

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Методика обучения решению экономических задач в углубленном
курсе математики общеобразовательной школы»

Студент

Е.С. Уладиева
(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, О.А. Кузнецова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Теоретические основы обучения решению экономических задач в углубленном курсе математики общеобразовательной школы	9
1.1 Понятие экономической задачи в школьном курсе математики и основные виды таких задач.....	9
1.2 Основные цели, задачи и особенности обучения решению задач с экономическим содержанием по различным учебным материалам ..	12
1.3 Применение современных технологий образования в процессе обучения решению экономических задач в углубленном курсе математики.....	21
1.4 Особенности уровневой дифференциации при обучении решению экономических задач	29
Глава 2 Практическая реализация методики обучения решению экономических задач в углубленном курсе математики	38
2.1 Анализ различных методик и опыта обучения основным математическим элементам для решения задач с экономическим содержанием в общеобразовательной школе	38
2.2 Реализация методики обучения решению экономических задач применительно к некоторым видам банковских операций	47
2.3 Элективный курс «Экономические задачи в ЕГЭ по математике» для учащихся старших классов	56
2.4 Педагогический эксперимент и его результаты	72
Заключение	78
Список используемой литературы	80

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. При наблюдающихся процессах глобализации в мировой экономике возникает насущная проблема изучения математических основ экономических законов уже на стадии школьного образования. Математика выполняет ключевую роль при формировании экономического мышления и компетентности. Материал, изучаемый в курсе математики, алгебры и позднее, в старших классах, при изучении начал анализа позволяет решать экономические задачи и закладывает основу для изучения экономической науки в целом.

Именно этим, в первую очередь, обусловлена особая актуальность рассматриваемой в работе темы о методике обучения решению экономических задач в углублённом курсе математики общеобразовательной школы.

Актуальность темы вызвана еще и тем, что в данном случае математика может выполнять функцию своего рода профориентационного характера. Изучение математики и экономики в рамках углубленного курса, учитывающего уровневую дифференциацию, может вызвать особую заинтересованность у отдельных групп учащихся, предопределив их будущую профессиональную деятельность.

На сегодняшний день экономические, финансовые задачи заняли свое место при проведении ЕГЭ. В стадии рассмотрения на законодательном уровне находится проект о включении раздела с такими задачами в учебные пособия с целью повышения финансовой грамотности учащихся. Однако, анализ базовой и дополнительной учебной литературы в целом показывает, что методика обучения решению задач с экономическим содержанием, как и другим специфическим подходам в математике, пока еще отнесена на второй план, как не имеющая самостоятельной ценности и как нечто дополнительное к другим знаниям. При этом, объем представлений о методах решения таких задач весьма невелик и ограничивается достаточно узким спектром методологических подходов.

На текущий момент можно выделить несколько групп научных работ, посвященных проблеме методики обучения решению задач по рассматриваемой теме:

- изучение системы задач с экономическим содержанием как одного из методов решения широкого круга практических задач, рассматриваемых в алгебре и началах анализа;
- анализ способностей к усваиванию материала в условиях профильной и уровневой дифференциации;
- изучение методик обучения решению задач с экономическим содержанием в старших классах общеобразовательной школы в углублённом курсе математики с использованием различных компьютерных программ.

Вопросы использования математического аппарата для решения задач экономического содержания в школе и в вузе рассмотрены в ряде диссертационных исследований.

В работах Е.Ю. Никоновой [33], Н.А. Бурмистровой [7], Л.Д. Рябоконева [39] выявлены особенности методики преподавания математики и содержания материала в классах экономического профиля, то есть, когда занятия отчасти носят профориентационный характер. В диссертациях Э.С. Беляевой [6], Н.А. Хоркиной [59], О.А. Клименковой [19] рассматривается изучение прикладных математических задач с экономическим содержанием проводить на факультативных занятиях и в рамках элективных курсов.

Диссертационные исследования Д.В. Никаноренкова [32], Д.В. Ожерельева [34] и А.А. Коротченковой [23] акцентируют особое внимание на использование современных информационных компьютерных технологий при обучении решению задач с экономическим содержанием учащимся старшей школы.

В докторской диссертации А.С. Симонова [44] экономическая составляющая школьного курса математики представлена как отдельная линия и показано, что обучение учащихся экономическим задачам является

эффективным путем усиления прикладной направленности математики в общеобразовательной школе.

При всем этом, учитывая, что задачи по теме данной работы рассматриваются на самых разных ступенях обучения в общеобразовательной школе, в том числе, в рамках углубленного изучения математике, поиск эффективных, универсальных способов обучения сохраняет свою актуальность.

Актуальность диссертационного исследования обусловлена так же сложившимся противоречием между необходимостью разработки методики обучения школьников экономическим задачам в углубленном курсе математики, подготовки их к ЕГЭ, и отсутствием раздела финансовой математики в учебниках алгебры и начал анализа 10-11 классов.

Данное противоречие позволило сформулировать **проблему исследования:** каковы методические особенности обучения решению экономических задач в углубленном курсе математики, которые позволили бы обеспечить формирование у школьников навыков решения финансовых задач.

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика введения элементов экономики в курс математики и обучения решению экономических задач в процессе углубленного изучения алгебры и начал анализа.

Цель исследования: разработать методические рекомендации обучения решению различных типов задач с экономическим содержанием в углубленном курсе математики общеобразовательной школы с применением технологического подхода.

Гипотеза исследования основана на предположении, что повышение качества подготовки учащихся по финансовой математике будет достигаться за счет выявления методических особенностей обучения математическим задачам с экономическим содержанием и разработки методики обучения решению задач по теме исследования.

Для достижения цели исследования в данной работе необходимо решить следующие **задачи**:

1. Представить основные цели и задачи преподавания экономических задач учащимся старших классов.
2. Проанализировать состояние методических рекомендаций, лежащих в основе процесса преподавания старшеклассникам задач с экономическим содержанием.
3. Изучить практический опыт преподавания экономических задач в старших классах школ разного уровня с учетом уровневой дифференциации учащихся.
4. Предложить методические рекомендации и технологию обучения решению экономических задач в курсе математики общеобразовательной школы.
5. Спроектировать элективный курс по теме «Экономические задачи в ЕГЭ по математике».
6. Представить результаты педагогического эксперимента по апробации элективного курса.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составляют работы Ю.М. Колягина [28], М.И. Шабунина [60], М.М. Фирсовой [56].

Базовыми для настоящей работы также являются Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 30.12.2015 г.) «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями, вступающими в силу с 01 июля 2016 г.), ФГОС [47], а также работы авторов С.А. Шестакова [62], А.А. Темербековой [50], Ф.Ф. Лысенко [23], И.Е. Унт[53] и других, содержащих основные требования к знаниям, умениям учащихся и анализ теоретического и задачного материала по теме экономических задач в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Методы исследования:

- изучение и анализ научно-исследовательской и учебно-педагогической литературы;
- наблюдение и педагогический эксперимент;
- обработка данных.

Основные этапы исследования:

1 этап (2018/19 уч.г.): анализ учебников по алгебре и началам анализа, диссертационных работ по теме исследования, научных публикаций, нормативных документов (стандартов, программ), определение теоретических и методических основ по теме диссертации;

2 этап (2019/20 уч. г.): разработка методики обучения учащихся решению экономических задач в углубленном курсе математики общеобразовательной школы;

3 этап (2019/20 уч. г.): разработка и апробация элективного курса по теме «Экономические задачи в ЕГЭ по математике»;

4 этап (2020/21 уч. г.): оформление диссертации, корректировка и описание ранее представленных результатов экспериментальной работы, формулирования выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГБОУ Школа №1307 «Тропарево» г. Москва. В эксперименте принимали участие 20 человек. Эксперимент проводился учителем математики С.А. Роянцевой.

Научная новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем определены и обоснованы методические особенности обучения решению экономических задач в курсе математики старших классов общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость работы:

- предложена типология экономических задач, изучаемых в школьном курсе математики;

- приведены основные методы обучения математическим задачам с экономическим содержанием.

Практическая значимость работы: проведен анализ задачного материала по теме экономических задач, включая задания ЕГЭ; разработан и апробирован соответствующий элективный курс.

Результаты исследования являются **достоверными и обоснованными** благодаря:

- применению как теоретических, так и практических способов исследования;
- анализу научно-педагогической практики;
- практической апробации элективного курса.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в разработке методических рекомендаций, системе задач и элективного курса по теме исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования: в период производственной (научно-исследовательской работы) и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, в период работы учителем 10-11 классов. Основные результаты исследования отражены в 1 публикации [52].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению старшеклассников решению математических задач с экономическим содержанием.
2. Элективный курс по теме «Экономические задачи в ЕГЭ по математике».

Структура магистерской диссертации. Представляемая работа состоит из введения, 2-х глав и заключения, содержит 7 рисунков и 9 таблиц, список используемой литературы (69 источников). Основной текст работы составляет 86 страниц.

Глава 2 Теоретические основы обучения решению экономических задач в углубленном курсе математики общеобразовательной школы

1.1 Понятие экономической задачи в школьном курсе математики и основные виды таких задач

Математические задачи с экономическим содержанием выполняют в образовательном процессе двоякую функцию. Благодаря тематике таких задач, учащиеся, помимо изучения собственно экономического содержания поставленной проблемы, одновременно получают больше возможностей для детального и углубленного изучения самих математических закономерностей.

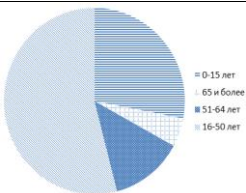
Анализ учебно-дидактических материалов [59, 63] показывает, что изучаемые учащимися задачи с экономическим содержанием как на базовом, так и на профильном уровне, можно условно разделить «на следующие виды:

- текстовые арифметические задачи на проценты;
- текстовые задачи на производительность труда;
- текстовые задачи на товарно-денежные отношения;
- анализ данных, графиков, диаграмм и таблиц;
- текстовые задачи на простые проценты по вкладам;
- текстовые задачи на сложные проценты по вкладам;
- текстовые задачи на дифференцированные платежи;
- текстовые задачи на аннуитетным платежи;
- оптимизация и логический перебор;
- задачи на оптимизацию производства товаров, при оказании услуг и выполнении работ;
- линейные и нелинейные целевые функции с целочисленными точками экстремума;
- линейные и нелинейные целевые функции с нецелочисленными точками экстремума» [59].

Задачи на проценты и производительность труда, а также, посвященные товарно-денежные отношения и анализу данных, несут как теоретическую, так и практическую нагрузку, и их следует использовать для обучения учащихся в базовом курсе алгебры.

В настоящее время эти задачи, в различной форме и трактовке, начинают изучаться сразу же после начальной школы. В результате, учащиеся, даже на базовом уровне, обладают знаниями, позволяющими выполнять следующие задания (таблица 1) по первым четырем позициям.

Таблица 1 – Примеры заданий базового уровня

№	Задание	Выполнение	Результат
1	Цех производит 200 деталей двух видов, причем детали первого вида составляют 1 % от общего количества. Насколько надо сократить выпуск деталей второго вида, чтобы детали первого вида составляли 2% от общего количества.	По условию, деталей первого вида: $0,01 \cdot 200 = 2$ шт. Ключевой момент задачи: - производство деталей первого вида не меняется и 2 шт. составляют 2% от нового общего количества. Тогда новое общее количество деталей равно: $2 / 0,02 = 100$ шт.	Сокращение количества деталей второго составляет: $200 - 100 = 100$ шт.
2	В связи с реконструкцией производительность труда в течение года выросла дважды на одно и то же количество процентов. Первоначально выработка составляла 1200 шт., а в конце года – 1452 шт. На сколько процентов выросла производительность каждый раз?	Ключевой момент задачи: - вычислим, во сколько(k) раз выросла производительность каждый раз? Находим: $(1200 \cdot k) \cdot k = 1452$ $k = \sqrt{\frac{1452}{1200}} = \sqrt{1,21} = 1,1$	Рост производительности в 1,1 раза означает, что рост составил 10% каждый раз
3	Расстояние от пункта А до пункта В равно 600км. и доехать можно на поезде при цене за 1 билет 1300 руб., либо на автомобиле с расходом 10л. на 100км. Проанализировать, каким транспортом выгоднее воспользоваться при путешествии вдвоем и при цене бензина в 44,5 руб./л.?	Расходы при поездке на поезде: 2 билета по 1300руб. = 2600 руб. Расходы при поездке на автомобиле: - необходимое количество бензина: $600 / 10 = 60$ л. - стоимость бензина: $60 \cdot 44,5 = 2670$ руб..	Учитывая, что: $2600 < 2670$ хоть и незначительно, но выгоднее поехать на поезде.
4	На диаграмме изображен возрастной состав жителей некоторого региона. Определите, доли населения каких возрастов превышает 25%.	 25% – это четверть круга, ответ находим из визуального сопоставления.	Ответом задачи является: • 0-15 лет • 16-50 лет

Задания на банковские проценты, дифференцированные и аннуитетные платежи, а также, на оптимизацию производства предполагают более глубокие базовые знания и могут изучаться учащимися как в рамках основного курса алгебры и начал анализа, так и при углубленном изучении математики.

Последующие позиции системы задач с экономическим содержанием, предусматривающие использование целевых функций, следует рассматривать уже при внеклассной работе или при обучении математики на профильном уровне, равно как и в рамках соответствующего элективного курса, когда учащиеся уже знакомы с элементами начал анализа на углубленном уровне [1].

Полезным будет рассмотрение практических задач, иллюстрирующих различные возможности математического аппарата. При изложении материала обязательно следует использовать примеры, носящие наглядный характер [4, 5]. Приведем пример такой задачи.

Задача 1.1. На графике (рисунок 1) приведено изменение курса RUB/USD за месяц. Определите, на сколько процентов максимальное значение курса превышает минимальное значение? В каких числах наблюдалось падение курса?



Рисунок 1 – К задаче 1.1

Решение. Учащиеся по графику определяют максимальное значение курса 76,9 RUB/USD и минимальное значение – 73,25 RUB/USD.

Искомое значение равно: $p = \frac{76,9-73,25}{73,25} \cdot 100\% \approx 4,98\%$. По графику видно, что падение курса происходило в периоды с 13/11 по 16/11, с 23/11 по 24/11 и с 30/11 по 06/12.

1.2 Основные цели, задачи и особенности обучения решению задач с экономическим содержанием по различным учебным материалам

Важной модернизацией образования за последнее время является развитие профильного обучения. Если сравнить стандарты [9] базового и профильного уровней (таблица 2), то можно отметить, что различия содержания, обязательных умений учащихся обусловлены различием целей профильного и базового уровня обучения математике.

Таблица 2 – Сравнение стандартов базового и профильного уровней средней общей образовательной программы

Уровень обучения	Цель обучения	Требования к знаниям учащихся
Базовый уровень	«Целью обучения в целом является формирование: математического, логического мышления; навыков использования знаний для решения практических задач; – представлений о математике, как универсальном языке науки для описания реальных процессов и явлений» [9]. Целью на базовом уровне также «является: – создание у учащихся понимания того, что математика является инструментом для изучения окружающего мира, происходящих процессов, наблюдаемых явлений; – формирование навыков по работе с учебным материалом и корректной формулировке своих мыслей; – развитие интуиции, способностей к построению логических связей, к доказательству утверждений, использованию терминологии и математической символики; – сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях».	«Умение решать: – текстовые арифметические задачи на проценты; – текстовые задачи на производительность труда; – текстовые задачи на товарно-денежные отношения; – задачи с помощью анализ данных, графиков, диаграмм и таблиц».

Продолжение Таблицы 2

Уровень обучения	Цель обучения	Требования к знаниям учащихся
Профильный (углубленный) уровень	В дополнение к базовому уровню, «на профильном уровне обучения: – - формируется понимание в необходимости проведения доказательств и дедуктивно-логических обоснований при проведении математических преобразований; – - формируется логика основных понятий по главным разделам курса математики, основных аксиом, теорем, формул и навыки их применять; – - вырабатываются умения по проведению доказательств и нахождению решений нестандартных задач и нахождению нестандартных решений для задач повышенной сложности; – - формируются умения моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат; – - владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий».	В дополнение к знаниям базового уровня, «уметь решать: – текстовые задачи на простые проценты по вкладам; – текстовые задачи на сложные проценты по вкладам; – текстовые задачи на дифференцированные платежи; – текстовые задачи на аннуитетным платежи; – задачи на оптимизацию и логический перебор; – задачи на оптимизацию производства товаров, при оказании услуг и выполнении работ; – задачи на линейные и нелинейные целевые функции с целочисленными точками экстремума; – задачи на линейные и нелинейные целевые функции с нецелочисленными точками экстремума».

Содержание материала для изучения задач с экономическим содержанием на базовом и профильном (углубленном) уровне различаются глубиной и объемом изучения материала, а также, практическими навыками, приобретаемыми учащимися.

Как следствие, предъявляются разные требования и к базовым знаниям по алгебре и началам анализа, которые служат основой для решения экономических задач.

Задачи с экономическим содержанием изучаются, начиная уже со ступени основного общего образования, хотя, отдельного специального раздела в курсе математики для таких задач не предусмотрено.

Для анализа содержания теоретического материала по теме экономических задач были выбраны учебники из федерального перечня, рекомендуемых при реализации обязательной части основной образовательной программы, «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс»: С.М. Никольский; «Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс»: А.Г. Мордкович, П.В. Семенов; «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс». Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин.

Во всех учебниках изучение методов решения задач фактически сводится к методам решения уравнений.

«Алгебра и начала математического анализа, 11 класс»

С.М. Никольский

В этом учебнике наиболее подробно рассмотрены методы решения уравнений. Изложение материала начинается с понятия равносильности при преобразовании уравнений. Приведено большое количество примеров равносильных преобразований.

Далее, излагается понятие уравнения–следствия и перечислены преобразования, при которых осуществляется переход к ним. Рассмотрено большинство из видов уравнений, изучаемых в курсе общеобразовательной школы, как на базовом, так и на углубленном уровне. Приведены примеры на

применении комбинации нескольких преобразований, приводящих к уравнению-следствию.

Отдельно, подробно рассмотрены уравнения, которые можно решить путем преобразования к системам. В продолжении изучения темы рассматривается равносильность уравнений на множествах и приведены преобразования, сохраняющие эту равносильность.

В учебнике приведен ряд способов решения уравнений, которые можно классифицировать как нестандартные. Таковыми являются методы, основанные на свойствах функций, их областей существования, знакоопределенности, ограниченности, монотонности и их экстремуме.

Далее в учебнике рассмотрены системы уравнений с несколькими неизвестными, вводится понятие их равносильности как логическое продолжение методов решений уравнений. Метод подстановки представлен в качестве основного для решения систем уравнений. В числе других методов рассматривается метод линейного преобразования систем. По аналогии с уравнениями вводится понятие системы-следствия и приведены преобразования, приводящие к ним. Изложен метод замены переменных, который также часто используется для решения систем уравнений. В завершение рассмотрены уравнения и их система с параметрами.

Приведенные методы находят широкое применение при решении задач экономического содержания.

«Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс»:

А.Г. Мордкович, П.В. Семенов.

Данное учебное пособие состоит из двух частей: учебника и задачника. В учебнике системам уравнений посвящена заключительная глава и этот раздел рассматривается как подведение итогов и как некоторое расширение и углубление знаний учащихся.

Вначале рассмотрены общие методы решения уравнений, в том числе метод замены уравнений, разложения на множители, введение новой переменной, функционально-графический метод.

Материал по теме начинается с рассмотрения равносильности систем уравнений. Подчеркивается, что все стандартные методы решения систем уравнений: подстановки, алгебраического сложения, введения новых переменных сохраняют равносильность. В случае неравносильных преобразований, таких как возведение в квадрат, умножение уравнений, полученный результат следует обязательно проверить подстановкой.

В учебнике также разобрана текстовая задача и подробное поэтапное ее решение с помощью составления системы уравнений.

«Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс»

Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин.

В учебнике отдельно приведены примеры решения алгебраических систем, тригонометрических, логарифмических и показательных систем уравнений.

Отдельных разделов, специально посвященных теоретическому материалу по составлению уравнений для решения текстовых задач в учебнике нет. Некоторые понятия и методы вводятся непосредственно по ходу рассмотрения примеров. В задачном материале присутствуют текстовые задачи экономической направленности на составление и решение уравнений систем уравнений.

В целом, в учебниках нет материала, отдельно посвященного нестандартным текстовым задачам, даже для учащихся профильного уровня.

Изучение научно-исследовательских работ, посвященных методике обучения решению задач в курсе математики общеобразовательной школы, показывает, что нет общей сформированной точки зрения на проблему обучения учащихся методам решения экономических задач.

Тема задач с экономическим содержанием не является центральной в процессе обучения алгебре и началам анализа, чем и обусловлена недостаточность внимания к методике ее преподавания в научно-педагогической литературе.

В методиках последнего времени находят отражения современные требования к уровню образования, равно как и профильная и уровневая дифференциация.

Среди исследований стоит выделить работы и учебную литературу Ю.М. Колягина, в которых представлены основные функции задач, охарактеризованы основные этапы процесса их решения. Разработан комплекс требований к системе задач школьного курса математики, сформулированы основные положения методики обучения решению задач. Рассматриваются этапы решения задачи и методические положения, при соблюдении которых повышается эффективность работы учащихся при решении уравнений, в том числе, и их систем, с использованием нестандартных методов.

В работах В.И. Крупича, Л.М. Фридмана [57] отмечаются различные виды поиска решения задач, такие как «случайный и выборочный поиск», расчленение на более простые задачи, решаемые стандартными методами, использование равносильности и введение дополнительных переменных.

В ряде исследований отмечается [13,14,15], что как в базовой, так и в профильной школе происходит стандартизация содержания и методов решения задач. Это приводит к тому, что учащиеся не оценивают критически ход решения и полученный результат. Использование основного учебного времени для изучения только стандартных задач негативно сказывается на качестве обучения, что выражается в недостаточной готовности учащихся к использованию собственных знаний для решения проблем практического характера.

Таким образом, целесообразно дополнить основные занятия элективным курсом, либо уделить часть времени изучению нестандартных задач, в том числе, экономического содержания.

Приведем несколько учебных пособий, полезных для подготовки к выполнению заданий ЕГЭ в части задач с экономическим содержанием (таблица 3).

Таблица 3 – Учебные пособия для подготовки к ЕГЭ

Название	Теоретический аспект	Практический аспект
Шестаков С.А. ЕГЭ 2018. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) [17].	Данное учебное пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ по математике на профильном уровне и посвящено задачам с экономическим содержанием. Пособие состоит из пяти параграфов, в каждом из которых приводятся необходимые методические рекомендации, примеры решения задач, упражнения и диагностическая работа. Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей, и может быть использовано как в урочной деятельности, так и при проведении факультативных занятий и элективных курсов.	В практическом плане, в работе рассмотрены решения большого количества упражнений. Один из таких примеров: «Геннадий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Геннадий платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей. Геннадий готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?» [17]
Электронный ресурс infourok.ru [10]	На сайте представлен проект «Методическая разработка. Экономические задачи ЕГЭ» В данной работе подробно разобраны задачи, предлагавшиеся в разные годы на ЕГЭ.	С практической стороны в проекте разобран целый ряд задач экономического содержания. Приведем пример: «31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?» [10].

Продолжение Таблицы 3

Шевкин А.В. Текстовые задачи по математике: 7–11 классы [16].	Эта книга является дополнительным учебным пособием по алгебре для учащихся 7–11 классов. Содержание заданного материала в основном соответствует действующему стандарту по математике, все вопросы, выходящие за рамки стандарта, подробно разъяснены. В книгу включены известные именные задачи, а также задачи школьных экзаменов для 9-х классов с углубленным изучением математики прошлых лет и государственной итоговой аттестации в 9 классе, конкурсных экзаменов в МГУ им. М.В. Ломоносова, МИФИ, Высшую школу экономики и другие вузы страны, из единого государственного экзамена (ЕГЭ), авторские задачи.	Разобран целый ряд задач с экономическим содержанием: «В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник» [16]
Электронный ресурс infourok.ru [10]	На сайте представлен проект "Применение производной при решении экономических задач". Помимо стандартной информации по базовым понятиям начал анализа, представлен материал следующей тематики: - цели изучения темы, - план изучения темы, - этапы исследования и подведения результатов.	Рассмотрен ряд задач, носящих наглядный характер. Пример задачи: «Объём продукции u, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + 7,5t^2 + 100t + 50$ где t – время в часах, причем $1 < t < 8$. Необходимо вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1ч после начала и за 1ч до окончания рабочего дня» [10].

Продолжение Таблицы 3

Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / под ред. М.И.Сканави [8]	Классический задачник, в котором представлены все основные виды задач на составление уравнений, в том числе, с экономическим содержанием. Разобраны практически все типы задач на простые и сложные проценты, производительность труда, товарно-денежные отношения. Представлены задачи на оптимизацию, требующие знаний начал анализа. Задачи разбиты на три группы, в зависимости от уровня сложности.	Пример задачи повышенной сложности: «Состязаются три бригады лесорубы. Первая и третья бригады обработали древесины в 2 раза больше, чем вторая, а вторая и третья – в три раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом состязании?» [8]
Сборник математических задач «Основы финансовой грамотности» [7].	Сборник математических задач «Основы финансовой грамотности» в трех томах, в том числе, для обучающихся в 5-9 и 10-11 классах. Содержит задачи разного уровня сложности, охватывающие все содержательные блоки финансовой грамотности. Это основы финансового планирования, кредиты, депозиты, расчетно-кассовые операции, страхование, инвестиции, пенсионное обеспечение и налогообложение.	Приведем пример рассмотренных задач. «Игорь взял автокредит на 2 года в размере 1500000 руб. под 12% годовых. Рассчитайте размер ежемесячного платежа Игоря по кредиту, если он осуществлялся равными ежемесячными траншами (аннуитетными платежами)» [7]
ЕГЭ. Математика. Задания высокой и повышенной сложности/ Малкова А.Г. [19]	Пособие по решению задач высокой и повышенной сложности в формате ЕГЭ по математике. В сборнике есть все: необходимая и достаточная теория, справочные материалы, тесты, репетиторские хитрости, секреты и рекомендации. Сами задачи приведены с решениями и оформлением. Шестая глава полностью посвящена финансовой математике и «экономическим» задачам на ЕГЭ.	Пример задачи: 31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7378000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платеж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Проблемы, возникающие при изучении экономических задач, связаны с тем, что разнообразие способов и методов, используемых для их решения значительно шире, чем те, что изложены в подавляющем большинстве учебников. В связи с этим, выпускники часто показывают неудовлетворительные результаты. Объем учебного материала и всех типов задач, которые представлены в большинстве учеников, недостаточны и роль методики преподавания в этих условиях весьма существенна.

1.3 Применение современных технологий образования в процессе обучения решению экономических задач в углублённом курсе математики

Под технологией обучения понимают способ реализации содержания обучения в соответствии с учебными программами, который представляет систему форм, методов и средств обучения, обеспечивающую наиболее эффективное и качественное достижение поставленных целей (рисунок 2).

В данном случае:

- под формами обучения понимают способы организации учебно-познавательной деятельности, предназначенные для получения учащимися знаний по школьным предметам, а также умений, навыков и для их развития и воспитания;
- под методами обучения понимают взаимозависимые способы действий преподавателя и учащегося, предназначенные для получения учащимися знаний по школьным предметам, а также умений, навыков и для их развития и воспитания;
- под содержанием обучения понимают структурированные составные части учебного материала, которым должны овладеть учащиеся в процессе обучения.

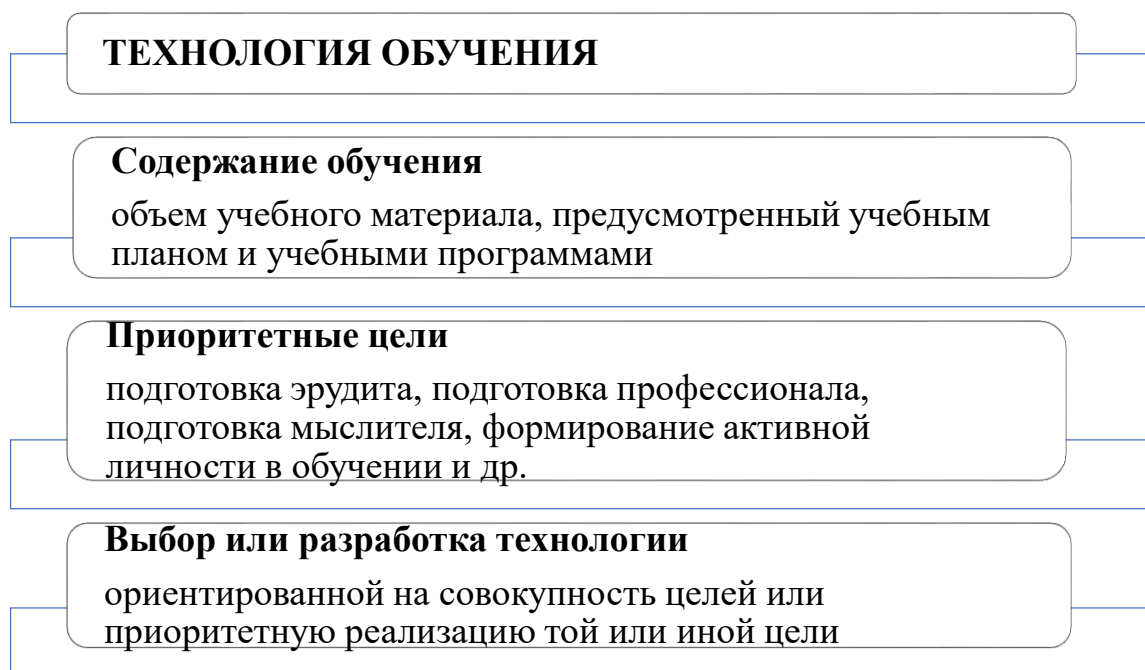


Рисунок 2 – Технология обучения

В современных научно-педагогических работах ведутся поиски таких дидактических подходов к получению образования, которые дали бы гарантированный результат.

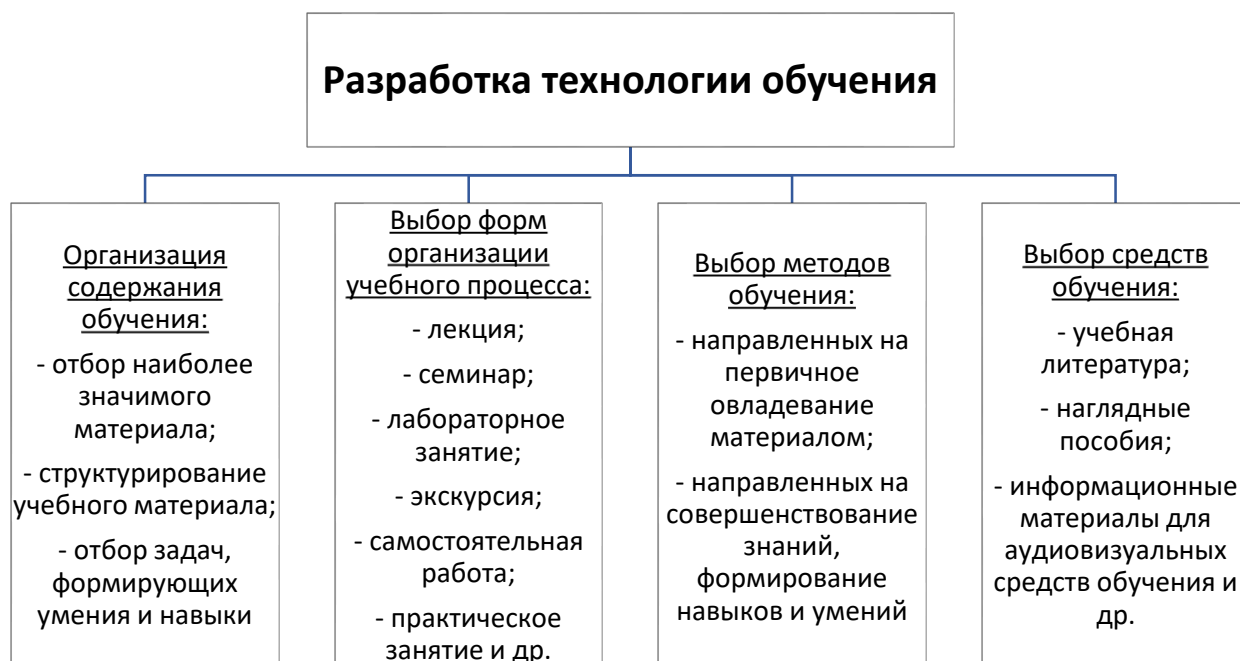


Рисунок 3 – Основные этапы разработки технологии обучения

При всем разнообразии существующих современных технологий обучения, процедуру разработки самой технологии можно схематически представить следующим образом (рисунок 3).

Процесс достижения цели обучения превратится в технологический процесс, который можно изобразить следующим образом (рисунок 4).

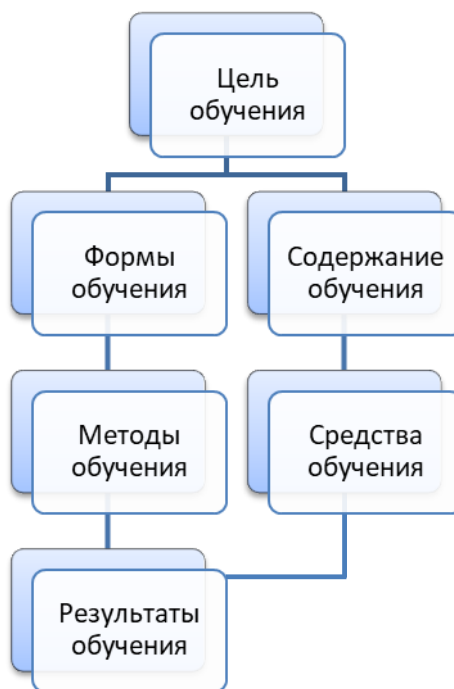


Рисунок 4 – Достижение цели обучения

В научно-методических работах все еще ведутся поиски подхода к классификации технологий обучения. Можно рассматривать такую классификацию:

- по направленности действий;
- по целям обучения;
- по предмету, для которого предназначена технология;
- по технической среде;
- по организации учебного процесса;
- по исторической задаче.

Технологический подход к обучению математике включает в себя:

- определение целей, предназначенных для достижения запланированных результатов обучения;
- организацию хода обучения в соответствии с учебными целями;

- оценку текущих результатов и коррекцию в ходе обучения;
- оценку конечных результатов по достижению поставленных целей.

Рассмотрим, такие понятия, как «Методика преподавания математики» и «технология преподавания математики», которые неправильно воспринимаются в качестве синонимов. С очевидностью, их следует различать, так как технологический подход содержит в большей степени целевой, процессуальный, количественный и расчетный компоненты, в то время как, в методике выделяют содержательную, качественную и вариативную стороны. Технология акцентируется на функционировании, на процессах изменения во времени.

При технологическом подходе более существенным, чем в методике, является диагностика при постановке целей. Она необходима для правильной организации обратной связи, которая отражает процесс достижения поставленных целей и является средством корректировки их достижения. Самым существенным отличием является гарантированность достижения результата при технологическом подходе и возможность ее воспроизвести другими преподавателями и участниками образовательного процесса.

Классификация технологий обучения осуществляется по разным аспектам. Единого взгляда на проблему классификации технологий обучения в современной педагогической и научно-методической литературе не существует.

Рассмотрим ряд существующих современных технологий обучения математике:

- технология интенсификации обучения математике на основе схемных и знаковых моделей учебного материала (В.Ф. Шаталов);
- укрупнение дидактических единиц. – УДЕ (П.М. Эрдниев);
- реализация теории поэтапного формирования умственных действий (М.Б. Волович);

- технология обучения математике на основе решения задач (Р.Г. Хазанкин);
- технологии развивающего обучения Л.Н. Занкова, Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова, И.С. Якиманской, П.К. Селевко.

Конечно же, одной из основных целей всех технологий обучения является развитие творческого мышления учащихся и повышение их предметных компетенций.

Остановимся на некоторых технологиях более подробно и приведем для них примеры задач с экономическим содержанием.

1. *Технология интенсификации обучения математике на основе схемных и знаковых моделей учебного материала (В.Ф. Шаталов).*

Цель: развитие творческого мышления и предметных компетенций через формирование знаний, умений и навыков учащихся независимо от их индивидуальных особенностей, и возможность ускоренного обучения и усваивания материала.

Прогнозируемый результат: приобщение к ежедневной учебно-познавательной деятельности и творческому мышлению, развитие трудолюбия, самостоятельности, уверенности в своих силах, способностях, формирование ответственности.

2. *Технология укрупнения дидактических единиц – УДЕ (П.М.Эрдниев).*

Цель: достижение целостности математических знаний как главное условие развития творческого мышления и саморазвития интеллекта учащихся, создание информационно более совершенной последовательности разделов и тем школьных предметов, обеспечивающее их единство и целостность.

Прогнозируемый результат: умение устанавливать логические связи, выделять главное и существенное в изучаемом материале, применять обобщения, сделать более эффективным закрепление материала.

Пример задачи.

В первый день скосили 40 Га посевов, во второй – на 40% $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$, чем в первый, а в третий день – на 15 Га $\frac{\text{больше}}{\text{меньше}}$, чем во второй. Сколько гектаров скосили в третий день?

3. Технология обучения математике на основе решения задач (Р.Г. Хазанкин).

Цель: увлечение учащихся математикой и развитие их индивидуальных способностей с помощью ключевых задач, которые формируются применительно к каждой изучаемой теме.

Прогнозируемый результат: успешное усваивание материала всеми группами учащихся с учетом уровневой дифференциации.

Пример задачи.

Расстояние от пункта А до пункта В равно 600км. и доехать можно на поезде при цене за 1 билет 1300 руб., либо на автомобиле с расходом 10л. на 100км. Проанализировать, каким транспортом выгоднее воспользоваться при путешествии вдвоем и при цене бензина в 44,5 руб./л.?

4. Технология личностно-ориентированного урока (И.С. Якиманская, Е. Бондаревская).

Цель: эффективное содействие развитию творческого мышления и проявлению ребенком своих личностных качеств, формирование его индивидуальности, субъектности, способности к нравственной и творческой реализации своих возможностей. Помочь обучаемому найти наиболее рациональные для него приемы и способы работы за счет активации его самых развитых сторон личности, наиболее соответствующие его морально-психологическому складу характера.

Прогнозируемый результат: раскрытие, реализация и развитие творческого мышления и личностного потенциала учащихся. Развитие самостоятельной инициативы и сотрудничества. Формирование у учащихся системы научных знаний на основе актуализации и «окультуривания» их субъектного опыта. Обретение своего индивидуального стиля познания и

темпа учебной деятельности, содействие ребенку в формировании положительной Я-концепции, овладение умениями и навыками самопознания и самоуправления.

Пример задачи.

Цех производит 100 деталей двух видов, причем детали первого вида составляют 3 % от общего количества. Насколько надо сократить выпуск деталей второго вида, чтобы детали первого вида составляли 6% от общего количества.

5. Технология проблемного обучения (И.Я. Лернер, Т.И.Шамова).

Цель: организация учебного процесса, при которой создаются под руководством учителя проблемные ситуации, и происходит организация активной самостоятельной деятельности учащихся по их разрешению, в результате чего и происходит развитие творческого мышления, овладение знаниями, умениями и навыками.

Прогнозируемый результат: активация мыслительной деятельности, формирование приемов исследовательской и познавательной деятельности, приобщение к научному поиску.

Пример задачи.

В банке был взят кредит 31 декабря сроком на 3 года по ставке 10% годовых. Договором предусмотрена следующая схема выплат:

- до 30 ноября каждого года начисляются проценты за весь этот очередной год на оставшуюся сумму, исходя из задолженности на начало года;
- до 31 декабря каждого очередного года выплачивается одна и та же определенная сумма в счет погашения кредита.

Какой была сумма полученного кредита, если сумма ежегодного платежа (включая проценты) была одна и та же и составляла 1464100 рублей?

6. Система развивающего обучения Л.Н. Занкова.

Цель: достижение максимальной эффективности обучения для общего развития школьника, богатого содержания образования и средства

педагогической деятельности, направленных на целостное развитие личности ребенка, его ума, воли, чувств, а не только на усвоение им знаний, умений, навыков.

Прогнозируемый результат: создание эмоционального фактора, который способствует быстрому развитию интеллектуальных, нравственных и творческих способностей ребенка.

Пример задачи.

Для производства деталей необходимо по кругу сцепить шестеренки. Смогут ли они вращаться, если их двенадцать? Тринадцать?

7. Технология развивающего обучения Д.Б. Эльконина – В.В.Давыдова.

Цель: формирование у учащихся теоретического сознания и мышления, способов умственных действий и логики научного познания.

Прогнозируемый результат: возможность интенсифицировать умственное развитие через содержание учебного материала и методы организации обучения.

Пример задачи.

В связи с реконструкцией производительность труда в течение года выросла дважды на одно и то же количество процентов. Первоначально выработка составляла 1200 шт., а в конце года – 1452 шт. На сколько процентов выросла производительность каждый раз?

Многие из этих технологий могут использоваться и при изучении различных предметов, однако, большинство из них разрабатывались на примере математики.

Поэтому, их с полной ответственностью можно считать современными технологиями для обучения математике, позволяющими достичь заметных результатов в повышении предметных компетенций, в том числе, для решения задач с экономическим содержанием.

1.4 Особенности уровневой дифференциации при обучении решению экономических задач

Дифференциация обучения в российской средней школе берет свое начало с середины 18-го века, когда стали создаваться гимназии, учебные заведения (училища) различной направленности: гражданские, военные, для будущих ученых, купеческие [1]. В преподавании стала появляться практика учета склонностей учащихся при проведении занятий. В 19-м веке дифференциации нашла реальное воплощение при создании четырехступенчатой образовательной системы: приходские и уездные училища (аналоги современных начальных и средних классов), классические и реальные гимназии (соответствующие современным старшим классам в довузовских учебных заведениях) и университеты (современные ВУЗы) [2].

В первой половине 20-го века дифференциация нашла свое место в школе в форме факультативных занятий по различным предметам. Позднее, стали создаваться целые классы по принципу объединения учащихся, заинтересованных в одних и тех же факультативах: физико-математические, химико-биологические, гуманитарные, лингвистические.

Уже в это время появились различные подходы к дифференциации. В общепринятой практике, занятия по отдельным предметам носили углубленный характер, в то время как по остальным предметам ничем не отличались от занятий в базовых классах. Однако, некоторые исследователи считали, что следует изменить содержание непрофильных предметов, приспособив их под необходимость углубленного изучения других, основных предметов.

Позднее появились специализированные школы, и уже с начала 90-х годов прошлого столетия изучение вопросов дифференциации становится одним из самых важных аспектов педагогической науки. Факультативы, элективные курсы, профилирование становятся неотъемлемой частью учебных планов.

Современные концепции разделяют дифференциацию на уровневую (или внутреннюю) и профильную (или внешнюю) [8].

Уровневая дифференциация применяется в классах, в которых учащиеся подобраны случайным образом и когда происходит внутреннее деление на группы, исходя из различных критериев по усмотрению преподавателя или принятых в данном учебном заведении. Такое деление позволяет учитывать индивидуальную мотивацию учащихся к учебно-познавательной деятельности, подбирать темп и объем изучения материала, методы и формы преподавания. Само деление на группы является отчасти условным, и учащиеся при удовлетворении определенным критериям ассоциируются с соответствующей этим критериям группой. Стоит заметить, что такое деление направлено не только на «подтягивание» отстающих школьников, но и на получение дополнительных знаний «продвинутыми» учащимися.

При изучении математических задач с экономическим содержанием основной акцент следует делать на сложности рассматриваемых задач. А именно, не следует делить саму тематику задач на «легкую» и «сложную». Все группы учащихся должны, например, решать задачи на банковские проценты. Дифференциация должна заключаться лишь в степени сложности этих задач.

В соответствие с современными концепциями, уровневая дифференциация предполагает достижение учащимися различных конечных целей, но в рамках единой программы и с использованием одних и тех же пособий. При этом, установленный минимальный объем знаний по конкретному предмету, согласно выбранного профиля обучения по государственному стандарту, должен быть достигнут [13].

Существуют различные подходы к понятию уровневой дифференциации:

- «в некоторых работах приоритет отдается психологическим особенностям учащихся и на этой основе происходит выделение групп учащихся [4]»;

- «существует подход, учитывающий индивидуальности учащихся, когда происходит группировка исходя из некоторых личностных интересов и предпочтений, что делает возможным реализовать раздельное обучение [12]»;
- «понимается такой принцип обучения, когда учащиеся овладевают некоторой базовой суммой знаний по широкому спектру изучаемых предметов, делая дополнительно акцент по тем курсам, которые соответствуют индивидуальным запросам конкретного школьника [3]».

Исходя из изложенного, можно вычленить различные аспекты к уровневой дифференциации (рисунок 5).

Стоит отметить, что до сих пор сохраняется некоторая терминологическая недоговоренность применительно к «дифференциации». Вызвано это близостью понятий «индивидуализация», «индивидуальный подход» и «уровневая дифференциация».

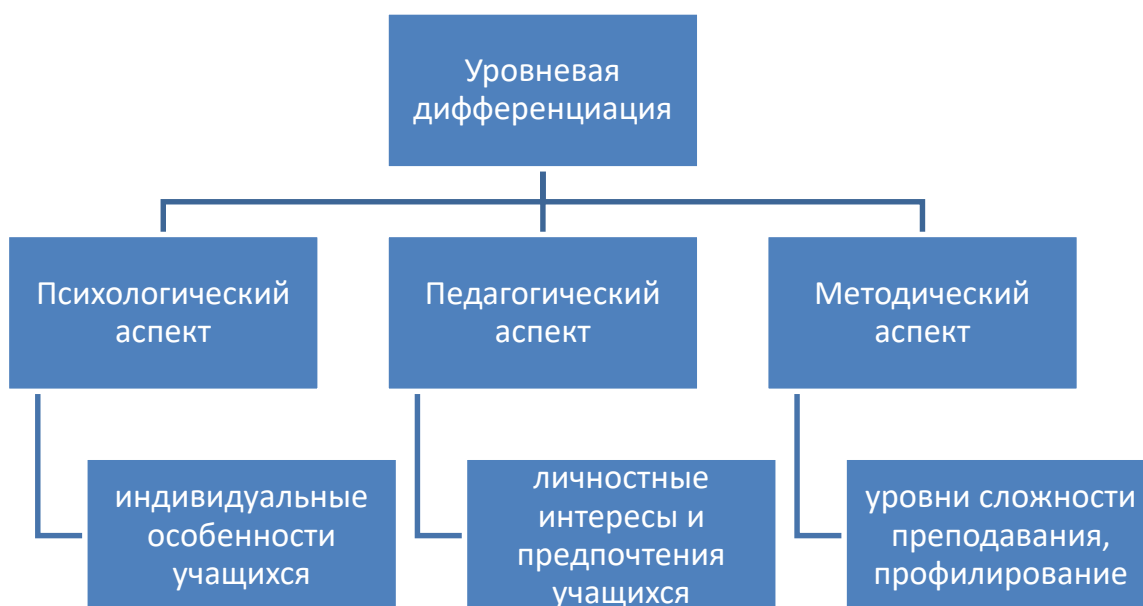


Рисунок 5 – Аспекты уровневой дифференциации

Все же, представляется правильным провести четкое различие между ними [8]:

- дифференциация, преимущественно, предполагает разделение и адаптацию учебных планов применительно к различным группам учащихся для получения ими предусмотренных программами знаний;

- под индивидуализацией понимается выбор таких способов и методов преподавания, которые учитывают персональные особенности учащихся, способность к усваиванию материала, уровень полученных ранее знаний.

При уровневой дифференциации степень восприятия материала учащимися, как правило, различная. Обязательным, однако, является базовый уровень, установленный для учреждения образования данной категории. Этот уровень берется за основу при определении сложности материала для других групп учащихся.

В старших классах учащиеся получают право самостоятельно определять уровень сложности и степень усваивания материала, но исходя из установленного минимума. Учащиеся определяют умения и навыки, которые будут приобретаться, а также, типы задач, которые будут ими изучены. Материал в классе повторяется несколько раз, так, чтобы повторение каждый раз происходило на более сложном уровне, начиная с минимального, базового, и охватывая разные группы учащихся.

Можно выделить несколько видов уровневой дифференциации, нашедшей распространение на практике.

Технология уровневой дифференциации на основе обязательных результатов основана на двух стандартах (В.В. Фирсов):

- базовый уровень, предназначенный для всех учащихся, и которого должен достичь каждый из них;
- повышенный уровень, который предназначен для учащихся, интересующихся предметом и способным к его углубленному изучению.

Применительно к задачам с экономическим содержанием, представляется целесообразным такое деление:

- базовый уровень:
 - задачи на проценты;
 - задачи на производительность труда;
 - задачи на товарно-денежные отношения;
 - анализ данных, графиков, диаграмм и таблиц;
- повышенный уровень:
 - задачи на простые и сложные проценты по вкладам;
 - задачи на дифференцированные и аннуитетные платежи;
 - задачи на оптимизацию;
 - задачи с линейными и нелинейными целевыми функциями.

Между этими двумя уровнями есть пространство для учебно-познавательной деятельности учащихся, что позволяет стимулировать переход с одного уровня на другой и обеспечить обучение на максимально доступном конкретному школьнику уровне.

В данной концепции под базовым уровнем понимается фактическая сумма знаний, реально усвоенная учащимися. Сам этот уровень формулируется в виде результатов, которые можно проверить и проконтролировать.

Обязательность для всех учащихся знаний базового уровня означает реальную выполнимость поставленных задач, ее доступность абсолютному большинству школьников и их осведомленность о стоящих перед ними требованиях.

В основе данной технологии лежит мотивация учащихся и признание за ними права на выбор уровня обучения, когда преподаватель выполняет, в первую очередь, стимулирующую роль.

Концепция для учащегося состоит в принципе получения такой суммы знаний, которую он в состоянии усвоить.

В связи с этим, данная уровневая дифференциация обучения предполагает:

- существование базового обязательного уровня подготовки в курсе средней школы, которого обязан достичь каждый учащийся;
- этот базовый уровень является основой для дифференциации в данном классе и соответствующей индивидуализации требований к учащимся;
- базовый уровень безусловно должен быть реально выполнен для всех учащихся в классе;
- система требуемых от учащегося результатов, должна быть открытой и заранее известной школьникам;
- повышенный уровень является мотивирующим для индивидуального развития школьников и получения глубоких знаний по изучаемому предмету.

Особенность данной технологии уровневой дифференциации состоит в ее связи с системой оценки и контроля над результатами, достигнутыми учащимися в ходе учебного процесса. Здесь, в отличие от общепринятого способа «вычитания» из максимально возможного результата, используется метод «сложения», когда за основу берется минимальный, базовый уровень знаний, обязательный для каждого учащегося, и оценивается то, что достигнуто сверх этого уровня.

Еще одна технология уровневой дифференциации (Н.П. Гузик) подразумевает «комбинированную систему обучения», которая помимо собственно дифференцированного обучения предполагает специальные уроки развивающей направленности по изучаемой теме.

Изучаемая тема предполагает пять типов занятий, последовательно идущих друг за другом:

- теоретические уроки по изложению основ изучаемой темы, аналогичные лекциям;
- смешанные занятия аналогичные семинарам, с углубленной проработкой учебного материала и с самостоятельной работой учащихся;
- обобщающие уроки, систематизирующие полученные знания;

- занятия с межпредметным уклоном, носящие тематический характер;
- уроки, носящие практический характер.

Предполагается разноуровневое преподавание на всех этапах изучения темы. Как правило, выделяют три типа дифференцированных программ, различной степени сложности.

Дифференцированные программы предназначены для двух целей: получение учащимися соответствующего уровня знаний, умений и навыков; воспитание самостоятельности учащихся путем решения задач по образцам, с минимальной помощью от преподавателя.

Каждая из трех программ имеет свой базовый минимум, и они следуют друг за другом, сохраняя логику и последовательность изложения всей темы в целом.

Первая программа представляет собой стандарт для базового обучения. Выполняя эту программу, ученик получает конкретные знания по предмету, понимание того, что необходимо изучить еще и какие сделать выводы.

Эту программу осиливают все учащиеся перед тем, как перейти к программе следующего уровня.

На следующем уровне учащиеся овладевают теми общими и специфическими приемами учебно-познавательной деятельности, которые необходимы для решения задач, использующих основные положения изучаемой темы. В эту программу вводятся дополнительные сведения, которые расширяют материал первого уровня, увеличивают объем знаний по изучаемой теме, помогает глубже усвоить основной материал.

Третья программа позволяет учащимся перейти на уровень творческого применения знаний. Эта программа предусматривает свободное владение фактическим материалом, приемами учебной работы и познавательной деятельности. Она позволяет учащимся осознать суть проблем, которые можно решить на основе уже полученных знаний, дает логическое

обоснование темы, открывающие возможности для осознанного и творческого применения.

Выбор количества программ для изучения каждого из предметов предоставляется самому школьнику. Тем самым, обеспечивается базовый минимум и, одновременно, открываются возможности для развития творческой индивидуальности каждого учащегося.

Применение уровневой дифференциации дает возможность преподавателю:

- оказывать необходимую помощь учащимся при осваивании учебного материала;
- осуществлять мониторинг знаний, выявлять пробелы, «подтягивать» отстающих школьников;
- быть организатором учебно-познавательного процесса, переосмыслив подготовку к самим занятиям и процессу их проведения;
- выявлять недостатки авторских программ по уровням преподавания;
- ввести контроль над уровневой дифференциацией и своевременно осуществлять коррекцию знаний, умений и навыков;
- как результат, повысить качество усваивания материала учащимися, их глубину и прочность.

Ученик может:

- в полной мере получить необходимый минимум знаний, зародить и развивать интерес к изучению того или иного предмета;
- ощущать себя в атмосфере комфорта, не будучи в числе «продвинутых» учащихся;
- в удобной для себя форме изучать материал;
- устранять пробелы в собственной подготовке;
- повысить интерес к учебно-познавательной деятельности.

Представляется, что в целях уровневой дифференциации и преследуя цель «подтягивания» учащихся с низкой мотивацией, а также исходя из

личностно-ориентированного подхода на занятиях, включая индивидуальную работу при изучении предмета, является целесообразным использование многоуровневых задач.

У слабых учащихся, появляется уверенность в себе, исчезает чувство страха перед новыми задачами. Они начинают «рисковать» берясь за более сложные задачи высокого уровня. Анализ многих результатов уровневой дифференциации при обучении математике, показывает, что слабые учащиеся «подтягиваются», добившись практически полного достижения обязательных результатов по базовой программе обучения.

В то же время, средние и сильные учащиеся приобретают творческие способности решать сложные задачи, а некоторые из них – и до решения задач олимпиадного характера.

Выводы по первой главе

Изложение материала с соблюдением баланса теоретических и практических сторон – это процесс, подталкивающий учащегося к самостоятельной работе по изучению темы и к развитию мышления для поиска требуемого решения прикладных задач. Стимулирование их к выбору наиболее рационального способа решения является главным фактором для развития навыков логического мышления. Реальный опыт показывает, что регулярное использование задач с экономическим содержанием в практике преподавания алгебры и начал анализа даёт значительный эффект в целом.

Приведенные выше учебно-дидактические материалы показывают, что к их общим недостаткам, в большинстве случаев, следует отнести отсутствие системности и последовательности в изучении задач с экономическим содержанием.

Подробное и упорядоченное изложение этой темы является незаменимым для развития вероятностно-логического мышления у старшеклассников.

Глава 2 Практическая реализация методики обучения решению экономических задач в углубленном курсе математики

2.1. Анализ различных методик и опыта обучения основным математическим элементам для решения задач с экономическим содержанием в общеобразовательной школе

Анализируя методики обучения решению экономических задач, для их практической реализации представляется наиболее интересной использование технологии обучения математике под авторством Р.Г. Хазанкина.

Для достижения целей данной технологии основным моментом являются ключевые задачи по каждой из изучаемых тем. Эти задачи обеспечивают успешное обучение на уровне стандарта всеми группами учащихся.

Основана технология на разработанной системе из восьми типах занятий. Каждое из этих занятий может иметь длительность в два академических часа. Эти занятия включает:

- занятие-лекцию, которое раскрывает новую изучаемую тему одним крупным блоком;
- практическое занятие, посвященное решению ключевых задач различного уровня сложности.

Обобщающие занятия включают:

- занятие в виде консультации, когда учащиеся готовят вопросы и задачи, вызвавшие затруднение;
- зачет (коллоквиум), когда повторяется тема целиком, излагаемая, преимущественно, самими учащимися;
- контрольное занятие, которое проводится в письменной форме;
- завершающее занятие, посвященное анализу и обобщению всего пройденного материала.

Рассмотрим далее несколько ключевых задач, которые являются полезными при изучении темы математических задач с экономическим содержанием.

Задача 5.1.

Для приготовления газированного напитка используется концентрат и вода. Обычно содержание воды составляет 99% и стоит 100гр. такого напитка 5руб. (воду считать бесплатной). На сколько меньше воды надо добавить, чтобы содержание воды составило 98%? Сколько будет стоить 100гр. такого напитка?

Решение.

Стоит заметить, что в подавляющем большинстве случаев быстрый ответ на первый поставленный вопрос составляет 1гр., следуя логике:

$$99\% - 98\% = 1\%$$

Основная ценность подобного рода задач заключается, конечно же, в том, что есть возможность разъяснить учащимся необходимость строго следовать установленным алгоритмам решения и не допускать ошибочных суждений, даже при их внешней кажущейся очевидности.

Действительно, 99%-процентное содержание воды означает наличие 99гр. воды и 1гр. концентрата в 100гр. напитка, а 98%-процентный водный раствор означает наличие 98гр. воды и 2гр. концентрата в 100гр. напитка. Но ведь количество концентрата не увеличилось! Это означает, что вес напитка уменьшился, и теперь 98% надо брать не от 100гр., а от некоторого, меньшего количества напитка, которое и стоит обозначить через x .

Для составления правильного уравнения необходимо выяснить, что есть общего у исходного 99%-процентного и полученного 98%-процентного напитков. Общим является количество концентрата, которое как было:

$$(100\% - 99\%) \cdot 100\text{гр.} = 1\text{гр.}$$

так и осталось. Но, 1гр. концентрата в новом напитке – это уже 2% от нового объема:

$$100\% - 98\% = 2\%$$

Получаем уравнение:

$$1\text{гр.} = \frac{x}{100} \cdot 2\%$$

откуда и следует ответ:

$$x = 50\text{гр.}$$

и, соответственно, воды надо добавить на 50 гр. меньше. При этом, вес напитка станет 50 гр. Учитывая, что вода бесплатная, стоимость 100 гр. нового напитка составит 10 руб., так как для этого потребуется 2 гр. концентрата.

Ответ: 10 руб.

В части изучения темы производительности труда, товарно-денежных отношений, можно рассмотреть следующую задачу.

Задача 5.2.

В течение календарного года в организации зарплату повышают ежемесячно на одну и ту же фиксированную сумму. Известно, что зарплата за апрель составила 36000 руб., а за третий квартал – 126000 руб. Найти сумму годовой зарплаты.

Решение.

При кажущейся простоте задачи здесь необходимо проявить аккуратность вычислений, которая особо важна в экономических задачах. Небольшая ошибка может полностью поменять экономическое содержание результата.

В данном случае учащимся рекомендуется составить план решения задачи, который, учитывая исходные данные, может выглядеть следующим образом:

- определяем зарплату за еще один месяц (кроме апреля),
- вычисляем ежемесячный прирост зарплаты,
- находим заработные платы за каждый месяц,
- определяем ежегодную зарплату.

В качестве неизвестной x прием размер ежемесячной прибавки к зарплате. Предлагаем учащимся определить зарплату $P_{\text{авг}}$ за август:

$$P_{\text{авг}} = \frac{126000}{3} = 42000 \text{ руб.}$$

Определяем количество месяцев между апрелем и августом:

$$8 - 4 = 4$$

Очевидно, прирост зарплаты составляет:

$$x = \frac{42000 - 36000}{4} = 1500 \text{ руб.}$$

Следом, учащиеся самостоятельно определяют:

$$P_{\text{янв}} = 36000 - 3 \cdot 1500 = 31500 \text{ руб.}, \quad P_{\text{фев}} = 31500 + 1500 = 33000 \text{ руб.}$$

$$P_{\text{мар}} = 36000 - 3 \cdot 1500 = 34500 \text{ руб.}, \quad P_{\text{апр}} = 36000 \text{ руб.}$$

$$P_{\text{май}} = 36000 + 1500 = 37500 \text{ руб.}, \quad P_{\text{июнь}} = 37500 + 1500 = 39000 \text{ руб.}$$

$$P_{\text{июль}} = 39000 + 1500 = 40500 \text{ руб.}, \quad P_{\text{авг}} = 40500 + 1500 = 42000 \text{ руб.}$$

$$P_{\text{сен}} = 42000 + 1500 = 43500 \text{ руб.}, \quad P_{\text{окт}} = 43500 + 1500 = 45000 \text{ руб.}$$

$$P_{\text{ноя}} = 45000 + 1500 = 46500 \text{ руб.}, \quad P_{\text{дек}} = 46500 + 1500 = 48000 \text{ руб.}$$

Наконец, определяем общую годовую зарплату:

$$P = 477000 \text{ руб.}$$

Ответ: 477000 руб.

В качестве вводной задачи, иллюстрирующей возможность применения знаний из начал анализа для решения экономических задач, можно предложить задачу об оптимальном периметре прямоугольника [1].

Задача 5.3.

Для упаковки детских игрушек необходимо изготовить картонные коробки с крышкой фиксированного объема в 6000 куб. см. и высотой в 15 см. Предполагая форму коробки в виде прямоугольного параллелепипеда, определить стоимость изготовления, если 1 кв. м. картона стоит 40 руб.

Решение.

Учащиеся уже имели опыт с подобными задачами и легко справятся с записью функции, которую надо минимизировать:

$$S = 2xy + 2x \cdot 15 + 2y \cdot 15 = 2xy + 30(x + y)$$

Здесь x и y – стороны основания коробки, S – площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда (коробки)

$$xy \cdot 15 = 6000, \quad xy = 400$$

Функция $S(x)$ принимает вид:

$$S(x) = 800 + 30 \left(x + \frac{400}{x} \right)$$

На следующем шаге учащиеся вычисляют производную, проводят исследование на экстремум и получают ответ:

$$x_{\min} = 20 \text{ см}, \quad S_{\min} = 2000 \text{ см}^2, \\ P = 40 \cdot 2000 \cdot 10^{-4} = 8 \text{ руб.}$$

Ответ: 8 руб.

Для тех, кто легко справляется с такими заданиями, будет доступна следующая задача, являющаяся логическим продолжением предыдущей.

Задача 5.4.

Будет ли дешевле коробка, если ее изготовить цилиндрической формы, сохранив лишь объем коробки в 6000 куб. см.

Решение.

Обращаем внимание учащихся, что в данном случае высота коробки H не является фиксированной и она связана с радиусом основания R соотношением:

$$\pi R^2 H = 6000$$

В этом случае площадь полной поверхности цилиндра S равна:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

и учащимся предстоит исследовать на экстремум функцию:

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{12000}{R}$$

Отмечаем, что переменной величиной является R и стандартное исследование функции на экстремум дает результат:

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3000}{\pi}}, \quad S_{\min} = 200\sqrt[3]{9\pi} + 1200\sqrt[3]{\frac{1}{3}\pi}$$

$$P = 40 \cdot S_{min} \cdot 10^{-4} = 0,8\sqrt[3]{9\pi} + 4,8\sqrt[3]{\frac{1}{3}\pi}$$

Здесь важно объяснить, что в реальной жизни радиус основания должен принимать некоторое целочисленное значение.

В данном случае, принимаем $R = 10$ см. Вычисление показывает, что более экономно изготовить цилиндрическую коробку с радиусом основания 10 см и высотой:

$$H = \frac{6000}{\pi R^2} \approx 19,2 \text{ см}$$

Действительно, в этом случае:

$$V = \pi \cdot 19,2 \cdot 100 = 1920\pi \approx 6029 \text{ см}^3$$

$$S = 2\pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 10 \cdot 19,2 = 584\pi \text{ см}^2$$

$$P = 584\pi \cdot 40 \cdot 10^{-4} \approx 7,34 \text{ руб.}$$

Ответ: да, будет дешевле.

Важным компонентом при изложении математических способов решения экономических задач при профильном обучении является алгоритм применения интегралов [4].

Стоит отметить, что при этом учащиеся не просто учатся решать задачи с экономическим содержанием, но и могут повысить свои знания и навыки по технике интегрирования функций.

Задача 5.5.

Зависимость производительности труда от времени в течение рабочего дня определяется соотношением:

$$f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 5t$$

Найти зависимость объема произведенной продукции от времени.

Решение

Здесь учащиеся должны использовать соответствующую формулу из лекционного занятия:

$$V(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \left(-\frac{1}{2}\tau^2 + 5\tau\right) d\tau = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2$$

Будет полезным графическое объяснение задания (рисунок 6). Объем производства можно вычислить как площадь криволинейной трапеции.

Очевидно, что исходя из смысла задачи, параболу изображаем на промежутке $0 \leq t \leq 8$.

Ответ: $V(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2$.

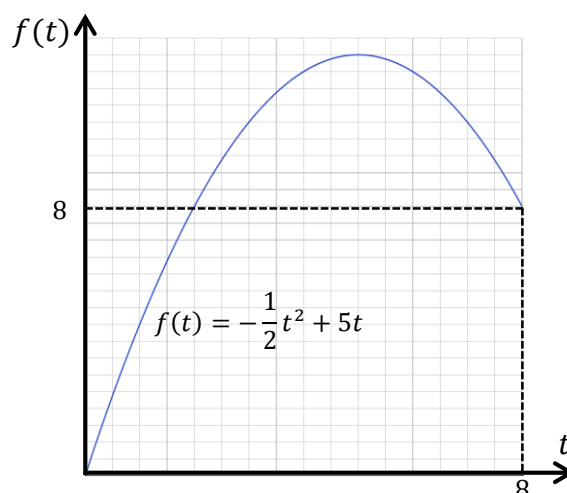


Рисунок 6 – График производительности труда

В качестве логического продолжения можно рассмотреть следующую задачу.

Задача 5.6.

Найти объем произведенной продукции в течение четвертого часа работы по данным задачи 5.5.

Решение

Здесь возможно решение непосредственно с помощью определенного интеграла

$$\begin{aligned} W &= \int_3^4 \left(-\frac{1}{2}\tau^2 + 5\tau\right) d\tau = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 \Big|_3^4 = -\frac{1}{6} \cdot 4^3 + \frac{5}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^3 - \frac{5}{2} \cdot 3^2 \\ &= \frac{34}{3}. \end{aligned}$$

Иначе, учащиеся могут найти решение, используя решение предыдущей задачи:

$$V(3) = -\frac{27}{6} + \frac{5}{2} \cdot 9 = 18, \quad V(4) = -\frac{64}{6} + \frac{5}{2} \cdot 16 = \frac{88}{3}.$$

Получаем:

$$W = V(4) - V(3) = \frac{88}{3} - 18 = \frac{34}{3}.$$

Ответ: $\frac{34}{3}$ ед. прод.

Приведем далее задачи финансовой тематики, представленные на сайте авторов УМК по математике для 1-11 классов Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [64].

Задача 5.7.

«Сделаны вклады на год в два банка: в один под 14% годовых с потерей процентов в случае досрочного закрытия, в другой – под 11% годовых, но с сохранением процентов в случае досрочного закрытия. Через год из обоих банков были получены равные суммы денег. Сколько денег было положено в первый банк и сколько во второй, если сумма вкладов была равна 900 000 р.» [64].

Решение.

Пусть x – сумма вклада в первый банк. Тогда, сумма вклада во второй банк равна $(900000 - x)$, и учащиеся записывают ключевое уравнение для данной задачи:

$$1,14 \cdot x = 1,11 \cdot (900000 - x)$$

откуда получаем:

$$x = 440000 \text{ р.}$$

Ответ: 440000р. и 460000р. ед. прод.

Задача 5.8.

«Банковский вклад, не тронутый в течение года, в конце этого года увеличивается на 10%. На сколько процентов увеличится вклад, не тронутый в течение трех лет» [64].

Решение.

Пусть S – сумма вклада. Тогда в конце третьего года будет получено:

$$S_1 = 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot S = 1,1^3 \cdot S = 1,331S$$

и искомая величина процентов равна:

$$p = \frac{S_1 - S}{S} \cdot 100\% = 33,1\%.$$

Ответ: 33,1%

Приведенные примеры показывают, что при решении экономических задач особую важность несут теоретические знания в части специфики данной тематики, равно как и методов решения ключевых задач в рамках элективного курса.

Методикам решения задач с экономическим содержанием уделено не так много места в научно-педагогической литературе. Выделим работу авторов Н.В. Прояева, А.Н.Колобова «Особенности изучения задач с экономическим содержанием в школьном курсе математики» в журнале «Мир науки, культуры, образования» [37].

Методика обучения предполагает формулировку задач, состоящих из нескольких стадий:

- проблемная ситуация;
- постановка задачи;
- достаточность и вид условия.

Отмечается сложность экономических задач, что обусловлено необходимостью знания соответствующих понятий. В основу решения задач на вклады, кредиты и проценты положены основные формулы, вывод которых предлагается с помощью задач, которые учащиеся решают самостоятельно.

Отметим также диссертацию А.В.Панькова «Методика обучения решению задач с экономическим содержанием на занятиях по математике в общеобразовательной школе с использованием среды *Mathematica*» [35].

В работе показана методика обучения решению математических задач экономического содержания с использованием компьютерных математических систем, которые удовлетворяют методологии проектирования новых информационных технологий.

С помощью таких новых систем расширяются возможности использования различных наработок и дидактических материалов на

достаточно высоком информационном уровне. Показано, что основные методические цели могут быть достигнуты эффективнее, чем при использовании некоторых педагогических технологий.

Система *Mathematica* является эффективным средством при обучении экономическим задачам и вполне может быть использована в качестве вспомогательного инструмента при проведении занятий в рамках рассматриваемой в данной работе технологии обучения.

2.2 Реализация методики обучения решению экономических задач применительно к некоторым видам банковских операций

На занятии о банковских операциях учащиеся получают, в том числе, базовые сведения об операциях кредитного характера. Вначале дается информация об основных понятиях.

Кредит – предоставление банком денег во временное пользование на условиях платности, возвратности на определенный срок.

Потребительский кредит – кредит, предоставленный банком физическому лицу на приобретение товаров (работ, услуг) для удовлетворения личных, бытовых и иных нужд, не связанных с осуществлением предпринимательской деятельности.

Процентная ставка по кредиту – процент, который составляет плата за пользование кредитом от суммы кредита за конкретный период (год, месяц, день).

Полная стоимость кредита – все платежи заёмщика по кредиту в дополнение к сумме основной задолженности и сумме по процентам.

Переплата по кредиту – сумма в рублях, которую заёмщик должен переплатить банку сверх того, что получил от него в качестве кредита за весь срок его действия.

Обеспечение – материальные ценности, наличие которых у заёмщика гарантирует возможность возвращения долга.

Автокредит – кредит для физических лиц на покупку транспортного средства с одновременным его использованием в качестве залога.

Ипотечный кредит (в просторечии «ипотека») – долгосрочный кредит, предоставляемый юридическому или физическому лицу банками под залог недвижимости: земли, производственных и жилых зданий, помещений, сооружений.

Кредитная карта – электронное средство платежа за счёт банка в пределах лимита, позволяющего получить краткосрочный кредит, отсрочку платежа.

Затем, вводятся понятия дифференцированного и аннуитетного платежей. «При начислении процентов по кредиту обычно используются две схемы:

- с дифференцированными (неравными) платежами;
- с аннуитетными (равными) платежами.

Эти схемы отличаются принципами формирования и величиной обязательных платежей» [22].

Дифференцированные платежи

«Пусть S_0 – сумма кредита. Для кредита с дифференцированными платежами процент и периодичность обязательных платежей фиксируются (например, ежегодные, ежеквартальные или ежемесячные платежи), а фиксированный процент начисляется на ещё невыплаченную к моменту очередного обязательного платежа часть кредита (долга).

В этом случае каждый год (или каждый платёжный период) сумма выплат уменьшается, поскольку она состоит из фиксированной части S_0/n (где n – число платежей, равное числу платёжных периодов) и процентов, начисляемых на остаток долга по кредиту, величина которого каждый год (или каждый платёжный период) уменьшается на S_0/n . Таким образом, при схеме с дифференцированными платежами клиент возвращает банку до истечения каждого платёжного периода $1/n$ часть суммы кредита и проценты от ещё не выплаченной на начало этого платёжного периода части кредита» [22].

Выводится формула для общей суммы S всех выплат по кредиту, которая равна сумме кредита S_0 и сумме начисленных процентов за n месяцев при $k\%$ годовых:

$$S = \frac{S_0(k(n + 1) + 200)}{200}.$$

Например, если первоначальная сумма равна 100000руб. с начислением 10% годовых, то при четырех платежных периодах общая сумма S всех выплат составит:

$$S = \frac{S_0(k(n + 1) + 200)}{200} = \frac{100000(10 \cdot 5 + 200)}{200} = 125000 \text{руб.}$$

Аннуитетные платежи

Начнём с упрощённой реальной схемы, предполагающей ежегодные, а не ежемесячные выплаты. По-прежнему будем считать, что « S_0 – сумма кредита (долга) и кредит берётся на n лет под $k\%$ годовых. Эта же схема применима и в тех случаях, когда процент по кредиту указывается для платёжного периода, а не для целого года. Для реальных кредитов с аннуитетными платежами условия начисления процентов оказываются следующими:

- до истечения очередного платёжного периода банк начисляет $k\%$ на оставшуюся сумму долга, т. е. увеличивает её на $k\%$;
- после начисления процентов клиент вносит в банк до истечения соответствующего платёжного периода некоторую сумму x , одну и ту же для каждого платежа. Сумма долга, при этом, уменьшается, и на эту, уменьшенную на x сумму, начисляются проценты до истечения следующего платёжного периода, после чего клиент вносит в банк платёж в размере той же суммы x и т. п.» [22].

Выводится формула для суммы регулярного платежа x по кредиту на сумму S_0 при n платежных периодов и при $k\%$ годовых:

$$x = \frac{m^n(m-1)}{m^n-1} S_0, \quad m = 1 + \frac{k}{100}.$$

Например, если первоначальная сумма равна 100000руб. с начислением 10% годовых, то при четырех платежных периодах регулярная сумма к уплате составит:

$$x = \frac{m^n(m-1)}{m^n-1} S_0 = \frac{1,1^4(1,1-1)}{1,1^4-1} \cdot 100000 = 31547,08 \text{руб.}$$

Вопросы к занятию:

- 1) В чем отличие дифференцированных и аннуитетных платежей?
- 2) Возможно ли совпадение общих сумм выплат по двум видам платежей при равной начальной сумме кредита?
- 3) Почему большинство потребительских кредитов оформляется по схеме аннуитетных платежей?
- 4) Какая форма начисления платежей наиболее выгодна кредитополучателям?

Практическая часть занятия

Задача 6.1 (базовый уровень).

В банке был оформлен кредит в сумме 1 000 000 руб. под 10% годовых сроком на 6 лет. Какую сумму надо выплачивать ежемесячно, чтобы общая сумма платежей на все 6 лет не изменилась.

Решение.

Общая сумма выплат при $S_0 = 1\,000\,000$ руб. за $n = 6$ лет при $k = 10\%$ годовых составит:

$$S = \frac{S_0(k(n+1) + 200)}{200} = \frac{1000000(10 \cdot 7 + 200)}{200} = 1\,350\,000$$

При ежемесячных платежах равной суммой количество оплат составит $k = 6 \cdot 12 = 72$ и искомая разовая сумма x равна:

$$x = \frac{S}{k} = \frac{1350000}{72} = 18750 \text{руб.}$$

Задача 6.2 (профильный уровень).

В банке был взят кредит 15 декабря сроком на полтора года по ставке $x\%$ годовых. Договором предусмотрена следующая схема выплат:

–до 15 числа каждого очередного месяца выплачиваются проценты за предыдущий месяц пользования кредитом, исходя из ставки $x\%$ годовых и оставшейся суммы задолженности на 15 число предыдущего месяца;

–до 15 числа каждого очередного месяца выплачивается одна и та же определенная сумма в счет погашения основного долга по кредиту.

Какой должна быть годовая процентная ставка по кредиту, чтобы общая сумма всех выплат (включая проценты) превышала первоначальную сумму кредита на 19% ?

Решение.

Для решения задачи обозначим:

S_0 – искомая основная сумма кредита,

s – ежемесячная сумма выплат в счет погашения основной суммы кредита,

S_i – остаток задолженности после i –го месяца,

$p\%$ – ежемесячная процентная ставка по кредиту,

S – общая сумма всех выплат по кредиту.

Очевидно, по условию задачи:

$$s = \frac{S_0}{18}, \quad p = \frac{x\%}{12}, \quad S = 1,19S_0$$

Запишем остаток суммы основного долга по истечении каждого очередного месяца:

$$S_1 = S_0 - s = 17/18 \cdot S_0,$$

$$S_2 = S_1 - s = S_0 - 2s = 16/18 \cdot S_0,$$

$$S_3 = S_2 - s = S_0 - 3s = 15/18 \cdot S_0,$$

$$S_i = S_0 - is = (18 - i)/18 \cdot S_0,$$

$$S_{18} = S_0 - 18s = (18 - 18)/18 \cdot S_0 = 0.$$

Соответственно, процентные платежи равны:

$p/100 \cdot S_0$ — после первого месяца,

$p/100 \cdot S_1 = p/100 \cdot 17/18 \cdot S_0$ — после второго месяца,

$p/100 \cdot S_2 = p/100 \cdot 16/18 \cdot S_0$ — после третьего месяца,

$p/100 \cdot S_i = p/100 \cdot (18 - i)/18 \cdot S_0$ — после $(i + 1)$ — го месяца,

$p/100 \cdot S_{17} = p/100 \cdot (18 - 17)/18 \cdot S_0 = p/100 \cdot 1/18 \cdot S_0$ — после предпоследнего месяца (в последнем месяце кредитования).

Далее, запишем общую сумму выплат за весь период кредитования, который складывается из основной суммы S_0 и общей суммы процентов:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \frac{p}{100} \cdot S_0 + \frac{p}{100} \cdot \frac{17}{18} \cdot S_0 + \frac{p}{100} \cdot \frac{16}{18} \cdot S_0 + \dots + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{18} \cdot S_0 = \\ &= S_0 + \frac{p}{100} \cdot \frac{S_0}{18} \cdot (1 + 2 + \dots + 18) = S_0 + \frac{p}{100} \cdot S_0 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1 + 18}{2} \cdot 18 = \\ &= S_0 \left(1 + \frac{9,5p}{100} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} S &= S_0 \left(1 + \frac{9,5p}{100} \right) = 1,19S_0, \\ 1 + 0,095p &= 1,19, \\ 0,095 \cdot \frac{x}{12} &= 0,19. \end{aligned}$$

Получаем ответ:

$$x = 24\%.$$

Задача 6.3 (базовый уровень).

В банке был оформлен кредит в сумме 1 000 000 руб. под 10% годовых сроком на 6 лет. Какую сумму надо выплачивать в случае ежегодных аннуитетных платежей. На сколько, сумма ежемесячных оплат будет отличаться от выплат при дифференцированных платежах.

Решение.

Регулярная ежегодная сумма к оплате при условии $n = 6, k = 10\%$ и $S = 1000000$ руб. составит $\left(m = 1 + \frac{k}{100} = 1,1 \right)$

$$S = \frac{m^n(m-1)}{m^n-1} = \frac{1,1^6 \cdot 0,1}{1,1^6-1} \cdot 1000000 = 229607,38 \text{ руб.}$$

Ежемесячная сумма при равных платежах составит

$$x = \frac{S}{12} = \frac{229607,38}{12} = 19133,95 \text{ руб.}$$

и эта сумма превышает вычисленную в задаче 6.1 на величину:

$$\Delta x = 19133,95 - 18750 = 383,95 \text{ руб.}$$

Задача 6.4 (профильный уровень).

В банке был взят кредит 31 декабря сроком на 3 года по ставке 10% годовых. Договором предусмотрена следующая схема выплат:

–до 30 ноября каждого года начисляются проценты за весь этот очередной год на оставшуюся сумму, по задолженности на начало года;

–до 31 декабря каждого очередного года выплачивается одна и та же определенная сумма в счет погашения кредита.

Какой была сумма полученного кредита, если сумма ежегодного платежа (включая проценты) была одна и та же и составляла 1464100 рублей?

Решение.

Для решения задачи обозначим:

S_0 – искомая основная сумма кредита,

S_1, S_2, S_3, S_4 – остаток задолженности по основной сумме кредита по истечении 1-го, 2-го, 3-го и 4-го годов кредитования соответственно,

s – сумма ежегодной выплаты.

Очевидно, по условию задачи: $s = 1464100$, $S_4 = 0$.

Запишем остаток суммы основного долга по истечении каждого очередного года:

$$S_1 = 1,1S_0 - s,$$

$$S_2 = 1,1S_1 - s = (1,1)^2S_0 - 1,1s - s = (1,1)^2S_0 - 2,1s,$$

$$S_3 = 1,1S_2 - s = (1,1)^3S_0 - 1,1 \cdot 2,1s - s = (1,1)^3S_0 - 3,31s,$$

$$S_4 = 1,1S_3 - s = (1,1)^4S_0 - 1,1 \cdot 3,31s - s = 1,4641S_0 - 4,641s.$$

В результате получаем:

$$S_4 = 1,4641S_0 - 4,641s = 0,$$

откуда и следует ответ:

$$S_0 = \frac{4,641s}{1,4641} = \frac{4,641 \cdot 1464100}{1,4641} = 4641000 \text{ руб.}$$

Подведение итогов урока, задание на дом

Данное занятие было посвящено расширению знаний в сфере процентов и банковских платежей:

- представлена информация, на какие параметры необходимо обращать внимание при определении наиболее выгодных видов вкладов;
- показаны примеры расчёта процентов по долгосрочным вкладам с учетом капитализации к основной сумме вклада ранее начисленных процентных доходов;
- на практике произошло знакомство с методами составления графиков платежей по ссудам и особенностями исчисления процентов по кредитам.

Занятие полезно и в прикладном смысле. Каждый человек неоднократно сталкивается с необходимостью использования банковских услуг. Произведенные расчеты и сравнительный анализ показывают, насколько важно и нужно в обычной жизни свободно ориентироваться в процентах и уметь пользоваться приведенными вычислениями.

Приведем, для примера, два варианта домашних заданий по рассматриваемой теме.

Домашнее задание №1

а) По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 10 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

б) По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» – увеличивать эту сумму на 5 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Домашнее задание №2

а) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн. рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн. рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

б) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн. рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн. рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Как отмечалось выше, представляется, что технология обучения математике Р.Г. Хазанкина является наиболее оптимальной для обучения решению экономических задач. Одновременно с этим, использование современных компьютерных математических систем типа *Mathematica*, повысит эффективность используемой технологии.

2.3 Элективный курс «Экономические задачи в ЕГЭ по математике» для учащихся старших классов

На сегодняшний день, элективные курсы являются эффективным способом для достижения целей индивидуального самоопределения учащихся в их профессионально-личностном развитии.

Учащиеся свободно и самостоятельно выбирают направленность элективного курса. Соответственно, эти курсы не являются повторением основного учебного курса и предназначены для:

- стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся;
- развития их умственных возможностей;
- обучения алгоритмам универсальных учебных действий.

Помимо этого, с помощью предметных элективных курсов учащиеся:

- могут определиться со своей будущей специализацией и выбором вида профессиональной деятельности во взрослой жизни;
- продолжают получать знания в дополнение к основному курсу по выбранному направлению.

Элективные курсы дают возможность поддержать на высоком уровне изучение математики, как профильного предмета, и, помимо этого, они используются еще и для внутрипрофильной дифференциации учащихся.

Обучение с помощью элективных курсов требует разнообразных форм и методов обучения. При их выборе следует учитывать особенности структуры и содержания курса, равно как и общий уровень развития учащихся, их базовой подготовки, а естественный познавательный интерес к различным подразделам программы.

Приведем некоторые основные формы организации занятий элективного курса. К ним относятся:

- лекционные занятия;
- занятия в форме свободного обсуждения;
- дискуссии и полемика;

- соревнования групп учащихся, игры;
- индивидуальные занятия-консультации;
- практические занятия, посвященные решению задач;
- групповая и индивидуальная учебно-познавательная исследовательская деятельность;
- дистанционная поддержка;
- контрольные и зачетные занятия.

Дифференциация в обучении учащихся осуществляется путем подбора задач, состоящих из различных уровней сложности.

По завершении программы элективного курса учащиеся могут представить индивидуальные творческие работы по их выбору или иные работы в форме проектной деятельности, как каждым учащимся, так и группой учащихся. Само содержание элективных курсов по математике и, в том числе, по теме экономических задач обычно предполагает наличие некоторых компонентов:

- исторический материал, которому уделяется больше внимания, чем в основном учебном курсе по данному предмету;
- акцент на практическую работу, когда учащиеся самостоятельно ведут конспекты и получают навыки самостоятельной работы;
- индивидуальная и групповая работа с дополнительной литературой;
- использование компьютерных программ, интернет технологий, когда это необходимо, для решения поставленных задач;
- выступления перед группой, которые носят публичный характер и дают учащимся очень важный навык изложения материала в классе/аудитории.

Задачи, отбираемые для элективного курса, как правило, удовлетворяют нескольким принципам:

1. Принцип преемственности, когда новые задачи можно решить с помощью уже полученных знаний и навыков, а также используя взаимосвязь основного и элективного курсов.

2. Принцип связи теории с практикой, когда задачи являются логическим продолжением полученных теоретических знаний, одновременно являясь средством полноценного восприятия нового материала.

3. Принцип полноты, при котором в цепочках задач отражаются математические идеи, а также присутствуют примеры, носящие межпредметный характер.

4. Принцип контрастности, по которому задачи должны быть как с положительными, так и с отрицательными ответами, а также когда подбираются задачи, использующие различные виды знаний и не повторяясь.

5. Система задач должна предусматривать обучение эвристическим приемам, благодаря чему овладение методами научного познания происходит в процессе решения задач. В исследованиях по методике преподавания математики среди эвристических приемов наиболее часто встречаются:

- аналогия;
- индукция;
- прием элементарных задач;
- прием моделирования и другие.

6. Принцип формирования исследовательских умений, под которыми понимают вид учебно-познавательной деятельности, предполагающий выполнение учебных заданий с помощью самостоятельного творческого поиска новых знаний. В учебные исследования можно выделить следующие важные этапы:

- постановка проблемы;
- выдвижение гипотез;
- доказательство или опровержение гипотез.

Таким образом, элективные курсы позволяют развивать и формировать у учащихся:

- культуру логического мышления;
- разносторонние интересы;
- умение самостоятельно восполнять знания;
- общую математическую культуру;
- приобщают школьников к самостоятельной учебно-познавательной исследовательской деятельности;
- дают возможность познакомиться с некоторыми современными достижениями науки.

Помимо этого, они помогают раскрыться внутреннему потенциалу учеников, а также создают условия для их самореализации и развития. Элективные занятия дают шанс наиболее успешно применять индивидуальный подход к каждому школьнику, учитывая его способности, и более полно удовлетворить познавательные и жизненные интересы учащихся. В процессе разработки программы элективного курса по теме «Экономические задачи в ЕГЭ по математике» необходимо:

- определить цель курса и функцию курса в рамках изучаемого основного учебного курса по алгебре и началам анализа;
- установить отличия в содержании элективного курса от содержания основного курса алгебры;
- распределить программу курса по темам с выделением необходимого количества часов по каждой из них;
- гарантировать наличие для учащихся различных учебно-методических материалов;
- выделить основные виды учебно-познавательной деятельности учащихся, определить степень их самостоятельности;
- определить критерии успешного прохождения элективного курса;
- подготовит контрольные задачи и вопросы для проведения зачета и

контрольной работы.

Исходя из этого, при проведении занятий преподаватели должны:

- придать курсу, как привлекательное название, так и привлекательные формы проведения и достигаемые цели;
- избегать дублирования основной программы по алгебре и началам анализа;
- включать принципиально новые, нестандартные для учащегося знания, вызывающие у него познавательный интерес;
- заложить в программу элективного курса быстрый и эффективный путь получения знаний, используя уже пройденный материал;
- обеспечить синхронность содержания элективных курсов с установленными государственными стандартами образования;
- делать акцент на личностно-деятельностный подход в обучении, смещать акценты на формирование умений через активную самостоятельную деятельность учащихся.

Изучение темы экономических задач в старших классах, как правило, ограничивается задачами упрощенного содержания, даже если для их решения требуется сложный математический аппарат. Вместе с тем, изучение экономических задач представляет гораздо больший интерес с точки зрения нестандартных умений и навыков, приобретаемых учащимися, а также опыта решения широкого круга задач. Многообразие видов задач с экономическим содержанием позволяет полноценно учитывать уровневую дифференциацию учащихся, а для «продвинутых» учащихся предложить интересный элективный курс.

Подробное изучение данной темы представляется возможным в рамках элективного курса «Экономические задачи в ЕГЭ по математике». Представляется целесообразным проведение занятий в первой половине 11-го года обучения, после того как учащиеся получают основные базовые знания по

алгебре и началам анализа. Предлагается элективный курс из 9 занятий со следующим примерным тематическим планированием (таблица 4).

Таблица 4 – Содержание элективного курса

№ занятия	Тема
1	Арифметические задачи на проценты. Доли и пропорции. Приемы решения задач. Задачи на смеси, сплавы, процентное содержание.
2	Текстовые задачи на производительность труда и товарно-денежные отношения. Выручка, издержки, изменение цены. Типовые и нестандартные задачи.
3	Анализ данных, графиков, диаграмм и таблиц. Базовые понятия экономики: процент прибыли, стоимость товара, дефицит и профицит, изменение тарифов. Задачи на личное планирование, семейный бюджет
4	Промежуточное занятие. Вопросы и ответы по пройденному материалу, консультации, разбор задач.
5	Задачи, связанных с банковскими расчётами. Текстовые задачи на простые и сложные проценты по вкладам, депозитам, капитализацию процентов. Валютные операции и расчетно-кассовое обслуживание.
6	Текстовые задачи на дифференцированные и аннуитетные платежи. Страховые операции.
7	Элементы начал анализа и экономические задачи. Оптимизация и логический перебор. Задачи на оптимизацию и эластичность спроса и предложения.
8	Линейные и нелинейные целевые функции. Применение определенного интеграла для решения экономических задач.
9	Зачетное занятие. Контрольная работа в письменной форме.

Программное содержание на занятиях по данному элективному курсу предлагается сконструировать по следующему алгоритму:

- обобщение первоначальных знаний;
- изучение нового материала, которое, как правило, выходит за рамки школьного курса;
- организация практической учебно-познавательной деятельности учащихся по применению полученных знаний.

Цель данного элективного курса:

- углублении и расширение представлений и знаний обучающихся о

математическим способам решения задач с экономическим содержанием; изучение и приобретение навыков по решению экономических задач практического прикладного характера.

Для того, чтобы достичь поставленной цели, в процессе обучения следует решать следующие задачи:

- 1) обобщить и систематизировать знания учащихся по алгебре и началам анализа;
- 2) обучить использованию различных подходов к решению математических задач;
- 3) развивать интерес школьников к математике в целом;
- 4) обучить учеников применению аппарата начал анализа к решению экономических задач.

В качестве примера приведем конспект части занятия, посвященный целевым функциям.

Цели занятия:

1. Обучающая:

- формирование различных приемов мыслительной деятельности;
- включение новой информации в структуру прежних знаний;
- введение понятия целевой функции;
- анализ особенностей линейных и нелинейных целевых функций;
- представление основных методов решения задач.

2. Воспитательная:

- привитие интереса к предмету;
- формирование уверенности в своих знаниях;
- сформировать потребность в знании через показ взаимосвязи между науками и жизнью; через показ значимости математики как метода (языка) научного познания.

3. Развивающая:

- умение использовать теоретические знания при решении задач;

- развивать способность к анализу и обобщению полученных данных;
- развивать познавательный интерес к математике, расширять кругозор;
- применение полученных знаний в более сложных ситуациях.

Форма занятий и учебно-познавательной деятельности:

- занятия нацелены на новые знания, умения и навыки;
- на занятиях используется: индивидуальная и коллективная форма работы.

Методы, используемы на занятиях:

- объяснительно-иллюстративный;
- продуктивный.

Дидактический материал:

- школьные принадлежности;
- доска, маркеры;
- проектор, презентация «Линейные и нелинейные целевые функции».

План занятия по теме «Целевые функции»:

1. Организационный момент (1-2 мин).
2. Подготовительный этап и изучение нового материала (15-20 мин).
3. Решение задач (15-20 мин).

Задачи на целевые функции считаются более сложными по сравнению с другими экономическими задачами. В экзаменационных вариантах по математике они, как правило, требуют развернутого решения.

Такие задачи обычно вызывают значительные затруднения у очень многих выпускников, хотя, в большинстве случаев, их решение требует лишь последовательного выполнения известных действий, аккуратности и определённых вычислительных навыков.

Изучение нового материала

При изложении материала необходимо сделать основной акцент на составление целевых функций исходя из экономической сути задачи. В общем виде структура таких задач сводится к поиску наибольшего или наименьшего значения функции $f(x, y)$ если известно, что $g(x, y) = 0$. Помимо этого, могут быть наложены и другие условия, такие как, например, $x > 0$ или $y > 0$.

Следует разъяснить, что для правильного построения функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ необходимо внимательно подойти к тексту задания, скрупулезно и аккуратно записать эти функции.

С чисто математической точки зрения здесь учащиеся сталкиваются с функцией двух переменных $f(x, y)$, которая, с учетом условия $g(x, y) = 0$, сводится к функции одной переменной. Экстремальные значения этой функции можно определить, используя различные, уже известные учащимся, методы.

Приведем задачу с экономическим содержанием, которую можно решить различными способами, и которая наглядно иллюстрирует возможности математического аппарата с использованием свойств целевых функций.

Задача 7.1.

На двух предприятиях одной компании производится однотипная продукция, причем на первом заводе в количестве $6t$ единиц за $100t^2$ рабочих часов в неделю и на втором заводе в количестве $8t$ единиц за эти же $100t^2$ рабочих часов в неделю. Недельный фонд оплаты труда составляет 2 млн. руб. при фиксированной заработной плате одного рабочего на обоих предприятиях в 800 руб. в час. Найти максимально возможное количество продукции, которое можно произвести на обоих заводах в неделю.

Эта задача является типичной для различных вариантов, предлагающихся на ЕГЭ. Для ее решения на первом этапе переводим математическую формулировку задачи:

Найти наибольшее значение функции

$$f(x, y) = 6x + 8y$$

если известно, что $800 \cdot (100x^2 + 100y^2) = 2\,000\,000$

или

$$x^2 + y^2 = 25$$

Решение.

1-й способ.

Уравнение $x^2 + y^2 = 25$ задает на координатной плоскости окружность радиуса $|OK| = 5$ (рисунок 7). Тогда, задача сводится к нахождению такой точки окружности, для которой выражение $6x + 8y$ принимает максимальное значение.

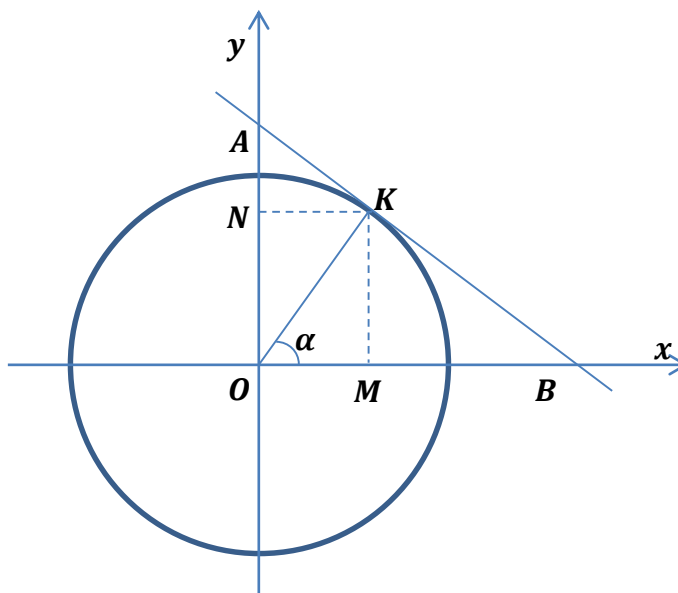


Рисунок 7 – Уравнение окружности на плоскости

Это означает, что надо найти максимальное a , для которого выполняется условие:

$$y = a - \frac{3}{4}x.$$

При такой постановке задачи учащиеся самостоятельно исследуют $\triangle OAB$ и приходят к выводу, что $a = |OA|$ и:

$$x_0 = |OM| = |OK| \cos \alpha = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3,$$

$$y_0 = |ON| = |OK| \sin \alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4.$$

Соответственно, требуемое значение:

$$f_{\max} = 6 \cdot x_0 + 8 \cdot y_0 = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 50.$$

2-й способ

Задача сводится к исследованию функции

$$F(x) = 3x + 4\sqrt{25 - x^2}.$$

Учащиеся используют знания из начал анализа и получают:

$$F'(x) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Максимальное значение $F(x)$ достигается при $x_0 = 3$ и приходим к такому же ответу:

$$x_0 = 3, \quad y_0 = \sqrt{25 - x^2} = 4, \\ f_{\max} = 50.$$

3-й способ

Обращаем внимание учащихся, что функция $F(x)$ представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{a}(3; \sqrt{25 - x^2})$ и $\vec{b}(x; 4)$.

Максимальное значение скалярного произведения достигается при сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, когда:

$$\frac{3}{x} = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{4} \Rightarrow x_0 = 3, \quad y_0 = \sqrt{25 - x_0^2} = 4.$$

Приходим к такому же ответу: $f_{\max} = 50$

4-й способ

Учитывая, что

$$y = a - \frac{3}{4}x,$$

получаем:

$$x^2 + y^2 = \frac{25}{16}x^2 - \frac{3}{2}ax + a^2 = 25$$

или

$$x^2 - \frac{24}{25}ax + \frac{16}{25}(a^2 - 25) = 0.$$

Учащиеся самостоятельно решают квадратное уравнение с параметром a и получают условие:

$$\left(\frac{12}{25}a\right)^2 - \frac{16}{25}(a^2 - 25) \geq 0 \Rightarrow a^2 \leq \frac{625}{16}.$$

Находим максимальное значение $a = \frac{25}{4}$

и получаем такой же ответ:

$$f_{\max} = 8a = 50.$$

Полученные решения не носит конкретного экономического содержания. Однако, многие экономические задачи сводятся именно к такой математической постановке вопроса. Поэтому важно, чтобы учащиеся хорошо усвоили подходы, рассмотренные при ее решении.

На завершающем этапе математическое решение переводим на «экономический язык»:

максимально возможное количество продукции достигается, когда первое предприятие производит $6x_0 = 6 \cdot 3 = 18$ единиц продукции, а второе предприятие – $8y_0 = 8 \cdot 4 = 32$ единиц, всего 50 ед.продукции.

Представляется, что данный элективный курс нацелен на достижение высокой эффективности в изучении основных методов решения экономических задач и способствует развитию познавательного интереса учащихся к другим разделам математики.

Содержание элективного курса «Экономические задачи в ЕГЭ по математике»

1. Доли и пропорции. Задачи на процентное содержание (2ч)

Цель занятия:

- актуализация знаний по долям и процентам, их обобщение;
- закрепление алгоритма решения задач на процентное содержание.

2. Текстовые задачи на производительность труда и товарно-денежные отношения (2ч).

Цель занятия:

- знакомство с основными экономическими понятиями: выручка, себестоимость, доход;
- решение типовых и нестандартных задач на производительность труда и эффективность производства.

3. Анализ данных, графиков, диаграмм и таблиц. Базовые понятия экономики (2ч).

Цель занятия:

- знакомство с базовыми понятиями процента прибыли, дефицита и профицита;
- решение задач на личное планирование и семейных бюджет.

4. Задачи, связанных с банковскими расчётами, валютными операциями и расчетно-кассовым обслуживанием (2ч).

Цель занятия:

- введение понятия расчетно-кассового обслуживания, особенности операций по вкладам и депозитам;
- решение задач на простые и сложные проценты, их капитализацию.

5. Кредитные операции. Текстовые задачи на дифференцированные и аннуитетные платежи. Страховые операции (2ч).

Цель занятия:

- знакомство с кредитными операциями, принципами работы кредитных карт и особенностями начисления процентов;
- решение задач на кредитование с применением систем аннуитетных и дифференцированных платежей, некоторые страховые операции.

6. Элементы начал анализа и экономические задачи. Оптимизация и целевые функции (4ч).

Цель занятий:

- актуализация знаний начал анализа и применение производной к решению задач на поиск экстремальных значений;

– решение задач на оптимизацию с использованием целевых функций, на применение определенного интеграла и решение ряда математических задач с экономическим содержанием.

Примеры тем проектов для учащихся в рамках элективного курса

«Экономические задачи в ЕГЭ по математике»

1. Личный финансовый план.

По материалам пособия: «Сборник математических задач «Основы финансовой грамотности». В 3 т. Т. 3 для 10–11 классов / Составители: Н.П. Моторо, Н.В. Новожилова, М.М. Шалашова. – Москва, 2019. – 82 с.»

2. Операции с акциями и векселями.

По материалам пособия: Шестаков С. А. ЕГЭ 2018. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. - М.: МЦНМО, 2018. - 208 с.

3. Различные методы решения экономических задач на оптимизацию.

По материалам пособия: Шестаков С. А. ЕГЭ 2018. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. - М.: МЦНМО, 2018. - 208 с.

4. Методы математического анализа, используемые в экономических задачах.

Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием. Учебно-методическое пособие. Под ред. Лысенко Ф.Ф. – Ростов на Дону: Легион, 2016 – 96 с.

Варианты контрольных заданий для учащихся в рамках элективного курса «Экономические задачи в ЕГЭ по математике»

Вариант 1

1. В течение некоторого срока цена принтера три раза снижалась на один и тот же процент. Первоначальная цена составляла 8000 руб. После третьего уменьшения цены она составила 5832 руб. На сколько процентов осуществлялось снижение цены каждый раз?

2. В мае месяце, 15 числа, был выдан кредит. В таблице 5 приведен график погашения. Текущий долг выражается в процентах от первоначальной суммы кредита.

Таблица 5 – График погашения кредита

Дата	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09	15.10	15.11
Текущий долг	100%	85%	70%	55%	40%	25%	0%

В конце каждого месяца, начиная с мая, текущий долг увеличивается на 6%, а выплаты по погашению кредита происходят в первой половине каждого месяца, начиная с июня. На сколько (в процентах) общая сумма выплат по кредиту превышает исходную самого кредита?

3. В банке 1 мая 2018 года открыт вклад под 10% годовых. Каждый год, начиная со следующего, 2 мая добавляется к вкладу сумма, равная первоначальному вкладу. Какую сумму (в рублях) добавлялась ежегодно, если 1 мая 2020 года на оказалось 306 306 руб.?

4. В некоторой фирме третья часть персонала работает в отделе управления, шестеро сотрудников – в отделе доставки, а остальные – в нескольких отделах, численность каждого из которых составляет $\frac{1}{4}$ от общей численности сотрудников фирмы. Определите количество различных отделов.

5. Кристина владеет двумя промышленными заводами, выпускающими одинаковую продукцию. На втором заводе установлено современное оборудование, поэтому на нем может быть выпущено больше единиц продукции. Известно, что если рабочие первого завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то выпускают $3t$ единиц продукции. А если рабочие второго завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то выпускают $6t$ единиц продукции. Ставка заработной платы рабочего составляет 700 рублей за час. Кристина готова платить рабочим 42 350 000 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции она может рассчитывать?

Вариант 2

1. В течение трех лет цена принтера три раза повышалась дважды, каждый раз на $r\%$. На сколько процентов надо уменьшить образовавшуюся цену, чтобы получить такую же цену, какой она была три года назад?

2. В июле планируется взять кредит на сумму 4 880 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть, за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть, за 2 года)?

3. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Укажите такое наименьшее целое число n , чтобы при ставке годовых $r\%$ (это значит, что в каждый последующий год сумма вклада увеличивается на $r\%$ по сравнению с предыдущим значением) через три года сумма вклада стала больше, чем первоначальная сумма вклада, увеличенная в 1,5 раза.

4. Был приобретен водный мотоцикл за 49 600 рублей. Затраты на катание на этом мотоцикле общей продолжительностью t минут составляют:

$$t^2 + 5t + 8.$$

Если брать за 1 минуту катания p рублей ($p > 5$), то за t минут катания будет прибыль $pt - (t^2 + 5t + 8)$ рублей. На базе отдыха есть возможность организовать катание такого количества отдыхающих, которое обеспечивает наибольшую прибыль. При каком наименьшем значении p база отдыха окупит затраты на покупку водного мотоцикла не более чем за 200 минут катания?

5. Зависимость объема Q товара от цены P выражается формулой

$$Q = 10000 - P, \quad 3500 \leq P \leq 9000.$$

Доход от продажи товара составляет $P \cdot Q$ рублей. Затраты на организацию продажи Q единиц товара составляют $2500 \cdot Q + 3500000$ рублей. Прибыль равная разности дохода от продажи товара и затрат на организацию его продажи. Стремясь привлечь внимание покупателей, руководство решило уменьшить стоимость товара на 20%, однако от этого прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Для того, чтобы апробировать экспериментальную программу, был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками теоретических основ для решения математических задач с экономическим содержанием.

Разработанная программа применялась на практике в период с 15 января 2020 года по 11 марта 2020 года. Программа и соответствующая технология проведения занятий была рассчитана на 18 часов (2 часа в неделю) для учащихся старших классов (в данном случае, 11 класса).

Апробация экспериментальной программы «Экономические задачи в ЕГЭ по математике» осуществлялась на базе одной из школ города Москвы профильной направленности. Ответственной за апробацию была назначена Роянцева С. А., учитель алгебры и геометрии.

В апробации были задействованы учащиеся 11 «А» класса, изъявившие желание получить базовые и дополнительные знания в рамках экспериментальной программы «Экономические задачи в ЕГЭ по математике».

В основу курса были взяты учебники по алгебре и началам математического анализа для 10 и 11 класса авторского коллектива С.М.

Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. В данных учебниках приведены все основные разделы, необходимые для усвоения данной темы, а также необходимые начальные знания как для учащихся базовой школы, так и для профильных школ или для классов с углубленным изучением математики.

Для преподавателей, участвующих в апробации, предоставляется информация о дополнительном материале, который был использован при составлении экспериментальной программы.

Это и теоретический материал, и пособия, в которых представлены задачи по изучаемой теме.

В нижеследующей таблице представлен фактический план занятий по экспериментальной программе «Экономические задачи в ЕГЭ по математике». В рамках программы было проведено девять занятий по 2 академических часа каждое (таблица 6).

Таблица 6 – Тематическое планирование элективного курса

№ занятия	Тема	Дата
1	Повторение материала, изученного ранее. Арифметические задачи на проценты. Доли и пропорции. Приемы решения задач. Задачи на смеси, сплавы, процентное содержание.	15.01.2020
2	Текстовые задачи на производительность труда и товарно-денежные отношения. Выручка, издержки, изменение цены. Типовые и нестандартные задачи.	22.01.2020
3	Анализ данных, графиков, диаграмм и таблиц. Базовые понятия экономики: процент прибыли, стоимость товара, дефицит и профицит, изменение тарифов.	29.01.2020
4	Задачи, связанных с банковскими расчётами. Текстовые задачи на простые и сложные проценты по вкладам. Векселя, акции и банковские инструменты.	05.02.2020
5	Промежуточное занятие. Вопросы и ответы по пройденному материалу, консультации, разбор задач.	12.02.2020
6	Текстовые задачи на дифференцированные и аннуитетные платежи. Страховые операции.	19.02.2020
7	Элементы начал анализа и экономические задачи. Оптимизация и логический перебор. Задачи на оптимизацию и эластичность спроса и предложения.	26.02.2020
8	Линейные и нелинейные целевые функции. Применение определенного интеграла для решения экономических задач	04.03.2020
9	Зачетное занятие. Контрольная в письменной форме.	11.03.2020

Первая часть в каждом занятии была посвящена теоретическому материалу и проводилась в лекционной форме. Вторая часть проводится в форме практического занятия и посвящена анализу предыдущего домашнего задания, а также решению типовых задач в рамках нового материала текущего занятия.

На констатирующем этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования были заданы следующие вопросы:

1. Какие темы Вам представляются наиболее сложными для учащихся?
2. Считаете ли Вы обоснованным разделение тем с учетом уровневой дифференциации учащихся?
3. Как следует перераспределить темы между занятиями для лучшей усваиваемости?
4. Насколько следует изменить комплекс задач для домашних заданий?
5. Наблюдается ли Вы повышение интереса у обучающихся по ходу занятий?
6. Какие общие рекомендации по улучшению элективного курса Вы можете дать?

В целом, преподаватели отметили живой интерес учащихся (около 80%) к обобщающим занятиям в рамках данной программы. Наиболее сложными оказались темы №4 и №8, уровень правильного решения задач по эти темам оказался не очень высоким (примерно 50%). Преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

Учащимся, по завершении обучения на констатирующем этапе экспериментальной работы были заданы следующие вопросы:

1. Были ли лекционные занятия интересны для Вас?
2. Что на практических занятиях Вам давалось более легко?

3. Какой материал вызвал у Вас наибольшее затруднения?
4. Какой материал оказался наиболее интересным? Что было для Вас более «скучным»? По какой причине?
5. При решении, какого типа задач можно применить полученные во время курса знания?
6. Считаете ли Вы полезным для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?

Результаты показали, что учащиеся посчитали курс интересным и познавательным для себя (около 85%). Как и преподаватели, учащиеся испытывали затруднения в изучении тем №4 и №8 (примерно 60%).

Целью поискового этапа проведенного исследования состояла в апробации конкретного теоретического материала и ряда типовых задач в рамках экспериментальной программы.

В результате данного этапа экспериментального исследования была разработана система задач и домашних заданий по теме «Экономические задачи в ЕГЭ по математике» для учащихся 11 классов в рамках углубленной программы общеобразовательной школы.

Представим результаты контрольной работы по вариантам, приведенные в предыдущем параграфе (таблица 7).

Таблица 7 – Результаты контрольной работы

Номер задания	Решили правильно	Решили неправильно	Не приступали к решению
1	80%	20%	0%
2	70%	30%	0%
3	65%	35%	0%
4	40%	40%	20%
5	25%	45%	30%

Как видно, наибольшие затруднения у учащихся вызывают задания, требующие использования знаний начал анализа и для решения которых нужен своего рода «творческий» подход.

Одновременно отметим, что большинство учащихся успешно овладели знаниями по банковским процентам.

Приведем типичные ошибки учащихся (таблица 8) и количественный анализ результатов (таблица 9).

Таблица 8 – Анализ типичных ошибок учащихся

№ задания	Неверный выбор способа решения	Неверное использование формул	Ошибка в вычислениях
1	0%	0%	20%
2	0%	10%	20%
3	0%	15%	20%
4	15%	15%	10%
5	25%	10%	10%

Таблица 9 – Качественный анализ результатов контрольной работы

Оценка	Количество учащихся
5	10%
4	35%
3	45%
2	10%

Выводы по второй главе

1. Изложенные выше подходы к системе экономических задач позволяют сделать выводы о получаемых учащимися знаниях, и личностных ориентирах. К ним относятся:

- развитие умений к логическим рассуждениям;
- формирование способностей выявлять закономерности;
- освоение эвристических приемов;
- формирование интеллектуальных умений, в том числе, выбор стратегии решения задач, анализ и сопоставление данных;
- индивидуализация учебно-познавательной активности;
- привлечение учащихся к групповой деятельности и обмену своими предложениями в ходе свободного общения на занятиях.

2. Можно выделить следующие универсальные учебные действия, которые усваивают учащиеся: анализ текста задачи и выработка оптимального

пути решения; моделирование изложенных ситуаций в тексте задачи; способность к воспроизводству решения задачи; анализ отдельных этапов при решении задач и их применение в смежных учебных дисциплинах; объяснение и доказательство способа действия при решении задач.

3. Предложенная программа элективного курса по теме «Экономические задачи в ЕГЭ по математике» являются важным инструментом формирования предметных компетенций учащихся и предопределения их профессиональной ориентации в будущем. Для творческой познавательной активности необходимы нетрадиционные по содержанию занятия. Приведены различные виды математических задач с экономическим содержанием. Рассмотрен план занятия по теме целевых функций, приведены конкретные упражнения. Для успешного усвоения понятий при изучении новой темы предполагается применять объяснительно-иллюстративный и конкретно-индуктивный методы.

Заключение

Изложение материала с использованием предлагаемой схемы введения основных экономических понятий – это процесс, подталкивающий учащегося к самостоятельной работе по изучению темы и к развитию мышления для поиска требуемого решения прикладных задач. Подталкивание учащегося к выбору наиболее рационального способа решения является главным фактором для развития навыков логического мышления. Тематика экономических задач, сама по себе, является инструментом, с помощью которого, в первую очередь, решаются многие проблемы математического характера, и который способствует расширению кругозора у учащихся, что является очень важной задачей.

Анализ работ и практики введения экономических понятий при обучении школьников математике свидетельствуют о том, что многие направления исследований ориентированы на то, чтобы как можно больше задействовать интуицию школьников и наглядность. В изученных работах незначительно затронуты вопросы обучения решению математических задач с экономическим содержанием с позиции их пропедевтики. Что и объясняет направление данной работы.

Суть методических рекомендаций по изучению экономических задач заключается в следующем:

- выписать основные понятия, входящие в тему;
- выявить те из них, для введения которых необходима пропедевтическая работа;
- спроектировать систему задач и заданий для включения их в базовый и элективный курсы математики;
- определить линию введения основных понятий темы;
- спроектировать систему заданий для освоения основных понятий;
- спроектировать систему диагностических и корректирующих заданий;

- спроектировать самостоятельную работу учащихся;
- спроектировать систему контролирующих заданий.

Анализ заданий ЕГЭ показывает, что они ориентированы на значительное понимание выпускником основных экономических понятий, изучаемых в школьном курсе алгебры. Это требует систематичности разбора различных ситуаций, возникающих в задачах. Программа элективного курса включает задачи, концепцию по решению задач и описание способов его реализации (технологии). Проект обладает свойством воспроизводимости.

По результатам проведённого педагогического эксперимента можно сказать следующее: изучение задач по теме данной работы необходимо предварять пропедевтической работой, предполагающей расширение кругозора учащихся в сфере повседневных экономических вопросов.

Изучение собственно материала по математическим задачам с экономическим содержанием необходимо продолжать и вне пройденной темы, то есть доводить умения до навыка использования полученных знаний для практического решения вопросов, носящих повседневный характер.

В целом, практическая апробация разработанного проекта и соответствующего элективного курса показала его эффективность для достижения поставленных целей.

В работе рассмотрены различные методы и способы развития творческой активности и учебно-познавательной деятельности старшеклассников на занятиях математики. Все поставленные задачи разрешены, и цель данной работы достигнута.

Список используемой литературы

1. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: в двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; Подред. А.Г. Мордковича. - 5-е изд. - М.: Мнемозина, 2014. - 432 с.
2. Алгебра и начала анализа: учебник для 10 кл. общеобразоват. учреждений/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. - М.: Просвещение, 2014. - 464 с.
3. Алгебра и начала анализа: учебник для 11 кл. общеобразоват. учреждений/ С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. - М.: Просвещение, 2014. - 469 с.
4. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: базовый и углубл. уровни / Ш. А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – М.: Просвещение. – 2016. – 464 с.
5. Баврин И.И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике: кн. для учащихся: 10-11 кл. — 2-е изд. / И.И. Баврин. — М.: Просвещение, 2000. — 80 с.
6. Беляева Э.С. Система факультативных курсов «Математические методы в экономике»: автореф. дисс. канд. пед. наук. - М., 1973. - 25 с.
7. Бурмистрова Н.А. Обучение студентов моделированию экономических процессов при реализации интегрированной функции курса математики в финансовом коллеже: дисс. канд. пед. наук. – Омск, 2001. - 196 с.
8. Васильева Г.Н. Методические аспекты деятельностного подхода при обучении математике в средней школе / Г.Н. Васильева. – Пермь, 2009. – 136 с.
9. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г. Производная и интеграл: пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1996.
10. Виленкин Н. Что такое производная / Н. Виленкин, А. Мордкович // Квант. – 1975. – № 12. – С. 10–18.

11. Волошинова А. Интернет-ресурсы для учителя математики // Математика / Еженед. учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». -2008.- №15.- с. 17-18.
12. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. -М.: ООО «Изд-во «Вербум- М», «Издат. центр «Академия», 2003. - 432с.
13. Данильчук Е.В. Информационная культура педагога: методологические предпосылки и сущностные характеристики / Е.В. Данильчук // Педагогика. - 2003. - № 1. - С. 65-73.
14. Данкова И.Н. Предпрофильная подготовка учащихся 9 классов по математике: Общие положения, структура портфолио, программы курсов, сценарии занятий / Данкова И. Н., Бондаренко Т. Е. и др. — М.: «5 за знания», 2006. — 128 с.
15. Денищева Л.О., Краснянская К.А. Профильный экзамен по математике // Оценка качества образования. - 2007. - №1 - с.41-47.
16. Депман И.Я. История арифметики: пособие для учителя. — М.: Учпедгиз, 1959. — 422 с.
17. Дорофеев Г. В., Седова Е. А. Процентные вычисления: учебное пособие для старшеклассников. — СПб: Специальная Литература, 1997. — 112 с.
18. Кипнис И.М. Задачи на составление уравнений и неравенств.— М.: Просвещение, 1989.
19. Клименкова О.А. Реализация межпредметных связей экономики и математики в средней школе (на примере факультативного курса «Производная в экономике и математике»): дисс. канд. пед. наук. - М., 2003. - 144 с.
20. Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под ред. А.Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 2005.
21. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике, ч.1 — М.: Просвещение, 1997 — 237с.

22. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике, ч.2. - М.: Просвещение, 1997 – 237с.
23. Коротченкова А.А. Межпредметные связи математики и информатики при подготовке специалиста экономического профиля: дисс. канд. пед. наук.-М., 2001.- 155 с.
24. Луканкин Г.Л., Хоркина НА. Начала математического анализа в классах экономического профиля: Алгебра в средней школе / Г.Л. Луканкин, Н.А. Хоркина // Математика в школе. — 2002. — №8. — С. 45-50.
25. Лысенко Ф. Ф. Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием: учебно-методическое пособие / под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Изд. 3-е., перераб. и доп. — Ростов-на-Дону: Легион, 2017. — 112 с.
26. Международное исследование качества математического и естественнонаучного образования. Гуманитарная энциклопедия: Исследования [Электронный ресурс] // Центр гуманитарных технологий, 2006–2020. URL: <https://gtmarket.ru/research/timss/info>.
27. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 1: учебник для академического бакалавриата / под ред. Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. - М.: Издательство Юрайт, 2018. - 274 с.
28. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб.пособие / под ред. Ю.М. Колягина и Н.И. Мерлиной. - Чебоксары: Изд-во Чуваш.ун-та, 2009. — 732 с.
29. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб.пособие для студентов пед. ин-тов / А.Я. Блох, Е. С. Канин, Н.Г. Килина и др.; Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. — М.: Просвещение, 1985. — 336 с.
30. Мордкович А. Г., Смышляев В. К. Алгебра и начала анализа: Пробный учебник для 9-10 классов средней школы. - М.: Просвещение, 2001.
31. Нателаури, Н. К. Методика решения задач с экономическим содержанием на факультативных занятиях по математике в старших классах средней

- школы с использованием вычислительного эксперимента: дисс. канд. пед. наук. / Н.К. Нателаури. - М., 2004.
32. Никаноренков Д.В. Применение информационных технологий при обучении студентов педвуза разделам прикладной экономики: Автореф. дисс. канд. пед. наук. - СПб., 2003. - 18 с.
33. Никонова Е.Ю. Особенности содержания математического образования учащихся классов экономического направления: дисс. канд. пед. наук. - М., 1995.-233 с.
34. Ожерельев Д.В. Методика решения задач с экономическим содержанием при изучении алгебры в основной школе с применением компьютерных технологий обучения: дисс. канд. пед. наук. / Д.В. Ожерельев — М.: 2004. — 187 с.
35. Панькова А.В. «Методика обучения решению задач с экономическим содержанием на занятиях по математике в общеобразовательной школе с использованием среды *Mathematica*»: дисс. канд. пед. наук. / Елабуга, 2008. – 169 с.
36. Петров В.А. Элементы финансовой экономики на уроках.// Математика в школе. – 2002. - №8.
37. Прояева Н.В., Колобова А.Н. «Особенности изучения задач с экономическим содержанием в школьном курсе математики» / Мир науки, культуры, образования.- № 3. – 2019. – с.175-177.
38. Репьев В. В. Общая методика преподавания математики: пособие для педагогических институтов. — М.: Учпедгиз, 1958, — 224 с.
39. Рябоконева Л.Д. Особенности содержания и методики преподавания математики в классах экономического профиля: дисс. канд. пед. наук. — Омск: 1999.-191 с.
40. Савицкая Е.В., Серегина С.Ф. Уроки экономики в школе. – М.: ВитаПресс – 2008 – 448 с.
41. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2005. - 255 с.

42. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / под ред. М.И. Сканави. – 6-е изд. – М.: Изд-во «ОНИКС – ЛИТ». - 2013 – 608 с.
43. Сборник математических задач «Основы финансовой грамотности», в 3-х т., т. 3 для 10–11 классов / Составители: Н.П. Моторо, Н.В. Новожилова, М.М. Шалашова. – Москва, 2019. – 82 с.
44. Симонов А.С. Математические модели экономики в школьном курсе математики: дисс. докт.пед. наук. Тула, 2000. - 328 с.
45. Смирнова И. М. Критерии отбора содержания математических курсов по выбору. / И. М. Смирнова // Наука и школа. — 2014. — № 3. — с. 7–13.
46. Спивак А.В. Математический праздник. – М.: Бюро Квантум, 2004 – 290с.
47. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Базовый уровень, <http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19814>.
48. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Профильный уровень, <http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19812>
49. Столяр А. А. Методы обучения математике. - Минск: Высшая школа, 1996.
50. Темербекова А.А., Чугунова И.В., Байгонакова Г.А. Методика обучения математике: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2013. – 365с.
51. Тумайкина М.Ю. Задачный подход в реализации прикладной экономической направленности обучения математике: дисс. канд. пед. наук: 13.00.02 / М.Ю. Тумайкина. - Новосибирск, 2000. — 2007 с.
52. Уладиева Е.С. Отдельные аспекты методики обучения решению экономических задач в углубленном курсе математики общеобразовательной школы //Вестник магистратуры. - 2020. - №5-1 (104). - С.53-56.
53. Унт Э.И. Индивидуализация и дифференциация обучения. – М.: Педагогика, 1990. – 192с.
54. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – М.: Омега-Л, 2014. – 134 с.

55. Федеральный государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. URL: <https://fgos.ru/>.
56. Фирсова М.М. Урок решения задач с экономическим содержанием.// Математика в школе. – 2002 – №8.
57. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. - М.: Московский психолого-соц. ин-т; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 1999. - 240 с.
58. Фунтиков Р. А. Методика проведения курса по выбору «Решение задач с экономическим содержанием» для учащихся 10-го класса // Молодой ученый. – 2018 – №34 – с.119-123.
59. Хоркина Н.А. Методические особенности учащихся классов экономического профиля на факультативных занятиях по математике на основе реализации межпредметных связей: дисс. канд. пед. наук. -М., 2002. -202 с.
60. Шабунин М.И. Математика: пособие для поступающих в вузы / М.И. Шабунин. – 8-е изд., электрон. – М.: Лаборатория знания, 2020. – 747 с.
61. Шевкин А.В. Текстовые задачи по математике: 7–11 классы. – М.: ИЛЕКСА. – 2011, 208 с.
62. Шестаков С. А. ЕГЭ 2018. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2018. — 208 с.
63. Шихова Н. А. Задачи с экономическим содержанием. — М.: ИЛЕКСА, 2018. — 97 с.
64. <https://muravins.ru/> Сайт авторов УМК по математике для 1-11 классов Г.К.Муравина и О.В.Муравиной
65. DATA TO IMPROVE EDUCATION WORLDWIDE. Исследования. [Электронный ресурс] URL: <http://www.timss.org/>.
66. K.A. Stroud, Dexter J. Booth. Foundation Mathematics / Palgrave Macmillan, London – 2009 – p.320.
67. Joanne Lockwood, Richard Aufmann. Introductory and Intermediate Algebra: An Applied Approach / Brooks Cole – 2013 – p.293.

68. MargueriteClarke. Девять выводов, сделанных по результатам Международного мониторингового исследования качества школьного математического и естественнонаучного образования. [Электронный ресурс] // URL: <https://blogs.worldbank.org/ru/voices/nine-takeaways-2015-trends-international-math-and-science-study-results>.
69. Matt Parker. The Maths Book: Big Ideas Simply Explained / DK. – 2019 – р.307.