МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Групповая форма организации учебной деятельности на уроках математики как средство формирования коммуникативных учебных действий обучающихся общеобразовательной школы»

Студент А.Я. Корчагина
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор, Р.А.Утеева
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение.. 3
Глава 1 Теоретические основы групповой формы организации учебной деятельности обучающихся на уроках математики……………………………….. 9
1.1 Понятие и виды групповой формы организации учебной деятельности обучающихся на уроках математики ………..…………9
1.2 Функции и возможности групповой формы работы организации учебной деятельности учащихся в формировании коммуникативных универсальных учебных действий………………………............... 12
1.3 Анализ опыта работы учителей математики по формированию коммуникативных универсальных учебных действий через групповую форму организации учебной деятельности на уроках математики…………………………………………… 15
Глава 2 Методические основы конструирования системы заданий, ориентированной на формирование коммуникативных учебных действий учащихся при организации групповой формы учебной деятельности на уроке математики 20
2.1 Принципы конструирования системы заданий для организации групповой формы учебной деятельности учащихся с учетом этапов урока математики……………………………………. 20
2.2 Система заданий по теме «Теорема синусов» с применением групповой формы организации учебной деятельности 23
2.3 Система заданий для организации групповой работы учащихся на элективном курсе «Именные теоремы школьного курса алгебры и геометрии»……………………………………….. 30
2.4 Педагогический эксперимент и его результаты…… 47
Заключение 62
Список используемой литературы и список используемых источников........ 64

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В настоящее время происходят изменения образовательной парадигмы, и Россия вступает в мировое образовательное пространство, вследствие чего происходит смена целевых установок при определении образовательных результатов. В этих условиях, акцент в основных целях математического образования делается не только на систему знаний, умений и навыков, которыми должен овладеть учащийся, а и на совокупность его личностных, познавательных, социальных и коммуникативных компетенций. Для достижения данной цели необходимо формировать у учащихся систему универсальных учебных действий.

Концепция развития универсальных учебных действий разработана группой авторов под руководством А.Г. Асмолова [1]. В основе данной концепции лежит системно – деятельностный подход, основанный на теоретических положениях концепции Л.С. Выготского [7], Д.Б. Эльконина [66], А.Н. Леонтьева [31], П.Я. Гальперина [9].

Термин «универсальные учебные действия» (УУД) в содержании федерального государственного образовательного стандарта средней школы определяется, как «совокупность способов действий учащегося(а также связанных с ними навыков учебной работы), обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса» [58]. В составе УУД выделяют четыре блока: личностный, регулятивный, коммуникативный, познавательный.

В магистерской диссертации основное внимание уделяется действиям коммуникативного блока. Уровень сформированности коммуникативных умений влияет не только на результат обучения детей, но и на процесс их социализации и развития личности в целом. Умения возникают в результате деятельности обучающегося, а коммуникативные умения формируются и усовершенствуются в процессе общения учащихся, как на уроках, так и во внеурочной деятельности.

Коммуникативные умения обеспечивают социальную компетентность и учет позиции других людей, партнёров по общению или деятельности; умение слушать и вступать в диалог; участвовать в коллективном обсуждении проблем; интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие и сотрудничество со сверстниками и взрослыми.

Как показывает практика, современным детям не хватает продуктивного общения на уроках, в том числе и математики. Это объясняется тем, что большую часть на уроках либо говорит учитель (рассказывает, показывает, объясняет, контролирует), а обучающиеся слушают, читают, записывают, выполняют письменные задания (тесты, самостоятельные, проверочные, контрольные работы).

Практика и результаты исследований ученых указывают на необходимость разрешения *противоречия между*: требованиями федерального государственного образовательного стандарта общего среднего образования о необходимости формирования универсальных учебных действий, в том числе коммуникативных, и недостаточным использованием форм, методов и средств организации коллективной учебной деятельности на уроках математики, предполагающих обсуждение и решение учебно-познавательных задач в процессе организации групповой работы на уроках.

Проблема диссертационного исследования: каковы функции и возможности групповой формы организации учебной деятельности учащихся на уроках математики в формировании коммуникативных учебных действий?

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: групповая форма организации учебной деятельности обучающихся на уроках математики как средство формирования их коммуникативных учебных действий.

Цель исследования заключается в выявлении функций и возможностей групповой формы организации учебной деятельности учащихся на уроках математики в формировании коммуникативных учебных действий

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что уровень сформированности коммуникативных учебных действий, обучающихся зависит от принципов конструирования системы заданий для организации групповой формы учебной деятельности учащихся на уроках математики и методики их включения в структуру уроков с учетом особенностей её этапов и содержания темы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Раскрыть понятие и виды групповой формы организации учебной деятельности обучающихся на уроках математики.

2. Проанализировать опыт работы учителей математики по формированию коммуникативных универсальных учебных действий через групповую форму организации учебной деятельности на уроках математики.

3. Обосновать принципы конструирования системы заданий для организации групповой формы учебной деятельности учащихся с учетом этапов урока математики.

4. Разработать систему заданий с применением групповой формы организации учебной деятельности.

5. Провести педагогический эксперимент и проанализировать его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили:

- исследования в области теории и методики обучения математике Т.А. Ивановой [21], Г.И. Саранцева [48];
- исследования по методике организации групповой работы учащихся на уроках [15], [17], [56], [63].

Базовыми для настоящего исследования явились работы А.Г. Асмолова [1], Р.А. Утеевой [54,55].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; анкетирование школьников и учителей; констатирующий и поисковый этапы эксперимента.

Основные этапы исследования:

2019/20уч.г.:

На первом этапе анализировались понятие и виды групповой формы организации учебной деятельности обучающихся на уроках математики; опыт работы учителей математики по формированию коммуникативных универсальных учебных действий через групповую форму организации учебной деятельности на уроках математики.

2020/21 уч.г.:

На втором этапе обоснованы принципы конструирования системы заданий для организации групповой формы учебной деятельности учащихся с учетом этапов урока математики и разработана система заданий для уроков математики и занятий элективного курса «Именные теоремы школьного курса математики».

На заключительном этапе : оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение городского округа Тольятти "Школа с углубленным изучением отдельных предметов № 47 имени М.В. Демидовцева".

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем проблема формирования коммуникативных универсальных действий у обучающихся решается за счет организации на уроках математики групповой формы учебной деятельности.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

– определены функции и возможности групповой формы организации учебной деятельности учащихся в формировании коммуникативных универсальных учебных действий;

– обоснованы принципы конструирования системы заданий для организации групповой формы учебной работы на уроках математики.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны:

– система заданий по теме «Теорема синусов» для организации групповой работы учащихся на уроке геометрии;

– система заданий по теме «Именные теоремы школьного курса алгебры и геометрии» для организации групповой работы учащихся на занятиях элективного курса.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, следуют из их согласованности с результатами ранее проведенных исследований.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в самостоятельном решении поставленных задач, в том числе: разработки системы заданий для организации групповой формы учебной деятельности учащихся с учетом этапов урока математики, проведении педагогического эксперимента с обучающимися 10 «Б» класса, описании результатов исследования.

Апробация результатов работы проводилась в период работы учителем математики на базе МБУ «Школа №47» (Самарская область, г.о. Тольятти), а также в период производственной (научно-исследовательской работы) и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета. Результаты исследований докладывались и обсуждались на:

− всероссийской студенческой научно-практической конференции «Молодёжь. Наука. Общество» (г. Тольятти, декабрь, 2020 г.);

– вузовской конференции «Студенческие дни науки» в ТГУ (апрель 2020, 2021 г.)

– заседании кафедры математики МБУ «Школа №47» (Самарская область, г.о. Тольятти).

Они также отражены в 2-х публикациях [25,26].

На защиту выносятся:

1.Принципы конструирования системы заданий для организации групповой формы учебной деятельности учащихся с учетом этапов урока математики.

2. Система заданий по теме «Теорема синусов» для организации групповой работы учащихся на уроке геометрии.

3. Система заданий по теме «Именные теоремы школьного курса алгебры и геометрии» для организации групповой работы учащихся на занятиях элективного курса в старших классах.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 25 рисунков, 6 таблиц, список используемой литературы (71 источник). Основной текст работы изложен на 70 страницах.

Глава 1 Теоретические основы групповой формы организации учебной деятельности обучающихся на уроках математики

1.1 Понятие и виды групповой формы организации учебной деятельности обучающихся на уроках математики

Использование группового способа обучения на уроке позволяет реализовать обучающую и воспитывающую функции занятия не только через содержание, но и через форму организации учебной деятельности. Данная форма обучения содержит в себе ряд преимуществ. В тоже время учителю необходимо учитывать некоторые факторы для того, чтобы уроки проходили результативно и продуктивно.

Формирование у обучающихся общеобразовательной школы коммуникативных универсальных учебных действий происходит в процессе организации групповой формы организации учебной деятельности.

Групповая форма обучения являлась предметом исследования многих ученых и педагогов, которые определили её основные характеристики (М.Д. Виноградова [6], В.В. Котов [26], И.Б. Первин [6], И.М. Чередов [62] и др. Совершенствуя процесс обучения Ю.К. Бабанский [3], М.Н. Скаткин [49] и др. также уделяли большое внимание групповому подходу к организации учебной деятельности. Теоретические основы организации групповой формы учебной работы, их виды, особенности методики исследованы в работах Р.А. Утеевой [54-56].

В научно-методической литературе приведены различные определения понятия «форма организации учебной деятельности учащихся на уроке». Например, И.М. Чередов рассматривает так: «форма учебной работы – это конструкция отрезка процесса обучения, характеризующейся особыми способами управления, организации и сотрудничества учащихся в учебной деятельности» [62, с. 12].

В концепции В.К. Дьячкова обучение трактуется «как общение, в процессе которого происходит воспроизведение и усвоение всех видов человеческой деятельности. По его мнению, наиболее важным в учебно-воспитательном процессе являются – умение работать в группе и самостоятельная деятельность учащихся» [14]. Автор выделил четыре формы организации учебной деятельности:

«1) опосредованное общение – один человек без непосредственного контакта с другим - индивидуально-обособленная форма учебной работы;

2) общение в паре – два человека контактируют друг с другом (монолог, диалог) – индивидуальная форма учебной работы;

3) групповое общение – более двух человек (одного говорящего слушает группа) – групповая (общеклассная или фронтальная), бригадная, звеньевая форма учебной работы;

4) общение в динамических парах – диалогические сочетания – коллективная форма организации учебной работы» [14, с. 73-74].

Таким образом, можно сделать вывод, что одним из наиболее продуктивных, с точки зрения общения и формирования коммуникативных умений, форм организации учебной деятельности является групповая.

По мнению Р.А. Утеевой, чтобы форма организации учебной деятельности называлась *групповой* необходимо выполнение следующих условий:

« – перед всеми топологическими группами одновременно поставлена некоторая учебная цель, как общая цель для учащихся данной группы;

– содержание задания одинаково для всех топологических групп, либо дифференцированно с учетом особенностей этих групп;

– в основе формы лежит коллективная деятельность учащихся данной группы, реализующая отношение «ДУ–Дг–Ду», а также несамостоятельная индивидуальная деятельность каждого;

– всем учащимся оказывается одинаковая помощь со стороны учителя в виде общих указаний без учета особенностей топологических групп школьников и индивидуальных особенностей каждого и специальная помощь каждой топологической группе в виде дополнительных указаний с учетом их особенностей;

– руководство процессом выполнения задания осуществляет член данной группы;

– подводятся итоги деятельности каждой группы» [54, с. 9].

Согласно определению групповой формы учебной деятельности Р.А. Утеева выделяет *единую* и *дифференцированную* формы.

«При единой форме групповой работы все группы выполняют одинаковые по содержанию задания, а при дифференцированной– дифференцированные задания, построенные с учетом особенностей каждой типологической группы» [54, с.13].

«При групповых формах обучения учитель управляет учебно-познавательной деятельностью групп учащихся класса. Их можно подразделить на звеньевые, бригадные, кооперировано–групповые и дифференцированно–групповые. Звеньевые формы обучения предполагают организацию учебной деятельности постоянных групп учащихся. При бригадной форме организуется деятельность специально сформированных для выполнения определенных заданий временных групп учащихся. Кооперировано-групповая форма предполагает деление класса на группы, каждая из которых выполняет лишь часть общего, как правило, объемного задания. Дифференцированно–групповая форма обучения предполагает, что как постоянные, так и временные группы объединяют учащихся с одинаковыми учебными возможностями и уровнем сформированности учебных умений и навыков. Деятельностью учебных групп учитель руководит как непосредственно, так и опосредованно через своих помощников–

звеньевых и бригадиров, которых он назначает с учетом мнения учащихся» [50, с. 313].

Исследование истории развития групповой формы общения и актуальных на сегодняшний день классификаций групповой работы в образовательном процессе позволяет нам более ясно понять причины возникновения данной формы работы.

Изучив взгляды авторов исследований по этой теме, можно проследить цепочку преобразований, которые происходили с понятием «групповая работа».

Использование групповой формы организации учебной деятельности на уроках математики в тех случаях, когда это, возможно, способствует повышению интереса учащихся к изучаемому материалу, формирует навыки совместной работы, стимулирует активность и самостоятельность.

1.2 Функции и возможности групповой формы работы организации учебной деятельности учащихся в формировании коммуникативных универсальных учебных действий

Для учителя математики важны «требования к трем видам результатов: личностным, предметным и метапредметным», сформулированные в Федеральном государственном образовательном стандарте основного и полного (среднего) общего образования [58].

Требования к метапредметным результатам включают «освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (УУД), способность их использования в учебной, познавательной и социальной практике; самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности;, организацию учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками; построение образовательной траектории» [60, с.7].

«УУД – это система действий учащегося, обеспечивающая не только умение учиться самостоятельно, но и формирование личностных характеристик выпускника. Возникновение понятия «УУД» связано с изменением важнейшей задачи современного образования: от цели усвоения знаний, умений и навыков к цели развития и саморазвития личности учащегося при их освоения» [20].

В методологии УУД рассматриваются четыре их вида:

– личностные:
– познавательные;
– регулятивные;
– коммуникативные.

«Способность человека к осуществлению коммуникации – коммуникативная компетентность – является важной частью жизнедеятельности в современном обществе. Коммуникативная компетентность, как способность, развивается посредством формирования адекватных действий, которые будучи сформированными, становятся коммуникативными умениями человека» [1].

«Коммуникативные универсальные учебные действия включают:

– общение и взаимодействие с партнерами по совместной деятельности
– или обмену информацией;
– способность действовать с учетом позиции другого и уметь согласовывать свои действия;
– организацию и планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками;
– работу в группе (включая ситуации учебного сотрудничества и проектные формы работы);
– следование морально-этическим и психологическим принципам общения и сотрудничества;
– речевые действия как средства регуляции собственной деятельности» [22].

Таким образом, *коммуникативные учебные действия* можно разделить «на две связанных между собой группы:

– действия, с помощью которых осуществляется совместная деятельность (работа в группах);
– действия, с помощью которых осуществляется общение и взаимодействие, т.е. умение представлять и сообщать в устной и письменной формах свои и другие мнения, взгляды; использовать речевые средства для дискуссии и аргументации свой позиции»[22].

Формы работы по формированию коммуникативных компетенций:

– фронтальная работа;
– индивидуальная работа;
– работа в группах;
– работа в парах.

В процессе обучения математике учителю необходимо создать условия для успешной коммуникации учащихся.

Основным средством осуществления коллективной деятельности учащихся является групповая работа.

Групповая форма организации учебной деятельности выполняет следующие функции:

– формирования устойчивого интереса к предмету;
– оценки эффективности своей работы;
– мотивации на успех и одобрение;
– развития коммуникативных навыков.

Групповая форма работы учит лучше понимать друг друга, (способствует процессу коллективообразования), и объективно оценивать не только других, но и самого себя.

Кроме этого, она предполагает непосредственное взаимодействие и сотрудничество между учащимися, которые, таким образом, становятся активными субъектами собственного учения.

1.3 Анализ опыта работы учителей математики по формированию коммуникативных универсальных учебных действий через групповую форму организации учебной деятельности на уроках математики

Перед организацией экспериментальной работы мы проанализировали педагогический опыт учителей математики по формированию коммуникативных универсальных учебных действий учащихся через групповую форму организации учебной деятельности на уроках математики.

Так, учитель математики В.И. Рудикова [47] МОУ «Школа №22» г. Астрахани в статье «Групповая форма занятий как способ развития ключевых компетенций учащихся» утверждает, что «Современная педагогическая наука располагает богатым методическим инструментарием, способствующим формированию и развитию ключевых компетенций у учащихся, важное место среди которых занимает, на наш взгляд, групповая форма работы, широко применяемая на уроках математики» [34].

В.И. Рудикова отметила, что «не любое совместное выполнение заданий на уроке можно назвать групповой формой организации учебной деятельности и перечислила следующие элементы, из которых складывается «групповая деятельность учащихся на уроке:

– предварительная подготовка учащихся к выполнению группового задания;
– обсуждение и составление плана выполнения учебного задания в группе;
– работа по выполнению учебного задания;
– корректировка работы группы учителем;
– взаимопроверка и контроль внутри группы;
– сообщение учащихся о полученных результатах и формулировка выводов» [46].

В статье указаны достоинства и недостатки групповой формы организации учебной деятельности. К «плюсам» отнесены повышение обучаемости, эффективность усвоения учебного материала, развитие коммуникативных навыков и снижение уровня тревожности. Недостатки: сложность в комплектовании групп и организации работы в них, а также не способность обучающихся самостоятельно освоить сложный учебный материал.

По мнению В.И. Рудиковой, правильно организованная работа в группе на уроках математики формирует коммуникативные универсальные учебные действия, которые способствует формированию коммуникативной компетенции.

Учитель математики И.А. Журавлев [16] МБОУ «Школа №20» г. Нижний Тагил в статье «Потенциал групповой работы для развития универсальных учебных действий учащихся при обучении математике в средней школе» отмечает, «Продуктивная работа учащихся в малых группах без сомнения способна развивать коммуникативные ….. УУД». Он отмечает, что групповую работу целесообразно использовать на определенном этапе урока, например, для получения некого результата, после чего переходить к фронтальной работе с учителем. Такая организация учебной деятельности способствуют формированию коммуникативного УУД «умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации».

И.А. Журавлев считает, что для результативной работы в группе необходимо определить функции каждого учащегося в группе. Для выделения роли обучающегося, учитель используют типологию приведенную в книге К. Рудестама «Групповая психотерапия» [46]: инициатор, разработчик, координатор, контролер, оценщик, погонщик. Так как группу целесообразно составлять из 3-4 человек, то роли можно объединять, например, «инициатор-координатор», при этом происходит формирование коммуникативного УУД «управление поведением партнера – контроль, коррекция, оценка действий партнера».

В статье И.А. Журавлева предлагается объединять учащихся по:

– по уровню обученности (разного уровня или с близким уровнем);

– учитывая межличностные отношения.

Учитель математики в своей работе представил этапы групповой работы, по В.В. Котову [28], с указанием развиваемых УУД (таблица 1).

Автор отмечает, что такая форма работы вызывает интерес у учащихся, так как она предлагает получение знаний не в готовом виде от учителя, а в процессе взаимодействия в группе по «добыванию» знаний.

Таблица 1 – Этапы групповой работы и развиваемые УУД

Этап групповой работы В.В. Котову [28]	**Развиваемые коммуникативные УУД**
1. «Предварительная подготовка учащихся к групповой работе»	-
2. «Постановка учебной задачи и ее обсуждение».	Планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками – определение цели, функции участников, способов взаимодействия.
3. «Обсуждение и составление плана выполнения учебной задачи внутри группы, определение способов ее решения».	Планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками.
4. «Работа по решению учебной задачи».	Знаково-символические действия, включая моделирование.
5. «Взаимная проверка и контроль выполнения задания в группе».	Управление поведением партнера – контроль, коррекция, оценка действий партнера.
6. «Подведение итогов работы».	Умение с достаточно полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации. Владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка.
7. «Самооценка учащихся, взаимооценка внутри группы, рефлексия проделанной работы».	-

Т.Г. Марченко [36], учитель математики СОШ №10 из г. Горячий Ключ, на уроках своих уроках использует коллективные (коммуникативные) приемы работы, например, дискуссия, групповая работа, парная работа. Групповую форму, по мнению автора, целесообразно применять при решении задач различными способами, при доказательствах теорем и составлении математических кроссвордов.

М. Л. Зуева [19], учитель математики в своей статье отмечает, что учащиеся должны быть «субъектами образовательного процесса» на своих уроках она использует модель урока предложенную А.С. Границкой [10]. «Урок состоит из двух частей.

В первой части учитель проводит фронтальную работу, обучая весь класс одновременно, время на такую деятельность учителя отводит минимальное.

Во второй части урока учитель работает с одним учащимся параллельно с групповой или самостоятельной работой остальных учащихся. Данная модель урока, по мнению учителя математики, позволяет организовать взаимодействие учащихся, в ходе которого проводится изучение нового материала, закрепление, применение, самоконтроль и взаимоконтроль» [19].

В результате на уроках происходит содержательные диалоги, в этом случае происходит формирование коммуникативных универсальных учебных действий.

Таким образом, существующий педагогический опыт показывает, что именно работа в группах является наиболее эффективным средством для формирования коммуникативных универсальных учебных действий на уроках математики.

Выводы по первой главе

Теоретический анализ литературы по проблеме исследования позволил сделать следующие выводы:

1. Коммуникативные универсальные учебные действия, являются важной частью общего комплекса учебных умений школьников. Умение продуктивного сотрудничества является необходимым в аспекте социализации личности. Сформированные коммуникативные навыки и умения способствуют повышению обученности.

2. ФГОС ООО содержит требования к необходимости формированию коммуникативных УУД. Современная школа применяет разнообразные инструменты для формирования коммуникативных УУД на уроках, например, проектная работа, проблемные вопросы, урок-игра и т.д.

3. Наиболее эффективным методом формирования коммуникативных УУД является организация групповой формы работы учащихся.

4. В настоящее время у учащихся недостаточно сформированы умения и навыки групповой работы. Продуктивность организованной групповой работы зависит от мастерства учителя. Успешная организация такого вида учебной деятельности способствует активации познавательных и коммуникативных УУД.

Глава 2 Методические основы конструирования системы заданий, ориентированной на формирование коммуникативных учебных действий учащихся при организации групповой формы учебной деятельности на уроке математики

2.1 Принципы конструирования системы заданий для организации групповой формы учебной деятельности учащихся с учетом этапов урока математики

Групповая форма организации учебной деятельности может использоваться на различных уроках по математике. На уроках по ознакомлению с новым материалом, изучение возможно, когда познавание нового осуществляется опытным путём. Например, можно разделить учеников на группы, причем каждая группа изучает свой фрагмент нового материала, затем проходит обсуждение нового материала среди групп. Так же групповая работа применима на уроках по закреплению изученного материала. Можно разделить учащихся на группы и несколько заданий предложить выполнить в группах. Выполняя задания, учащиеся выслушивают каждого. Разворачивается процесс обсуждения, в ходе которого закрепляется изученный материал. На уроках по систематизации и обобщению изученного материала групповая работа способствует повышению активности учащихся. Повторение превращается в процесс репродуктивно-поисковой деятельности, позволяющей сформировать глубокие знания у всех учащихся.

Важным фактором эффективности групповой формы организации учебной деятельности, являются определенные условия коллективной работы учащихся, такие как содержание учебного материала, представленного в задании.

Н.П. Щербо отметил, что задачи требующие перебора возможных вариантов, а также задания на внимательность приводили к тому, что испытуемые уходили от совместного решения и выполняли задание самостоятельно. Если же решение задания предполагает выработку общего решения, то верное совместное решение возникало достаточно часто [63, с. 107].

Б.Ф. Ломов описывает задачи, для успешного решения которых необходима активная коммуникация учащихся. В качестве примера, он приводит задание, которое решается поэтапным выводом ответа. При этом испытуемые складывают полный ответ, используя информацию, полученную каждым[33].

К. Райх предложил семь типов задач, которые стимулируют членов группы к сотрудничеству:

– контрольно – консультационные задачи;

– профессионально – разделенные задачи;

– ложные задачи;

– мозговой штурм;

– конкурентные задачи;

– задачи головоломки;

– групповые ролевые игры [70].

Существует различные мнения, какие задания наиболее подходящие для организации групповой формы работы. Так, В. Кинитц [68] среди трех типов задач, пригодных для групповой работы, называет задачи-упражнения, а вот, Х.Й. Лийметс отмечает, что «простые математические задачи на вычисление оказались непригодными для групповой работы» [32, С. 45].

И. Стейнер предложил «определенную классификацию групповых задач на основе четырех критериев, в зависимости от возможности разложения общей задачи на ряд частных подзадач:

– на делимые и неделимые (ожидаемый результат);
– на максимизирующие и оптимизирующие (выработка оптимального в определенном смысле варианта решения);

– аддитивные (результат работы есть сумма отдельных достижений всех членов группы) и дискретные (задачи с отличными от аддитивных критерием и процедурой определения успешности группы);
– дизъюнктивные (за результат всей группы принимается результат одного ее члена, выбранного в качестве представителя) и конъюнктивные (в качестве общегруппового результата принимается наиболее слабый из индивидуальных результатов членов группы)» [71].

Одним из первых, кто обратил внимание на то, как зависит продуктивность групповой работы от типа решаемой задачи, был Д. Хакман. Им было установлено, что «типом задачи определяется до 50% вариаций эффективности деятельности группы. Он же экспериментально показал, что в несколько меньшей степени на успешность совместной деятельности влияет степень трудности задачи» [67].

В основу данного исследования положим принципы конструирования системы заданий для организации групповой работы на различных этапах урока математики, разработанные Р.А. Утеевой.

«Групповая форма учебной деятельности учащихся эффективна *на этапе изучения нового материала*, когда:
– учебный материал содержит в себе способ (прием) решения задач определенного типа, содержание которого достаточно доступно раскрыто в учебнике;
– учебный материал содержит в себе формулу, правило, теорему, вывод («открытие») которых возможен самими учащимися на основе выполнения ими ряда специально подобранных заданий. В этом случае темы можно не связывать с конкретным учебником» [54, с. 17].

«На этапе первичного закрепления знаний у учащихся формируется умения по применению новых знаний через организацию их самостоятельной

деятельности в группах. Эта цель достигается тогда, когда учитель после того, как он дал образец выполнения задания (образец рассуждения и записи) организует групповую единую форму учебной деятельности учащихся, т.е. осуществляется переход от самостоятельной деятельности к коллективной» [54, с. 18]. Для данного этапа используем теоретический материал и упражнения из учебника, а также задания, составленные учителем.

Следующий этап в структуре урока – *формирование навыков и умений*. «Основное условие успешности организации групповой формы деятельности учащихся на третьем этапе – четкая постановка цели самостоятельной работы перед каждой группой; подбор и составление дифференцированных заданий; дифференциация помощи каждой группе» [54, с. 18].

На этапе проверки знаний и умений при групповой форме организации учебной деятельности у учащихся формируются навыки и умения контроля и самоконтроля, оценки работы участников группы и самооценки. «Основное условие успешности организации групповой формы деятельности учащимися на четвертом этапе – четкая постановка цели проверки; составление вопросника и подбор соответствующих заданий для взаимоопроса» [54, с. 19].

2.2 Система заданий по теме «Теорема синусов» с применением групповой формы организации учебной деятельности

Тема урока: Теорема синусов.

Тип урока: Урок изучения нового материала.

Формируемые результаты:

- предметные: формировать умение доказывать теорему синусов;
- личностные: развивать познавательный интерес к математике;
- метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Формируемые коммуникативные УУД:

– умение излагать свои мысли и понимать позицию партнера;

– умение работать в группе.

Планируемые результаты: учащийся научится доказывать теорему синусов применять теорему синусов.

Этап изучение нового материала.

Для выполнения задания, учащиеся делятся на группы, например, сидящие за партой поворачиваются к учащимся за второй партой.

Каждая группа получает одинаковую карточку (рисунок 1).

На выполнение отводится 8 минут.

Учащиеся коллективно выполняют задания.

Учитель наблюдает за группами, при необходимости оказывает помощь.

После работы представитель группы рассказывает о выполнении заданий.

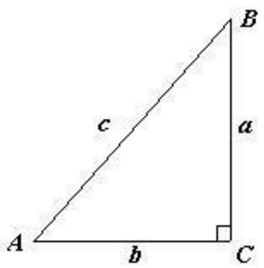
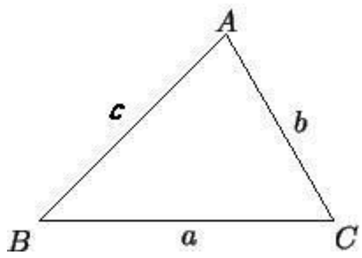
	1. Проверьте, верно ли равенство $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ для прямоугольного треугольника? Используйте определение синуса острых углов прямоугольного треугольника.
	2. Верно ли это равенство для любого треугольника? Используйте теорему о площади треугольника.

Рисунок 1 - Карточка для учащихся на этапе изучения нового

После презентации группами результатов своей совместной деятельности, учитель сообщает, что данное утверждение называется «Теоремой синусов».

Доказательство задания 1.

Используя определение синуса острых углов прямоугольного треугольника, получаем $\frac{a}{a/c}=\frac{b}{b/c}=\frac{c}{1}$. Сократим первую и вторую дробь, получаем с = с = с. Доказано.

Доказательство задания 2.

По теореме о площади треугольника $S=\frac{1}{2}absinC$, $S=\frac{1}{2}ac\,sinB$, $S=\frac{1}{2}bcsin$A.

Приравняв 1 и 2 равенство получаем $\frac{1}{2}absinC=\frac{1}{2}ac\,sinB$,

значит $bsinC=$ с $sinB$.

По определению пропорции, получаем $\frac{b}{sinB}=\frac{c}{\sin C}$.

Аналогично, из второго и третьего равенства следует $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

Итак, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Утверждение доказано.

Этап «первичное применение знаний».

Каждая группа получает карточку с задачами. На выполнение отводится 15 минут. Учащиеся коллективно выполняют задания. Учитель наблюдает за группами, при необходимости оказывает помощь. После работы представитель группы рассказывает о выполнении заданий.

Первая задача в карточке на умение записать формулу теоремы синусов для произвольного треугольника.

Вторая задача на нахождение элемента треугольника по готовому чертежу.

Последняя задача в карточке на нахождение неизвестного элемента в треугольнике, но задача дана в виде текста.

Карточка 1.

1. Запишите теорему синусов для треугольника FTH.

2. Найдите стороны x и y треугольника MNK, изображенного на рисунке 2 (длины отрезков даны в сантиментах).

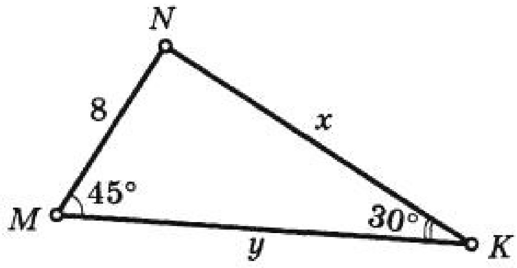


Рисунок 2 – Чертеж треугольника

3. Найдите угол А треугольника АВС, если

а) АС = 2см, ВС = 1см, $\angle B = 135°$;

б) АС = $\sqrt{2}$ см, ВС = $\sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$ [36, с. 26].

Ответы:

1. $\frac{t}{\sin T} = \frac{f}{\sin F} = \frac{h}{\sin H}$;

2. x = $2\sqrt{2}$см; $y \approx 3{,}86$ см;

3. а) 1 см; б) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Этап «формирование навыков и умений».

На этапе формирования навыков и умений учащиеся, организованные в группы, получают карточку, которая содержит задания различного уровня сложности. На выполнение отводится 15 минут. Учащиеся в группе распределяют задачи между собой. После решения своих задач каждый участник коллектива представляет решение группе, которое остальные записывают в тетрадь. Учитель наблюдает за группами, при необходимости оказывает помощь слабоуспевающим.

Задачи:

1. Найдите стороны x и y треугольника MNK, изображенного на рисунке 3 (длины отрезков даны в сантиментах).

2. Дан $\triangle ABC$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 15°$, $BC = 4\sqrt{6}$. Найти АВ, АС, $\angle B$.

3. Существует ли треугольник АВС такой, что sin A = 0,4, АС = 18 см, ВС = 6 см? Ответ обоснуйте [37, с. 183].

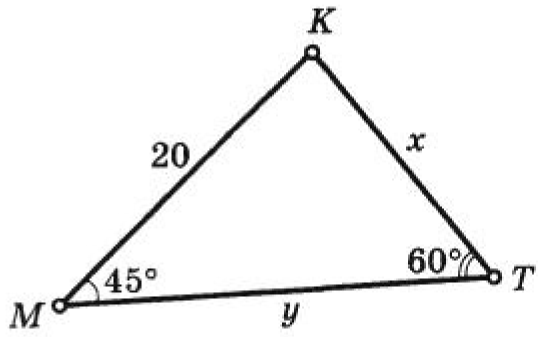


Рисунок 3 – Чертеж треугольника

4. Используя рисунок 4, найдите отрезок AD, если CD = a [35, с. 26].

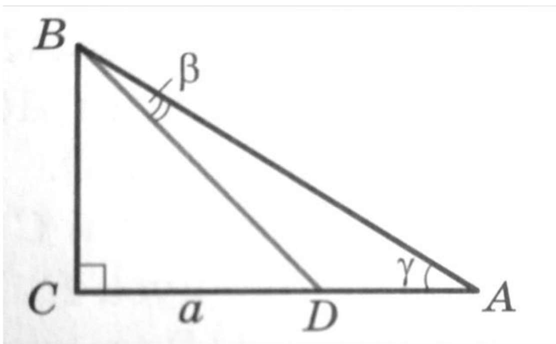


Рисунок 4 – Чертеж треугольника к задаче 4

Ответы:

1. x $=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; y $\approx\frac{39}{\sqrt{3}}$;

2. $\angle$B=120°; AC = 12; AB $\approx 2\sqrt{3}$;

3. не существует, т.к. sinB> 1.

4. $\frac{a sin\beta}{\cos(\beta+\gamma) sin\gamma}$.

Этап «проверка знаний и умений». Учитель заранее предупреждает, что на следующем уроке будет проведен взамоопрос по «Теорема синусов». Учащиеся знакомятся с вопросами для повторения.

На уроке учитель указывает, кто будет опрашивать и выдает ему карточку с вопросами и опросным листом (таблица 2). Учащиеся по очереди подходят к проверяющему, и отвечают на вопросы. В это время для учащихся организуется дифференцированная групповая форма деятельности на основе топологических групп.

После самостоятельной работы в группах, учитель организует отчет. Для этого учащиеся группы подходят к доске и рассказывают о том, как они выполняли задание. Каждый учащийся группы должен знать, как решать каждую из задач.

Таблица 2 – Опросный лист

ФИО	Сформулировал теорему синусов	Доказал теорему	Записал теорему синусов для произвольного треугольника	Отметка
1. Иванов А.А. 2. Петров А.А. ….				

Вопросник:

1. Сформулируй и докажи теорему синусов.

2. Запиши для треугольника, изображенного на рисунке 5, теорему синусов.

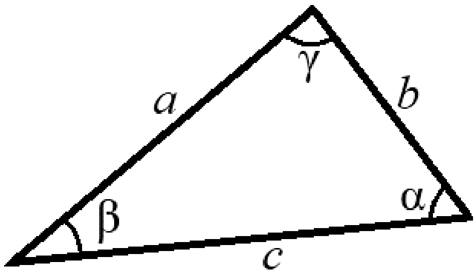


Рисунок 5 – Произвольный треугольник

Вариант А.

«1. В треугольнике ABC AC = 9 см, BC = 7 см. Может ли *sin* A быть равным $\frac{4}{5}$?

2. На рисунке 6 AC = b, ∠C = 90°, ∠ABC = β, ∠ADB = γ, AD = m. Найдите синус угла ABD» [37, с. 39].

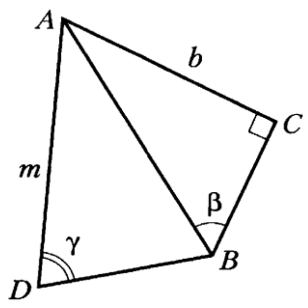


Рисунок 6 – Чертеж к задаче 3 вариант А

Вариант B.

«1. В треугольнике ABC BC = $5\sqrt{3}$ см, ∠A = 60°, ∠B = 45°. Найдите сторону AC.

2. В треугольнике ABC AB = $3\sqrt{2}$, ∠A = 15°, ∠B = 135°. Найдите сторону AC.

3. В треугольнике ABC AB = $3\sqrt{2}$ см, AC = 6 см, ∠B = 135°. Найдите угол A. Сколько решений имеет задача?» [37, с. 38].

Вариант C.

1. Найдите стороны *x* и *y* треугольника, изображенного на рисунке 7 (длины отрезков даны в сантиментах).

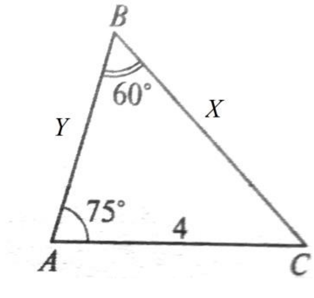


Рисунок 7 – Чертеж треугольника к задаче 1 варианта C

2. Используя рисунок 8, найдите угол C [8, с. 183].

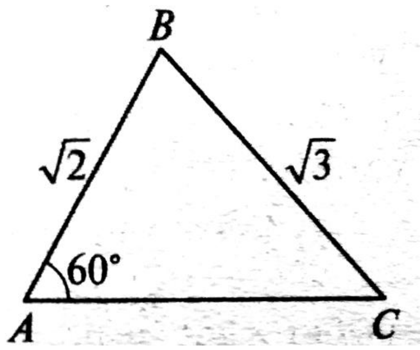


Рисунок 8 – Чертеж треугольника к задаче 2 варианта С

3. Используя рисунок 9, найдите угол В [8, с. 183]

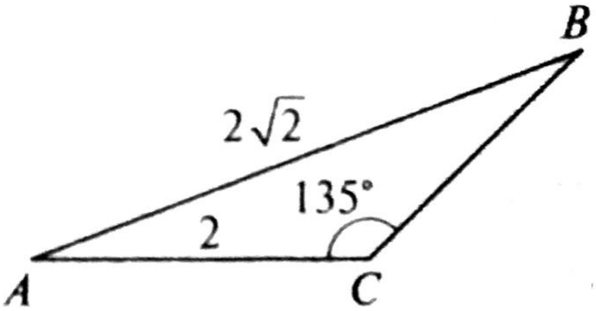


Рисунок 9 – Чертеж треугольника к задаче 3 варианта С

2.3 Система заданий для организации групповой работы учащихся на элективном курсе «Именные теоремы школьного курса алгебры и геометрии»

Групповая форма организации учебной деятельности как средство формирования коммуникативных умений учащихся эффективна не только на уроках математики. Она также может быть организована при проведении элективных курсов в старших классах.

Ниже, на примере разработанного нами элективного курса «Именные теоремы школьного курса алгебры и геометрии» для учащихся 10 классов, изучающих математику на профильном уровне, раскроем возможности организации групповой работы.

При изучении курса особое внимание уделяется темам, выходящим за рамки базовой программы элементарной геометрии за счет расширения теорем и решения более сложных задач.

Актуальность программы элективного курса определяется тем, что в процессе реализации, учащимся предлагаются материалы, позволяющие:

– закрепить ранее полученные знания на более высоком уровне;

– расширить знания учащихся о свойствах геометрических фигур;

– применение полученных знаний и умений при участиях в предметных олимпиадах и на итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

– обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений;

– повторение и углубление знаний о свойствах геометрических фигур и применения их при решении сложных задач.

Цель и задачи программы элективного курса:

Цель: расширение и углубление знаний о свойствах геометрических фигур в «именных» теоремах.

Задачи курса:

– расширить и углубить знания о методах решения геометрических задач с использованием теорем Чевы, Дезарга, Паскаля;

– сформировать у учащихся представление о проективной геометрии;

– развить коммуникативные и общеучебные навыки работы в группе, самостоятельной работы, умение вести дискуссию, аргументировать ответы;

– повысить математическую культуру;

– развить интерес к предмету;

– познакомить учащихся с историей математики.

Отличительные особенности данного элективного курса: данный курс позволит учащимся расширить и систематизировать знания о методах решения геометрических задач.

Форма занятия: лекция, семинар, самостоятельная работа, индивидуальные и групповые формы работы.

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- знать формулировки теорем Чевы, Дезарга, Паскаля и приводить их доказательства;
- уметь исследовать связи и зависимости, отделять существенные характеристики изучаемого объекта от несущественных;
- уметь обосновывать суждения, приводить доказательства (в том числе от противного);
- уметь применять теоремы при решении задач;
- уметь находить информацию по интересующей теме;
- уметь выступать перед публикой.

При реализации данного элективного курса текущий контроль знаний усвоения материала осуществляется в результате выполнения обучающимися серий задач, часть которых выполняется в классе, а другая индивидуально или в группе. Итоговой формой контроля выбрана защита проектов.

Элективный курс может быть предложен учащимся универсального профиля, а также в классах с профильным изучением математики.

Программа элективного курса рассчитана на 17 часов (1 ч. в неделю). В Таблице 3 представлено учебно-тематическое планирование.

1. *Вводное занятие*. Обзор «именных» теорем в школьном курсе математике.

Основная цель – познакомить учащихся с историей развития «именных» теорем в математике. Сформулировать теоремы известные из школьного курса математики 5-9 класса.

Таблица 3 – Учебно-тематическое планирование

Содержание темы	Кол-во часов
1. Вводное занятие. Обзор «именных» теорем в школьном курсе математике.	1
2. Биография Чевы. Биография Менелая. Теоремы Чевы и Менелая (формулировка и доказательств)	1
3. Решение задач с помощью теоремы Чевы и Менелая.	2
4. Биография Дезарга. Теорема Дезарга и ее доказательство (формулировка и доказательство).	1
5. Решение задач с помощью теоремы Дезарга.	2
6. Биография Паскаля. Теорема Паскаля.	1
7. Решение задач с помощью теоремы Паскаля.	2
8. Биография Эйлера. Теорема Эйлера.	1
9. Решение задач с помощью теоремы Эйлера.	2
10. Контрольная работа	2
11. Защита проектов.	2
Итого	17

На данном уроке учащиеся повторяют теоремы из курса алгебры и геометрии (базовый уровень): теорема Виета, теорема Фалеса, теорема Пифагора, формула Герона. Решают задачи повышенного уровня сложности на применение этих теорем.

2. *Биография Чевы. Биография Менелая. Теоремы Чевы и Менелая (формулировка и доказательство).*

Основная цель – ознакомиться с биографиями Джованни Чева и Менелая. Ознакомить учащихся с формулировкой теоремы Чевы и Менелая, провести их доказательство. Сформулировать и доказать обобщение теоремы Чевы и следствия из нее.

Биография Чевы.

«Джованни Чева (1647–1734) — итальянский математик. Получил образование в иезуитском колледже Милана, а в 1670 году поступил в Пизанский университет, где впоследствии получил должность профессора. Чева был также инженером-гидравликом и в качестве такового несколько раз служил правительству Мантуи. Сегодня Чева известен не только как математик, но и как талантливый автор в области экономики — именно он применил в экономике методы математики. В 1685 году Джованни Чева женился на Сесилии Веччи, у них было несколько детей. Брат Джованни Томасо Чева также был известным математиком и поэтом» [52].

Биография Менелая.

«Менелай Александрийский (I–II в. н. э.) — греческий математик и астроном. О жизни Менелая сведений очень мало. Предполагают, что он жил в Риме, куда переехал из Александрии. Время его жизни и деятельности определяется приведёнными в «Альмагесте» Птолемея двумя астрономическими наблюдениями, которые Менелай произвёл в Риме в первом году царствования Траяна, то есть в 98 году н. э. Главное сочинение Менелая - «Сферика» в трёх книгах. Его греческий оригинал утрачен, и содержание его известно по арабским, а также последующим вторичным латинским и еврейским переводам. Менелай впервые рассматривает тригонометрию отдельно от алгебры и геометрии. В первой книге «Сферики» он дал определение сферического треугольника и связанных с ним понятий, а в третьей книге изложил теорему, которая впоследствии и была названа теоремой Менелая» [52].

Теорема Чевы. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, AC и AB и треугольника ABC соответственно. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 отрезки и пересекаются в одной точке (рисунок 10). Тогда справедливо равенство (1):

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (1)$$

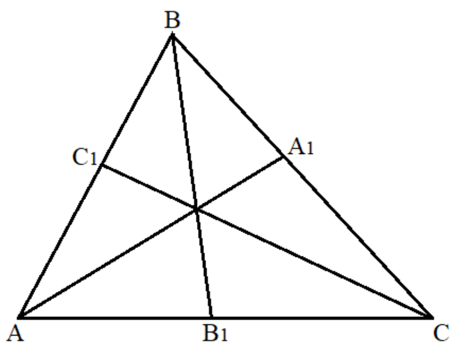


Рисунок 10 – Теорема Чевы

Доказательство теоремы Чевы. Пусть O – точка пересечения AA_1, BB_1и CC_1. Опустим из вершин A и C перпендикуляры на прямую BB_1. L и K – основания перпендикуляров (рисунок 11).

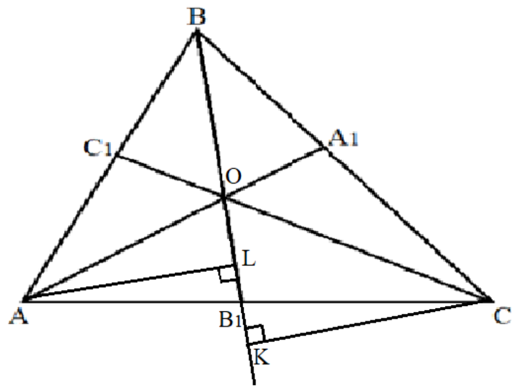


Рисунок 11 – Построение перпендикуляров ALи CK

Найдем площади треугольников AOB и BOC по формулам (2):

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OB\cdot AL;\ \ S_{BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot CK \qquad (2)$$

Поскольку треугольники AOB и BOC имеют общую сторону OB, то их площади относятся как высоты (формула (3)), проведенные на эту сторону, т.е. AL и CK:

$$\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=\frac{CK}{AL} \qquad (3)$$

$\triangle AB_1L$ и $\triangle CB_1K$ подобны, т.к. они прямоугольны и $\angle AB_1C=\angle CB_1K$ (вертикальные углы), получаем:

$$\frac{CK}{AL}=\frac{CB_1}{B_1A}\text{, т.е. }\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=\frac{CB_1}{B_1A} \qquad (4)$$

Аналогично получаем (формула (5)):

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{BA_1}{A_1C}\quad \text{и} \quad \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=\frac{AC_1}{C_1B} \qquad (5)$$

Подставим в выражение отношения площадей (формулу (6)):

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}\cdot\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\cdot\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=1 \qquad (6)$$

что и требовалось доказать.

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC (рисунок 12). Тогда имеет место соотношение (формула (7)):

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (7)$$

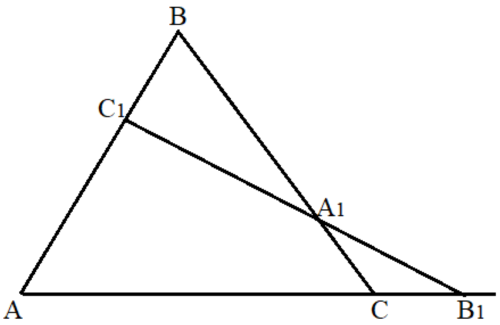


Рисунок 12- Теорема Менелая

Доказательство теоремы Менелая. Проведём через точку C прямую CK параллельно AB (K – точка пересечения с C_1B_1) (рисунок 13).

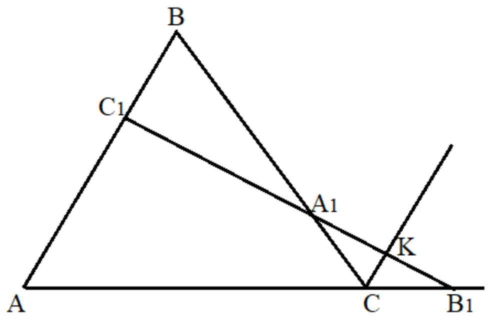


Рисунок 13 – Построение прямой CK

$\triangle CKB_1 \sim \triangle AC_1B_1$, т.к. $(\angle C_1AB_1=\angle KCB_1,\ \angle AC_1B_1=\angle CKB_1) \Rightarrow$ $\frac{AC_1}{CK}=\frac{B_1A}{B_1C}, CK=\frac{AC_1\cdot B_1C}{B_1A}$

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CKA_1$, т.к. $(\angle BA_1C_1=\angle KA_1C,\ \angle BC_1A_1=\angle CKA_1) \Rightarrow$ $\frac{C_1B}{CK}=\frac{BA_1}{A_1C}, CK=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1}$

Из каждого равенства выразим CK: $CK=\frac{AC_1\cdot B_1C}{B_1A}=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1}$

Откуда следует равенство (формула (8))

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (8)$$

что и требовалось доказать.

Задачи для решения на уроке [2]:

Задача 1. «Докажите теорему: Медианы треугольника пересекаются в одной точке; точка пересечения делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая отвершины (рисунок 14)»[2].

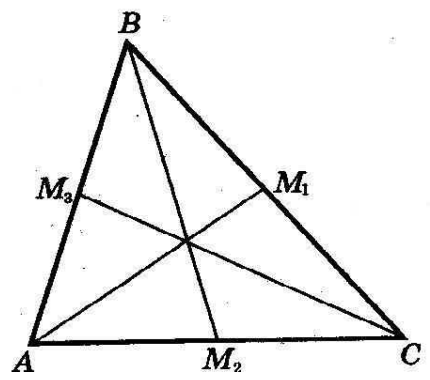


Рисунок 14 – Рисунок к задаче1

Доказательство. Пусть AM_1, BM_2, CM_3 – медианы треугольника ABC. Чтобы доказать, что эти отрезки пересекаются в одной точке, достаточно показать, что $\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = 1$. Тогда по теореме Чевы (обратной) отрезки AM_1, BM_2 и CM_3 пересекаются в одной точке. Имеем: $\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$.

Итак, доказано, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Пусть O – точка пересечения медиан. Прямая M_3C пересекает две стороны треугольника ABM_2 и продолжение третьей стороны этого треугольника. По теореме Менелая

$\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BO}{OM_2} \cdot \frac{M_2C}{CA} = 1$ или $\frac{1}{1} \cdot \frac{BO}{OM_2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OM_2} = \frac{2}{1}$.

Рассматривая теорему Менелая для треугольников AM_1C и AM_2C, мы получаем, что

$$\frac{AO}{OM_1} = \frac{2}{1}, \frac{CO}{OM_3} = \frac{2}{1}.$$

Теорема доказана.

Задача 2. «Докажите теорему: Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рисунок 15)» [2].

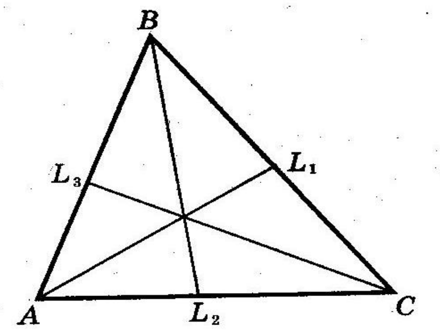


Рисунок 15 – Рисунок к задаче 2

Доказательство:

Достаточно показать, что $\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1$.

Тогда по теореме Чевы (обратной) AL_1, BL_2, CL_3 пересекаются в одной точке.

По свойству биссектрис треугольника: $\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{AC}{BC}; \frac{BL_1}{L_1C} = \frac{AB}{AC}; \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{BC}{AB}$.
Перемножая почленно полученные равенства, получаем: $\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$.

Итак, для биссектрис треугольника равенство Чевы выполняется, следовательно, они пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

Задача 3 «Докажите теорему: Высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке (рисунок 16)» [2].

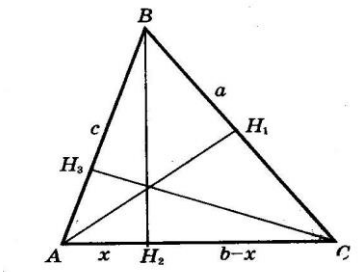


Рисунок 16 – Рисунок к задаче 3

Доказательство.

Пусть AH_1, AH_2, AH_3 – высоты треугольника ABC со сторонами a, b, c. Из прямоугольных треугольников ABH_2 и BCH_2 по теореме Пифагора выразим, соответственно, квадрат общего катета BH_2, обозначив $AH_2 = x$, $CH_2 = b - x$.

$(BH_2)^2 = c^2 - x^2$ и $(BH_2)^2 = a^2 - (b - x)^2$. приравнивая правые части полученных равенств, получаем $c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2$, откуда $x = \dfrac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}$.

Тогда $b - x = b - \dfrac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} = \dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}$.

Итак, $AH_2 = \dfrac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}$, $CH_2 = \dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}$.

Аналогично рассуждая для прямоугольных треугольников ACH_2и BCH_3, BAH_1 и CAH_1, получим $AH_3 = \dfrac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}$, $BH_3 = \dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2c}$ и $BH_1 = \dfrac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$, $CH_1 = \dfrac{a^2 - c^2 + b^2}{2a}$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\dfrac{AH_3}{H_3B} \cdot \dfrac{BH_1}{H_1C} \cdot \dfrac{CH_2}{H_2A} = 1$ Тогда по теореме Чевы (обратной) отрезки AH_1, BH_2 и CH_3 пересекаются в одной точке. Подставив в левую часть равенства выражения длин отрезков

AH_3, BH_3, BH_1, CH_1, CH_2 и AH_2 через a, b, c, убеждаемся, что равенство Чевы для высот треугольника выполняется. Теорема доказана.

3. Биография Дезарга. Теорема Дезарга и ее доказательство (формулировка и доказательство). Решение задач с помощью теоремы Дезарга.

Основная цель – ознакомить учащихся с формулировкой теоремы Дезарга, провести доказательство. Сформулировать и доказать теорему Дезарга и следствия из нее. Научиться решать задачи.

Биография Дезарга.

«Французский математик, архитектор и инженер. Заложил основы начертательной и проективной геометрии. Был архитектором и военным инженером. Оставив службу, поселился в Париже, где встречался со знаменитыми математиками и физиками того времени. В основу геометрических исследований он положил систематическое применение перспективного изображения. Его сочинение о конических сечениях имеет общий проективно-геометрический характер. Первый ввел в геометрию бесконечно удаленные элементы и понятие полярности. Дал полное учение об инволюции пар точек, рассмотрел инволюцию четырех точек или прямых. Полученные результаты применил при перспективном изображении конических сечений. Ему принадлежит одна из основных теорем проективной геометрии, носящая его имя и дающая возможность выполнять перспективные построения в одной плоскости. Существуют геометрия Дезарга, дезарговы структуры, теорема и конфигурация Дезарга. его идеи были признаны только наиболее выдающимися математиками того времени – Р. Декартом, П. Ферма и Б. Паскалем. Возродилась проективная геометрия лишь вначале XIX в. в трудах французских математиков Г. Монжа, Ж. Понселе, немецкого математика Я. Штейнера и др.»[52].

Теорема Дезарга: *Если два треугольника ABC и ABC расположены в различных плоскостях (или в одной плоскости) так, что прямые (AA'), (BB') и (CC'), соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной* *точке S, т.е. (AA')∩(BB')∩(CC')=S, то их соответственные стороны (AB) и (A'B'), (BC) и (B'C'), (AC) и (A'C') пересекаются в трех точках M,N,P одной прямой (прямая Дезарга), т.е. (AB)∩(A'B')=M, (BC)∩(B'C')=N, (AC)∩(A'C')=P и M, N,P Є ℓ.*

Решение задач:

Задача 4.

а) «Через точки *P* и *Q* проведены тройки прямых. Обозначим их точки пересечения так, как показано на рисунке17. Докажите, что прямые *KL, AC* и *MN* пересекаются в одной точке (или параллельны)» [52].

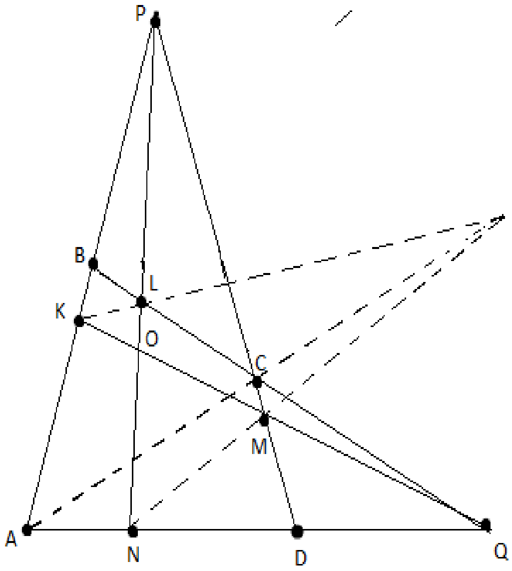


Рисунок 17 – Рисунок к задаче 4.

б)«Докажите, далее, что если точка *O* лежит на прямой *BD*, то точка пересечения прямых *KL*, *AC* и *MN* лежит на прямой *PQ*»[52].

Решение

а) Пусть *R* – точка пересечения прямых *KL* и *MN*. Применяя теорему к тройкам точек *(P, L, N)* и *(Q, M, K)*, получаем, что точки *A, C* и *R* лежат на одной прямой.

б) Применяя теорему Дезарга к треугольникам *NDM* и *LBK*, получаем, что точки пересечения прямых *ND* и *LB, DM* и *BK*, *NM* и *LK* лежат на одной прямой.

4. *Биография Паскаля. Теорема Паскаля. Решение задач с помощью теоремы Паскаля.*

Основная цель – ознакомить учащихся с формулировкой теоремы Паскаля, провести доказательство. Научиться решать задачи с помощью теоремы Паскаля.

Биография Блез Паскаль.

19 июня 1623 г. – 19 августа 1662 г.

«Французский религиозный философ, писатель, математик и физик Блез Паскаль родился в Клермон – Ферране в семье высокообразованного юриста, занимавшегося математикой и воспитывавшего своих детей под влиянием педагогических идей М. Монтеня.

Вместе с Г. Галилеем и С. Стевином Паскаль считается основоположником классической гидростатики. Опыт, проведённый под руководством Паскаля (1648), подтвердил предположение Э. Торричелли о существовании атмосферного давления. Паскаль высказал также идею о зависимости атмосферного давления от высоты, открыл зависимость давления от температуры и влажности воздуха и предложил использовать барометр для предсказания погоды. В его честь названа единица давления – паскаль.

Работа Паскаля над проблематикой точных наук в основном относится к 1640-1650-м годам. Разочаровавшись в «отвлечённости» этих наук, Паскаль обращается к религиозным интересам и философской антропологии. С 1655 г. он ведёт полумонашеский образ жизни в янсенистской обители Пор-Руаяль-де-Шан, вступив в энергичную полемику по вопросам религиозной этики с иезуитами; плодом этой полемики стали «Письма к провинциалу» (1657) – шедевр французской сатирической прозы. В центре занятий Паскаля в последние годы жизни – попытка «оправдания» христианства средствами философской антропологии. Этот труд не был закончен; афористические наброски к нему после смерти Паскаля в вышли в свет под заглавием «Мысли г. Паскаля о религии и о некоторых других предметах» (1669)» [50].

«*Теорема Паскаля.* Пусть ABC — неравнобедренный треугольник, ω – описанная вокруг него окружность. Пусть прямые AA’, BB’ и CC’ – касательные к окружности ω в точках A, B и C соответственно. Пусть A’, B’ и C’ – точки пересечения касательных с прямыми, на которых лежат стороны треугольника ABC. Тогда точки A’, B’ и C лежат на одной прямой – прямой Паскаля треугольника ABC» [50].

Решение задач с помощью теоремы Паскаля.

Задача 5. «Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность *S*; *X*— произвольная точка, *M* и *N*—вторые точки пересечения прямых *XA* и *XD* с окружностью *S*. Прямые *DC* и *AX*, *AB* и *DX* пересекаются в точках *E* и *F*»[41].

Докажите, что точка пересечения прямых *MN* и *EF* лежит на прямой *BC* (рисунок 18).

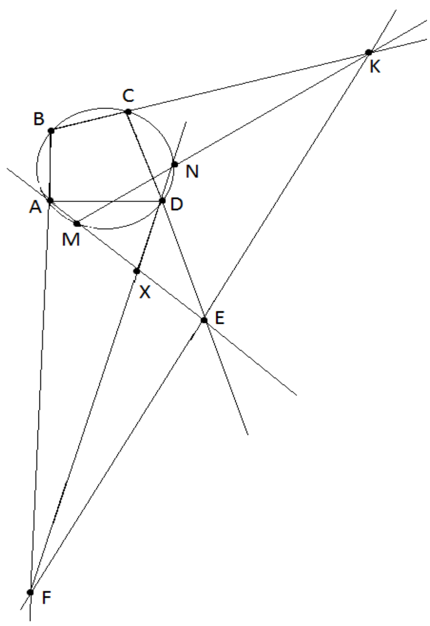


Рисунок 18 – рисунок к задаче 5

Решение.

Пусть *K* — точка пересечения прямых *BC* и *MN*.

Применяя теорему Паскаля к точкам *A, M, N, D, C, B*, получаем, что точки *E, K* и *F* лежат на одной прямой, а значит, *K*—точка пересечения прямых *MN* и *EF*.

Задача 6.

«Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90°$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ лежит на прямой XO (рисунок 19)» [41].

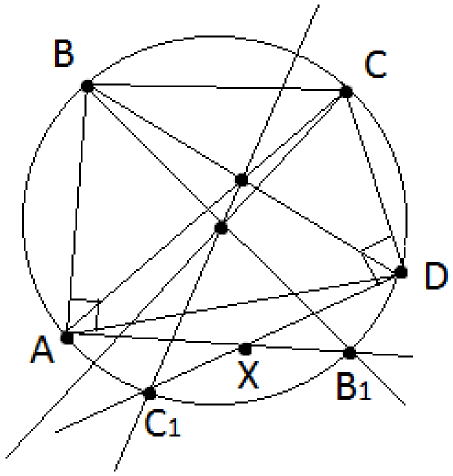


Рисунок 19 – Рисунок к задаче 6

Решение.

Пусть точки $B1$ и $C1$ симметричны точкам B и C относительно точки O. Тогда точка X лежит на прямых$AB1$ и $C1D$. Применим теорему Паскаля к шестиугольнику $AB1BDC1C$. Прямые$AB1$ и $DC1$ пересекаются в точке X, прямые $BB1$ и $CC1$ —в точке O; прямые BD и AC - диагонали четырёхугольника.

5. Решение задач с помощью теоремы Эйлера.

Основная цель – ознакомиться с биографией Эйлера. Ознакомить учащихся с формулировкой теоремы Эйлера, провести ее доказательство. С биографией Эйлера ознакомиться в источнике [11].

Теорема Декарта-Эйлера: Для любого выпуклого многогранника сумма числа вершин В и числа граней Г на две единицы больше числа его ребер Р, т. е. справедлива формула В – Р + Г = 2.

Задача 7. «Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет 12 ребер?

Нарисуйте такой многогранник» [39].

Решение. Пусть у данного многогранника будет В вершин, Р ребер и Г граней. Тогда 3Г = 2Р, где Р = 12, значит, Г = 8. Применяем теорему Эйлера, из которой следует, что В = 2 + Р - Г. В нашем случае В = 2 + 1 2 - 8 = 6. Итак, В = 6, Р = 12, Г = 8. Примером такого многогранника является октаэдр.

Задача 8. «Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник» [39].

Решение. 3В = 2Р, учитывая, что Р = 12, имеем: В = 8. По теореме Эйлера Г = 2 - В + Р, Г = 2 - 8 + 12 = 6.

Таким образом, у данного выпуклого многогранника В = 8, Р = 1 2 и Г =6. Примером такого многогранника является куб.

Задача 3. «Докажите, что в любом выпуклом многограннике число треугольных граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми»[39].

Решение. Обозначим через $Г_n$ число граней с *n* ребрами. Тогда $Г = Г_3 +$ $+\boldsymbol{Г_4}+\boldsymbol{Г_5}+\boldsymbol{Г_6}+$ ... Каждая треугольная грань имеет три ребра, и число треугольных граней равно $Г_3$. Поэтому общее число ребер в треугольных гранях равно $3\boldsymbol{Г_3}$ Аналогично, общее число ребер в четырехугольных гранях равно $4\boldsymbol{Г_4}$, и т.д.

Поскольку каждое ребро многогранника содержится ровно в двух гранях, то при таком подсчете ребер мы каждое ребро посчитаем дважды, следовательно, будет иметь место равенство $2Р = 3Г_3+\boldsymbol{4Г_4}+\boldsymbol{5Г_5}+\boldsymbol{6Г_6}+\dots$.

Аналогичным образом обозначим через В число вершин, в которых сходится *n* ребер. Тогда $В = В_3 + \boldsymbol{В_4} + \boldsymbol{В_5} + В_6 + \dots$

Значит, для числа ребер (Р) будет иметь место равенство $2Р=\boldsymbol{3В_3}+\boldsymbol{4В_4}+\boldsymbol{5В_5}+\boldsymbol{6В_6}+\dots$

Воспользуемся равенством 4В - 4Р + 4Г = 8, получающимся умножением обеих частей равенства Эйлера на 4.

Имеем

$4В = \mathbf{4}\boldsymbol{B_3}+\mathbf{4}\boldsymbol{B_4}+\mathbf{4}\boldsymbol{B_5}+\mathbf{4}\boldsymbol{B_6}+\ldots$

$4Г = 4\,\boldsymbol{\Gamma_3}+4\boldsymbol{\Gamma_4}+4\boldsymbol{\Gamma_5}+\mathbf{4}\boldsymbol{\Gamma_6}+\ldots$

$4Р = 2Р + 2Р = 3\boldsymbol{B_3}+4\boldsymbol{B_4},+5\boldsymbol{B_5}+\mathbf{6B_6}+\ldots+\mathbf{3}\boldsymbol{\Gamma_3}+\mathbf{4}\boldsymbol{\Gamma_4}+\mathbf{5}\boldsymbol{\Gamma_5}+\mathbf{6}\boldsymbol{\Gamma_6}+\ldots$

Подставляя эти выражения в указанное равенство, получим:

$В_3 + Г_3-(В_5 + 2В_6+... + Г_5 + 2Г_6 +...) = 8.$

Из этого следует, что $В_{3+}Г_3 \geq 8$, что и требовалось доказать.

В качестве приложения теоремы Эйлера рассмотрим задачу Эйлера о трех домиках и трех колодцах.

6. Контрольная работа.

Основная цель – проверить уровень усвоения учащимися тем элективного курса.

В данный пункт включена контрольная работа учащихся в группах. Учащиеся работают над задачами из журнала «Квант»[64] и готовят выступление в форме презентации по решению задач. Здесь предложены задания, которые способствуют выявлению уровня усвоения изученного материала. Предложены соответствующие критерии оценки.

7. Защита проекта.

Основная цель – ознакомиться с исследовательской работой учащихся.

На этих занятиях учащиеся защищают учебно-исследовательские проекты по решению задач на применение изученных на элективном курсе теорем. Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы учащимися при выполнении групповых проектов.

Тема и ссылка на электронные ресурсы выдаются в начале изучения программы. Защита проектов или работ проходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

Например, можно предложить проект на тему «Решение задач, с помощью теоремы Чевы».

План работы над проектом:

1. Определение теоремы Чевы.
2. Доказательство теоремы Чева.
3. Разбор решения 3 задач, предложенных в статьях журнала «Квант» [64].

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Экспериментальная работа проводилась на базе МБУ «Школа №47» г. Тольятти в 10 классе. В исследовании принимали участие 20 учеников: 15 девочек и 5 мальчиков. Классный руководитель класса – Борисова Елена Михайловна, учитель высшей категории.

В период педагогической практики на констатирующем этапе эксперимента было проведено исследование по выявлению уровня сформированности коммуникативных универсальных учебных действий учащихся. Основным методом исследования было анкетирование.

Для диагностики сформированности коммуникативных умений использовали методику В.В. Синявского и Б.А. Федоришина.

Так как коммуникативные способности и склонности определяют коммуникативные умения, значит, выявление их уровня позволит нам определить уровень сформированности коммуникативных умений.

Учащимся предлагается ответить на 20 вопросов анкеты. На каждый вопрос предлагается 2 варианта ответа: «да» или «нет». Время выполнения 5-8 минут.

Вопросы:

«1. Много ли у Вас друзей, с которыми Вы постоянно общаетесь?

2. Долго ли Вас беспокоит чувство обиды, причиненное Вам кем-то из Ваших товарищей?

3.Есть ли у Вас стремление к установлению новых знакомств с разными людьми?

4. Верно ли, что Вам приятнее и проще проводить время с книгами или за каким-либо другим занятием, чем с людьми?

5. Легко ли Вы устанавливаете контакты с людьми, которые значительно старше Вас по возрасту?

6. Трудно ли Вы включаетесь в новую для Вас компанию?

7. Легко ли Вам удается устанавливать контакты с незнакомыми людьми?

8. Трудно ли Вы осваиваетесь в новом коллективе?

9. Стремитесь ли Вы при удобном случае познакомиться и побеседовать с новым человеком?

10. Раздражают ли Вас окружающие люди и хочется ли Вам побыть одному?

11. Нравится ли Вам постоянно находиться среди людей?

12. Испытываете ли Вы чувство затруднения, неудобства или стеснения, если приходится проявить инициативу, чтобы познакомиться с новым человеком?

13. Любите ли Вы участвовать в коллективных играх?

14. Правда ли, что Вы чувствуете себя неуверенно среди малознакомых Вам людей?

15. Полагаете ли Вы, что Вам не доставляет особого труда внести оживление в малознакомую Вам компанию?

16. Стремитесь ли Вы ограничить круг своих знакомых небольшим количеством людей?

17. Чувствуете ли Вы себя непринужденно, попав в незнакомую Вам компанию?

18. Правда ли, что Вы не чувствуете себя достаточно уверенным и спокойным, когда приходится говорить что-либо большой группе людей?

19. Верно ли, что у Вас много друзей?

20. Правда ли, что Вас пугает перспектива оказаться в новом коллективе?»

Учащийся получает по 1 баллу за каждый ответ "да" на следующие вопросы: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; и "нет" на вопросы: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Затем вычисляем оценочный коэффициент К по формуле (9):

$$К = 0{,}05 \cdot С, \tag{9}$$

где С - количество полученных баллов.

После подсчета величины оценочного коэффициента подводим итог:

– низкий уровень – от 0,10 до 0,45(учащийся замкнут, не общителен);

– ниже среднего – от 0,46 до 0,55 (учащийся испытывает трудности при в установлении контактов с людьми);

– средний – от 0,56 до 0,65 (учащийся стремится к общению, но коммуникативные способности необходимо развивать и совершенствовать);

– высокий – от 0,66 до 0,75 (учащийся не теряется в новой обстановке, быстро находит друзей);

– очень высокий – от 0,76 до 1 (учащийся испытывает потребность в коммуникации, отстаивают свое мнение).

Результаты проведенного исследования представлены на рисунке 20.

Таким образом, в ходе диагностики нами было выявлено, что 4 старшеклассника (20%): Иван Б., Варвара З., Эмилия М., Алена Ч., не обладают коммуникативными способностями и навыками общения. У них низкий уровень коммуникативных способностей.

С уровнем ниже среднего выявлено 7 учащихся (35%): Александра И., Валерия М., Елизавета Н., Екатерина П., Дарья Ф., София С., Анастасия А.

Средний уровень показали (30%): Андрей А., Анастасия Б., Елизавета З., Алина Ф., Даниил К., Сергей Л..

Высокий уровень выявлен у двух учащихся (10%): Валерия И., Илларион Р. и очень высокий уровень (5%) обнаружился у одной испытуемой Анны М.

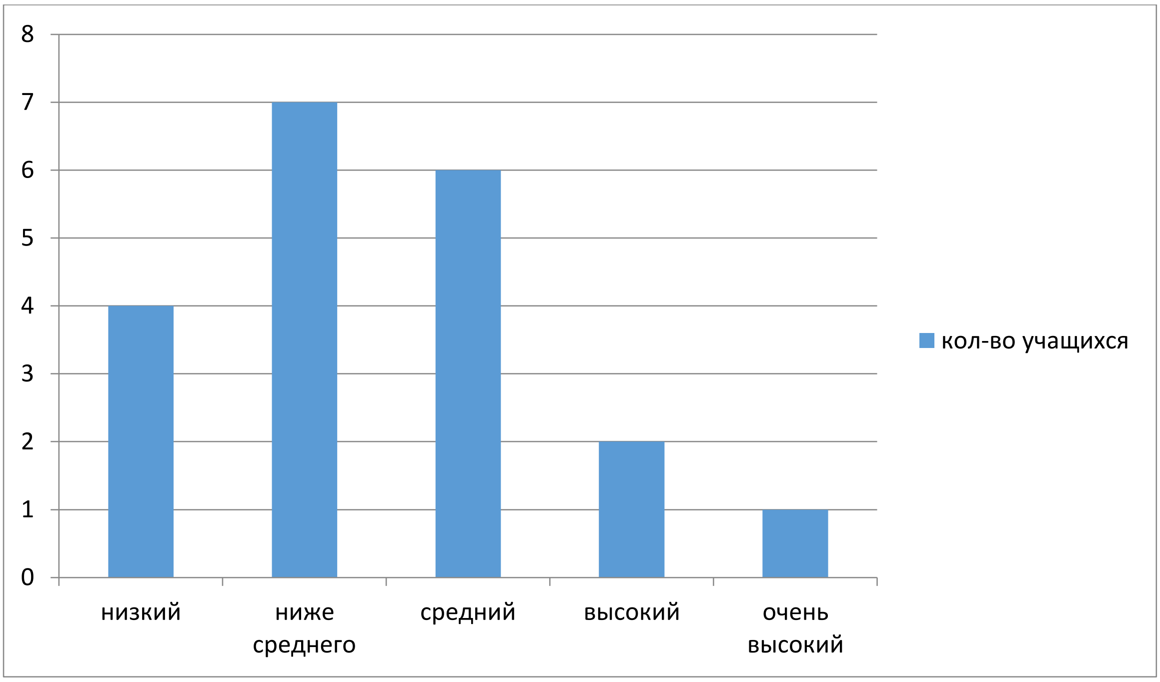


Рисунок 20 – Результаты диагностического исследования уровня сформированности коммуникативных навыков на начало эксперимента по методике В.В. Синявского и Б.А. Федоришина.

Проведенное диагностическое исследование показало низкий уровень сформированности коммуникативных умений. В этом возрасте при правильном развивающем обучении старшеклассники должны быть более коммуникабельны.

Мы считаем, что в данном классе необходимо создать условия для развития коммуникативных способностей и таким условием должна стать групповая форма организации учебной деятельности, в частности на уроке математики.

На поисковом этапе эксперимента в период педагогической практики были проведены уроки по алгебре и началам анализа и геометрии, на которых была организована групповая работа, с целью проверки гипотезы.

Конспект урока по теме «Теорема Декарта-Эйлера для выпуклых многоугольников»

Цели:

– познакомить с понятием«эйлерова характеристика»; сформулировать теорему Декарта – Эйлера для выпуклых многоугольников;
– способствовать формированию умений применять теорему Декарта-Эйлера для выпуклых многоугольников при решении задач;
– развивать познавательную активность и формировать положительную мотивацию к изучению темы, развивать коммутативные способности учащихся.

Форма проведения урока: творческая мастерская.

Ход урока

При проведении урока в форме творческой мастерской, необходимо соблюдение этапов, предлагаемых А.А. Окуневым. В Таблице 4 представлено проектирование данной технологии на уроке «Теорема Декарта - Эйлера».

1 этап Индукция.

Слово мастера. Здравствуйте, сегодня на уроке мы будем работать в группах. Мнение каждого важно, поэтому прислушивайтесь друг к другу.

2 этап Деконструкция.

Каждая группа получает задание:

Задание 1. Начертите четырехугольную призму, треугольную пирамиду, четырехугольную пирамиду.

Таблица 4 – Проектирование технологии творческой мастерской

Этап мастерской	**Содержание**	**Время (мин.)**	**Задание**
1 этап - индукция	мотивация учащихся.	1	-
2 этап- деконструкция	учитель создает проблемную ситуацию	5	Задания 1,2
3 этап - реконструкция	Учащиеся выдвигают гипотезу для решения проблемного вопроса	3	Задание 3

Продолжение таблицы 4

Этап мастерской	Содержание	Время (мин.)	Задание
4 этап - социализация	Учащиеся обсуждают свои предложения в группе и применяют их для заполнения таблицы	4	Задание 4
5 этап - афиширование	Учащиеся по группам представляют результат выполнения заданий 1-4.	8	Задание 5
6 этап - разрыв	Учитель дополняет полученные знания учащихся, формулирует теорему и проводит ее доказательство.	7	-
	Учащиеся решают задачи на применение теоремы. Презентация решения задач.	10	Задача 1и 2
7 этап - рефлексия	Учащиеся оценивают свою работу на уроке.	2	-

Задание 2. Заполните таблицу (таблица 5).

Таблица 5 – Таблица к заданию 2

	кол-во вершин (В)	**кол-во ребер(Р)**	**кол-во граней (Г)**	**Гипотеза**
3-уг. пирамида				
4-уг. пирамида				
4-уг. призма				
n-уг. пирамида				
п-уг. призма				

3 этап Реконструкция. **Задание 3.** Формулировка гипотезы: какую зависимость можно установить между количеством вершин, граней и ребер в выпуклом многограннике?

4 этап Социализация. **Задание 4.** Обсудите в группе свои предположения по выявлению закономерности и заполните 5 столбец в таблице.

5 этап Афиширование. Задание 5. Каждая группа выступает с результатами выполнения заданий 1-4.

Ниже представим вариант выполнения заданий группой.

Задание 1. Выполнен рисунок 21 в тетради.

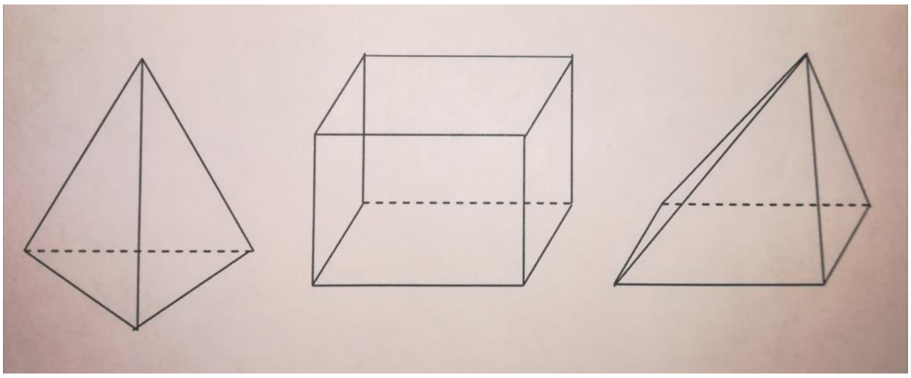


Рисунок 21 – Выпуклые многогранники

Задание 2–4. Заполнена таблица 6.

Таблица 6 – Результат выполнения заданий 2-4

	кол-во вершин (В)	кол-во ребер(Р)	кол-во граней(Г)	Гипотеза **В+Г-Р**
3-уг. пирамида	4	6	4	2
4-уг. пирамида	5	8	5	2
4-уг. призма	8	12	6	2
n-уг. пирамида	n+1	2n	n+1	2
п-уг. призма	2n	3n	n+2	2

6 этап. Разрыв.

Учитель дополняет полученные знания учащихся, вводит понятие эйлеровой характеристики, формулирует теорему Декарта–Эйлера для выпуклых многогранников и приводит ее доказательство.

Учитель: Закономерность представленная группами была доказана Эйлером в работе 1752 года «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями» [11].

Запишем теорему Декарта-Эйлера для выпуклого многогранника.

Теорема: «*Для любого выпуклого многогранника сумма числа вершин В и числа граней Г на две единицы больше числа его ребер Р, т.е. справедлива формула (10):*

$$В + Г - Р = 2» [43]. \quad (10)$$

Значение данного выражение, является числом постоянным и равно 2. Это значение называют эйлеровой характеристикой.

Доказательство Эйлера основано на последовательном уничтожении вершин многогранника [51].

Доказательство (приводится учителем, совместно с детьми):

Рассмотрим выпуклый многогранник (рисунок 22), например, четырехугольную пирамиду.

Вообразим, что наш многогранник внутри пустой, что поверхность его сделана из тонкой резины.

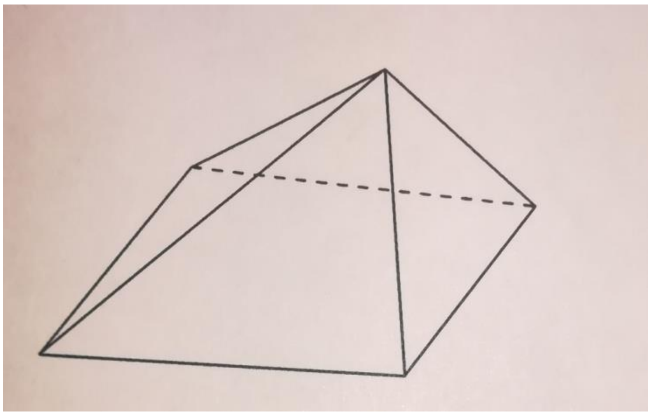


Рисунок 22 – Произвольный выпуклый многогранник

«Вырежем» одну грань (для удобства представления уберем грань основания пирамиды).

Оставшуюся поверхность растянем на плоскость.

Конечно, при этом у граней измениться площадь, и градусная мера углов измениться.

Но «сетка» (рисунок 23), составленная из вершин и ребер на плоскости, будет содержать одно и то же число вершин и ребер, что и исходный многогранник.

При этой деформации только число граней уменьшится на одну, так как она была вырезана.

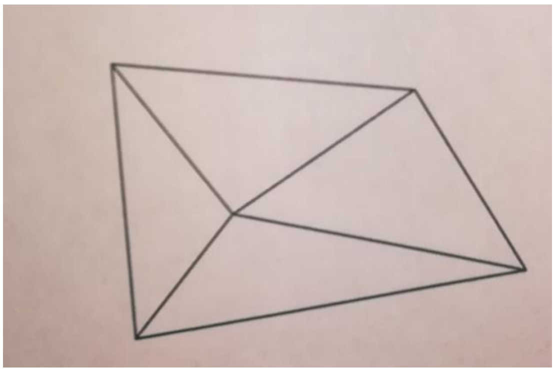


Рисунок 23 – «Сетка» составленная из оставшихся граней

Количество вершин $В_1$ в полученном многоугольнике равно 5, количество ребер $Р_1$ 8, количество граней $Г_1$ 4. Подставим эти значения в равенство $В_1+Г_1-Р_1 = 5+4-1=1$.

Так как количество граней Г в первоначальном многоугольнике на одну больше, то верно равенство $Г = Г_1+1$. Получим $В + Г - Р = 2$.

Теорема доказана.

Для закрепления и показа применения теоремы Декарта-Эйлера к решению практико-ориентированных задач на данном этапе также организуется групповой работа.

Задача 1: «Можно ли десять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города выходило пять дорог, ведущих в пять других городов?»[4, с.18].

Решение: «Предположим, что города можно соединить между собой дорогами так, как указано в задаче. В таком случае, если какие-то два города окажутся не соединенными дорогой непосредственно, то найдётся третий город, который уже будет непосредственно соединён с каждым из них. Изобразив на плоскости города точками, а дороги — дугами, получим, что любые две точки соединены цепочкой дуг. Так как в каждой точке сходятся пять дуг, то общее число дуг равно $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$. Согласно теореме Эйлера эти дуги делят плоскость на $2 + 25 - 10 = 17$ областей. Каждая из этих семнадцати областей ограничена, по крайней мере, тремя дугами, так как в противном случае нашлись бы два города, непосредственно соединенные, по крайней мере, двумя дорогами, а это противоречит условию задачи. Следовательно, число дуг не меньше $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 17 = 25{,}5$. Таким образом, исходное предположение приводит нас к противоречию, и города нельзя соединить между собой так, как это требуется в задаче.

Ответ: Таким образом города нельзя соединить» [4].

Задача 2: «Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?» [4, с. 18].

Решение: «Попробуем провести требуемые дорожки. Если же мы предполагаем, что непересекающиеся дорожки провести нельзя, то это нужно доказать. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что это можно сделать. Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются. Эти ребра образуют на плоскости сетку, аналогичную той, которая была получена при доказательстве теоремы Эйлера. Поэтому для числа вершин, ребер и граней этой сетки должно выполняться соотношение Эйлера $В–Р+Г = 1$. Добавим к ней еще одну грань — внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид $В–Р+Г= 2$, причем $В = 6$ и $Р = 9$. Следовательно, Г должно равняться пяти.

Заметим, что поскольку дорожки не соединяют между собой никакие два домика и никакие два колодца, то у рассматриваемой сетки нет треугольных граней. Каждая из пяти граней имеет, по крайней мере, четыре ребра. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше $(5\cdot 4)/2=10$, что противоречит тому, что их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен – нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Ответ: Нельзя провести непересекающиеся дорожки» [4].

После завершения работы в группах, слушаем представителей от групп, презентующих у доски решение задач.

7 этап. Рефлексия.

Учащиеся оценивают свою работу на уроке и качество усвоения материала, отвечая на вопросы:

1) Что больше всего удалось?

2) Что для Вас было открытием?

3) Чему вы научились на уроке?

4) Что было трудно?

5) Было ли вам интересно?

6) Довольны ли Вы своей работой на уроке? Почему?

9. Организация контроля

Контрольная работа по теме «Теорема Декарта-Эйлера для выпуклых многоугольников».

При составлении контрольной работы использовался материал из учебника Е.А. Потоскуева [43].

Длительность контрольной работы 20 минут. Контрольная работа состоит из 2 вариантов примерно одинаковой трудности.

Цель: проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Теорема Декарта-Эйлера для выпуклых многоугольников»

Задание 1 содержат материал, соответствующий базовому уровню подготовки учащихся по геометрии.

Задание 2 соответствуют профильному уровню, так как в нем требуется провести доказательство.

Задание 3 соответствуют профильному уровню и ориентирует обучающимся к применению знаний в нестандартной ситуации.

Система оценивания.

При правильном выполнении задания №1 – отметка удовлетворительно, 2-х заданий – хорошо, 3-х заданий – отлично.

Вариант 1.

1. «У пирамиды 98 ребер. Сколько у неё вершин и граней?» [41].

2. «Докажите, что у любого многогранника число граней с нечетным числом сторон четно» [41].

3. «Можно ли пять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города в любой другой город вела дорога, не проходящие через остальные города?» [41].

Решения и ответы к заданиям самостоятельной работы:

1. **Решение**. Количество вершин *В* в выпуклом многограннике равно количеству граней *Г*. Применим теорему Декарта-Эйлера

В + Г – Р =2, так как В=Г, Р=98, получаем 2В - 98=2, В=50

Ответ: 50 вершин, 50 граней.

2. **Решение.** Предположим, что число граней с нечетным числом сторон нечетно. Тогда *Г*= 2n +1, *Р*=2k+1 (n, kϵN).Число вершин равно число граней, значит *В* =2n +1. Подставим в равенство Декарта-Эйлера: В + Г – Р = 2, 2n +1 +2n +1- (2k+1) =2, 4n -2k =1, так как при вычитании из четного числа четное, всегда получаем четно, получили противоречие. Следовательно, число граней с нечетным числом ребер должно быть четно.

3. **Решение**. Пусть города соединены между собой так, как сказано в условии задачи. Тогда из каждого города выходит 4 дороги, получаем 5·4:2=10. Согласно теореме Декарта-Эйлера число граней (число областей, на которые дороги делят плоскость) равно Г =10+2-5 = 7, а число граней равно числу вершин. Противоречие. Значит, нельзя соединить города, так как сказано в условии задачи.

Работа в группах способствовала формированию коммуникативных навыков, так как для достижения результатов на уроке ребятам необходимо было сотрудничать. Группы формировались по различным критериям: по уровню знаний, по симпатиям друг другу, случайным образом. Такое деление было организовано с целью эффективного сотрудничества и позволяло каждому ученику получить опыт работы с партнерами имеющими, различный уровень сформированности коммуникативных умений.

После поискового этапа эксперимента было проведено повторное диагностическое исследование по методике В.В. Синявского и Б.А. Федоришина.

Целью повторной диагностики было, узнать, как изменился уровень коммуникативных умений после эксперимента.

Обработав результаты, мы получили следующие данные, которые мы представлены на рисунке 24.

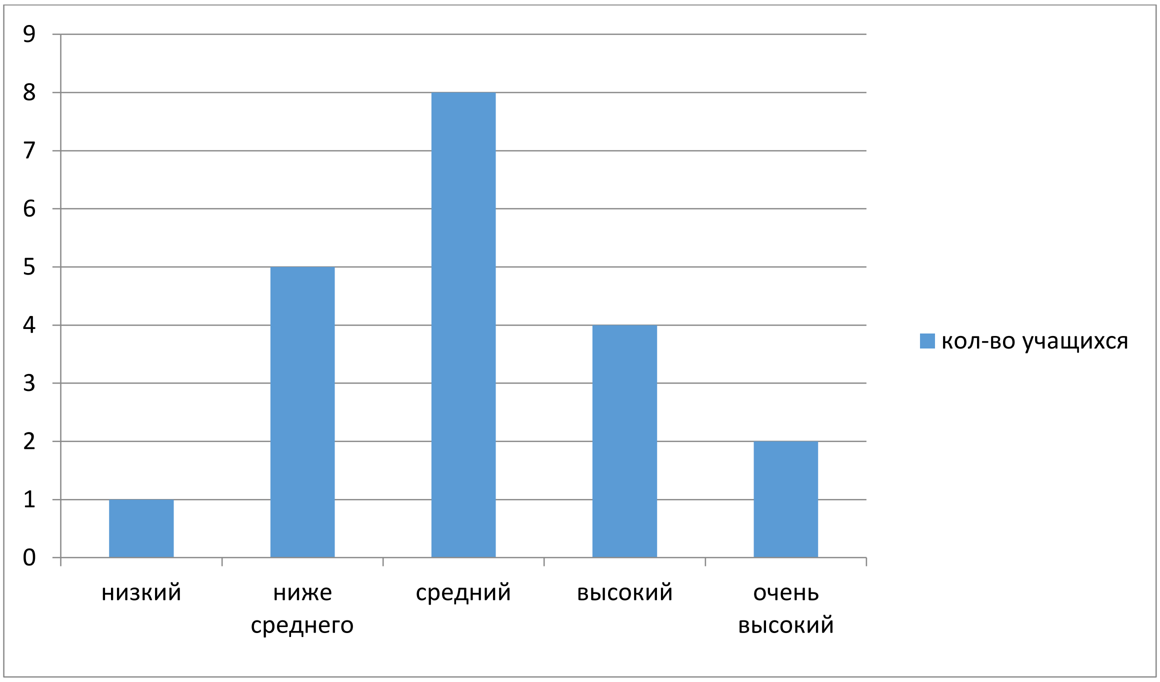


Рисунок 24 – Результаты диагностического исследования уровня сформированности коммуникативных навыков на конец эксперимента по методике В.В. Синявского и Б.А. Федоришина

Диагностика показала, что уровень коммуникативных способностей учащихся 10 «Б» класса повысился. Опираясь на результаты исследования, можно сделать вывод о том, что учащиеся умеют согласовывать совместные действия, вести диалог, правильно излагать свою точку зрения, слушать собеседника и оказывать поддержку друг другу.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что несмотря на короткий промежуток применения групповой формы организации на уроках математики, уровень коммуникативных навыков у большинства учащихся заметно повысился.

Учащиеся, испытывающие трудность в общении, стали более коммуникабельны. Также хотелось бы отметить, что класс стал более сплоченный, а старшеклассники – доброжелательнее по отношению друг к другу.

Сравнительный анализ результатов эксперимента подтвердил эффективность применения групповой формы работы на уроке по формированию коммуникативных умений старших школьников (рисунок 25).

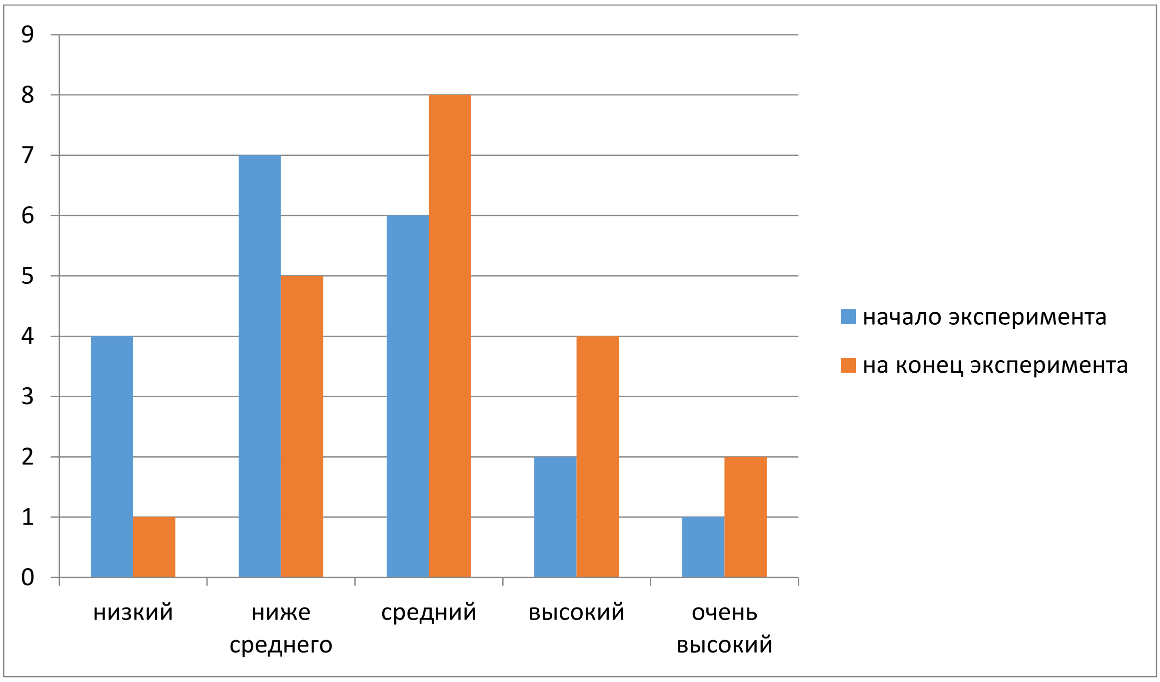


Рисунок 25 – Уровень сформированности коммуникативных способностей на начало и конец эксперимента по методике В.В. Синявского и Б.А. Федоришина

Выводы по второй главе

1. Рассмотрены роль и место групповой формы учебной деятельности учащихся в структуре урока математики.

2. На примере темы «Теорема синусов» раскрыта методика организации групповой формы учебной деятельности учащихся на различных этапах урока.

3. Разработана система заданий для организации групповой работы учащихся на элективном курсе «Именные теоремы школьного курса алгебры и геометрии».

4. Представлены результаты проведенного педагогического эксперимента, свидетельствующие о том, что организация групповой работы учащихся на уроках математики является эффективным средством формирования коммуникативных универсальных учебных действий учащихся.

Заключение

В настоящее время много внимания в образовательном процессе отводится формированию универсальных учебных действий учащихся. В диссертации в соответствии с предметом и целью исследования обосновывается необходимость формирования у обучающихся коммуникативных действий.

Большинство учителей отмечают, что дети с трудом налаживают конструктивное деловое и межличностное взаимодействие, что влияет на снижение уровня обученности и развитие личностных качеств школьника.

В представленной опытно-экспериментальной работе был апробирован комплекс заданий, с помощью которого была организована групповая работа на уроке математике, направленная на формирование коммуникативных универсальных учебных действий учащихся.

В первой главе проанализирована научно-педагогическая литература по организации групповой формы работы и универсальных учебных действий. Определены основные понятия, используемые в работе.

Большое внимание в диссертации уделено рассмотрению педагогического опыта в организации групповой работы на уроках, в том числе и как средства развития коммуникативных универсальных учебных действий учащихся.

Отмечено, что коммуникативные умения представляют комплекс навыков, необходимых для социализации школьников; умение учитывать позиции других людей; умение вести диалог и участвовать в коллективном обсуждении проблем; умение выстраивать продуктивное взаимодействие со сверстниками и взрослыми.

Во второй главе выделены основные принципы конструирования системы заданий для организации групповой работы на уроках математики с учетом её основных этапов в соответствии с концепцией Р.А. Утеевой.

Описана собственная опытно-экспериментальная работа в 10-м классе общеобразовательной школы. Представлены методические разработки системы заданий для учащихся 9 класса по теме «Теорема синусов» и элективного курса для 10 класса, применяемых на уроках математики для работы в группах. Результаты эксперимента показали, что они способствуют формированию коммуникативных умений и навыков учащихся.

Групповая работа на уроках математики была организована в соответствии с принципами этапности. Работа в малых группах способствует поддержанию интереса учащихся к предмету, формируют навыки взаимодействия учащихся, воспитывает ответственность за результат коллективной работы.

Таким образом, цели и задачи исследования решены, выдвинутая в начале исследования гипотеза подтверждена.

Проведенная работа показывает эффективность организации групповой формы работы на уроках математики для формирования коммуникативных умений учащихся. Предложенная система задач может быть применена на различных этапах уроков математики. Данная система не требует дополнительной подготовки педагога, что позволяет рекомендовать ее в работе учителей.

Список используемой литературы и список используемых источников

1. Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володорская И.А. и др. Формирование универсальных учебных действий: от действий к мысли. Система заданий пособие для учителя / под ред. А. Г. Асмолова. М. :Просвещение, 2010. 159 с.

2. Атанасян, Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни М. : Просвещение, 2019. 287 с.

3. Бабанский, Ю. К. Избранные педагогические труды / [сост. М. Ю. Бабанский ; авт. вступ. ст. Г. Н. Филонов, Г. А. Победоносцев, А. М. Моисеев ; авт. коммент. А. М. Моисеев] ; Акад. пед. наук СССР. М. : Педагогика, 1989. 558 с.

4. Бекламов Б. Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам // Научно-популярный физико-математический журнал Квант. 1974. № 10. С. 17-19.

5. Беседина И.Г. Элективный курс «Правильные многогранники и их изображение»//Современные технологии: актуальные вопросы, достижения и инновации. МЦНС «Наука и Просвещение». Пенза, 2018. С.11-13

6. Виноградова М.Д., Первин И.Б. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников. Из опыта работы. Педагогика. М. Просвещение 1977г. 160с.

7. Выготский Л. С. Собрание сочинений: В 6-ти т. Т. 6. Научное наследство / Под ред. М.Г. Ярошевского. М.: Педагогика, 1984. 400 с.

8. Гаврилова Н.Ф. Поурочные разработки по геометрии. 9класс.2-е изд. М.: ВАКО, 2019. 384 с.

9. Гальперин, П.Я. Введение в психологию: учебное пособие для вузов / П.Я. Гальперин. М. Изд-во «Книжный дом «Университет»,1999. 332с.

10. Границкая А.С. Научить думать и действовать: Адаптивная система обучения в школе: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1991 175с.

11. Делоне Б. Леонард Эйлер // Научно-популярный физико-математический журнал Квант. 1974. № 5. С. 26-35.

12. Долбилин Н. П. Жемчужины теории многогранников/ Н.П. Долбилин,   М. : МЦНМО, 2000. 40 с.

13. Долбилин Н. Три теоремы о выпуклых многогранниках // Научно-популярный физико-математический журнал Квант. 2001, № 5. С. 9-12. URL: http://kvant.mccme.ru/pdf/2001/05/kv0501dolbilin.pdf (07.06.2021).

14. Дьяченко В.К. Организационная структура учебного процесса и ее развитие. М.: Просвещение, 1989. 156 с.

15. Дьяченко В.К. Сотрудничество в обучении. М.: Просвещение, 1991. 192 с.

16. Журавлев, И.А. Потенциал групповой работы для развития универсальных учебных действий учащихся при обучении математике в средней школе/ И.А. Журавлев//Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова.2014.№3.С.20-23

17. Зайкин М.И. Исследование организационной структуры учебного процесса по математике в классах с малой наполняемостью: Дисс …докт. пед. наук. М.; 1994. 347 с.

18. Золотова А.В. Коллективная работа на уроках // Начальная школа. 1989. № 10. С. 34-35.

19. Зуева М.Л.. Методическая система формирования ключевых образовательных компетенций при обучении математике/М.Л. Зуева//Вестник Костромского государственного университета им. Н.А.

20. Иванов Д.А., Митрофанов К.Г., Соколова О.В. Компетентностный подход в образовании. Проблемы, понятия, инструментарий. Учебно-методическое пособие.-М.: АПКиППРО, 2005.101 с.

21. Иванова Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова,

Т.П. Григорьева: под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород: НПГУ, 2009. 355 с.

22. Кезина М.С., Кондаков А.М. Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования: проект. М.: Просвещение, 2010.102с

23. Кириллова Н.А. Работа с одаренными детьми на занятиях математического кружка по теме «применение теоремы Эйлера к «невозможным фигурам»// Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы V Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск, 16–17 ноября 2017 г. / отв. ред. М.Б. Шашкина; ред. кол.; Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. Красноярск, 2017. С.189-194.

24. Коллективная учебно-познавательная деятельность школьников / Под ред. И.Б. Первина. М.: Педагогика, 1985. 144 с.

25. Корчагина А.Я. Формирование коммуникативных универсальных учебных действий обучающихся на уроке математике /«Студенческие Дни науки в ТГУ» : научно-практическая конференция (Тольятти, 5 апреля – 16 апреля 2021 года) : сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти :Изд-во ТГУ, 2021.

26. Корчагина А.Я. Понятие и виды групповой формы организации учебной деятельности / «Молодежь. Наука. Общество» : Всероссийская научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 25 декабря 2020 – 29 января 2021 года) : электронный сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2021. – 1 оптический диск. С.258-259.

27. Котов В.В. О методах организации на уроках коллективной учебной деятельности // Математика в школе. 1978. № 3. С. 33–35.

28. Котов В.В. Организация на уроках коллективной деятельности уча щихся Рязань, 1977. 100 с.

29. Крупинина Н.Н. Поурочные разработки по геометрии. 10 класс. М. : ВАКО, 2020. 288 с.

30. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?. 3-е изд., испр. и доп. М. : МЦНМО, 2001. 568 с.

31. Леонтьев, А.Н. Избранные психологические произведения: В 2т /А.Н. Леонтьев Т.1. М., 1983. 392 с.

32. Лийметс Х.Й. Групповая работа на уроке. М.: Знание, 1975. 64 с.

33. Ломов Б.Ф. Проблема общения в психологии. // Проблема общения в психологии. М.: Наука, 1981. С. 324.

34. Марченко Т.Г. Реализация компетентностного подхода на уроках математики/Т.Г. Марченко// Проблемы и перспективы развития образования.2013.-№21.С.76-80. .Педагогика / Под ред. Ю.К. Бабанского. М.: Просвещение, 1983. 360 с.

35. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 10 класс: Учебное пособие / А.Г.Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков. М. :Вентана-Граф, 2019. 272 с.

36. Мерзляк А.Г. Геометрия: 9 класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков ; под ред. В.Е. Подольского. М. : Вента–Граф, 2019. 304 с.

37. Мерзляк А.Г. Геометрия : 9 класс : дидактический материалы : пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др. 3–е изд., М. : Вента–Граф, 2020. 112 с.

38. Окунев А.А. Как учить не уча. СПб. : Питер Пресс, 1996. 448 с.

39. Окунев А. А. Спасибо за урок, дети! СПб.: Питер Пресс, 2010. 163 с.

40. Петровский В.А., Виноградова А.М. Учимся общаться с ребенком. М.: Просвещение, 1993. 191 с.

41. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс. Задачник. Углубленный уровень. М. : Дрофа, 2013. 240 с.

42. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия.11 класс Методическое пособие. М. : Дрофа, 2005. 224 с.

43. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия.11 класс: учеб для общеобразоват. организаций: углубленный и профильный уровень М. : Дрофа, 2004. 368 с.

44. Приказ Министерством просвещения Российской Федерации согласно приказу от 20.05.2020 № 254 "Об утверждении федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность"[Электронный ресурс]. URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202009140015 (дата обращения 10.02.2021)

45. Примерные программы основного общего образования. Математика. М: Просвещение, 2009. 96 с.

46. Рудестам К. Групповая психотерапия[Электронный ресурс]. Режим доступа: http://psylib.org.ua/books/rudes01/txt01.htm#3

47. Рудикова, В.И. Групповая форма занятий как способ развития ключевых компетенций учащихся / В.И Рудикова// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2010.№11. С.1114

48. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов М.: Просвещение, 2000, 156 с.

49. Скаткин М.Н. Проблемы современной дидактики. М.: Педагогика, 1980. 96 с.

50. Сластенин В.А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина, М.: Издательский центр "Академия", 2002. 576 с.

51. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Многогранники [Электронный ресурс]. URL: http://geometry2006.narod.ru/Art/Lecture6.htm (дата обращения 9.06.2021).

52. Старова О.А. Именные теоремы //Математика. Все для учителя. 2017, №11. С. 32-37.

53. Суховершина, Ю. В. Тренинги коммуникативной компетентности. М.: Академический проект, 2009. 111 с.

54. Утеева Р.А. Групповая форма учебной деятельности учащихся на уроке математики в средней школе: пособие для учителя математики. Тольятти, ТФ СГПУ, 1996. 83 с.

55. Утеева Р.А. Дифференцированное обучении математике учащихся средней школы: Пособие по спецкурсу и спецсеминару для студентов мат. спец. педвузов. М.: Прометей. 1996. 96 с.

56. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. М.: Прометей, 1997. 230 с.

57. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. №413. [Электронный ресурс] : URL: http://минобр-науки.рф/документы/2365. (дата обращения 5.06.2021).

58. Федеральный государственный образовательный стандарта основного общего образования.М.: Просвещение, 2011. 48 с.

59. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс] : URL: https://urok.1sept.ru/articles/631002 (дата обращения 9.06.2021).

60. Фундаментальное ядро содержания общего образования/ Под ред. В.В. Козлова, А.М. Кондакова.М.: Просвещение, 2011.42 с.

61. Цукерман Г.А. Виды общения в обучении. Томск: Пеленг, 1993. 263 с.

62. Чередов И.М. Система форм обучения в советской общеобразовательной школе. Монография М.: Педагогика, 1987. 152 с.

63. Чередов И.М. Формы учебной работы в средней школе: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1988. 160 с.

64. Шарыгин И. Теоремы Чевы и Менелая [*Электронный ресурс*]// Квант. 1976, № 11. С. 22-30. Режим доступа к журналу.: http://kvant.mccme.ru/1976/11/teoremy_chevy_i_menelaya.htm.

65. Щербо Н.П. Особенности индивидуального и группового решения задач в условиях совместной деятельности. // Вопросы психологии. №2. 1984. С. 107-112.

66. Эльконин, Д.Б. О структуре учебной деятельности / Д.Б. Эльконин // Психологическое развитие в детских возрастах: Избранные психологические труды / Под редакцией Д.И. Фельдштейна.- Издание 2-е, стереотипное.М.: Издательство «Институт практической психологии»; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1997

67. Hackman J.R. Effects of task characteristics on group products. Journal of Experimental Social Psychology, 1968, vol. 4 (2).

68. Kienitz W. Internationales Symposium uber "Individualisierung und Gruppe-narbeit in der Schule" in Sweden. // "VergleichendePadagogik. 1968. Nr.2, lk 200-207.

69. Lamm H., Trammsdorf G. Group vs individual performance on tasks requiring ideational proficiency (brainstorming). A review European J. Soc. Psychol., 1973, v. 3(4), p. 361-388.

70. Reich, K. (Hg.): Methodenpool. In: URL: http://methodenpool.uni-koeln.de 2010.

71. Steiner I.D. Group Process and Productivity. N.Y., 1972.