(a): $x = x_1 + a_1t$, $y = y_1 + a_2t$, $z = z_1 + a_3t$, $t\ R$;

(b): $x = x_2 + b_1t$, $y = y_2 + b_2t$, $z = z_2 + b_3t$, $t\ R$.

Если $\varphi = \angle(a, b)$, $\psi = \angle(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$, то либо $\varphi = \psi$, либо $\varphi + \psi = 180°$ (рисунок 11).

Учитывая, что $\cos\varphi \geq 0$ при $\varphi \in [0°; 90°]$, получаем $\cos\varphi = |\cos\psi|$.

Это означает, что косинус угла между прямыми может быть найден с помощью формулы: $\cos\varphi = |\cos\psi| = \frac{|\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2}|}{|\overrightarrow{p_1}| \cdot |\overrightarrow{p_2}|}$ или в координатном виде [15, с. 99]:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad (2)$$

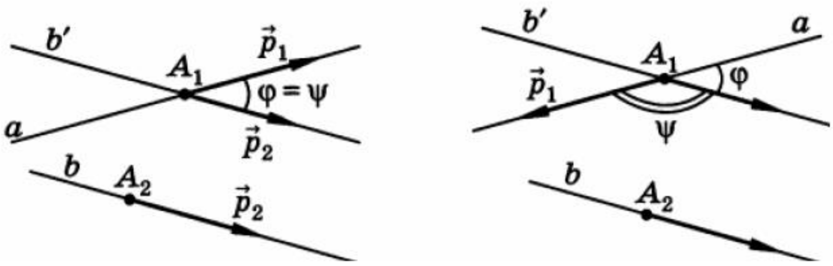

Рисунок 11 – Угол между двумя прямыми в пространстве

Задача 6. «В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины A, B_1, F, F_1 имеют координаты: A($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0), B_1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1), F(0; 1; 0), F_1(0; 1; 1). Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите величину угла между прямыми A_1B и B_1F» [56, с. 92].

Решение. На **(**рисунке 12**)** изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней точки A1, B, B1, F имеют следующие координаты: A1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 1), B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0), B1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1), F(0; 1; 0).

Обозначим: φ т= (A_1B;B_1F). Направляющим вектором прямой A_1B будем считать вектор $\overrightarrow{A_1B}$ (0;1; 1), а направляющим вектором прямой B_1F –

Вектор $\overrightarrow{B_1F}$(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3}{2}$; -1)

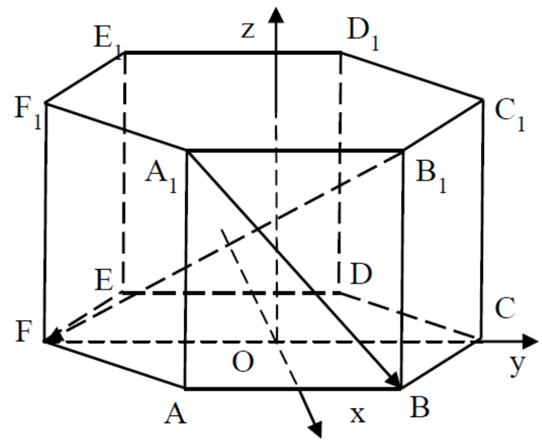

Рисунок 12 – К задаче 6

Тогда:

$$cos\ \varphi = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{B_1F}|}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\overrightarrow{B_1F}|} = \frac{\left|0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \cdot (-\frac{3}{2}) + (-1) \cdot (-1)\right|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{3}{2})^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Получаем: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$.

***Ответ*:** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Таким образом, для того чтобы с помощью векторно-координатного методом найти величину угла между двумя прямыми, следует сперва определить координаты направляющих векторов этих прямых, после чего, используя формулу (2), найти искомую величину угла.

2.3.2 Угол между прямой и плоскостью.

***Определение* 5.** «*Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на эту плоскость* (рисунок 13)» [5, с. 126].

Угол между прямой l: $\{x = x_0 + ta y = y_0 + tb z = z_0 + tc$ и плоскостью $\alpha{:}A\ x + B\ y + C\ z + D = 0$ можно найти, используя угол между направляющим вектором $\vec{p}$ $(a;b;c)$ прямой l и вектором $\vec{n}$ $(A;B;C)$ нормали плоскости α (рисунок 14) по формуле:

$$\text{Sin}\ \angle\ (l;\alpha) = \sin\varphi = \cos\psi = |\ \cos\ (\vec{p};\ \vec{n})| = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3)$$

Задача 7. «В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины A, B_1, F, F_1 имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1)$, F(0; 1; 0), F_1(0; 1; 1). Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите величину угла между прямыми A_1B и плоскостью BB_1C» [5, с. 138].

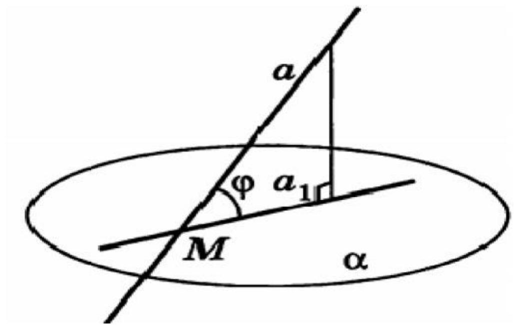

Рисунок 13 – К определению 5

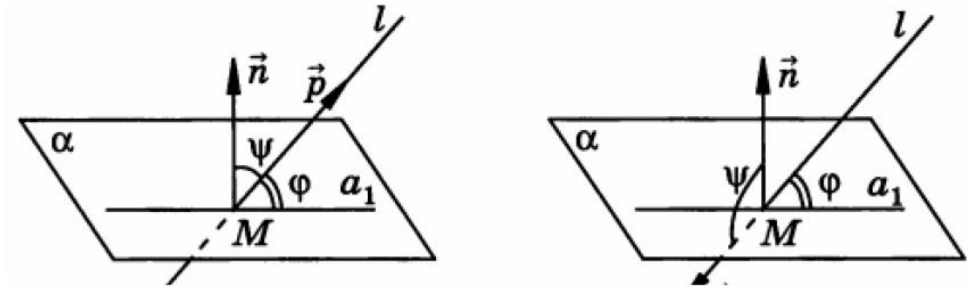

Рисунок 14 – Угол между прямой и плоскостью в пространстве

Решение. На (рисунке 15) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней точки A_1, B, B_1, C имеют следующие координаты: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, C(0; 1;0).

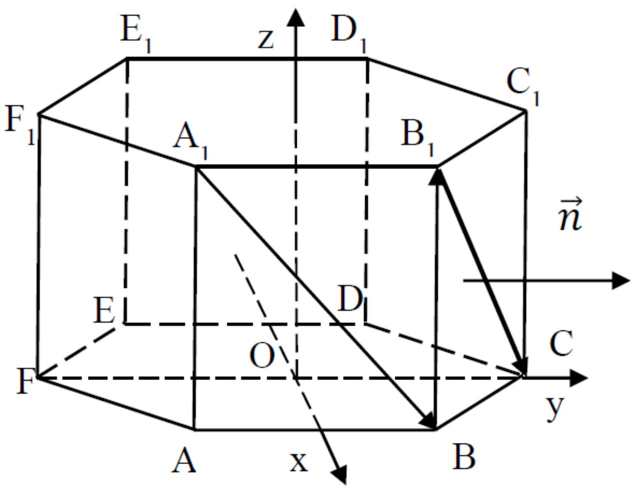

Рисунок 15 – К задаче 7

Обозначим: φ = (A_1B; (BB_1C)). Направляющим вектором прямой A_1B будем считать вектор $\overrightarrow{A_1B}$ (0;1; -1). Координаты вектора$\vec{n}$ (*a; b; c*) нормали плоскости β=(BB1C) найдем из условия его перпендикулярности векторам $\overrightarrow{BB_1}$ (0; 0; 1) и $\overrightarrow{B_1C}$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -1\ )$.

Тогда:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BB_1}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{B_1C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}b \end{cases}.$$

Полагая b=3, получим $a = \sqrt{3}$, c = 0 . Тогда вектор нормали плоскости β имеет координаты $\vec{n}$ ($\sqrt{3}$; 3; 0). Уравнение плоскости β*,* проходящей через точку C(0;1;0) перпендикулярно вектору$\vec{n}$ ($\sqrt{3}$;3; 0), примет вид:

$\sqrt{3}$ (x-0)+3(y-1)+0(z-0)=0 $\sqrt{3}$x+3y-3=0.

Теперь находим искомую величину угла φ*:*

$$\sin\varphi = |\cos\angle((\overrightarrow{A_1B});\vec{n})| = \frac{|0\cdot(\sqrt{3})+1\cdot3+(-1)\cdot0|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+0^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ откуда:}$$

$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. ***Ответ*:** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Задача 8. «В правильной шестиугольной призме *A…F*1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой *AF* и плоскостью *BCC*1» [66, с. 6].

Решение. Пусть *O* - центр нижнего основания призмы (рисунок 16).

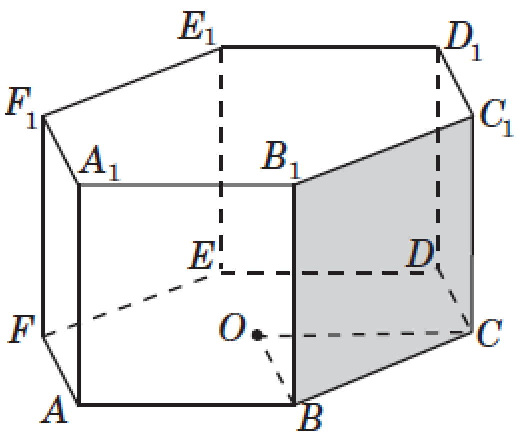

Рисунок 16 – К задаче 8

Прямая BO параллельна AF. Так как плоскости ABC и $BCC1$ перпендикулярны, то искомым углом будет угол OBC. Так как треугольник OBC равносторонний, то этот угол будет равен 60°.

Ответ.60°.

Задача 9. «В правильной шестиугольной призме $A…F1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой $CC1$ и плоскостью $BDE1$» [66, с. 6].

Решение.

Так как прямые$BB1$ и $CC1$ параллельны (рисунок 17),

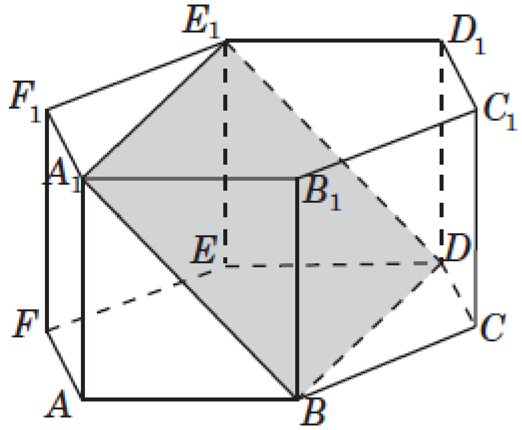

Рисунок 17 – К задаче 9

то искомый угол будет равен углу между прямой $BB1$ и плоскостью $BDE1$. Прямая BD, через которую проходит плоскость $BDE1$, перпендикулярна плоскости $ABB1$ и, значит, плоскость $BDE1$ перпендикулярна плоскости $ABB1$. Следовательно, искомый угол будет равен углу $A1BB1$, т. е. равен 45°.

Ответ. 45°.

Таким образом, чтобы с помощью векторно-координатного метода найти величину угла между данными прямой и плоскостью, сперва необходимо определить координаты направляющего вектора этой прямой и вектора нормали данной плоскости, после чего по формуле (3) вычислить синус искомого угла.

2.3.3. Угол между плоскостями.

«Угол между плоскостями α и β , заданными уравнениями $A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1= 0$ соответственно и $A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2= 0$, удобно связать между их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}$ $(a_1;b_1;c_1)$ и $\overrightarrow{n_2}$ $(a_2;b_2;c_2)$ » (рисунок 18) [9, с.165].

Именно:

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = |\cos\angle(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})| = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2} \cdot \sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}} \qquad (4)$$

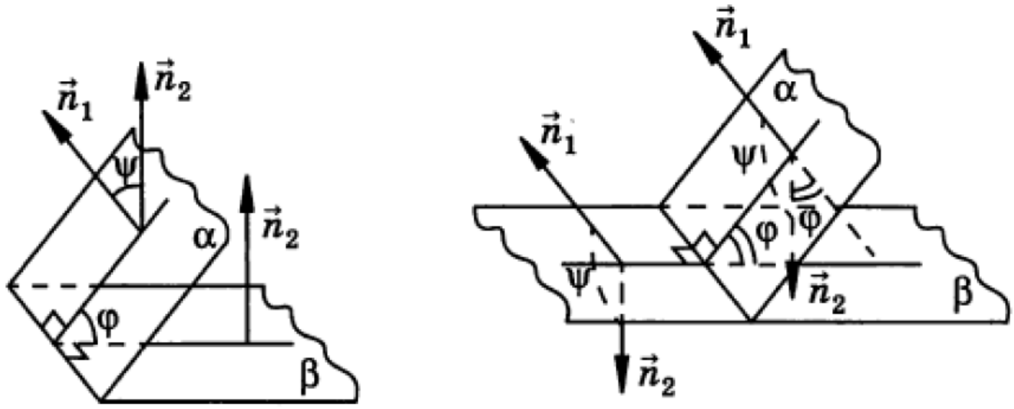

Рисунок 18 – Угол между плоскостями в пространстве

Задача 10. «В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины A, B_1, F, F_1 имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, F(0; -1;0), F_1(0; -1;1). Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите величину угла между плоскостями A_1FE и C_1AB» [55, с. 98].

Решение.

На **(**рисунок 19**)** изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней точки A_1, B, B_1, C имеют следующие координаты: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\ 1)$, $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $C_1(0;\ 1;1)$, $E(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, F(0;-1;0)

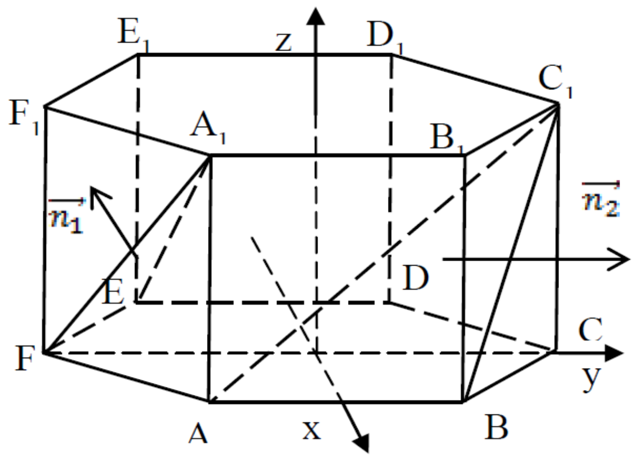

Рисунок 19 – К задаче 10

Обозначим: $\varphi = (\alpha;\beta)$, где α=(A_1FE), β=(C_1AB)

Найдем координаты векторов нормалей плоскостей α и β.

Вектор $\vec{n}1$ ($a_1;b_1;c_1$) нормали плоскости α перпендикулярен векторам: $\overrightarrow{A_1F}$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-1)$ и$\overrightarrow{A_1E}$ $(-\sqrt{3};0;-1)$. Найдем координаты вектора $\vec{n}1$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{A_1F},\\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{A_1E}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{A_1F} = 0,\\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{A_1E} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}b_1 - c_1 = 0,\\ -\sqrt{3}a_1 - 0 \cdot b_1 - c_1 = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{3}a_1 + b_1 + 2c_1 = 0,\\ c_1 = -\sqrt{3}a_1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b_1 = \sqrt{3}a_1,\\ c_1 = -\sqrt{3}a_1.\end{cases}$$

Пологая $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, получим $b_1 = 1$, $c_1 = -1$.

Имеем:$\vec{n}1(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1; -1)$.

Аналогично, вектор нормали $\vec{n}2$ ($a_2;b_2;c_2$) плоскости β, перпендикулярен векторам:$\overrightarrow{AC1}$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}; 1)$ и$\overrightarrow{AB}$ $(0;1;0)$.

Найдем координаты вектора $\vec{n}2$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AC_1},\\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AB}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0,\\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 + \frac{3}{2}b_2 + c_2 = 0,\\ 0 \cdot a_2 + b_2 + 0 \cdot c_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}c_2,\\ b_2 = 0\end{cases}.$$

Пологая $c_2 = \sqrt{3}$, a_2=-2, b_2=0.

Получаем: $\vec{n}2(-2; 0; \sqrt{3})$.

Тогда:

$$\cos\varphi = |\cos\angle(\vec{n}1;\vec{n}2)| = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-2)+1\cdot0+(-1)\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+\sqrt{3}^2}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\sqrt{7}}\,\frac{4}{7},$$

откуда:

$\varphi = \arccos\frac{4}{7}$.

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{4}{7}$.

Задача 11. «В правильной шестиугольной призме *A*…*F*1, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями *AFF*1 и *DEE*1» [66, с. 7].

Первое решение.

Так как плоскость *FCC*1 параллельна плоскости *DEE*1 (рисунок 20), то искомый угол равен углу между плоскостями *AFF*1 и *FCC*1.

Так как плоскости *AFF*1 и *FCC*1 перпендикулярны плоскости *ABC*, то соответствующим линейным углом будет угол *AFC*, который равен 60°.

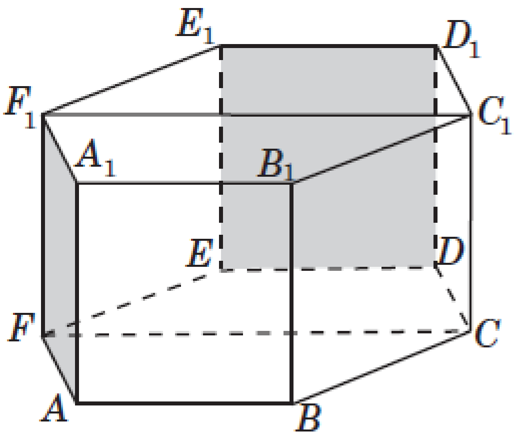

Рисунок 20 – К первому решению задачи 11

Второе решение.

Так как плоскость *AFF*1 параллельна плоскости *BEE*1 (рисунок 21),

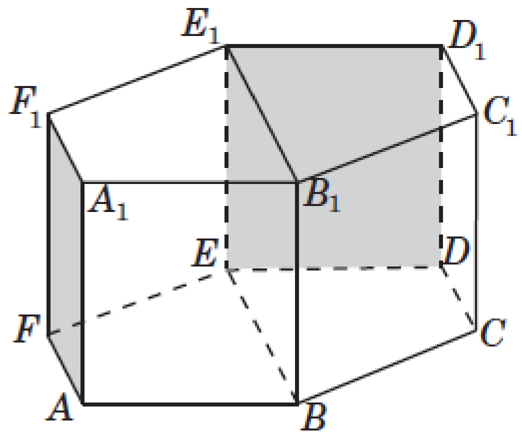

Рисунок 21 – Ко второму решению задачи 11

то искомый угол равен углу между плоскостями $BEE1$ и $DEE1$. Так как плоскости $BEE1$ и $DEE1$ перпендикулярны плоскости ABC, то соответствующим линейным углом будет угол BED, который равен 60°.

Ответ. 60°.

Таким образом, чтобы с помощью векторно-координатного метода найти величину угла между двумя плоскостями, достаточно в начале определить координаты нормальных векторов данных плоскостей, после чего по формуле (4) вычислить синус искомого угла.

2.4. Элективный курс «Правильная шестиугольная призма и ее замечательные свойства»

Известно, что практически любая современная профессия не обходится без знаний по математике. Также известно, что на сегодняшний день в общеобразовательной школе геометрии уделяется заметно меньше внимания, чем алгебре. Поэтому, представляется актуальной разработка элективного курса по геометрии. Они позволяет учителю математики справиться с поставленными перед ним задачами: обеспечить освоение всеми учащимися минимально необходимого объема знаний и создать условия для дополнительного углубленного изучения предмета тем, кто проявляет к нему интерес и для кого этот предмет является вступительным в вуз.

Предлагаемый элективный курс «Правильная призма и ее замечательные свойства» предназначен для старшеклассников с целью углубления, обобщения знаний и умений учащихся по стереометрии.

Практическая значимость элективного курса «Правильная призма и ее замечательные свойства» определяется тем, что его содержание:

1) обеспечивает преемственность между основным курсом геометрии и курсом по выбору (элективным курсом);
2) расширяет и дополняет знания учащихся о решении геометрических задач в правильных многогранниках; формирует умения решать задачи более высокого уровня;
3) ориентирует на подготовку к итоговой аттестации в форме ЕГЭ профильного уровня;
4) способствует развитию пространственного мышления и геометрического воображения, формированию графической культуры.

Педагогический эксперимент свидетельствует о целесообразности реализации предложенной программы, так как она предоставляет учителю и учащимся возможность решения новых типов задач на примере правильной шестиугольной призмы; способствует формированию у старшеклассников наглядно-образного мышления; применения нестандартных приемов решения; систематизации и обобщения геометрических понятий, их свойств и основных формул.

Программа элективного курса состоит из 4 модулей (таблица 2), предусматривает выполнение двух контрольных работ и самостоятельную работу учащихся над групповыми проектами.

Реализация программы основана на пособиях и учебниках Е.В. Потоскуева [41-58].

Основное внимание уделено решению задач на нахождение расстояний и вычисление углов в пространстве геометрическим методом и векторно-координатным.

Таблица 2 − Тематическое планирование

Наименование темы	**Кол-во часов**
I.. *«Понятие правильной шестиугольной призмы. Ее свойства»*	**3**
Вводное занятие	1
Основные свойства и формулы	1
Изготовление модели правильной шестиугольной призмы из картона	1
II . *«Геометрический метод нахождения расстояний в правильной шестиугольной призме».*	**3**
Задачи на расстояние от точки до прямой	1
Задачи на расстояние от точки до плоскости	1
Задачи на расстояние между двумя скрещивающимися прямыми	1
III. *«Векторно-координатный метод нахождения расстояний в правильной шестиугольной призме»*	**4**
Задачи на расстояние от точки до прямой	1
Задачи на расстояние от точки до плоскости	1
Задачи на расстояние между двумя скрещивающимися прямыми	1
Контрольная работа №1	1
IV. *«Векторно-координатный метод нахождения углов в правильной шестиугольной призме».*	**4**
Задачи на угол между двумя прямыми	1
Задачи на угол между прямой и плоскостью	1
Задачи на угол между двумя плоскостями	1
Решение задач различными методами	1
Итоговая контрольная работа №2	**1**
Защита проектов	**2**
ИТОГО	**17**

Задача 1. «В правильной шестиугольной призме - $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, (рисунок 22) каждое ребро которой равно 1, найдите расстояние между прямыми B_1F и CE_1» [4, с. 85].

Решение.

Имеем $B_1B \parallel E_1E$ и $BF \parallel EC$, тогда $(EE_1C) \parallel (BB_1F)$ (по признаку параллельности двух плоскостей). Далее имеем $DA \perp FB$, $DA \perp B_1B$, следовательно, $DA \perp (BB_1F)$. Но и $DA \perp (EE_1C)$.

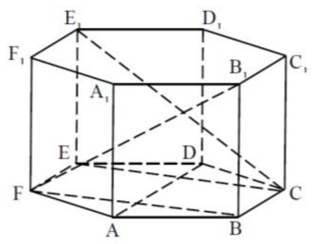

Рисунок 22 – К задаче 1

Тогда, по методу параллельных плоскостей ρ (B_1F; CE_1) = ρ ((BB_1F); (EE_1C)) = DA = 1.

Ответ: ρ (B_1F; CE_1) =1.

Задача 2. «В правильной шестиугольной призме - $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, (рисунок 23) каждое ребро которой равно 2, найдите расстояние от вершины B до прямой D_1C» [43, с. 75].

Решение.

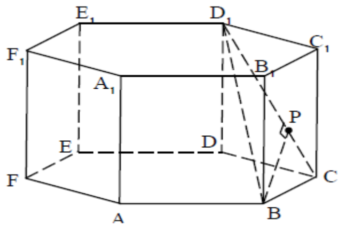

Рисунок 23 – К задаче 2

Пусть BP - высота ΔBCD_1, тогда $BP\perp CD_1$, значит BP = ρ (B; CD_1). Найдем BP. В Δ BCD_1: BC = 2, $CD_1 = 2\sqrt{2}$. В прямоугольном треугольнике Δ BDD_1 находим:

$$BD_1=\sqrt{BD^2+{DD_1}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4.$$

Обозначим: $D_1P = x$, тогда $CP = 2\sqrt{2}-x$. Получаем: $D_1B^2 - D_1P^2 = BC^2 - CP^2$ или $16 - x^2 = 4-(2\sqrt{2}-x)^2$; $16 = -4+4\sqrt{2}x$; $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Теперь найдем

$$BP=\sqrt{D_1B^2-D_1P^2}=\sqrt{16-(\frac{5\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Ответ: ρ (B; CD_1)= $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Решение этой задачи позволяет школьникам одновременно научиться изображать пространственные фигуры, развивать пространственное воображение, выработать навыки решения практических задач по геометрии.

В рамках исследовательской деятельности учащимся предлагается работа над *учебными проектами* по следующим темам:

1. Симметрия правильной шестиугольной призмы.

2. Проецирование правильной шестиугольной призмы.

3. Изготовление модели – тренажера правильной шестиугольной призмы.

При выполнении проектов, учащимся можно рекомендовать самостоятельное изучение дополнительных источников, в частности, статьи из журналов для школьников «Квант», Потенциал», «Математика для школьников» и другие Интернет-источники.

Таким образом, предложенный элективный курс позволит старшеклассникам научиться изображать пространственные фигуры, решать задачи на нахождение расстояний и углов геометрическим и векторно-координатным методами на примере правильной шестиугольной призмы, способствует развитию их творческих и исследовательских способностей, одновременно решая задачу развития пространственного воображения у учащихся, формирования у них интереса к изучению геометрии.

И, что немаловажно, позволит школьникам успешно сдать ЕГЭ и поступить в вуз.

2.4 Педагогический эксперимент

Экспериментальная работа по исследуемой проблеме осуществлялась в МБУ «Школа №93» г.о. Тольятти с 2019 по 2021 гг. в три этапа с учителями математики и учащимися 10 классов.

Цель педагогического эксперимента – выявление и анализ методических приемов обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами в старших классах.

Методы исследования экспериментальной работы включали:

1) наблюдение учащихся 10 класса в процессе решения геометрических задач векторным и координатно-векторным методами; цель наблюдения – определить умение применять векторный и координатно-векторный методы при решении задачи на нахождение расстояний и углов в пространстве;

2) анкетирование в форме тестовых заданий для учащихся 10 класса.

Анкетирование учащихся 10 класса проводилось с целью установления уровня обученности решения геометрических задач векторным и координатно-векторным методами.

Наблюдения выявили следующие результаты: учащиеся могут решать геометрические задачи векторным или координатно-векторным методом, *если* решали подобные, типовые задачи, то есть аналогичные; *если* указан метод решения.

Поисковый эксперимент состоял из нескольких этапов.

Первый этап (мотивационный). Его цель – показать необходимость овладения векторно-координатным методом. Для этого подбирались задачи из курса планиметрии на доказательство, которые рационально было решить этим методом. В качестве помощи учащимся предлагался перечень вопросов, которые, по сути, наводили их на методическую схему решения таких задач.

Задача: «В трапеции $ABCD$ углы A и B равны по 90°, а стороны $AB = 2$, $BC = 1$, $AD = 4$. Докажите, что диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны» [52].

Перечень вопросов:

1. Что нужно доказать на геометрическом языке?

2. Что для этого достаточно доказать на векторном языке?

3. Есть ли в условии задачи векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$?

4. Запишите скалярное произведение векторов.

5. Переведите векторное равенство $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ на геометрический язык.

6. Зависит ли решение задачи от способа выбора системы координат?

7. Разработайте другие способы решения этой задачи, не связанные с использованием векторного метода.

8. Сравните эти способы решения и оцените эффективность каждого.

Результаты выделенных умений представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты выполнения задачи 1

Выявленные умения	Определяют отношения между геометрическими объектами в условии задачи и введенными векторами	Выполняют преобразования над полученными векторными соотношениями.	Переводят полученное векторное равенство на геометрический язык	Приводят другие способы решения задачи, не связанных с векторно-координатным	Способны сравнить и оценить эффективность каждого метода
Кол-во учащихся	26	25	19	16	14
%	92	89	68	57	50

На данном этапе при разработке системы задач по теме, мы опирались на требования к системе упражнений Г.И. Саранцева [62].

1. Задачи на применение ранее изученных понятий и теорем

Цель: Актуализация и повторение основных понятий и теорем.

Задание 1. 1) Назовите основные фигуры в пространстве.

2) Сформулируйте аксиомы А1-3.

3) Могут ли прямая и плоскость иметь две общие точки?

4) Сколько плоскостей можно провести через три точки?

5) Сколько может быть общих точек у прямой и плоскости?

2. Задачи на модели правильной шестиугольной призмы

Цель: Синтез выделенных свойств, формулировка выделения понятия.

Задание 2. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. (рисунок 24).

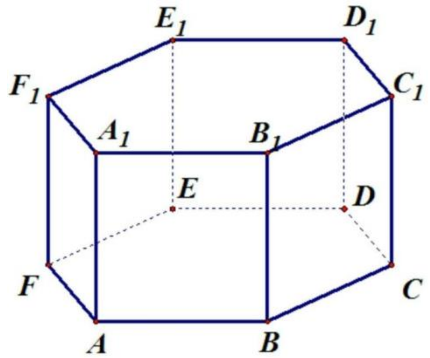

Рисунок 24 – К заданию 2

1) Являются ли параллельными прямые A_1A и DD_1; AA_1 и CC_1? Ответ обоснуйте.

2) Являются ли AA_1 и DC параллельными? Они пересекаются?

Вывод. В пространстве есть прямые, которые не параллельны и не пересекаются, так как они не лежат в одной плоскости. Такие прямые называются скрещивающимися.

3. *Задачи на распознавание объектов, принадлежащих объему понятия «взаимное расположение прямых в пространстве»*

Цель: Напомнить учащимся о скрещивающихся прямых в пространстве, в результате выяснить все случаи взаимного расположения прямых в пространстве на примере правильной шестиугольной призмы и установить их признаки.

Задание 3. Начертите правильную шестиугольную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Заполните следующую таблицу 4 (указать не менее трех примеров в каждом столбце):

Таблица 4 – Выполнение задания 3

Прямые не имеют общих точек	Прямые имеют одну общую точку	Прямые лежат в одной плоскости	Прямые не лежат в одной плоскости
1) AB и A_1B_1 2) AB и ED 3) AF и B_1C_1	1) AB и BC 2) AB и DC 3) AB и EC	1) AB и BC 2) AB и D_1E_1 3) A_1B_1 и E_1F_1	1) AB и B_1C_1 2) AF и BC_1 3) E_1F и B_1C

4. *Задачи на применение понятия в различных ситуациях*

Цель: Напомнить возможные случаи взаимного расположения плоскостей и углов в пространстве на примере правильной шестиугольной призмы и установить их признаки.

Задание 4.

Начертите правильную шестиугольную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Заполните следующую таблицу 5:

Таблица 5 – Выполнение задания 4

Плоскости, пересекающиеся по прямой FE	Общую прямую для плоскостей ABB_1 и CDE	Указать угол между плоскостями ABC и EDD_1	Указать угол между прямой AD_1 и плоскостью ABC
ABC и FEE_1	AB	BDD_1	D_1AD

5. *Задачи на систематизацию понятий*

Цель: Развить умение анализировать условие задач на примере формулировки задач равносильных данным.

Задание 5.

По аналогии с примером 5 составить по одной задаче к каждому условию.

Второй этап (ориентировочный).

Его цель – разъяснить суть метода и показать его основные компоненты.

Учащимся предлагалось задание 5, при выполнении которого они должны были заполнить таблицу 6.

Результаты выделенных умений по выполнению задания 5 представлены в таблице 7.

Таблица 6 – Задание 5

Соотношение на векторном языке	Геометрическое истолкование
$(\overrightarrow{BA}=\alpha\cdot\overrightarrow{BC}\ ,\ 0<\alpha<1.)$	
$\overrightarrow{AM}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}.$	
$(\overrightarrow{AB}=\lambda\,\overrightarrow{MK}.)$	
$(\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CB}.)$	
$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PK}=0.)$	
Задача	**Решение**
1.Найдите угол между векторами $\vec{a}$ =(1;-2) и $\vec{b}$ =(-3;1)	
2.Четыре точки заданы своими координатами: *A* (3; 1), *B* (1; 4), C (1; 0), *D* (4; 5). Определите угол между прямым и *AB* и *CD*.	
3.Найдите угол между векторами $\vec{a}$ =(1;-2) и $\vec{b}$ =(-3;1)	
4.Четыре точки заданы своими координатами: *A* (3; 1), *B* (1; 4), C (1; 0), *D* (4; 5). Определите угол между прямым и *AB* и *CD*.	
5.Точки M_1и M_2 являются соответственно точками пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра ABCD. Доказать разными методами, что : $M_1M_2 \| AC$ Какой из методов решения этой задачи эффективнее? а) векторным; б) координатным; г) геометрических преобразований.	

Третий этап (обучающий) предполагал решение задач на применение всех компонентов векторно-координатного метода; обобщить алгоритм для всех задач.

При повторении с целью обобщения и систематизации учебного материала, при выделении приемов и методов решения задач, при акцентировании внимания учащихся на наиболее рациональных способах выполнения заданий можно применить групповую форму организации контроля.

Класс временно делится на три группы, и каждой группе дается проверочное индивидуальное задание, решив которое, представляют его на защиту у доски.

Таблица 7 – Результаты выполнения задания 5

Проверяемые умения	Переводят векторные соотношения на геометрический язык	Выражают величину угла между векторами через скалярное произведение векторов и длин этих векторов	Переводят полученное векторное равенство на геометрический язык	Приводят другие способы решения задачи	Способны сравнить и оценить эффективность каждого метода
Кол-во учащихся	24	24	20	15	14
%	86	86	71	53	50

Задача (группа 1). «*В системе координат Oxyz расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: B($\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\frac{1}{2}$;0), C(0;1;0), D(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\frac{1}{2}$;0), C_1(0;1;1). Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите расстояние от вершины B до прямой A_1C*» [19, с. 122].

Итоговым этапом эксперимента была контрольная работа, которая включала геометрическую задачу на нахождение расстояний и углов векторно-координатным способом.

Цель контрольной работы – установить уровень сформированности умений решать задачи векторно-координатным методом.

Задача:

«В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты:

B($\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\frac{1}{2}$;0), C(0;1;0), D(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$;$\frac{1}{2}$;0), C_1(0;1;1).

1) Постройте эту призму.

2) Векторно-координатным методом найдите расстояние:

а) от вершины B до прямой A_1C;

б) между прямымиA_1F и AB_1.

3) Векторно-координатным методом найдите величину угла:

а) между прямыми A_1B и B_1F;

б) между прямой A_1B и плоскостью BB_1C;

в) между плоскостями A_1FE и C_1AB» [48].

Таблица 8 – Результаты контрольной работы

Название уровня	**Низкий**	**Слабо-уверенный**	**Достаточно-уверенный**	**Высоко-уверенный**
Характеристика	Задача не решена (или решена геометрическим методом). Умение использовать векторно-координатный метод не сформирован	Задача не решена, но учащийся делает попытки, испытывает затруднения при обосновании, запутанность в суждениях. Умения на стадии формирования.	Задача решена, но решение имеет недостаточные обоснования. Учащийся применил истинные рассуждения, которые не являются достаточными; допускает ошибки в расчётах, приводящие к неверному ответу. Умения формируются в процессе (в развитии).	Задача решена, на основе векторно-координатного метода, на основе аксиом, теорем, свойств и признаков, которые являются необходимыми и достаточными обоснованиями для решения. Умения сформированы.
Кол-во	3	5	14	6
%	11	18	50	21

Результаты контрольной работы показали, что решение геометрических задач на доказательство по наводящим вопросам эффективно: с задачей справились 12 учащихся, что составляет 63%.

Задачу не доказали, но структуру задачи разобрали 2 учащихся, что составляет 10%.

Задачу доказали некорректно, не имея достаточных основания для доказательства; применили набор свойств и следствий, не влияющих на доказательство, 5 учащихся, что составляет 26%.

Анализ результатов контрольной работы представлен выше в таблице 8.

Итак, в результате эксперимента:

1. Разработан единый подход к обучению векторным и векторно-координатным методам решения геометрических задач.

2. Выделенные методические приемы обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами и на её основе разработанная система задач, способствует достижению предметных результатов на углубленном уровне.

Все это дает основание считать, что поставленные задачи исследования решены.

Выводы по второй главе

Во второй главе представлены следующие результаты:

1. На примере геометрических задач на вычисление углов и расстояний в пространстве продемонстрированы общие и частные эвристические приемы.

2. Разработан элективный курс «Правильная призма и ее замечательные свойства», предназначенный для старшеклассников с целью углубления, обобщения знаний и умений учащихся по стереометрии.

3. Определена практическая значимость элективного курса. Основное внимание программы курса уделено решению задач на нахождение расстояний и углов в пространстве геометрическим методом и векторно-координатным. Приведены примеры задач, указания к каждой из них и даны

образцы их решения и оформления. При обсуждении решений задач большое внимание уделено различным способам решения в зависимости от условий задачи.

4. Сделан вывод о том, что каждый из способов решения задачи имеет свои достоинства и недостатки. Однако в большинстве случаев, решение задач векторно-координатным методом более быстрое и оригинаьное.

5. Представлены результаты педагогического эксперимента, проведенного на базе МБУ «Школа №93» г.о. Тольятти с 2019 по 2021 гг. с учителями математики и учащимися 10 классов. Сформулирован вывод о разработке единого подхода к обучению векторным и векторно-координатным методам решения геометрических задач, и эффективности методических приемов обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами на основе системы задач.

Заключение

В заключении сформулируем выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Рассмотрены роль и место геометрических задач в школьном курсе математики. Указано, что на современном этапе развития школьного образования цели обучения должны быть направлены как на получение учащимися способности к саморазвитию, так и на развитие у них личных качеств. Основным средством достижения поставленной цели являются математические задачи.

2. Перечислены типы задач по характеру требований. Выделены этапы решения задач по Л.М. Фридману и Е.Н. Турецкому, среди которых определены обязательные. Указан ряд требований для схематической записи геометрической задачи (Л.М. Фридман). Также перечислены ключевые задачи, при решении которых применяется векторно-координатный метод. Выделены этапы решения таких задач по Г.И. Саранцеву.

3. Раскрыты особенности векторно-координатного метода решения задач стереометрии. Указаны требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся, необходимые для решения задач векторным методом.

Выполнен анализ содержания темы «Векторно-координатный метод решения геометрических задач» в различных учебниках из федерального перечня учебников, рекомендованных Министерством Просвещения РФ (А.Д. Александров, Л.С. Атанасян, А.В. Погорелов, Е.В. Потоскуев, И.М. Смирнова, И.Ф. Шарыгин).

Выделены ЗУНы, которым научится на углубленном уровне учащийся старших классов по теме «Векторно-координатный метод решения геометрических задач». Представлено обоснование выбора учебника Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича, как основного учебника математики для математического профиля.

4. Рассмотрены методические приемы обучения решению геометрических задач. Большое внимание уделено одному из таких приемов - эвристическому методу. Приведены трактовки данного понятия в учебно-методической литературе.

Перечислены различные методики и технологии применения эвристических методов при организации эвристической деятельности. Обоснована схема эвристик. На основе анализа эвристик выделены этапы технологии обучения эвристикам при решении задач векторно-координатным методом. Также выделены частные эвристики.

5. Разработан элективный курс «Правильная призма и ее замечательные свойства», предназначенный для старшеклассников с целью углубления, обобщения знаний и умений учащихся по стереометрии.

Определена практическая значимость элективного курса. Основное внимание программы курса уделено решению задач на нахождение расстояний и углов в пространстве геометрическим методом и векторно-координатным. Приведены примеры задач.

6. Представлены результаты педагогического эксперимента, который показал целесообразность использования методических приемов обучения решению геометрических задач векторным и координатно-векторным методами на основе системы задач.

Таким образом, поставленные задачи решены, цель исследования достигнута.

Список используемой литературы

1. Азевич А. И. Задачи по геометрии. 10-11 классы: дидактические материалы и контрольные работы. М. : Школьная Пресса, 2005. 144 с.

2. Александров А. Д. Геометрия. Методические рекомендации. 10 – 11 классы. М. : Просвещение, 2013. 144 с.

3. Александров А. Д. Геометрия: Учеб.для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. 4-е изд. М. : Просвещение, 2006. 240 с.

4. Александров А. Д. Геометрия: Учеб.для учащихся 10 кл. с углубл. изуч. математики. 4-е изд., дораб. М. : Просвещение, 2006. 270 с.

5. Александров А. Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 10 – 11 классы М. : Просвещение, 2016. 255 с.

6. Александров А. Д. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб.пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. Висагинас, Alfa, 1998. 576 с.

7. Архангельский С. И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. М. :Высш. шк., 1980. 368 с.

8. Атанасян Л. С. Геометрия. 10-11 классы: Учеб.дляобщеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. 18-е изд. М. : Просвещение, 2009. 255 с.

9. Балаян Э. Н. Математика. Задачи типа С2. Геометрия. Стереометрия / Э. Н. Балаян. Ростов н/Д : Феникс, 2014. 248 с.

10. Божина Б. Н. К вопросу о подготовке к ЕГЭ по математике. Методы решения геометрических задач / Б. Н. Божина, Е. Б. Майнагашева // Математический вестник. 2011. № 13. С. 293–303.

11. Воробьева Н. Г. Формирование познавательной активности учащихся в процессе решения геометрических задач : (На материале геометрии 6-8 кл.) : автореферат дис. ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. Москва, 1989. 16 с.

12. Глейзер Г. Д. Геометрия. 10-11 классы. Методическое пособие. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2012. 182 с.

13. Готман Э. Г. Стереометрические задачи и методы их решения / Э. Г. Готман. М.: МЦНМО, 2006. 160 с.

14. Гранкина Ю. Г. Методика обучения векторному методу решения планиметрических задач в курсе геометрии основной школы: дис. …44.03.01 / Ю. Г. Гранкина. Тольятти, 2018.

15. Гусев В. А. Геометрия. 10 класс. Профильный уровень. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2010. 311 с.

16. Гусев В. А. Методика обучения геометрии: Учеб.пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. А. Панчишина, В. В. Орлов. М. : Академия, 2004. 368 с.

17. Гусев В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. 3-е изд. (эл.). М. : Бином. Лаборатория знаний, 2014. 456 с.

18. Жукова Т. С. Теория и практика обучения эвристикам учащихся основной школы на уроках геометрии : автореферат дис. ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Жукова Татьяна Сергеевна; [Место защиты: Морд.гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева]. Саранск, 2009. 18 с.

19. Иванова Е. В. Реализация принципов системности и последовательности при обучении решению задач по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве» в углубленном курсе геометрии старшей общеобразовательной школы: дис. …44.04.01 / Иванова Е. В. Тольятти, 2016.

20. Иванова Т. А. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб.пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Л. И. Кузнецова, Т.П. Григорьева: под ред. Т. А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород: НПГУ, 2009. 355 с.

21. Капкаева Д. С. Интеграция алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании: дис. ... доктора педагогических наук: 13.00.02, Саранск, 2004.

22. Кийко С. И. Опорные конфигурации в стереометрии и их использование при обучении решению задач: автореферат дис. ….кандидата педагогических наук: 13.00.02 / Кийко Светлана Ивановна; Институт общего среднего образования. Москва, 1998. 18 с.

23. Колягин Ю. М. Методика преподавания в средней школе. Общая методика: учеб.пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М. Колягин. М. : Просвещение, 1975. 462 с.

24. Колягин Ю. М. Методика преподавания в средней школе. Частные методики. Учеб.пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М. Колягин. М. : Просвещение, 1977. 480 с.

25. Куликова О. С. Геометрические задачи на построение как средство развития математических способностей учащихся: дис. ....канд. пед. наук: 13.00.02 / автор Куликова Ольга Степановна. Москва, 1998. 215 с.

26. Куликова Е. В. Обучение студентов математических специальностей педвузов обобщенному приёму решения планиметрических задач: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / автор Куликова Елена Владимировна. Саранск, 2004. 23 с.

27. Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб.пособие для студентов физ. - мат. спец. пед. институтов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е. И. Лященко. М. : Просвещение, 1988. 223 с.

28. Мишин В. И. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика: учеб.пособие для студентов пед. институтов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; сост. В. И. Мишин. М. : Просвещение, 1987. 416 с.

29. Мугаллимова С. Р. Векторный метод в школьном курсе геометрии [Электронный ресурс] / С. Р. Мугаллимова // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». 2003/2004 учебный год. М.: Изд-во «Первое сентября»; ООО «Чистые пруды», 2004. - Режим доступа 20 к журн.: http://festival.lseptember.ru.

30. Мугаллимова С. Р. Эвристические приемы как механизм формирования основ творческой деятельности у школьников [Электронный ресурс] / СР. Мугаллимова // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». 2005/2006 учебный год. - М. : Изд-во «Первое сентября»; ООО «Чистые пруды», 2006. - Режим доступа к журн.: http://festival.lseptember.ru.

31. Мугаллимова С. Р. Эвристические приемы в структуре векторного метода решения задач [Текст] / СР. Мугаллимова // Молодежь, наука, творчество - 2007 : межвузовская науч.-практ. конф. студентов и аспирантов : сб. материалов / под общ. ред. профессора Н. У. Казачуна. - Омск: ОГИС, 2007. С. 71-72.

32. Мугаллимова, С. Р. Формирование системы эвристик, используемых в решении задач (на примере векторного метода) [Электронный ресурс] / СР. Мугаллимова // Электронный научный журнал «Вестник Омского педагогического университета». - 2007. - Режим доступа к журн.: http:/www.omsk.edu.

33. Мугаллимова С.Р. Формирование эвристических приемов у учащихся в процессе обучения решению задач векторным методом: автореферат дис. ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Мугаллимова Светлана Ринатовна; [Место защиты: Ом.гос. пед. ун-т]. Омск, 2008. 22 с.

34. Огурцова О. К.Частные эвристики как условие включения учащихся в поисковую деятельность на уроках стереометрии : автореферат дис. ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Морд.гос. пед. ин-т им. М. Е. Евсевьева. Саранск, 2002. 18 с.

35. Паповский В. М. Углублённое изучение геометрии в 10 классе. Методические рекомендации к учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика: учебное пособие для общеобразоват. организаций. / В. М. Паповский, Н. М. Пульцин. М. : Просвещение, 2017. 192 с.

1. 36. Платонова И. А. Методика развивающего обучения решению задач в правильной шестиугольной призме. / /«Молодежь. Наука. Общество» : Всероссийская научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 25 декабря 2020 – 29 января 2021 года) : электронный сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2021. – 1 оптический диск. С.269-271.

37. Платонова И. А. Эвристические методы и приемы обучения решению задач стереометрии /Эвристика и дидактика математики: материалы X Международной научно-методической дистанционной конференции-конкурса молодых ученых, аспирантов и студентов. –Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. С.51-53.

38. Платонова И. А. Элективный курс по геометрии «Правильная призма и ее замечательные свойства» для учащихся математического профиля /Студенческие Дни науки в ТГУ: научно-практическая конференция (Тольятти, 15 апреля – 29 мая 2021 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти : Изд-в ТГУ,2021– 1 оптический диск.

39. Погорелов А. В. Геометрия.10-11 классы: учеб.для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / А. В. Погорелов. – 9-е изд. – М., 2009. 175 с.

40. Пойа Д. Как решать задачу / Д. Пойа. М. :Учпедгиз, 1961. 208 с.

41. Потоскуев Е. В. Геометрическая поэма: хрестоматия / Е. В. Потоскуев. Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. 383 с.

42. Потоскуев Е. В. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л.И. Звавич. 2-е изд., стереотип. М. : Дрофа, 2004. 256 с.

43. Потоскуев Е. В. Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия. 10 кл» / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник. М. : Дрофа, 2004. 224 с.

44. Потоскуев Е. В. Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл.» / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. М. : Дрофа, 2014. 224 с.

45. Потоскуев Е. В. Геометрия. 10 кл.: учеб. Для общеобразоват. учреждений с углуб. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. М. : Дрофа, 2010. 223 с.

46. Потоскуев Е. В. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. М. : Дрофа, 2004. 240 с.

47. Потоскуев Е. В. Геометрия. 11 кл.: Учеб.для общеобразоват. учреждений с углуб. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. М. : Дрофа, 2004. 268 с.

48. Потоскуев Е. В. ЕГЭ. Геометрия. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. / Е. В. Потоскуев. М. : Издательство «Экзамен», 2016. 223 с.

49. Потоскуев Е. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 10-11 классы. Рабочая программа к линии УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича: учебно-методическое пособие / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. М. : Дрофа, 2017. 65 с.

50. Потоскуев Е. В. Начала метрической стереометрии. О расстояниях в пространстве / Е. В. Потоскуев // Математика в школе. 2010. №8. С. 15–25.

51. Потоскуев Е. В. О новом федеральном учебно-методическом комплекте по стереометрии для X-XI классов с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич // Математика в школе. 2005. № 9. С. 34–43.

52. Потоскуев Е. В. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. ФГОС / Е. В. Потоскуев. М. : Экзамен, 2016. 223 с.

53. Потоскуев Е. В. Правильная шестиугольная призма как модель геометрии прямых и плоскостей / Е. В. Потоскуев // Математика в школе. 2016. № 4. С. 26–34.

54. Потоскуев Е. В. Прямые и плоскости в координатах. / Е. В. Потоскуев // Математика Первое сентября. 2013. № 6. С. 22–23.

55. Потоскуев Е. В. Решение задач по стереометрии. Практикум. Подготовка к ЕГЭ / Е. В. Потоскуев. М. :Илекса, 2012. 108 с.

56. Потоскуев Е. В. Решение разноуровневых задач по геометрии. Подготовка к ЕГЭ / Е. В. Потоскуев. М. :Илекса, 2014. 271 с.

57. Потоскуев Е. В. Эффективные помощники «вхождения» в метрическую стереометрию / Е. В. Потоскуев // Математика Первое сентября. 2010. №22. С. 27–35.

58. Потоскуев Е. В. Эффективные помощники «вхождения» в метрическую стереометрию / Е. В. Потоскуев // Математика Первое сентября. 2010. № 23. С. 13–15.

59. Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия. 10-11 классы / сост. Т. А. Бурмистрова. М. : Просвещение. 2009. С. 95.

60. Прокофьев А. А. О различных подходах к вычислению расстояния между скрещивающимися прямыми. / В. В. Прокофьев // Математика в школе. 2015. № 5. С. 18–32.

61. Руськина Н. М. Методика обучения метрическим задач стереометрии с использованием модели правильной шестиугольной призмы в классах с углубленным изучением математике: дис. ….44.03.05 / Руськина Наталия Михайловна. Тольятти, 2017.

62. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: учеб.пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев М. : Просвещение, 2000.

63. Смирнов В. А. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ / Под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. М. : МЦНМО, 2009. 272 с.

64. Смирнова И. М. Геометрия. 10-11 класс: учеб.для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. М. : Мнемозина, 2008. 288 с.

65. Смирнова И. М. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве: учебно-методическое пособие / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. М. : Издательство «Экзамен», 2009. 158 с.

66. Смирнов В. А. ЕГЭ 2015. Математика. Задача 16. Геометрия. Стереометрия. / Под ред. И. В. ЯщенкоЭлектронное издание. М.: МЦНМО, 2015. 127 с.

67. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб.пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Л. И. Кузнецова, Т. П. Григорьева. – 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород : НГПУ, 2009. 355 с.

68. Ульянова И.В. Обучение школьников методам решения геометрических задач в контексте укрупнения дидактических единиц: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ульянова И. В. Саранск, 2002.

69. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012г. №413.

70. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования: Приказ Мин.образования и науки РФ от 20.05.2020г. №254.

71. Филипченкова М. М. Методика обучения решению задач по теме «Прямые и плоскости» в углублённом курсе геометрии старшей школы: дис. ….44.03.05 / Филипченкова М. М. Тольятти, 2018.

72. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи: Книга для учащихся / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. М. : Просвещение, 1989. 192 с.

73. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 10-11 кл.: Учеб.для общеобразоват. учеб. заведений / И. Ф. Шарыгин. М. : Дрофа, 1999. 208 с.

74. Alsina C. A. Mathematical Space Odyssey: Solid Geometry in the 21st Century / C. Alsina, R. Nelsen. Washington: Mathematical Association of America, 2015. 288 p.

75. Arnheim R. Visual thinking. London, 1970.

76. Boyd C. J. Geometry Student Edition. Publisher: Clencoe / McCraw-Hill, 2007. 960 p.

77. Herbst P. International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools / P. Herbst, U. H. Cheah, P. R. Richard, K. Jones. Cham: Springer International Publishing AG, 2018. 383 p.

78. Petrunin A. Euclidean plane and its relatives. CreateSpace, 2015. 190 p.

79. Wheater C. Practice Makes Perfect: Geometry. McGraw-Hill, 2010. 160 p.

80. Weinreich G. Geometrical Vectors. University Of Chicago Press, 1998.126 p.