МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Формирование графической культуры обучающихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы»

Студент Е.В. Легаева
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент Н.А. Демченкова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение 3

Глава 1 Теоретические основы формирования графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы 8

1.1 Понятия графической и функционально-графической культуры учащихся. 8

1.2 Этапы формирования функционально-графической культуры учащихся старшей школы 12

1.3 Методическая система формирования графической культуры учащихся при изучении функций 15

Глава 2 Методические основы формирования графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы 19

2.1 Анализ школьных учебников алгебры и начал математического анализа с точки зрения исследуемой проблемы 19

2.2 Из опыта работы учителей, методистов по данной теме исследования 24

2.3 Формирование графической культуры учащихся на элективном курсе «Графический метод в задачах с параметром» 33

2.4 Описание проведенного педагогического эксперимента 46

Заключение 69

Список используемой литературы 70

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Согласно требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования Российской Федерации (ФГОС РФ) «изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить формирование представлений о математике как о компоненте общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [55].

«Процесс формирования графической культуры учащихся общеобразовательной школы значительно затрудняется в связи с сокращением учебного времени (или полным его отсутствием) на уроки технического черчения, где учащиеся изучали и строили чертежи и технические рисунки. Зачастую остается лишь построение графиков функций, диаграмм и геометрических фигур на уроках математики, что может быть связано с формированием графической культуры» [59].

При изучении функций у учащихся формируется представление о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; происходит развитие умений использовать функционально-графические представления для решения математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей.

В связи с этим увеличивается значимость функционально-графической линии школьного курса математики в формировании графической культуры как одной из составляющих компонентов образованности обучающихся.

«Под функциональной графической грамотностью будем понимать систему функционально-графических знаний и функционально-графических навыков, необходимых для чтения и отображения графиков элементарных функций» [58, С. 118].

Под графической культурой будем понимать сформированные умения учащихся, характеризующиеся единством графических знаний, умений и навыков, достижений в области усвоения и применения графических приемов и методов преобразования информации.

«В связи со стратегией российского образования графическая культура берет на себя роль «второй грамотности», становясь одним из центральных вопросов общей культуры человека; представление информации в виде графических зависимостей является наиболее экономичным, наглядным и содержательным»[60, С. 66].

Значимость представленного исследования обусловливает необходимость разработки методической системы формирования графической культуры учащихся. **Противоречие** заключается в необходимости «формирования графической культуры учащихся, которое обусловлено повышающимися требованиями к качеству образования выпускников школы, возрастающим объемом знаний и умений оперировать ими, и недостаточной разработкой методической системы, обеспечивающей повышение уровня графической культуры учащихся» [58, С. 35].

Данное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** формирование графической культуры обучающихся в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика формирования графической культуры обучающихся в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования: разработка методики формирования графической культуры обучающихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа в общеобразовательной школе.

Гипотеза исследования состоит в том, что формирование графической культуры обучающихся будет эффективным, если при ее формировании использовать методическую систему.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Определить понятия графической культуры и функционально-графической культуры учащихся.

2. Описать этапы формирования функционально-графической культуры учащихся.

3. Рассмотреть методическую систему формирования графической культуры учащихся.

4. Разработать программу элективного курса «Графический метод в задачах с параметром», целью которого является формирование графической культуры обучающихся.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы Л.А. Гориной [10], М.Ю. Пермяковой [43], А.А. Темербековой [52], И.В. Чугуновой [56] и И.С. Якиманской [62].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Г.А. Байгонаковой [53], М.В. Лагуновой [26] и В.М. Петрова [44].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2019/20 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ школьных программ и учебников по математике, нормативных документов; анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2019/20 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2020/21 уч.г.): подборка системы упражнений для успешного формирования графической культуры учащихся 10-11 классов; разработка элективного курса «Графический метод решения задач с параметром».

4 семестр (2020/21 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам.

Научная новизна исследования заключается в предложенной методической системе формирования графической культуры учащихся общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике формирования графической культуры обучающихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования заключается в разработанной программе элективного курса «Графический метод в задачах с параметром», целью которого является формирование графической культуры обучающихся.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей и формулировании методических рекомендаций по формированию графической культуры учащихся при обучении функциям; разработке элективного курса по теме «Графический метод в задачах с параметром» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

– XII Международной научной конференции «Общество: научно-образовательный потенциал развития (идеи, ресурсы, решения)» (Чебоксары, ноябрь 2020 г.);

– всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, декабрь, 2020 г.);

– международной научно-практической конференции «Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений)» (Луганск, февраль, 2021 г.);

– научно-практической конференции «Студенческие дни науки ТГУ» (Тольятти, апрель, 2021г.).

– XXI Международной научной конференции «Информационное пространство современной науки» (Чебоксары, июнь, 2021 г.).

По теме исследования имеются 5 публикаций [14; 15; 16; 27; 28].

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета и ГБОУ СОШ с. Выселки муниципального района Ставропольский Самарской области.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по формированию графической культуры учащихся общеобразовательной школы при обучении функциям.

2. Элективный курс «Графический метод в задачах с параметром».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 27 рисунков, 10 таблиц, список используемой литературы (69 источников). Основной текст работы изложен на 77 страницах.

Глава 1 Теоретические основы формирования графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы

1.1 Понятия графической и функционально-графической культуры учащихся

Согласно требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (ФГОС) изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить формирование представлений о математике как компоненте общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

И.В. Чугунова, «акцентирует внимание на всестороннее развитие личности школьника, рассматриваемого как феномен культуры, формируемый при воздействии разнообразных культурных явлений, традиций, форм общественного сознания, образа жизни, быта, содержания деятельности, воспитания, образования» [56].

«Понятие «культура» многоаспектно, многомерно и широкомасштабно. Об этом свидетельствует его исследование при различных подходах: философском, социологическом, педагогическом и культурологическом» [54, С. 16] . Общество развивается и вместе с ним понятие «культура». Оно приобретает различные интерпретации и варианты.

Такое многообразие концепций культуры связано, в первую очередь, с различными акцентами, которые те или иные ученые и исследователи делают на ту или иную сферу деятельности.

В.Е. Давидович и З.И. Файнбург считают, что «некоторые ученые выдвигают на первый план в содержании культуры способы человеческой деятельности» [54]. Другие, по словам В. С. Стёпина, «рассматривают культуру как совокупность надбиологических программ человеческой жизнедеятельности» [48]. П.С. Гуревич рассматривает культуру как творческую деятельность [12, С. 13].

Н.И. Кальницкая «определеяет графическую культуру как высшую ступень графической образованности» [53, С. 27].

В.В. Степакова и С.И. Линник-Ботова отмечают, что «графическая культура направлена на формирование творческого потенциала личности, связанного с графическими способами преобразования информации» [56, С. 56].

С.А. Смирнов дает следующее определение: «Графическая культура – механизм эффективного использования графических отображений» [54].

А.А. Лямина утверждает, что «формирование графической культуры обучающихся основывается на овладении графическим языком, развитии мышления и творческого потенциала личности» [53].

«Одной из основных составляющих графической культуры учащихся является пространственное мышление», – такого мнения придерживаются Н.Г. Иванцивская, В.Г. Буров и С.П. Шультяев [56].

По мнению В.П. Молочкова: «Термин «графическая культура» можно определять в узком и широком смысле; графическая культура в узком смысле – умение обработки графической информации на компьютере, в широком понимании – умение людей общаться друг с другом при помощи языка графики» [34, С. 64].

М.В. Лагунова «определяет графическую культуру как основной элемент профессиональной сферы деятельности человека» [26, С. 28].

Понятие «графическая культура», зачастую соотносят с понятием «графическая грамотность». «Грамотность – определенный уровень владения человеком навыками чтения, письма, счета», а «графическая грамотность – это способность оперировать понятиями, связанными с визуализацией информации, умением точно и быстро передавать информацию с помощью графических средств» [54].

Также понятие «грамотность» рассматривается как «наличие соответствующих знаний в различных областях, в том числе, политическая грамотность и техническая грамотность». Говоря о нормах литературного языка (грамматических, стилистических, орфоэпических и др.), это умение излагать свои мысли [56].

«Функционально-графическая грамотность – система функционально-графических знаний и функционально-графических умений, необходимых для чтения и изображения графиков элементарных функций» [43, С. 85].

По мнению М.В. Покровской, «графическая культура обретает роль второй грамотности, становясь центральным феноменом общей культуры человека, в которой все шире используется представление информации в виде графических зависимостей как наиболее экономичных, наглядных и содержательных» [42].

«Достижения в области современных компьютерных технологий актуализируют фундаментальную графическую подготовку специалиста нового поколения. В связи с этим вопросы культурного образования школьников в условиях интенсивно развивающейся информационной цивилизации становятся особенно важными, что требует от молодежи постоянного увеличения объема графических знаний, развития умений преобразования информации и оперирования ею» [29].

С.М. Ганеев в своём исследовании утверждает, что «проблема формирования графической культуры у учащихся на уроках алгебры может быть решена в условиях компьютерной поддержки, при исследовании наиболее эффективных приемов работы с графическим материалом, их разработкой» [7].

И.В. Чугунова, рассматривая данную проблему, «выделяет следующее:

– в ходе анализа образовательной ситуации в обществе выявлен низкий уровень графических знаний у выпускников школ и первокурсников вузов, что обуславливает одну из основных задач системы общего (среднего) образования, проявляющуюся в необходимости формирования у будущих выпускников школ умений самостоятельно осваивать информацию и применять ее в учебной деятельности;

– достаточно большие возможности знаковых систем в передаче информации влекут за собой особую форму ее предоставления, определяют скорость и качество усвоения, запоминания и использования учащимися в процессе обучения;

– графика лежит в основе современных методов и форм обучения (информационно-коммуникативного, дистанционного и др.), что требует необходимости поиска эффективных способов организации учебно-познавательной деятельности учащихся с применением результативных методов и средств обучения для реализации задач развития графической культуры личности;

– графическая культура является мощным средством коммуникации личности, развития мышления, познавательных способностей, пространственных представлений, пространственного воображения, практических умений и навыков» [8, С. 62].

М.В. Апалькова в своей статье обращает внимание на то, что использование информационных технологий в преподавании математики является неотъемлемой частью при формировании графической культуры школьника [2, С. 6].

П.В. Беспалов утверждает, что «с ростом уровня информационной компетентности идет процесс формирования графической культуры» [3, С. 43].

«Указанные выше основания актуализируют проблему формирования графической культуры старшеклассников, которая проявляется в противоречии между повышающимися требованиями к качеству образования выпускников школы, диктующимися возрастающим объемом информации и требованием умения оперировать ею, и недостаточной разработанностью организационно-педагогических условий в системе общего (среднего) образования, обеспечивающих повышение уровня графической культуры старшеклассников» [29].

В процессе исследования терминологии был выполнен анализ понятий «культура», «грамотность», «графическая грамотность», «функционально-графическая грамотность», определено понятие «графическая культура».

1.2 Этапы формирования функционально-графической культуры учащихся старшей школы

Первоначальное математическое представление реальности происходит при изучении функции. Функции, их свойства и графики составляют основу школьного курса математики. В формировании умений, необходимых для построения, чтения и изучения графиков функций, изучаемых в курсе математики средней школы, а именно в сформированности функционально-графической культуры играет главную роль математика.

«Функционально-графическая культура, как элемент общей культуры ученика, характеризуется высоким уровнем знаний, умений и навыков в области визуализации, пониманием механизмов эффективного использования графических отображений функциональных зависимостей для решения задач, умением интерпретировать и оперативно отображать результаты на приемлемом эстетическом уровне, – отмечает М.Ю. Пермякова» [42].

М.В. Лагунова в своей работе [26], выделила ступенчатую схему развития графической культуры в обучении математике.

На рисунке 1 представлена схема формирования функционально-графической культуры (ФГК) обучающихся, предложенная М.Ю. Пермяковой [42]. Её составляющими являются следующие компоненты: функционально-графическая грамотность и функционально-графическая компетентность.

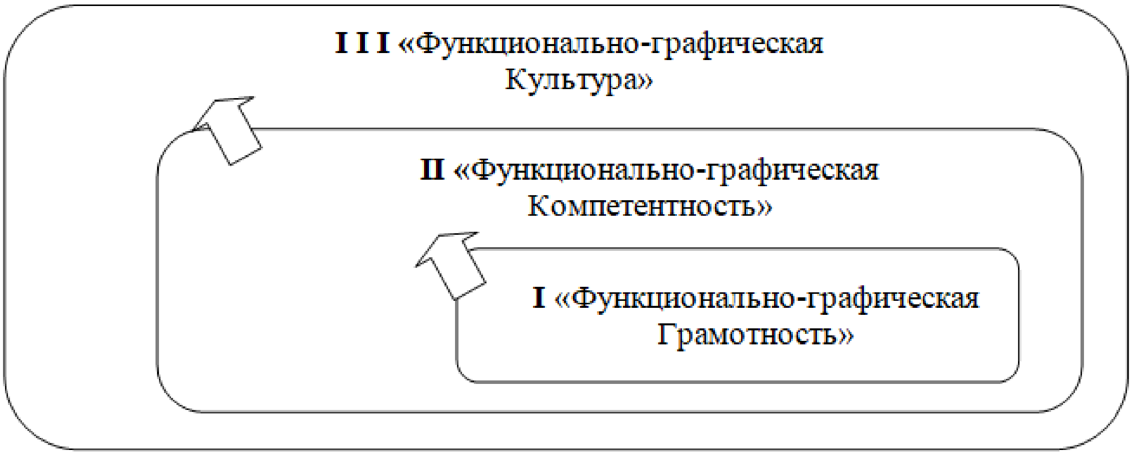

Рисунок 1 – Этапы формирования ФГК обучающихся

На первом этапе ФГК происходит знакомство с простейшими графическими знаниями. Он включает в себя приобретение функционально-графических умений построения и чтения графиков элементарных функций. Под «функционально-графическими умениями в курсе алгебры основной школы мы будем понимать два основных вида умений: умение выполнять изображение графика функции в соответствии с условием задачи; умение читать график функции» [42] .

«Под изображением графика функции мы будем понимать построение схематического чертежа графика функции по точкам, по ее свойствам или по формуле. Под чтением графика функции будем понимать описание свойств функции и нахождение формулы, задающей данную функцию» [42].

Автор отмечает, что «среди функционально-графических умений, при изучении курса алгебры и начал математического анализа, помимо изображения и чтения графиков элементарных функций (линейная, квадратичная, функция обратной пропорциональности) выделим следующие умения:

– оперировать понятиями функций (степенная, логарифмическая, показательная и тригонометрические функции);

– определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, т.е. распознавать графики элементарных функций;

– вычислять производные и первообразные элементарных функций, используя справочные материалы;

– исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций;

– строить графики многочленов и простейших функций с использованием аппарата математического анализа;

– вычислять в простейших случаях площади с использованием первообразной;

– использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения» [28].

«Применение графических умений, знаний и навыков в нестандартной ситуации, опираясь на знания функциональных особенностей объектов характеризуют второй этап, а именно «Функционально-графическая компетентность».

В процессе последующей графической деятельности, знания, преобладающие на ранних этапах, переосмысливаются. М.Ю. Пермякова утверждает, что графическая деятельность, способствует формированию новых способностей, содействующих переходу на следующий этап.

Третий этап – «процесс формирования графической культуры школьников, который тесно связан с развитием особых способов восприятия информации: пространственного и наглядно-образного мышления, пространственного представления, пространственного воображения, что подтверждается данными психолого-педагогических исследований (П.Я. Гальперин, И.А. Ройтман, Л.С. Фридман и др.)» [42].

1.3 Методическая система формирования графической культуры учащихся при изучении функций

«Под формированием графической культуры обучающихся понимается специально организованный педагогический процесс, направленный на приобретение обучающимися совокупности личностных достижений в области освоения и применения графических методов и способов преобразования информации» [26, С. 167]. Ниже, на рисунке 2, представлена структура процесса формирования графической культуры школьников.

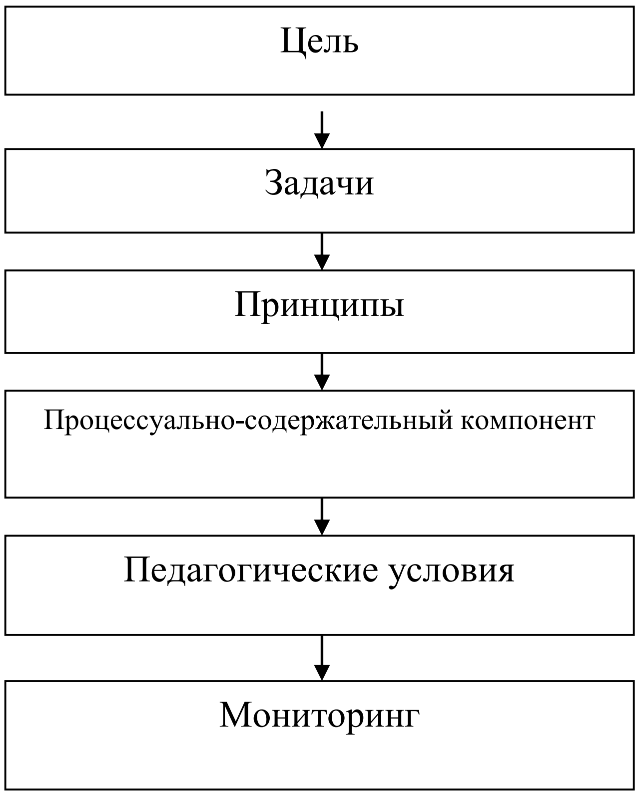

Рисунок 2 – Структура процесса формирования графической культуры школьников

«Процесс формирования графической культуры рассматривается как методическая система, составляющими элементами которой являются: целевой компонент (цели и задачи), дидактические принципы, педагогические условия, процессуально-содержательный компонент (методы, формы и средства обучения), а также диагностический компонент» [42, С. 61].

Е.А. Мраморнова считает, что целью процесса формирования графической культуры обучающихся, является повышение уровня графической культуры, знаний, умений и навыков с учетом индивидуальных особенностей, а основными задачами [40, С. 61]:

– формирование общего интеллектуального развития, логического, абстрактного, технического и аналитического мышления;

– формирование практических навыков, графической культуры, творческого потенциала личности».

В процессе формирования графической культуры методами и приёмами обучения могут быть:

– групповая;
– индивидуальная;
– олимпиады;
– викторины;
– факультативы и элективные курсы.

Средствами обучения могут быть:

– технические;
– дидактические;
– наглядные пособия и учебные модели;
– чертежные инструменты;
– графические упражнения.

А.А. Темербекова определяет «в качестве основополагающих следующие принципы формирования графической культуры обучающихся:

– принцип наглядности;
– принцип системности графических знаний;
– компьютеризация обучения;
– практическая направленность;

– принцип индивидуально – творческого подхода» [53, С. 167].

Она отмечает, что «принцип наглядности предполагает усовершенствование восприятия, осмысления и обобщения школьниками изучаемого материала. Принцип системности представляет поэтапный процесс приобретения обучающимися учебной графической информации. Компьютеризация обучения подразумевает применение информационных технологий на уроках алгебры и начал математического анализа. Практическая направленность ориентирована на применение на практике совокупности личных достижений обучающихся в области освоения графических методов и способов преобразования информации, а принцип индивидуально-творческого подхода означает удовлетворение интересов каждого обучающегося в коллективной (индивидуальной) творческой деятельности» [52].

А.П. Сысоев говорит о том, что «педагогическими условиями для процесса формирования графической культуры обучающихся будут выступать:

– формирование связи изучаемого материала с практической деятельностью учащихся;

– направленность образовательного процесса на развитие графических знаний школьников;

– индивидуальный подход к обучающимся, активизация личностного развития, создание уверенности учащегося при выполнении графических заданий и упражнений;

– формирование престижа знаний по графической подготовке необходимых к применению своей будущей специальности;

– организация учебно-производственной среды с учетом педагогических и эстетических требований» [53, С. 62].

Методами и приёмами обучения в процессе формирования графической культуры могут быть: групповая; индивидуальная; олимпиады; викторины; факультативы и элективные курсы.

Средства обучения:

– технические;

– дидактические;

– наглядные пособия и учебные модели;

– чертежные инструменты;

– графические упражнения.

Авторы статьи утверждают, что «методы и приемы обучения учащихся неразрывно связаны с дидактическими принципами и педагогическими условиями, поскольку, учитель в своей практической деятельности руководствуется ими для достижения поставленной цели и задач по повышению уровня графической культуры школьников. В процессе обучения учитель выбирает соответствующие конкретному методу формы и средства обучения» [53].

Выводы по первой главе

В работе приведены определения «графическая культура» и «функционально-графическая культура» школьника такими авторами как, Н.И. Кальницкая, С.А. Смирнов и В.В. Степаков.

Выделены основные этапы формирования функционально-графической культуры учащихся старшей школы. Выделена ступенчатая схема развития графической культуры в обучении математике.

Рассмотрена методическая система формирования графической культуры учащихся при изучении функций. Представлена иерархическая структура процесса формирования графической культуры школьников.

Глава 2 Методические основы формирования графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы

2.1 Анализ школьных учебников алгебры и начал математического анализа с точки зрения исследуемой проблемы

В таблице 1 представлено содержание учебника алгебры и математического анализа А. М. Мордковича.

Таблица 1 – Содержание темы в учебнике 10 класса А.Г. Мордковича

Содержание учебного материала	
Базовый уровень	*Углубленный уровень*
– «Свойства функций. – Периодические функции. – Обратная функция. – Тригонометрические функции числового и углового аргумента. – Построение графика функции $y = mf(x)$. – Построение графика функции $y = f(kx)$. – График гармонического колебания. – Функции $y = tg\ x,\ y = ctg\ x$, их свойства и графики. – Обратные тригонометрические функции. – Методы решения тригонометрических уравнений (графический). Построение графиков функций» [35].	– «Определение числовой функции и способы ее задания. – Свойства функций. – Периодические функции. – Обратная функция. – Тригонометрические функции числового и углового аргумента. – Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики. Построение графика функции $y = mf(x)$. – Построение графика функции $y = f(kx)$. – График гармонического колебания. Функции $y = tg\ x,\ y = ctg\ x$, их свойства и графики. – Обратные тригонометрические функции. – Методы решения тригонометрических уравнений (графический). Уравнение касательной к графику функции. – Применение производной для исследования функций. Построение графиков функций» [35].

«Базовые знания (знакомые из школьного курса математики 7-9 классов): линейные уравнения; понятие линейной функции $y = kx$ и ее график, взаимное расположение графиков линейной функции; степень с натуральным показателем; функция $y = kx^2$ ее свойства и график; введение записи $y = f(x)$; исследование функций на монотонность; графики функций при решении уравнений, систем и неравенств» [41].

В таблице 2 представлено содержание учебника алгебры и математического анализа А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.Б. Полонского, М.С. Якира.

Таблица 2 – Содержание темы в учебнике 10 класса авторов А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.Б. Полонского, М.С. Якира

Содержание учебного материала	
Базовый уровень	*Углубленный уровень*
– «Наибольшее и наименьшее значения функции; – Чётные и нечётные функции; – Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований; – Обратная функция; – Степенная функция с натуральным показателем; – Степенная функция с целым показателем; – Тригонометрические функции, их свойства и графики; – Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$. – Признаки возрастания и убывания функции; – Точки экстремума функции; – Применение производной при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции. Построение графиков функций» [31].	– «Функция и её свойства. – Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований. – Обратная функция. – Степенная функция с натуральным показателем. – Степенная функция с целым показателем. – Функциональный подход Коши. – Тригонометрические функции, их графики и свойства. Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$. – Признаки возрастания и убывания функции. – Точки экстремума функции. – Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. – Построение графиков функции» [31].

В таблице 3 представлено содержание темы в учебнике Г.К. Муравина, К.С. Муравина и О.В. Муравиной.

Таблица 3 – Содержание темы в учебнике 10 класса авторов Г.К. Муравина, К.С. Муравина и О.В. Муравиной

Содержание учебного материала	
Базовый уровень	*Углубленный уровень*
– «Понятие функции; – рямая, гипербола, парабола и окружность; – непрерывность и монотонность функций; – квадратичная и дробно-линейная функции; – Преобразование графиков; – Степенная функция при натуральном показателе; – Функция $y = a^x$. – Тригонометрические функции, их свойства и графики; – Тригонометрические функции двойного угла; – Решение тригонометрических уравнений (графический метод); – Функции и графики» [38] .	– «Функции: прямая, гипербола, парабола и окружность, их свойства и графики; – Непрерывность и монотонность функций; – Квадратичная и дробно-линейная функции; – Преобразование графиков; – Степенная функция при натуральном показателе; – Функция $y = a^x$. – Тригонометрические функции, их свойства и графики; – Тригонометрические функции двойного угла; – Решение тригонометрических уравнений (графический метод); – Функции и графики» [38] .

При рассмотрении учебников Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [38], А.Г. Мордковича [35] и А.Г. Мерзляка [31], понятие функции и способы ее задания, а также построение графиков ранее изученных функций происходит на этапе повторения и на базовом и на углубленном уровнях.

Помимо этого, в учебнике А.Г. Мерзляка [31] подробно рассматриваются свойства линейной, квадратичной функции, функции обратной пропорциональности и т.д.

А.Г. Мордкович [35] на изучение темы «Степенная функция и ее график» отводит 9 часов, А.Г. Мерзляк [31] и Г.К. Муравин [38] на изучение этой темы отводят по 11 часов.

На изучение тем «Тригонометрические функции и их графики», каждый из авторов предложенных учебников отводят от 10-17 часов.

В таблице 4 представлено содержание темы в учебнике алгебры и начал математического анализа 11 класса автора А.Г. Мордковича.

Таблица 4 – Содержание темы в учебнике алгебры и начал математического анализа 11 класса автора А.Г. Мордковича

Содержание учебного материала	
Базовый уровень	*Углубленный уровень*
– «Функции $y = \sqrt[n]{x}$,их свойства и графики; – степенные функции,их свойства и графики; – показательная функция, ее свойства и график; – логарифмическая функция, её свойства и график; – общие методы решения уравнений; – задачи с параметрами» [37].	– «Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики; – степенные функции, их свойства и графики; – показательная функция, ее свойства и график; – логарифмическая функция, её свойства и график; – уравнения с модулями; – уравнения с двумя переменными; – системы уравнений; – общие методы решения уравнений; – задачи с параметрами» [37].

В таблице 5 представлено содержание темы в учебник алгебры и начал математического анализа 11 класса авторов А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.Б. Полонского, М.С. Якира

Таблица 5 – Содержание темы в учебнике 11 класса авторов А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.Б. Полонского, М.С. Якира

Содержание учебного материала	
Базовый уровень	*Углубленный уровень*
«Показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики. Показательные и логарифмические уравнения. Примеры более сложных показательных и логарифмических уравнений» [32].	«Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция. Показательные уравнения, неравенства. Логарифмическая функция и её свойства. Производные показательной и логарифмической функций. Основные методы решения уравнений» [32].

В таблице 6 представлено содержание темы в учебнике алгебры и начал математического анализа 11 класса авторов Г.К. Муравина, К.С. Муравина и О.В. Муравиной.

Таблица 6 – Содержание темы в учебнике 11 класса авторов Г.К. Муравина, К.С. Муравина и О.В. Муравиной

Содержание учебного материала	
Базовый уровень	*Углубленный уровень*
– «Касательная к графику; – Точки возрастания, убывания и экстремума функции; – наибольшее и наименьшее значения функции; – уравнения и неравенства (графический метод решения); – системы уравнений; – задания с параметрами» [39] .	– «Непрерывность функций; – асимптоты графиков функций; – касательная к графику функции; – точки возрастания, убывания и экстремума функции; – наибольшее и наименьшее значения функции; – уравнения; – системы уравнений; – задания с параметрами» [39].

В учебнике А.Г. Мерзляка [32] на изучение данных тем отводится по 14 часов, а у автора А. Г. Мордковича [37] – 17 часов.

В учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [39] в 11 классе вводится понятие касательная к графику, асимптоты графиков функций. Авторы в курсе алгебры и начал математического анализа 11 класса подробно описывают свойства функций. Первоначально о точках возрастания и убывания, экстремумах функций. Далее об уравнениях и неравенствах, решаемых графическим методом. Кроме этого, в этом учебнике рассматриваются примеры решения заданий с параметрами при помощи графического метода.

В учебниках А. Г. Мерзляка [32] много времени уделяется решению уравнений графическим методом.

Рассматриваются задачи с модулем и параметром одновременно.

А.Г. Мордкович в своем учебнике [37] знакомство обучающихся со степенной функции начинает с функции $y = \sqrt[n]{x}$, говоря о ее свойствах и графике. Рассматривает уравнения с модулями, уравнения с двумя переменными, системы уравнений и их общие методы решения уравнений. Задачи с параметрами, решаемые графическим методом.

В данном параграфе представлено содержание теоретического материала в курсе алгебры и начал математического анализа 10-11 классов. По теме исследования нами были проанализированы учебники следующих авторов: А.Г. Мордкович [35, 37], А.Г. Мерзляк [31, 32] и Г.К. Муравин, О.В. Муравина [38, 39].

2.2 Из опыта работы учителей, методистов по данной теме исследования

Опишем педагогический опыт [41] учителя математики МБОУ СОШ №1 г. Новоалтайска Алтайского края, участницы фестиваля методических идей «Моя педагогическая инициатива» Рыжковой Инессы Владимировны на примере модели, описанной в 1.3.

Автор демонстрирует педагогический опыт по формированию графической культуры учащихся на уроках алгебры и начал математического анализа посредством использования компьютерной программы «Живая математика». Автор демонстрирует рассредоточенную по указанным шести блокам систему упражнений. Концепцию развития графической культуры автор реализует посредством использования компьютерной программы «Живая математика». Она считает, что программа продуктивна и поэтому может широко использоваться при любых видах и форм учебной деятельности.

По мнению автора, использование компьютерной программы «Живая математика» позволяет «развить у учеников навыки восприятия математических объектов (фигур, связанных с ними величин, формулировок утверждений, доказательств, вопросов и т.п.) и проведения различных активных действий (построений, наблюдений, формирования предположений, их подтверждений и опровержений, измерений, сравнений, доказательств и т.д.)».

Работая с учебно-методическим комплексом «Живая математика» учитель наглядно может:

– дать объяснение учебного материала при помощи точных чертежей на экране;

– проводить, среди обучающихся исследовательскую деятельность при помощи данного УМК;

– повысить интерес к изучению математики;

– больше времени на выполнение творческих заданий, при котором развивается креативное мышление;

– возможность дифференцированного обучения.

Обучающиеся получают возможность:

– оперирования понятиями изученных функций (степенной, логарифмической, показательной, тригонометрической);

– определения значений функций по заданному значению аргумента при различных способах задания;

– выполнения графических изображений изученных функций, а также описание характеристика их свойств по данному графику;

– графического решения уравнений, систем уравнений с использованием свойств функций, заданных графически;

– вычисления производных и первообразных элементарных функций;

– построения графиков многочленов и простейших функций с использованием аппарата математического анализа;

– использования приобретенных знаний и умений в практической деятельности, для решения прикладных задач, задач на наибольшие и наименьшие значения, социально-экономических и физических задач;

– вычисления в простейших случаях площади с использованием первообразной.

Приведем пример формирования графической культуры на занятиях автора элективного курса «Высшая математика для начинающих» в 10 классе с помощью программы «Живая математика».

Работая с учебно-методическим комплексом «Живая математика» учитель наглядно может:

– дать объяснение учебного материала при помощи точных чертежей на экране;

– проводить, среди обучающихся исследовательскую деятельность при помощи данного УМК;

– повысить интерес к изучению математики;

– больше времени на выполнение творческих заданий, при котором развивается креативное мышление;

– возможность дифференцированного обучения.

У каждого ученика на рабочем столе файлы с программой и задания.

Перед решением данной задачи автор предлагает выполнить такой пример.

Пример 1. Дана функция $\text{y} = f(\text{x}),\ f(\text{x}) = x^2 - 9$.

Найдем $f(\text{x}) = 0$.

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$\text{x} = 3$ или $\text{x} = -3$

Теперь найдем первообразную для функции $\text{y} = f(\text{x}),\ F(\text{x}) = \frac{x^3}{3} - 9\text{x} + \text{C}$

Построим график $\text{y} = F(\text{x})$ с помощью «Живой математики».

Алгоритм работы с программой «Живая математика»

– на рабочем столе найти значок «Живая математика»;

– открыть программу «Живая математика»;

– найти в файловой строке «Графики»;

– выбираем «Графики»;

– выбираем «Задать систему координат»;

– снова в файловой строке открываем «Графики»;

– выбираем «График новой функции»;

– набираем (x^3 ÷ 3) − 9 ∗ x;

– нажимаем «готово».

Появляется график функции у = F(x).

Далее, нужно проанализировать, где же находятся нули функции у = f(x) или корни уравнения f(x) = 0 на графике певообразной у = F(x)?

Ответ очевиден, это точки максимума и минимума на заданных интервалах.

Тогда, ответим на вопрос нашей исходной задачи. **Ответ: 4.**

Задача 1. На рисунке 3 изображён график функции $y = F(x)$ и одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [-2; 5].

Решение.

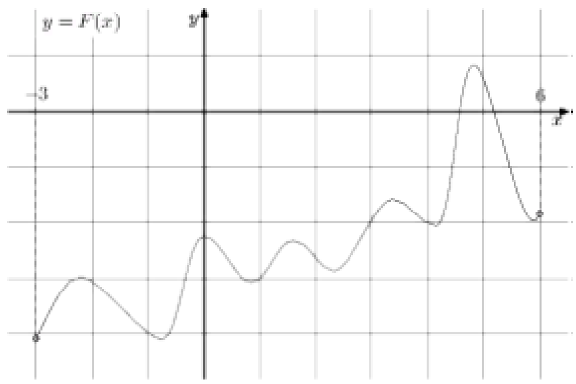

Рисунок 3 – График к задаче 1.

Автор предлагает также выполнить задачи из ЕГЭ решение уравнений с параметром с помощью «Живая математика».

Пример 2. Дана функция у = f(x), f(x) = $x^2 - 25$.

Найдем f(x) = 0.

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$

$\text{x} = 5$ или $\text{x} = -5$

Теперь найдем первообразную для функции $y = f(\text{x}), F(\text{x}) = \frac{x^3}{3} - 25\text{x} + \text{C}$

Построим график $\text{y} = F(\text{x})$ с помощью «Живой математики».

Алгоритм работы с программой «Живая математика»

– на рабочем столе найти значок «Живая математика»;

– открыть «Живую математику»;

– найти в файловой строке «Графики»;

– выбираем «Графики»;

– выбираем «Задать систему координат»;

– снова в файловой строке открываем «Графики»;

– выбираем «График новой функции»;

– набираем $(\text{x}^3 \div 3) - 25 * \text{x}$;

– нажимаем «готово».

Появляется график функции $\text{y} = F(\text{x})$.

Задача 2. Найдите все значения параметра а $|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a,$ при которых уравнение имеет ровно три корня?

Решение:

– на рабочем столе найти значок «Живая математика»;

– открыть «Живую математику»;

– найти в файловой строке «Графики»;

– выбираем «Графики»;

– выбираем «Задать систему координат»;

– снова в файловой строке открываем «Графики»;

– выбираем «График новой функции»;

– набираем «Функции»;

– выбираем «abs»(x)+«abs»((x+1)÷(3*x-1);

– нажимаем «готово»;

– появляется график функции $y = |x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right|$.

При $a = 2$ уравнение имеет ровно три корня.

На рисунке 4 изображен график функции $y = |x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right|$.

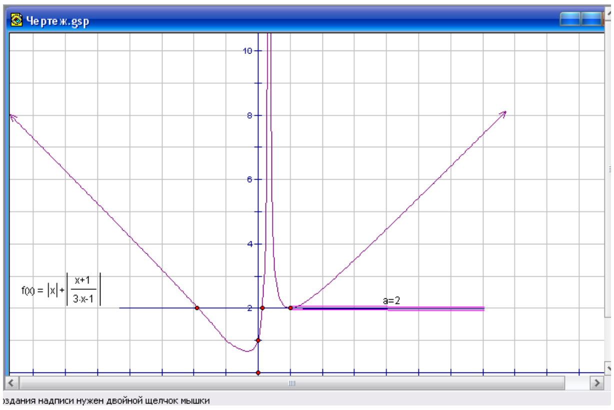

Рисунок 4 – График функции $y = |x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right|$.

Пример 3. Дана функция $\text{y} = f(\text{x})$, $f(\text{x}) = x^2 - 16$.

Найдем $f(\text{x}) = 0$.

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$\text{x} = 4 \text{ или } \text{x} = -4$$

Теперь найдем первообразную для функции $\text{y} = f(\text{x})$, $F(\text{x}) = \frac{x^3}{3} - 16\text{x} + \text{C}$

Построим график $\text{y} = F(\text{x})$ с помощью «Живой математики».

Алгоритм работы с программой «Живая математика»:

– на рабочем столе найти значок «Живая математика»;

– открыть «Живую математику»;

– найти в файловой строке «Графики»;

– выбираем «Графики»;

– выбираем «Задать систему координат»;

– снова в файловой строке открываем «Графики»;

– выбираем «График новой функции»;

– набираем $(x^3 \div 3) - 16 * x$;

– нажимаем «готово»;

– появляется график функции $y = F(x)$.

Задача 3. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $5sinx + 2cosx = a$ имеет решение.

Решение представлено на рисунке 5.

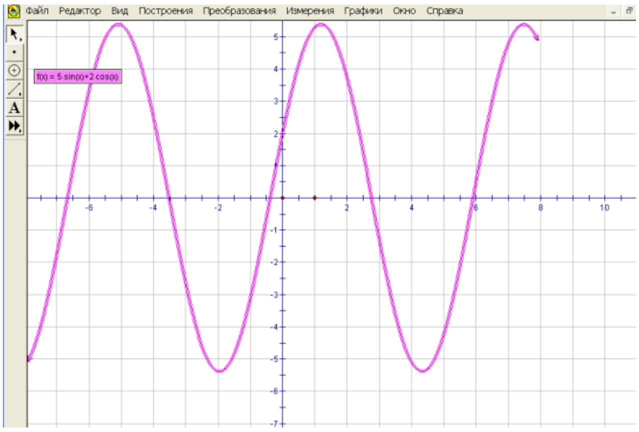

Рисунок 5 – Решение к задаче 3.

Пример 4. Дана функция $y = f(x)$, $f(x) = x^2 - 81$.

Найдем $f(x) = 0$.

$x^2 - 81 = 0$

$x^2 = 81$

$x = 9$ или $x = -9$

Теперь найдем первообразную для функции $y = f(x)$, $F(x) = \frac{x^3}{3} - 81x + C$

Построим график $y = F(x)$ с помощью «Живой математики».

Алгоритм работы с программой «Живая математика»

– на рабочем столе найти значок «Живая математика»;

– открыть «Живую математику»;

– найти в файловой строке «Графики»;

– выбираем «Графики»;

– выбираем «Задать систему координат»;

– снова в файловой строке открываем «Графики»;

– выбираем «График новой функции»;

– набираем (x^3 ÷ 3) − 81 ∗ x;

– нажимаем «готово».

Появляется график функции у = F(x).

Задача 4. Решить уравнение $\sqrt{a(3^x+1)+9} = 2-3^x$.

Выполним замену $t = 3^x$, $t > 0 \leftrightarrow \sqrt{a(t+1)+9} = 2-t$.

На рисунке 6 изобразим множество точек, удовлетворяющих полученной системе:

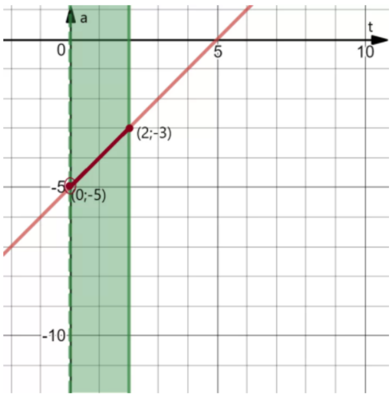

Рисунок 6 – График к заданию 3.

Данному уравнению равносильна система:

$$\begin{cases} a(t+1)+9 = (2-t)^2, \\ 2-t \geq 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{(t-5)(t+1)}{t+1}, \\ 0 < t \leq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = t - 5, \\ 0 < t \leq 2. \end{cases}$$

При $a \in (-5;\ -3] \leftrightarrow t = a + 5$, сделаем обратную замену $3^x = a + 5, \leftrightarrow$ $x = \log_3(a + 5)$.

При $a \in (-\infty;\ -5] \cup (-3;\ +\infty)$ корней нет.

Ответ: При $a \in (-5;\ -3] \leftrightarrow x = \log_3(a + 5)$.

При решении задачи №4, обучающиеся оперируют понятиями логарифмических функций, определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции. Графически решать уравнения и системы уравнений, используя свойства функций данных графиков.

В статье К. М. Григорян «Квадратичные и сводимые к ним уравнения с параметрами» [11] рассматривает: типы задач с параметрами; решения некоторых квадратичных и сводимых к ним уравнений с параметрами графическим и аналитическим методами. Так как не существует единого алгоритма решения таких уравнений, автор демонстрирует уравнения с заданным условием в области определения для множества решений и уравнения с решением при всех допустимых значениях параметра.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Моя педагогическая инициатива» [41] представлен педагогический опыт учителя математики Рыжковой И.В. по теме «Графический метод решения уравнений с параметрами» посредством использования компьютерной программы «Живая математика».

В элективном курсе Е.Ю. Пушкаревой «Графический способ решения заданий с параметрами» [41] на тему «Определение параметра. Алгоритм решения заданий с параметром графическим способом» отводится 2 часа, в течение которых рассматривается определение параметра, построение графика функции.

В элективном курсе В.А. Ермеева «Графический метод решения задач с параметрами на ЕГЭ» [41] представлен блок «Различные методы решения уравнений с параметром», в котором рассматриваются следующие задачи: на нахождение значений параметра при различном количестве корней уравнения; нахождение только положительных значений параметра *a*; нахождение всех значений параметра *a* при которых уравнение имеет решение, не имеет корней, и т.д.

Таким образом, анализ темы в статьях [11] и опыт изучения темы посредством элективных курсов [41], показывает интерес учителей и исследователей к теме «Графический метод решения уравнений с параметрами».

2.3 Формирование графической культуры учащихся на элективном курсе «Графический метод в задачах с параметром»

Целью представленного элективного курса «Графический метод в задачах с параметром» является расширение знаний учащихся по одному из самых сложных разделов школьной математики – решению задач с параметрами; углубление знаний учащихся по математике в аспекте решения графическим методом задач с параметрами.

Актуальность предлагаемой программы определяется:

– материалом, способствующем формированию теоретико-группового подхода к изучению математики;

– задачами, которые предлагаются на выпускных экзаменах, различного уровня олимпиадах;

– немногочисленностью задача с параметром в учебниках алгебры и начал анализа.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

– задачи с параметрами стали неотъемлемой частью единого государственного экзамена;

– школьная программа уделяет недостаточно внимания решению этих задач.

Задачи курса:

– расширение представлений у учащихся об уравнениях и неравенствах с параметрами;

– знакомство с алгоритмами решения задач с параметрами;

– повышение уровня математической подготовки учащихся через решение задач с параметрами;

– развитие логического мышления, умений анализировать, сравнивать, обобщать;

– изучение основных типов задач с параметрами и отработка решения этих задач графическим методом.

Программа элективного курса рассчитана на 34 часа.

Базовые знания:

– понятие линейного уравнения;

– понятие квадратного уравнения;

– понятие дробно-рационального уравнения;

– понятие иррационального уравнения;

– понятия тригонометрических уравнений;

– понятие показательного уравнения;

– понятие логарифмического уравнения.

Рассматриваемые сведения:

– «графический метод решения линейного уравнения с параметрами;

– графический метод решения квадратного уравнения с параметрами;

– графический метод решения линейных уравнений с параметрами, содержащие знак модуля;

– графический метод решения логарифмических уравнений с параметрами;

– графический метод решения показательных уравнений с параметрами» [35].

Был проведен анализ содержания темы в следующих учебниках, рекомендованных Минобрнауки РФ: А.Г. Мордковича [35], А.Г. Мерзляка [31] и Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [38].

Данная тема изучается в курсе алгебры и начал математического анализа 11 класса. В учебнике А.Г. Мордковича она разбита на два параграфа §27 «Общие методы решения уравнений» и §34 «Задачи с параметрами».

В тематическом планировании на изучении тем отводится от 4-х до 7 часов.

Авторы Г.К. Муравин и О.В. Муравина посвящают этой теме §18 «Задания с параметрами» (Глава 5. «Уравнения, неравенства и их системы»). На изучение авторы отводят 4 часа.

А.Г. Мерзляк рассматривает данную тему в §26 «Основные методы решения уравнений».

Определение параметра приводится в учебнике А.Г. Мордковича [35]:

Определение. «Если дано уравнение $f(x;a)=0$, *которое* нужно решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то $f(x;a)=0$ называют уравнением с параметром a» [35, С. 298].

Г.К. Муравин вводит следующее определение параметра.

Определение. «Буквы, заменяющие в уравнении или неравенстве конкретные числовые данные, называют параметрами» [38, С. 161].

Позже автор рассматривает уравнения и неравенства с параметрами.

«Графический метод решения уравнений с параметрами работает в тех случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве корней в зависимости от значений параметра или определения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно» [11].

«Графическое представление уравнения или системы уравнений с параметром обладает несколькими несомненными преимуществами: во-первых, построив график (графики), можно определить, как влияет на них и, соответственно, на решение уравнения изменение параметра; во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи и, в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве корней уравнения, об их границах» [11].

«При решении задач с параметрами требуется, кроме хорошего знания стандартных методов решений уравнений и неравенств, умение проводить довольно разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решений и не приобрести лишних» [41].

В учебнике А.Г. Мордковича [35] отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны:

– формулировать определение уравнений с параметрами;
– строить графики показательной и тригонометрических функций;
– графически решать уравнения с параметрами.

«Для профильного уровня по программе А.Г. Мордковича отводится 4 часа, в течение которых рассматриваются определение уравнение с параметром, различные методы решения уравнений с параметром, линейные уравнения с параметром, квадратные уравнения с параметром, логарифмические уравнения с параметром, тригонометрические уравнения с параметром» [35].

Содержание элективного курса

Тема 1. Понятие о задачах с параметром. Графический метод решения задач с параметром.

Цель – определить понятие параметра; рассмотреть виды уравнений и неравенств, содержащие параметр; рассмотреть графический метод при решении задач с параметрами; определить, в каких случаях удобно использовать этот метод.

«Рассмотрим основные типы задач с параметрами. К первому типу относятся уравнения, неравенства и их системы, которые нужно решить или для любого значения параметра. Ко второму типу относятся уравнения, неравенства и их системы, которые нужно решить для значений параметра принадлежащих заданному множеству. Третий тип включает в себя уравнения, неравенства и их системы, в которых требуется определить число решений в зависимости от параметра. К четвертому типу относятся уравнения, неравенства и их системы, для которых требуется найти значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства и их системы имеют заданное число решений, или не имеют решения, или имеют бесконечное множество решений. Пятый тип включает в себя уравнения, неравенства и их системы, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения» [11].

Далее рассматривается графический метод решения задач с параметрами. Чаще всего этот метод используется в задачах, в которых требуется определить количество корней в зависимости от значений параметра или найти значения параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

Тема 2. Решение линейных уравнений и неравенств с параметром графическим методом.

Цель – рассмотреть алгоритм решения линейных уравнений с параметрами; решение стандартных линейных неравенств, простейших неравенств с параметрами, исследование полученного ответа.

«Алгоритм решения графическим методом линейных уравнений с параметром: находим область определения уравнения; выражаем α как функцию от x; в системе координат строим график функции α (x) для тех значений x, которые входят в область определения данного уравнения; находим точки пересечения прямой $\alpha = c$, с графиком функции α (x); если прямая $\alpha = c$ пересекает график $\alpha(x)$, то определяем абсциссы точек пересечения для этого достаточно решить уравнение c = α(x) относительно x; записываем ответ» [41].

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $-x + a = 2 - x$ имеет бесконечно много корней?

Построим графики функций $y = 2 - x$ и $y = -x + a$. При $a = 2$, уравнение имеет бесконечное множество решений, при $a \neq 2$ прямые параллельны, то есть уравнение не имеет решений.

Пример 2. Решите уравнение $ax = 1$. Если $a = 0$, то корней нет, если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Пример 3. Решите неравенство $\mathrm{ax} < 5$. Если $\mathrm{a} > 0$, то $x < \frac{5}{a}$; если $\mathrm{a} < 0$, то $x > \frac{5}{a}$; если $\mathrm{a} = 0$, то $x \in R$.

Пример 4. Решите неравенство $(\mathrm{m} - 1)\mathrm{x} < 5\mathrm{m}$. Если $\mathrm{m} - 1 > 0$, т.е. $\mathrm{m} > 1$, то $x < \frac{5m}{m-1}$, если $\mathrm{m} - 1 < 0$, т.е. $\mathrm{m} < 1$, то $x > \frac{5m}{m-1}$, если $\mathrm{m} - 1 = 0$, т.е. $\mathrm{m} = 1$, то $x \in R$.

Пример 5. Решить неравенство $(\mathrm{a} - 1)\mathrm{x} > 6$. Если $\mathrm{a} - 1 > 0$, т.е. $\mathrm{a} > 1$, то $x > \frac{6}{a-1}$, если $\mathrm{a} - 1 < 0$, т.е. $\mathrm{a} < 1$, то $x < \frac{6}{a-1}$, если $\mathrm{a} - 1 = 0$, т.е. $\mathrm{a} = 1$, то решений нет.

Тема 3. Решение квадратных уравнений и неравенств с параметром.

Цель – определить подходы к решению основных типов квадратных уравнений с параметром; отработать навыки умения применять теорему Виета и обратную ей; рассмотреть примеры с ограничениями, накладываемыми на значение корней квадратного уравнения, на сумму корней и на знак их произведения; алгоритм решения квадратных неравенств с параметром; решение неравенств второй степени, содержащих параметры.

Пример 6. Найти число корней уравнения в зависимости от параметра a: $x(x-1)=a$.

Построим график функции стоящей в левой части $y=x(x-1)$. График данной функции нам известен – это парабола, ветви направлены вверх, корни ее легко найти $x_1=0$ и $x_2=1$, отсюда можно найти координаты вершины: $x_{\text{в}}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$; $y_{\text{в}}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{4}$. При $a<-\frac{1}{4}$ решений нет; при $a=-\frac{1}{4}$ уравнение имеет единственное решение; при $a>-\frac{1}{4}$ уравнение имеет два решения.

Тема 4. Решение графическим методом уравнений и неравенств с параметром, содержащих знак модуля.

Цель - отработать навыки решения графическим методом уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. При решении уравнений с модулем, содержащих параметр, графическим способом необходимо построить графики функций и, при различных значениях параметра, рассмотреть все возможные случаи [11].

Пример 7. «Решите уравнение $|x| = a$. Ответ: если $a < 0$, то нет корней, $a > 0$, то $x = a$, $x = -a$, если $a = 0$, то $x = 0$» [38].

Пример 8. Сколько корней имеет уравнение $||x|-2|=\mathbf{a}$ в зависимости от параметра a?

«Если $\mathrm{a}=0$, то прямая y a совпадает с осью Ox и имеет с графиком функции две общие точки; значит, исходное уравнение имеет два корня. Если $0 < a < 2$, то прямая $y = \alpha$ имеет с графиком функции $y = ||x| - 2|$ четыре общие точки, исходное уравнение имеет четыре корня. Если $a = 2$, то прямая $y = 2$ имеет с графиком функции три общие точки, исходное уравнение имеет три корня. Если $a > 2$, то прямая $y = a$ будет иметь с графиком исходной функции две точки, то есть данное уравнение будет иметь два корня» [38].

На рисунке 7 представлено решение данного уравнения графическим методом.

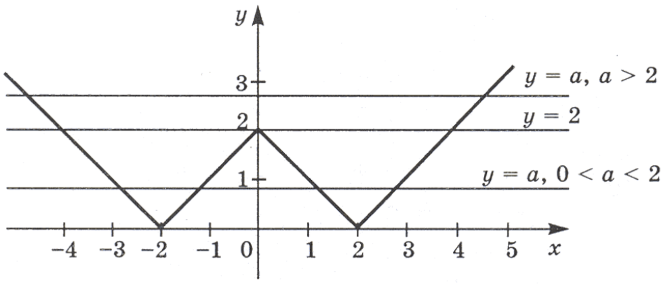

Рисунок 7 – Графический метод решения уравнения $||x| - 2| = \mathbf{a}$

При решении данной задачи обучающиеся проводят исследования, связанные с изучением свойств функций с использованием компьютера. Отрабатываю навык определения значений функции по значению аргумента при различных способах задания функции, т.е. реализуют умения распознавать графики элементарных функций, выполняют построение изученных функций, удовлетворяющих приведенному набору условий (промежутки возрастания / убывания, значение функции в заданной точке, точки экстремумов, асимптоты, нули функции и т.д.).

Пример 9. Сколько корней имеет уравнение $\mathbf{|x^2 - 2|x| - 3| = \boldsymbol{a}}$ в зависимости от параметра a? График функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ изображен на рисунке 8.

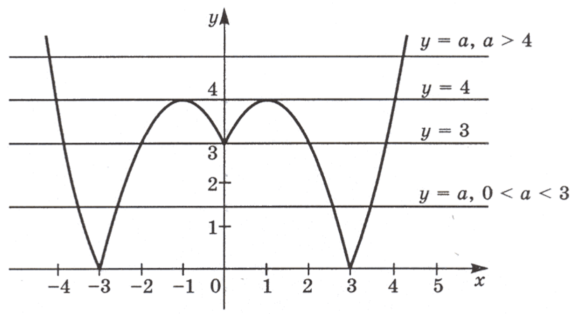

Рисунок 8 – Графический метод решения примера 9

«Если a = 0, то прямая у = a совпадает с осью Ох и имеет с графиком функции у = | х2 – 2| х | – 3 | две общие точки, а также прямая у = a будет иметь с графиком функции у = | x^2 – 2| х | – 3 | две общие точки при a > 4. Значит, при a = 0 и a > 4 исходное уравнение имеет два корня. Если 0 < a < 3, то прямая у = a имеет с графиком функции у = | x^2 – 2| х | – 3 | четыре общие точки, а также прямая у=a будет иметь с графиком построенной функции четыре общие точки при a = 4. Значит, при 0 < a < 3, a = 4 исходное уравнение имеет четыре корня. Если a = 3, то прямая у = a пересекает график функции в пяти точках; следовательно, уравнение имеет пять корней. Если 3 < a < 4, прямая у = α пересекает график построенной функции в шести точках; значит, при этих значениях параметра исходное уравнение имеет шесть корней. Если a < 0, уравнение корней не имеет, так как прямая у = α не пересекает график функции у = | x^2 – 2| х | – 3 |» [32].

При решении таких задач обучающиеся оперируют понятиями квадратичной функции, определения значений функции по значению аргумента при различных способах задания функции, т.е. распознаванием графиков элементарных функций.

Тема 5. Графический метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств с параметром.

Цель - вывести алгоритм решения показательных уравнений с параметром графическим методом.

Пример 10. «Решить уравнение $9^{-|x+1|}-3^{1-|x+1|}-a=0$.

Замена $t=3^{-|x+1|}$, получим $t^2-3t-a=0$, где $t\in(0;1]$. На рисунке 9 изображён график функции $a(t)=t^2-3t$, при $t\in(0;1]$ в системе координат (tOa). При $a<-2$ и $a\geq 0$ корней нет. Решим уравнение $t^2-3t-a=0$. При $a\in[-2;\ 0)$ $t_1=\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}$; $t_2=\frac{3+\sqrt{9+4a}}{2}$, так как $t\in(0;1]$, то t_2 не подходит. Выполним обратную замену: $3^{-|x+1|}=\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}$; $-|x+1|=\log_3\left(\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}\right)$; $|x+1|=-\log_3\left(\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}\right)$; $x=-1\pm\log_3\left(\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}\right)$.

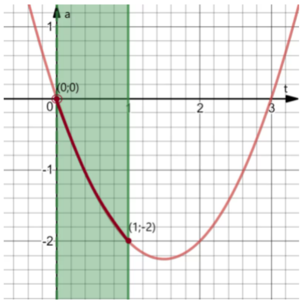

Рисунок 9 – Графический метод решения уравнения $9^{-|x+1|} - 3^{1-|x+1|} - a = 0$

Ответ: $x = -1 \pm \log_3\left(\frac{3-\sqrt{9+4a}}{2}\right)$ при $a \in [-2;\ 0)$» [2].

В ходе выполнения данного задания, обучающиеся графически решают уравнения, определяют и учатся описывать свойства функции по ее графику.

Пример 11. «Решить уравнение $\sqrt{a(3^x+1)+9} = 2 - 3^x$.

На рисунке 10 изображены множество точек, которые удовлетворяют полученной системе.

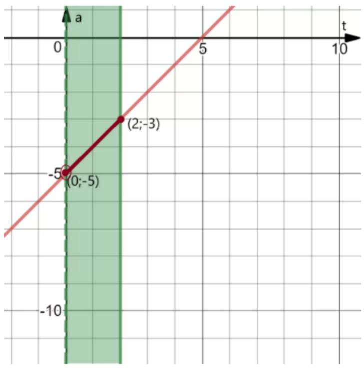

Рисунок 10 – Графический метод решения уравнения

$\sqrt{a(3^x+1)+9} = 2 - 3^x$

Выполним замену $t = 3^x$, $t > 0 \leftrightarrow \sqrt{a(t+1)+9} = 2 - t$. Данному уравнению равносильна система:

$$\begin{cases} a(t+1)+9=(2-t)^2, \\ 2-t \geq 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a = t-5, \\ 0 < t \leq 2. \end{cases}$$

Ответ: При $a \in (-5;\ -3] \leftrightarrow t = a + 5$, сделаем обратную замену $3^x = a + 5, \leftrightarrow x = \log_3(a+5)$. При $a \in (-\infty;\ -5] \cup (-3;\ +\infty)$ корней нет» [41].

При решении данной задачи обучающиеся оперируют понятиями логарифмической функции, определения значений функции по значению аргумента при различных способах задания функции, графическим решением уравнения.

В результате изучения темы «Графический метод решения уравнений с параметрами» ученик должен уметь:

– строить графики линейной, квадратичной, показательной и тригонометрических функций;

– решать графическим методом уравнения с параметрами.

Обоснование целесообразности использования технологии алгоритмов для реализации темы «Графический метод решения уравнений с параметрами» на практике.

«Алгоритм – это общепринятое предписание о выполнении в определенной последовательности элементарных операций для решения любой из задач, принадлежащих к некоторому классу.

Алгоритмизация обучения увеличивает удельный вес самостоятельной работы учащихся и способствует совершенствованию управления учебным процессом.

Управление процессом обучения предполагает: планирование, организацию, регулирование (стимулирование), контроль, оценку и анализ результатов.

Технология обучения алгоритмов характеризуется следующими свойствами:

– определенности;

– массовости;
– элементарности и дискретности шагов;
– результативности;
– оптимальности;
– детерминированности» [22].

Иванова Т.А. утверждает, что «правило есть «свернутый» алгоритм. Любой алгоритм можно назвать правилом, но не любое правило – алгоритмом. Цели применения алгоритмов и правил совпадают: формирование общих способов решения однотипных задач. С точки зрения методики обучения решению однотипных задач их назначение различно» [22, С. 144].

«Алгоритм является более эффективным средством управления познавательной деятельностью учащихся на начальном этапе вводимого метода, так как он имеет развернутый вид. Правило является средством управления деятельностью учащихся на заключительном этапе - при свертывании отдельных операций алгоритма, оно способствует лучшему запоминанию способа решения задач» [22, С. 185].

В теории формирования умственных действий алгоритм, правило есть не что иное как ориентировочная основа умственного действия, соответствующая общему методу решения однотипных задач.

В ней сначала ученик выполняет новое действие как внешнее, с какими-то материализованными объектами; и лишь постепенно это действие становится внутренним, психическим, умственным»; это представлено в таблице 7 [22].

Е.И. Лященко считает, что «алгоритм – понятное предписание, указывающее, какие операции и в какой последовательности необходимо выполнить с данными, чтобы решить любую задачу данного типа» [30, С. 66]. «Всякий алгоритм описывает общий метод решения класса однотипных задач, т.е. алгоритм является формой выражения этого метода» [30, С. 68].

Таблица 7 – Технология организации усвоения правил

Мотивационно-ориентировочная часть	Операционно-познавательная часть	Рефлексивно-оценочная часть
Актуализация прежнего опыта	Преобразование условия задачи	Соотнесение результатов с учебной задачей
Мотивация (проблемная ситуация)	Моделирование правила	Осмысление прежнего опыта, с помощью которого получено новое правило
Постановка учебной задачи	Формулирование правила	Прогнозирование применения правила
Планирование решения учебной задачи	Построение алгоритма	Контроль (самоконтроль) усвоения правила
	Осознание правила (алгоритма) в процессе решения дидактических задач	Оценка (самооценка) учебной деятельности

А.А. Темербекова считает, что «алгоритм представляет собой общепринятое и однозначное предписание, определяющее процесс последовательного преобразования исходных данных в искомый результат» [18, С. 184]. Обучение математике на любом уровне обязательно включает обучение алгоритмам. Умение формулировать и применять алгоритмы важно не только для развития математического мышления и математических умений; оно означает также и умение формулировать и выполнять правила.

«Существует два способа обучения алгоритмам:

– сообщение готовых алгоритмов;

– подведение учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов.

Последнее предполагает реализацию трех этапов изучения математического материала:

– выявление отдельных шагов алгоритма;

– формулировка алгоритма;

– применение алгоритма» [30, С. 67].

Построение алгоритмов обучения представляет собой описание обучающей деятельности учителя с помощью предписаний, правил, последовательности действий алгоритмического типа, с помощью которых учитель решает определенные дидактические задачи. Тогда часть процесса обучения определенных учащихся конкретному содержанию может быть представлена в виде так называемого алгоритма обучения, отражающего методическую характеристику учения.

«Для построения алгоритма нужно проанализировать содержание и цели обучения, деятельность учащихся по его усвоению, деятельность учителя по организации этого усвоения. Алгоритм обучения должен учитывать особенности учащихся данного класса. Алгоритмы обучения являются составной частью педагогических технологий» [52, С. 187].

2.4 Описание проведенного педагогического эксперимента

Нами был проведен педагогический эксперимент на базе ГБОУ СОШ с. Выселки в 2020-2021 учебном году. Участниками эксперимента стали обучающиеся 10 класса в количестве 8 человек.

Цель эксперимента – определение у обучающихся уровня сформированности графической культуры при изучении функций в 10 классе.

В параграфе 2.1 мы выяснили, что в курсе 7-9 классов обучающиеся формируют следующую базу знаний: функция; способы задания функций; понятие линейной функции $y = kx$ и ее график; взаимное расположение графиков линейной функции; функция $y = kx^2$ ее свойства и график; введение записи $y = f(x)$; исследование функций на монотонность; графики функций при решении уравнений. А основными функциями для изучения в курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса являются степенная и тригонометрические функции.

Была составлена контрольная работа №1, которая была предложена обучающимся в качестве контроля по формированию графической культуры. В ней представлены следующие типы задач:

– построение графика функции и определение какого-либо из свойств;
– построение графика степенной функции;
– построение графика тригонометрической функции и определение какого-либо из свойств;
– решение тригонометрического уравнения графическим методом;
– исследование функции и построение её графика.

Приведём примеры вариантов контрольной работы.

Вариант 1

Задача 1. На рисунке 11 изображена часть графика чётной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке [-4; 4]. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке [-4; 4].

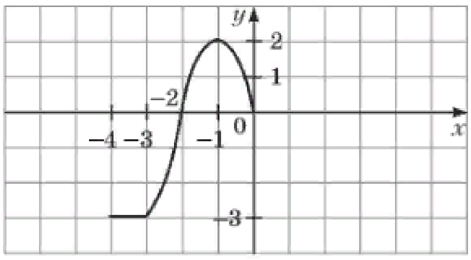

Рисунок – 11 График к заданию 1

Задача 2. Постройте график функции $y = (\sqrt[4]{x+2})^4 + (\sqrt[6]{x-1})^6$.

Задача 3. Постройте график функции $f(x) = \left|cos\frac{1}{3}x\right|$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

Задача 4. Решите уравнение графическим методом $6cos^2x + 13sinx - 8 = 0$.

Задача 5. Исследуйте функцию $f(x) = 3x - x^3$ и постройте её график.

Вариант 2

Задача 1. На рисунке 12 изображена часть графика нечётной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке [-5; 5]. Достройте график этой функции и найдите её наибольшее и наименьшее значения на промежутке [-5; 5].

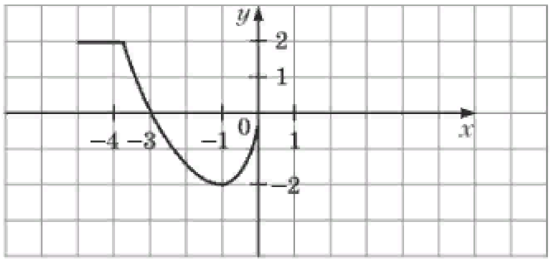

Рисунок – 12 График задаче 1

Задача 2. Постройте график функции $y = (\sqrt[8]{x+3})^8 + (\sqrt[6]{x-5})^6$.

Задача 3. Постройте график функции $f(x) = |sin3x|$, укажите её промежутки возрастания и убывания.

Задача 4. Решите уравнение графическим методом $5sin^2x - 14cosx - 2 = 0$.

Задача 5. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 4x^2$ и постройте её график.

Критерии оценивания:

– верно решены 5 задач – оценка «5»;

– верно решены 4 задачи – оценка «4»;

– верно решены 3 задачи – оценка «3»;

– менее 3 верно решенных задач – оценка «2».

В таблице 8 представлены результаты контрольной работы.

Анализ показывает, что затруднения у обучающихся вызывают задания типа «Исследование функции и построение её графика» (справились 4 человека, что составляет 50 % обучающихся 10 класса) и «Построение графика тригонометрической функции и определение какого-либо из свойств».

Стоит заметить, что задания типа «Достроение графика функции и определение какого-либо из свойств», «Построение графика степенной функции» и «Решение тригонометрического уравнения графическим методом» учащимся даются без особых сложностей.

К примеру с заданием 2 и 4 справились 7 человек, что составляет 87,5 %, а с заданием 1 (100 %), то есть весь класс.

Таблица 8 – Результаты контрольной работы

Задание	Не приступили к заданию	Выполнили неверно	Выполнили верно
Задача 1	0 (0 %)	0 (0 %)	8 (100 %)
Задача 2	0 (0 %)	1 (12,5 %)	7 (87,5 %)
Задача 3	0 (0 %)	2 (25 %)	6 (75 %)
Задача 4	0 (0 %)	1 (12,5 %)	7 (87,5 %)
Задача 5	2 (25 %)	2 (25 %)	4 (50 %)

В таблице 9 приведем распространенные ошибки обучающихся.

Таблица 9 – Выявленные виды ошибок у обучающихся

<table>
<tr><td colspan="6">Задание 1</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ошибочно определено наибольшее значение</td><td colspan="2">Ошибочно определено наименьшее значение</td><td colspan="2">Неверно достроен график функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задание 2</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="3">Неверно построен график функции</td><td colspan="3">Неверно преобразована функция</td></tr>
<tr><td colspan="3">1</td><td colspan="3">0</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задание 3</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="3">Неверно построен график функции</td><td colspan="3">Неверно определены промежутки возрастания и убывания функции</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задание 4</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ошибочно преобразовано уравнение</td><td colspan="2">Неверно построен график функции</td><td colspan="2">Неверно найдены корни уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задание 5</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пропущено исследование одного из свойств</td><td colspan="2">Неверно исследована функция</td><td colspan="2">Неверное построен график функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

Следовательно, можно сделать следующий вывод о том, что обучающиеся испытывают затруднения при решении задач на построение графиков тригонометрической функции.

Помимо этого, учащимся не всегда удается правильно исследовать функцию такого вида.

Таблица 10 – Количественный анализ контрольной работы

Количество обучающихся		Оценка
число	%	
2	25	5
3	37,5	4
2	25	3
1	12,5	2

В таблице 10 представлен количественный анализ контрольной работы.

Методами и приёмами обучения в процессе формирования графической культуры могут быть: групповая; индивидуальная; олимпиады; викторины; факультативы и элективные курсы.

Средства обучения:

– технические;

– дидактические;

– наглядные пособия и учебные модели;

– чертежные инструменты;

– графические упражнения.

В рамках эксперимента в этом же классе была осуществлена апробация спроектированных уроков во время элективного курса, где были отработаны навыки построения графиков функций.

Спроектируем изучение темы «Графический метод решения уравнений с параметрами» в рамках технологии алгоритмов.

Покажем применение выбранной нами технологии алгоритмов на примере изучения данной темы, изучаемой в 11 классе.

Урок 1. Знакомство с технологией алгоритмов при изучении темы «Графический метод решения уравнений с параметрами»

Цель: Применение технологии алгоритмов при решении уравнений с параметрами графическим методом.

Задачи:

- вспомнить графики функций, изучаемые в курсе математики основной школы и 10 класса;

- учиться применять технологию алгоритмов при решении уравнений с параметрами графическим методом.

Предполагаемые результаты: уметь применять технологию алгоритмов при решении уравнения с параметрами графическим методом.

Ход урока (45 мин)

1 этап. Организация начала урока – 2 мин.

2 этап. Актуализация знаний – 5 мин.

Учитель задает вопросы обучающимся:

1. Какие функции вы знаете? *(Линейная, квадратичная, тригонометрические и т.д.)*

2. Что является графиками этих функций? *(Для линейной функции – прямая, квадратичной – парабола; для тригонометрических функций – синусоида, тангенсоида и т.д.)*

3. Какие виды уравнений вам знакомы? *(Линейные уравнения, квадратные уравнения, дробно-рациональные уравнения, иррациональные уравнения, тригонометрические уравнения, показательные уравнения)*

4. Что значит решить уравнение графическим методом? (*«Построить в одной системе координат графики предложенных функций и найти точки их пересечения, выписать абсциссы точек пересечения – корни уравнения»)*

«**Определение.** Уравнение, в котором помимо переменной содержится буквенное выражение, называется уравнением с параметрами» [37].

«Первая постановка задачи: решите уравнение. Это значит, что для каждого значения параметра a, необходимо найти решения. Вторая постановка задачи: при каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня» [41].

«**Определение.** Решить уравнение с параметром – значит, для любого допустимого значения параметра найти множество всех корней заданного уравнения» [41].

3этап. Изучение нового материала – 15 мин.

Фронтальная форма работы. *Алгоритм решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):*

1. Построение графика функции $\mathrm{y} = \mathrm{f(x; a)}$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

В координатной плоскости (x0a):

1. Запись уравнения $F(x; a) = 0$ *в виде* $a = f(x)$.

2. Построение графика данной функции.

3. Нахождение точек пересечения графика функции $a = f(x)$ с прямыми вида $a = a_0$, параллельными оси $0x$.

4. Выбор абсциссы точек пересечения, определяющие решения в соответствии с условием задачи.

Задача 1. Решите графически уравнение $x^2 + \ x - 2 = 0$.

(Учитель раздает карточки для работы в паре)

Алгоритм решения:

1) представить уравнение в виде $\mathrm{x}^2 = \mathrm{kx} + \mathrm{m}$;

2) рассмотреть две функции $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ и $\mathrm{y} = \mathrm{kx} + \mathrm{m}$;

3) построить в одной системе координат графики данных функций;

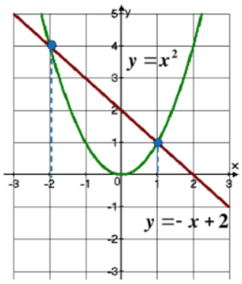

Рисунок 13 – Графический метод решения уравнения $x^2 + x - 2 = 0$

4) найти точки пересечения графиков;

5) выписать абсциссы точек пересечения.

Решение представлено на рисунке 13.

Ответ: -2; 1.

Задача 2. Решите уравнение. При каких значениях параметра *a* *уравнение* $sin2x = a$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ пять корней?

Решение. Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом на координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $y = f(x; a)$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

$sin2x = a$, где $-1 \le a \le 1$.

Применяя алгоритм решения уравнения с параметром, построим график.

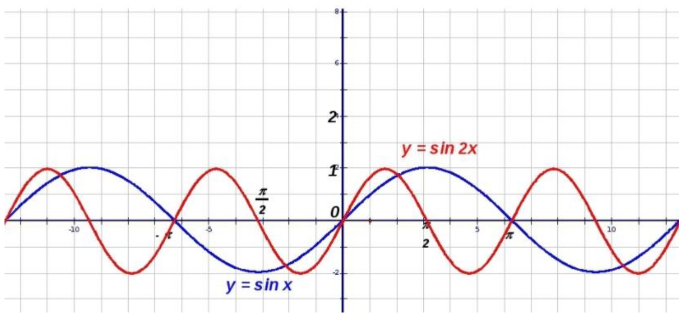

Рисунок 14 – Графический метод решения уравнения $sin2x = a$

На рисунке 14 видно, что в случае если $a = 0$ уравнение $sin2x = a$ будет иметь 5 корней.

Ответ: 5 корней.

4 этап. Закрепление изученного материала – 18 мин.

Задача 3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$ имеет ровно три различных решения.

Решение.

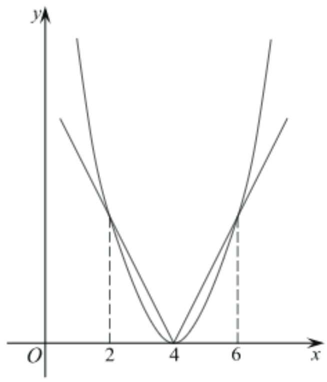

Рисунок 15 – Графический метод решения уравнения
$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $y = f(x; a)$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

Графики данных функций представлены на рисунках 15 и 16.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

Ответ: 3,5; 4; 4,5.

Задача 4. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x + a} = x$ имеет два корня?».

Решение. Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

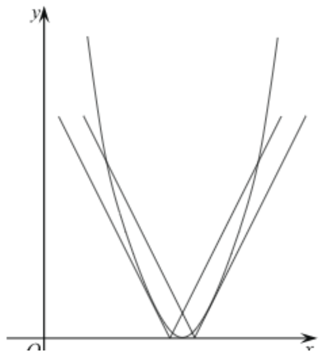

Рисунок 16 – Графический метод решения уравнения

$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$

1. Построение графика функции $y = f(x; a)$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a = x^2 - x. \end{cases}$$

Графиком функции $a = x^2 - x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина параболы – точка с координатами:

$x_0 = \frac{1}{2}, a_0 = -\frac{1}{4}$

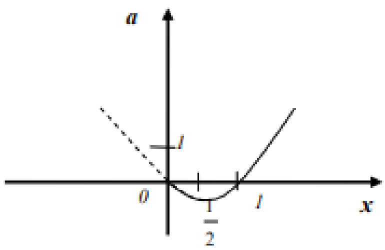

Рисунок 17 – Графический метод решения уравнения $\sqrt{x + a} = x$

Из рисунка 17 видно, что при $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ уравнение имеет 2 корня.

Ответ: при $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ уравнение имеет 2 корня.

5 этап. Подведение итогов. Рефлексия – 3 мин.

Установление соответствия между поставленными задачами урока и его результатами, внесение корректив. Анализ учебной деятельности.

6 этап. Домашнее задание – 2 мин.

Урок 2. Решение уравнений с параметрами графическим методом при помощи технологии алгоритмов.

Цель: учиться решать уравнения с параметрами графическим методом с использованием технологии алгоритмов.

Задачи: формировать умение решать уравнения с параметрами графическим методом.

Предполагаемые результаты: умение решать уравнения с параметрами графическим методом с использованием технологии алгоритмов.

Ход урока (45 мин)

1 этап. Организация начала урока – 2 мин.

2 этап. Актуализация знаний – 8 мин.

(Учитель раздает карточки для работы в парах).

Задание 1. Теоретическая часть.

1. Запишите определение «уравнение с параметром».

2. Алгоритм решения уравнений с параметрами графическим методом.

Алгоритм решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $y = f(x; a)$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

В координатной плоскости (x0a):

1. Запись уравнения $F(x;a) = 0$ *в виде* $a = f(x)$.

2. Построение графика данной функции.

3. Нахождение точек пересечения графика функции $a = f(x)$ с прямыми вида $a = a_0$, параллельными оси $0x$.

4. Выбор абсциссы точек пересечения, определяющие решения в соответствии с условием задачи.

Практическая часть.

Задача 1. Решите уравнение графическим методом $|x - 1| = 4$.

Алгоритм решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $\mathrm{y = f(x; a)}$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

1) представить уравнение в виде $|\mathrm{x} - 1| = 4$;

2) рассмотреть две функции $\mathrm{y} = |\mathrm{x} - 1|$ и $\mathrm{y} = 4$;

3) построить в одной системе координат графики данных функций;

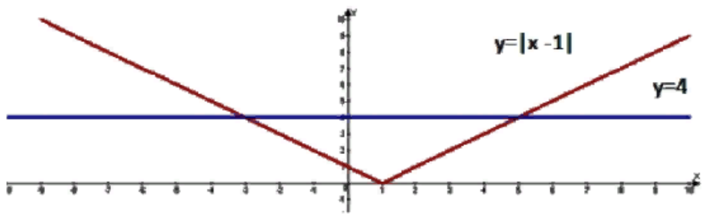

Рисунок 18 – Графический метод решения уравнения $|\mathrm{x} - 1| = 4$

4) найти точки пересечения графиков;

5) выписать абсциссы точек пересечения.

Решение представлено на рисунке 18. **Ответ:** -3; 5.

Задача 2. При каких значениях параметра a уравнение $|x - 1| - 1 = a$ не имеет решений?

Алгоритм решения:

1) представить уравнение в виде $|x - 1| - 1 = a$;

2) рассмотреть две функции $y = |x - 1| - 1$ и $y = a$;

3) построить в одной системе координат графики данных функций;

4) определить при каких значениях параметра уравнение не имеет решения.

Решение представлено на рисунке 19. **Ответ**: при $a < -1$.

3 этап. Отработка навыков решения уравнений – 20 мин.

Фронтальная форма работы.

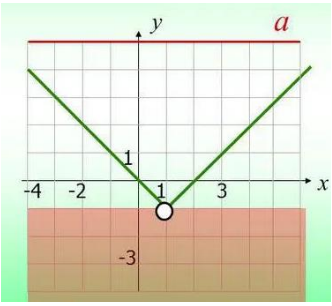

Рисунок 19 – Графический метод решения уравнения $|x - 1| - 1 = a$

Задача 3. Решите уравнение $x^2 = a$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $y = f(x; a)$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

Решение представлено на рисунке 20.

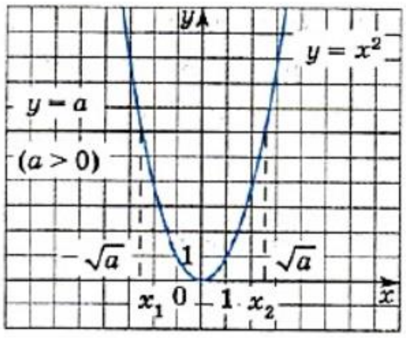

Рисунок 20 – Графический метод решения уравнения $x^2 = a$

Ответ: при $a < 0,$ *корней нет*; при $a = 0$, один корень $x = 0$; при $a > 0$, два корня $x = \pm\sqrt{a}$.

Задача 4. При каких значениях параметра *а* уравнение $3 - \sqrt{(x-2)^2} = a$ имеет одно решение?

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $\mathrm{y} = \mathrm{f(x; a)}$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

В координатной плоскости (x0a):

1. Запись уравнения $F(x; a) = 0$ *в виде* $a = f(x)$.

2. Построение графика данной функции.

3. Нахождение точек пересечения графика функции $a = f(x)$ с прямыми вида $a = a_0$, параллельными оси $0x$.

Решение:

1. Запишем уравнение в виде $3 - |x - 2| = a$.

2. Построим графики функций $y = 3 - |x - 2|$ и $y = a$.

3. Нахождение решения по графику.

4. Уравнение имеет один корень при $a = 3$.

Решение представлено на рисунке 21.

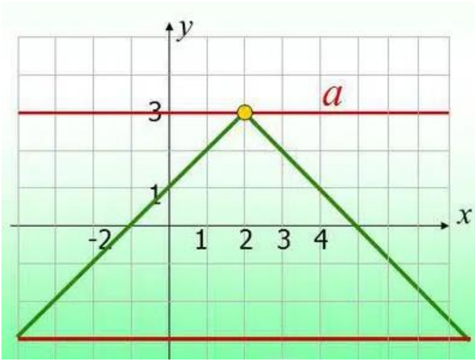

Рисунок 21 – Графический метод решения уравнения
$3 - \sqrt{(x-2)^2} = a$

Задача 5. При каких значениях параметра a уравнение $x + 2 = a|x - 1|$ имеет единственное решение?

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $\mathrm{y} = \mathrm{f(x; a)}$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра а (рисунок 22).

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

Решение. Заметим, что $x = 1$ не будет решением исходного уравнения.

Пусть $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. $a = \frac{x+2}{|x-1|}$. На рисунке 22 рассмотрим графики функций $a = \frac{x+2}{|x-1|}$ при $x > 1$ и $a = \frac{x+2}{|x-1|}$ при $x < 1$.

Получаем, что исходное уравнение: при $a \leq -1$ не имеет решений; при $-1 < a \leq 1$ имеет единственное решение; при $a > 1$ имеет два решения.

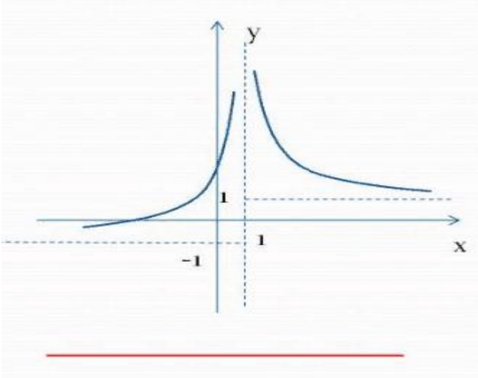

Рисунок 22 – Графический метод решения уравнения $x + 2 = a|x - 1|$

Ответ: при $a \leq -1$ не имеет решений; при $-1 < a \leq 1$ имеет единственное решение; при $a > 1$ имеет два решения.

Задача 6. Решить уравнение $\sqrt{a(3^x + 1) + 9} = 2 - 3^x$.

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}; \mathrm{a})$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

В координатной плоскости (x0a):

1. Запись уравнения $F(x; a) = 0$ *в виде* $a = f(x)$.

2. Построение графика данной функции.

3. Нахождение точек пересечения графика функции $a = f(x)$ с прямыми вида $a = a_0$, параллельными оси $0x$.

Выполним замену $t = 3^x$, $t > 0 \leftrightarrow \sqrt{a(t + 1) + 9} = 2 - t$.

Данному уравнению равносильна система:

$$\begin{cases} a(t + 1) + 9 = (2 - t)^2, \\ 2 - t \geq 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{(t-5)(t+1)}{t+1}, \\ 0 < t \le 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = t - 5, \\ 0 < t \le 2. \end{cases}$$

Изобразим множество точек на рисунке 23, которые удовлетворяют полученной системе.

При $a \in (-5;\ -3] \leftrightarrow t = a + 5$, сделаем обратную замену $3^x = a + 5, \leftrightarrow x = \log_3(a + 5)$.

При $a \in (-\infty;\ -5] \cup (-3;\ +\infty)$ корней нет.

Ответ: При $a \in (-5;\ -3] \leftrightarrow x = \log_3(a + 5)$.

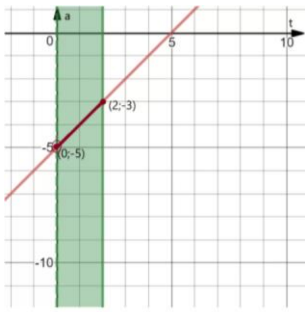

Рисунок 23 – График к заданию 3.

4 этап. Подведение итогов. Рефлексия – 3 мин.

Установление соответствия между поставленными задачами урока и его результатами, внесение корректив. Анализ учебной деятельности.

5 этап. Домашнее задание – 2 мин.

Итоговый контроль. Итоговая самостоятельная работа составлена из четырех задач:

- *задача 1* на отыскание количества решений уравнения с параметром графическим методом;

- *задача 2* на определение количества корней в зависимости от параметра *a;*

- *задача 3* решение тригонометрического уравнения с параметром графическим методом на конкретном промежутке;

- *задача 4* решение логарифмического уравнения с параметром графическим методом.

Критерии оценки:

Задача 1 – 1 балл;

Задача 2 – 1-2 балл;

Задача 3 – 1-2 балла;

Задача 4 – 1-3 балла.

Отметка «5» выставляется ученику за 7-8 баллов; отметка «4» - за 5-6 баллов; отметка «3» - за 3-4 балла; отметка «2» - за 0-2 балла.

Примерный вариант самостоятельной работы по теме «Графический метод решения уравнений с параметрами».

Решите уравнения графическим методом:

Задача 1. Сколько решений имеет уравнение $|x+2|+1=a$?

Задача 2. Определите число решений уравнения $|x+1|+|x+2|=a$ в зависимости от параметра a?

Задача 3. При каких значениях параметра а уравнение $\sin 2x = a$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ пять корней?

Задача 4. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение $\log_{1-x}(a-x+2)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

***Решение самостоятельной работы*:**

Задача 1. Сколько решений имеет уравнение $|x+2|+1=a$?

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции y = f(x; a),задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

В координатной плоскости (x0a):

1. Запись уравнения $F(x; a) = 0$ *в виде* $a = f(x)$.

2. Построение графика данной функции.

3. Нахождение точек пересечения графика функции $a = f(x)$ с прямыми вида $a = a_0$, параллельными оси $0x$.

4. Выбор абсциссы точек пересечения, определяющие решения в соответствии с условием задачи.

Решение. Графическое решение данного уравнения представлено на рисунке 24.

Ответ: при $a > 1$, уравнение имеет 2 решения; при $a < 1$, уравнение не имеет решений; при $a = 1$, уравнение имеет 1 решение.

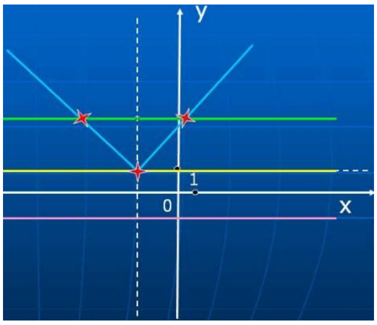

Рисунок 24 – Графический метод решения уравнения $|x + 2| + 1 = a$

Задача 2. Определите число решений уравнения $|x + 1| + |x + 2| = a$ в зависимости от параметра a?

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Из рисунка 25 видно построение графика функции $y = f(x; a)$, задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

Решение.

График функции $y = |x + 1| + |x + 2|$ будет представлять собой ломанную. Ее вершины будут располагаться в точках $(-2; 1)$и $(-1; 1)$.

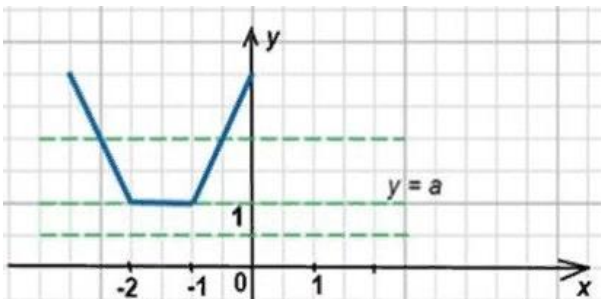

Рисунок 25 – Графический метод решения уравнения
$|x + 1| + |x + 2| = a$

Ответ: при $a < 1,$ корней нет; при $a = 1$, бесконечно много решений на отрезке [-2; -1]; при $a > 1$, уравнение имеет два корня.

Задача 3. При каких значениях параметра *a уравнение* $sin2x = a$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ пять корней?

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $y = f(x; a)$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

Решение. $sin2x = a$, где $-1 \leq \text{a} \leq 1$.

Применяя алгоритм решения уравнения с параметром, построим график.

По рисунку 26 видно, что в случае если $a = 0$ уравнение $sin2x = a$ будет иметь 5 корней.

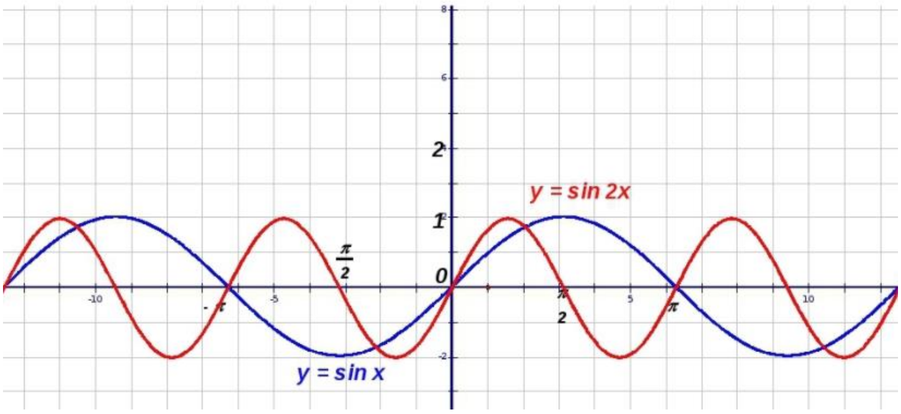

Рисунок 26 – Графический метод решения уравнения $sin2x = a$

Задача 4. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку [−1; 1).

Воспользуемся алгоритмом решения уравнений с параметрами графическим методом в координатной плоскости (x0y):

1. Построение графика функции $\text{y} = \text{f}(\text{x}; \text{a})$,задающей семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определение преобразования, позволяющего перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Чтение графика и нахождение точек пересечения.

Решение.

Выразим параметр a из заданного уравнения x:

$$\log_{1-x}(a-x+2)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x>0, \\ 1-x\neq 1, \\ a-x+2=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x\neq 0, \\ a=x^2-x-1. \end{cases}$$

Исходное уравнение имеет решения на полуинтервале $[-1;\ 1)$ тогда и только тогда, когда прямые $y=a$ имеют общие точки с графиком функции $y=x^2-x-1$ при условиях $-1\le x<1, x\neq 0$.

Из рисунка 27 видно, что искомыми значениями параметра являются $-\frac{5}{4}\le x\le 1$, исключая $a=-1$.

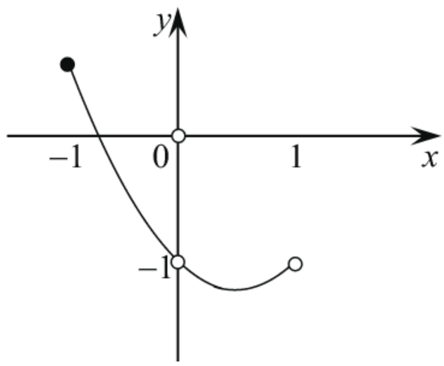

Рисунок 27 – Графический метод решения уравнения $\log_{1-x}(a-x+2)=2$

Ответ: $a\in\left[-\frac{5}{4};-1\right)\cup(-1;1]$.

Выводы по второй главе

Проведен анализ содержания школьных учебников алгебры и начал математического анализа 10-11 классов следующих авторов: А.Г. Мордковича; А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.Б. Полонского, М.С. Якира и авторов Г. К. Муравина, К. С. Муравина и О. В. Муравиной, анализ методических пособий.

Проанализирован опыт работы учителей И.В. Рыжковой, Е.Ю. Пушкаревой и В.А. Ермеева, в рамках технологии алгоритмов и информационно-коммуникационной технологии.

Рассмотрены статьи по теме исследования, следующих авторов: Г.К. Григорян и Е.В. Власовой.

Разработан элективный курс на формирование графической культуры учащихся при изучении темы «Графический метод решения уравнений с параметрами» в курсе алгебры и начал математического анализа 10-11 классов.

Проанализирован задачный материал по теме исследования в рамках единого государственного экзамена (Задача №18).

Проведен педагогический эксперимент в 10 классе, с целью выявления уровня сформированности графической культуры у обучающихся.

Заключение

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. В работе определены понятия «графическая культура» и «функционально-графическая культура» школьника. Определены различия между ними.

2. Рассмотрены основные этапы формирования функционально-графической культуры учащихся старшей школы. Выделена ступенчатая схема развития графической культуры в обучении математике.

3. Показана методическая система формирования графической культуры учащихся при изучении функций. Представлена иерархическая структура процесса формирования графической культуры школьников.

4. Выполнен анализ содержания школьных учебников алгебры и начал математического анализа 10-11 классов следующих авторов: А.Г. Мордковича; А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.Б. Полонского, М.С. Якира и авторов Г. К. Муравина, К. С. Муравина и О. В. Муравиной. Анализ методических пособий.

5. Проанализирован опыт работы учителей И.В. Рыжковой, Е.Ю. Пушкаревой и В.А. Ермеева, в рамках технологии алгоритмов и информационно-коммуникационной технологии. Рассмотрены статьи по теме исследования, следующих авторов: Г.К. Григорян и Е.В. Власовой.

6. Разработан элективный курс на формирование графической культуры учащихся при изучении уравнений с параметрами в курсе алгебры и начал математического анализа 10-11 классов. Проанализирован задачный материал по теме исследования в рамках единого государственного экзамена (Задача №18).

7. Проведен педагогический эксперимент в 10 классе, с целью выявления уровня сформированности графической культуры у обучающихся.

Список используемой литературы

1. Абрамова О.В. Формирование у учащихся основной школы умений работать с графиками функций в условиях реализации межпредметных связей физики, математики и информатики. Автореферат дис. канд. пед. наук. Москва, 2012. 26 с.

2. Апалькова, М. В. Применение возможностей программы Microsoft Excel в старших классах на уроках математики для решения задач / М. В. Альпакова // Наука и образование: материалы VI Всероссийской конференции. Томск: Изд-во ТГПУ, 2003. С. 4 – 8.

3. Беспалов, П. В. Компьютерная компетентность в контексте личностно-ориентированного обучения / П. В. Беспалов // Педагогика. 2003. № 4. С. 41-45.

4. Ботвинников А.Д., Ломов Б.Ф. Научные основы формирования графических знаний, умений и навыков школьников / А.Д. Ботвинников, Б.Ф. Ломов. М.: Педагогика, 1979. 255 с.

5. Бугаева Т.И. Формирование элементов графической культуры у учащихся на уроках алгебры. Автореф. дис. канд. пед. наук Д., 1986. 14 с.

6. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. Ростов-на-Дону.: Феникс, 2005. 252 с.

7. Власова Е.В. Ещё раз об изучении функции в средней школе/Е.В. Власова // Математика в школе, 2002. №6. С. 53 – 57.

8. Ганеев С.М. Проблемы формирования графической грамотности у учащихся в условиях компьютерного обучения математике / Проблемы педагогической инноватики: Материалы VI межвузовской научно-практической конференции. г. Тобольск, 2001. С. 61-63.

9. Ганеев С.М. Графическая культура как один из аспектов общей культуры школьника / С.М. Ганеев // Материалы научно-практической конференции. г. Тара, 2002. С. 74-76.

10. Горина, Л.А. О развивающем потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы / Л.А. Горина // Математика в школе. 2011. №2. С. 69 – 73.

11. Григорян К.М. Квадратичные и сводимые к ним уравнения с параметрами // Наука, техника и образование. 2018. №3. С. 60-63.

12. Гуревич П.С. Культурология: учебник для вузов / П.С. Гуревич – М.: Проект, 2003, 336 с.

13. Данилов, М.А. Проблемы методологии педагогики и методики исследований / М.А. Данилов, Н.И. Болдырева. М., «Педагогика», 1971. 322 с.

14. Демченкова Н.А., Легаева Е.В. Формирование графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры общеобразовательной школы / Н.А. Демченкова, Е.В. Легаева // Научный журнал «Общество». 2020. № 3(18). С. 52-55.

15. Демченкова Н.А., Легаева Е.В. Формирование графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы / Н.А. Демченкова, Е.В. Легаева // Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности учебных заведений: Материалы международной научно-практической конференции. 16-17 февраля 2021г., г. Луганск. Луганск: Книта, 2021.

16. Демченкова Н.А., Легаева Е.В. Формированние графических умений учащихся при изучении элективного курса «Графический метод в задачах с параметром» / Н.А. Демченкова, Е.В. Легаева // Научный журнал «Научный потенциал». 2021. № 3(34).

17. Евсеева А.И. Уравнения с параметрами // Математика в школе. 2003. №7. С. 10-14.

18. Епишева, О.Б. Формирование профессиональной компетентности выпускника и преподавателя профессионального учебного заведения: вопросы теории и практики [Текст] : учебное пособие / О.Б. Епишева. Тюмень: ТюмГНГУ, 2010. 300 с.

19. Жумаева, У.Я. Методика изучения функций в курсе алгебры основной школы // У.Я. Жумаева// Развитие науки и техники: механизм выбора и реализации приоритетов. 2017. С. 52-53. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=31635675 (дата обращения – 04.06.2021)

20. Захарова, И.Г. Информационные технологии в образовании [Текст]: учебное пособие для студ. пед. учеб. заведений / И.Г. Захарова. М.: Издательский центр «Академия», 2003. 192 с.

21. Иванова О.А. Изучение функциональной линии в курсе алгебры средней школы на основе метаметодического подхода (на примере функции вида $y = kx$) / О.А. Иванова // Ежемесячный научный журнал «Молодой ученый». 2013. №7 (54). С. 384 – 387.

22. Иванова Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева. Н. Новгород: НГПУ, 2009, 355 с.

23. Коджаспирова Г. М., Коджаспиров А. Ю. Словарь по педагогик / Г. М. Коджаспирова, А. Ю. Коджаспиров Москва: ИКЦ «Март», 2005. 448 с.

24. Кочарова К.С. Об уравнениях с параметрами и модулем // Математика в школе. 1995. № 2. С. 32-33.

25. Крутецкий, В.А. Основы педагогической психологии / В.А. Крутецкий. М.: Просвещение, 1972. 253 с.

26. Лагунова М.В., Червова А.А. Графическая культура как компонент профессиональной культуры инженера // Наука и школа. 2001. № 3. С. 23-34.

27. Легаева Е. В. Формирование графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы / Е.В. Легаева // «Студенческие дни науки»: студенческая научно-практическая конференция (Тольятти, апрель 2021 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2021. – 1 оптический диск.

28. Легаева Е. В. Функционально-графическая культура учащихся старшей школы / Е.В. Легаева // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, декабрь 2020 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. – 1 оптический диск.

29. Ломов Б.Ф. Формирование графических знаний и навыков у учащихся. М.: Изд. АПН РСФСР, 1959. 272 с.

30. Лященко Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. Пед. ин-тов. / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др. М: Просвещение, 1988. 223 с.

31. Мерзляк, А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. 13-е изд. М.: Вентана-Граф, 2019. 298 с.

32. Мерзляк, А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. 43-е изд. М.: Вентана-Граф, 2019. 318 с.

33. Молочков В. П. Формирование графической культуры будущих учителей на основе использования информационных технологий обучения: дис. канд. пед. наук. Нижний Новгород, 2004. 151 с.

34. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс [Текст]: методическое пособие для учителя /А.Г. Мордкович. М.: Мнемозина, 2010. 77 с.

35. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович. 17-е изд., доп. М.: Мнемозина, 2013. 175 с.

36. Мордкович, А.Г. Алгебра. 11 класс [Текст]: методическое пособие для учителя /А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2010. 72 с.

37. Мордкович, А.Г. Алгебра. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович. 12-е изд., доп. М.: Мнемозина, 2010. 215 с.

38. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа 10 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. 13-е изд. М.: Дрофа, 2015. 278 с.

39. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа 11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. 14-е изд. М.: Дрофа, 2016. 269 с.

40. Непобедный М. В., Сысоев А. П., Мраморнова Е. А. Педагогическая модель развития графической и технологической культуры у обучающихся в средних общеобразовательных школах // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2017. Т. 31. С. 61–65. URL: http://e-koncept.ru/2017/970027.htm (дата обращения - 03.06.2021).

41. Педагогический опыт по формированию графической культуры обучающихся при изучении функций в курсе алгебры и математического анализа 10-11 классы. Электронный ресурс: https://infourok.ru/material.html?mid=40278 (дата обращения - 03.06.2021).

42. Пермякова М.Ю. Формирование функционально-графической грамотности учащихся основной школы в процессе обучения математике. Дис. канд. пед. наук. Шадринск, 2015. 210 с.

43. Пермякова М.Ю. Характеристика понятия «Функционально-графическая грамотность обучающихся» // Мир науки, культуры, образования. №6. 2012.

44. Петров В.М. Графический метод исследования функции в курсе математики средней школы. Автореф. дис. канд. пед. наук. Киев., 1969. 19 с.

45. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст]: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов / Г.И. Саранцев. Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. 208 с.

46. Скворцова М. Математическое моделирование / М. Скворцова // Математика. 2003. №4 С. 3-5.

47. Солощенко М.Ю., Болдов С.С. Использование учебно-методического комплекта «Живая математика» в процессе обучения геометрии / М.Ю. Солощенко, С.С. Болдов // Сборник научных статей межд. конф. Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования, 2015.

48. Степин В. С. Философия и универсалии культуры / В. С. Степин. СПб. : СПбГУП, 2000. 20 с. (Golden Pages).

49. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / Н.Л. Стефанова, Н.С. Походова. М.: Дрофа, 2005. 416 с.

50. Суворова, С.Б. Методические указания к теме «Квадратичная функция»/ С.Б. Суворова, А.Н. Тернопол // Математика в школе. 2002. №9. С. 12 – 28.

51. Тараканова О. О компактном изучении тригонометрии в 10 классе / О. Тараканова, Г. Муравин // Математика, 2001. №8. С. 9 – 10.

52. Темербекова А.А. Методика обучения математике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. Санкт-Петербург : Лань, 2015. С. 184 – 192.

53. Темербекова А.А., Чугунова И.В., Байгонакова Г.А. Технология диагностики графической культуры обучающихся // Мир науки, культуры, образования. №5. 2012.

54. Файнбург З.И. К вопросу о понятии культуры и периодизации ее исторического развития (некоторые проблемы методологии) // Изв. СевероКавказ. науч. центра высш. шк. Общественные науки. 1979. № 3

55. Федеральные государственные образовательные стандарты https://fgos.ru/ (дата обращения - 03.06.2021).

56. Чугунова И.В. Графическая культура как активное средство обучения // Наука. Культура. Образование. 2004. № 15-16.

57. Чугунова И.В. Организационно-педагогические условия формирования графической культуры старшеклассников. Автореферат дис. канд. пед. наук. Барнаул, 2008. 24 с.

58. Чугунова И.В. Формирование графической культуры личности в условиях информационно-коммуникационных технологий // Формирование научной картины мира человека XXI века: материалы международной научно-практич. конф. / под ред. А.В. Петрова. Горно-Алтайск, 2007.

59. Чугунова И.В. Формирование графической культуры обучающихся / А.А. Темербекова, Г.А. Байгонакова, И.В. Чугунова. Горно-Алтайск, 2012.

60. Чугунова, И.В. Роль графической культуры в профессиональной подготовке студентов / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова // Проблемы формирования и развития философской и педагогической культуры специалиста: материалы международной конф. / под ред. В.А. Дмитриенко, А.А. Степанова. Томск, 2004.

61. Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики [Текст]: учебное пособие для вузов / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. М.: Высшая школа, 1972. 640 с.

62. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников [Текст] /И.С. Якиманская. М. 1980. 324 с

63. Ярский, А.С. Числа и функции / А.С. Ярский // Квант, 1988. № 6. С. 13 – 24.

64. Ященко, И.В. ОГЭ 2018. Математика 9 класс. Основной государственной экзамен. 36 тренировочных вариантов / И.В. Ященко. М.: «Национальное образование», 2018. 240 с.

65. Denbel, D.G. Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum/ D.G. Denbel // Journal of Education and Practice, 2015. № 1. P. 77 – 81.

66. Hawkes, H.E. First course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. Boston: Ginn and company, 1910. 334 p.

67. Hawkes, H.E. Second course in algebra/ H.E. Hawkes, W.A. Luby, F.C. Touton. Boston: Ginn and company, 1911. 263 p.

68. Kleiner, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey/ I. Kleiner// The College Mathematics Journal, 1989. №4. 305 p.

69. Weiss, M. Where are the rational squares? / M. Weiss // Journal of the American Mathematical Month, 2017. № 3. P. 255 – 259.