

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Методика обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в курсе геометрии общеобразовательной школы»

Студент

О.В. Стогова

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент, С.Ш. Палферова

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Методические основы обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел.....	10
1.1 Основные цели и задачи обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в школьном курсе геометрии	10
1.2 Содержательно-методический анализ теоретического материала по теме «Объемы круглых тел»	13
1.3 Типология задач на вычисление объемов круглых тел и основные методы и приемы их решения.....	17
1.4 Технология обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел	26
Глава 2 Практическая реализация методики обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел.....	35
2.1 Методическая схема обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел	35
2.2 Элективный курс «Объемы круглых тел в задачах»	44
2.3. Педагогический эксперимент и его результаты	75
Заключение	79
Список используемой литературы	80

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

В условиях быстрого внедрения в повседневную жизнь современных технических новинок и, в том числе, новинок 3D–технологий, повышается значимость формирования у учащихся правильных представлений о пространственных объектах и развития у них пространственного воображения.

Хотя формирование пространственных представлений не является исключительной прерогативой геометрии, традиционно именно при изучении этого предмета вырабатываются основы пространственного мышления.

Вместе с этим, среди требований к предметным результатам освоения курса математики ФГОС среднего (полного) общего образования среди прочих к результатам освоения школьного курса геометрии можно отнести следующие:

- сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать реальные процессы и явления;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;
- сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;
- применять изученные свойства геометрических фигур и формулы для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием [55].

Перечисленные выше требования к предметным результатам освоения курса математики ФГОС среднего (полного) общего образования находят свое отражение в том числе при изучении старшеклассниками темы «Тела вращения».

Изучение тел вращения весьма значимо как в качестве инструмента для развития пространственного мышления, так и в качестве предмета для

глубокого изучения правильных форм геометрических тел, имеющих общие свойства и подчиненных общим закономерностям по изучаемым предметам естественнонаучной направленности в старшем звене школы.

Тема о телах вращения и способах решения задач на вычисление объемов круглых тел является обязательной к изучению и задачи по данной теме включены в задачный материал ЕГЭ.

Тема «Объёмы круглых тел» является одной из самых сложных в стереометрии. В современных учебниках тема раскрыта достаточно подробно, но возникает сложность в методике обучения учащихся для эффективной подготовки к итоговой аттестации при ограниченном времени для изучения данной темы. Повышение эффективности обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел обучающихся 11-х классов зависит от методики обучения и от подбора системы задачного материала.

Среди научных и учебно-педагогических работ, посвященных проблемам обучения геометрии, прослеживается ряд направлений:

- изучение геометрии в средней школе на основе фузионистской концепции [19];
- обучение геометрии в старших классах школы с использованием компьютера [16];
- учёт профильной и уровневой дифференциации при обучении [36];
- обучение старшеклассников рефлексивному исследованию задач [33].

Несмотря на достаточно подробное изучение вопроса, потребность в новых методологических подходах к преподаванию темы решения задач на объёмы круглых тел сохраняет свою актуальность [64].

Актуальность и научная значимость исследования обусловлена:

- требованиями ФГОС основного общего образования к реализации деятельностного подхода к обучению математике;

– требованиями современной действительности к формированию у учащихся пространственного воображения;

– недостаточной разработанностью методики обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел обучающихся 11-х классов для повышения качества их знаний по математике [55].

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени **противоречиями** между необходимостью формирования предметных знаний и умений и недостаточным количеством часов, отводимых на изучение геометрии в школе.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования**: каковы методические особенности обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в курсе геометрии общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения геометрии в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей при обучении учащихся 11-ых классов общеобразовательных школ решению различных типов задач, предполагающих вычисление объемов круглых тел.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что разработанные методические материалы, учитывающие методические особенности обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в курсе геометрии общеобразовательной школы, будут способствовать повышению качества математической подготовки.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Выделить основные цели и задачи обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в школьном курсе геометрии.
2. Провести содержательно-методический анализ теоретического материала по теме «Объемы круглых тел».
3. Проанализировать типологию задач на вычисление объемов круглых тел и основные методы и приемы их решения.
4. Провести анализ технологий обучения и выбрать технологию обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел.
5. Предложить методическую схему обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел.
6. Разработать элективный курс по обучению решению задач на вычисление объемов круглых тел.
7. Провести педагогический эксперимент и описать его результаты.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы В.А. Гусева [12], В.И. Мишина [30], Ю.М. Колягина [26], М.И. Шабунина [61], Г.И. Саранцева [42].

Базовыми для настоящего исследования являются Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 30.12.2015 г.) «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями, вступающими в силу с 01 июля 2016 г.) [56]; ФГОС [55], а также диссертационные исследования А.А. Гавришко «Методика обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы» [10]; И.А. Лыхина «Методика изучения темы «Тела вращения» в старшей школе [29].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ научной, научно-исследовательской и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; наблюдение за учащимися; анализ результатов опытно-экспериментальной работы по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2018-2019 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме;

2 семестр (2019-2020 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации;

3 семестр (2019-2020 уч.г.): определение методических основ исследования по теме диссертации; подбор системы задач для подготовки элективного курса;

4 семестр (2020-2021 уч.г.): разработка элективного курса «Объемы круглых тел в задачах»;

5 семестр (2020-2021 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Московская область, г.о. Балашиха, МАОУ «Гимназия №1».

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем предложены методические особенности обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в курсе математики старших классов общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- проведен анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования;
- выявлены методические особенности обучения теме решения задач на вычисление объемов круглых тел;
- приведена типология задач на вычисление объемов круглых тел.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны:

– методические рекомендации по обучению решению задач на вычисление объемов круглых тел;

– рабочая программа элективного курса «Объемы круглых тел в задачах».

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивались: сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических рекомендаций по разработке программы элективного курса «Объемы круглых тел в задачах», проведении педагогического эксперимента с обучающимися 11«а» класса, описание результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. *Экспериментальная проверка* предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе МАОУ «Гимназия №1» (Московская область, г.о. Балашиха). *Теоретические выводы и практические результаты* исследования представлены на XI Международной научно-методической конференции «Совершенствование математического образования – 2020: состояние и перспективы развития» (ноябрь, 2020 г., г. Тирасполь); в пяти публикациях [48, 49, 50, 51, 52].

Результаты исследования обсуждались учителями на заседании кафедры математики МАОУ «Гимназия №1» (Московская область, г.о. Балашиха).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению теме решения задач на вычисление объемов круглых тел.

2. Типология задач, предлагающихся в курсе математики общеобразовательной школы по теме данной работы.

3. Предложения по организации элективного курса «Объемы круглых тел в задачах».

4. Результаты педагогического эксперимента по практической апробации элективного курса.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 24 рисунка, 11 таблиц, список используемой литературы (74 источника). Основной текст работы изложен на 87 страницах.

Глава 1 Методические основы обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел

1.1 Основные цели и задачи обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в школьном курсе геометрии

При изучении темы «Объёмы круглых тел» полученные учащимися из повседневной жизни сведения о цилиндре, шаре, конусе синтезируются, логически оформляются, систематизируются. При этом требования к знаниям и умениям учащихся при изучении темы «Объёмы круглых тел» на базовом и углубленном уровне по ФГОС различаются глубиной и объемом изучения материала (таблица 1).

Таблица 1 – Сравнение требований к знаниям и умениям учащихся при изучении темы «Объёмы круглых тел» по ФГОС на базовом и углубленном уровне [55].

Базовый уровень	Углубленный уровень
Формулировать определения цилиндра, конуса, шара и их элементов. Распознавать круглые тела на моделях и чертежах, указывать их элементы. Изображать круглые тела. Решать задачи на нахождение элементов цилиндра, конуса, шара. Формулировать определения движения и равенства фигур в пространстве. Приводить примеры равных пространственных фигур. Формулировать определения центральной, осевой и зеркальной симметрий. Указывать элементы симметрии круглых тел. Приводить примеры симметричных объектов в окружающем мире. Понимать понятие объёма, формулировать его свойства. Решать задачи на нахождение объёмов круглых тел [55].	<i>В дополнение к базовому уровню:</i> Формулировать определения параллельного переноса. Приводить примеры подобных пространственных фигур. Иметь представление об ориентации плоскости и листе Мёбиуса. Выполнять проекты, связанные с телами вращения и симметрией круглых тел. Выводить формулы объемов цилиндра, конуса, шара. Выполнять проекты, связанные с нахождением объемов круглых тел [55].

Наиболее важный этап при разработке любой технологии – это определение системы целей. Согласно различиям в требованиях к знаниям и умениям учащихся при изучении темы «Объемы круглых тел» также различаются цели обучения на базовом и углубленном уровне (таблица 2).

Таблица 2 – Сравнение целей обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел по ФГОС на базовом и углубленном уровне [55]

Базовый уровень	Углубленный уровень
– научить видеть примеры круглых тел в окружающем мире, – сформировать пространственное воображение, в том числе, умения к корректному изображению пространственных объектов, круглых тел, – научить геометрически правильным построениям, систематизировать знания о свойствах круглых тел, – привить умения, навыки по применению вычислений объемов круглых тел при решении практических задач из реальной жизни.	– сформировать навыки по распознаванию в реальном мире круглых тел и применения свойств для решения задач с практическим содержанием на вычисление объемов круглых тел, – сформировать понимание в необходимости проведения доказательств и логических обоснований при проведении математических преобразований при решении задач на вычисление объемов круглых тел, – сформировать осознание логики основных понятий, теорем, свойств и формул при изучении круглых тел и развивать навыки по их применению при решении задач на вычисление объемов круглых тел, – выработать умения по проведению доказательств на каждом этапе решения задач и нахождению ответов для нестандартных задач на вычисление объемов круглых тел.

Для достижения целей обучения теме «Тела вращения» учителям приходится адаптировать научные постулаты к реалиям процесса преподавания.

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования [55] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления [55];

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений [55];

3) овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений [55];

4) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах [55].

Таким образом, основными задачами методики преподавания математики, в том числе темы «Тела вращения», являются:

- планирование конкретного содержания процесса обучения в соответствии с поставленными целями;
- выявление наиболее оптимальных методов, форм и приемов, которые в ходе обучения будут приводить к достижению поставленных целей;
- определение конкретных целей при изучении темы, в том числе, с учетом уровневой дифференциации;
- определение необходимых визуально-прикладных средств, которые способствуют лучшему усваиванию материала и разработка конкретных рекомендаций по их использованию в практике преподавания.

1.2 Содержательно-методический анализ теоретического материала по теме «Объемы круглых тел»

При изучении темы объемов круглых тел, в первую очередь, нужно понимать определение объема тела. Также нужно знать, что такое круглые тела, и их виды.

Круглым телом или телом вращения называется тело, полученное в результате вращения некоторой фигуры (обычно плоской) вокруг прямой. Эта прямая называется осью вращения [54].

Основными видами круглых тел являются конус, цилиндр и шар.

Известную сложность представляет преподавание вопросов по теме «Тела вращения», предусматривающих хорошие знания по алгебре и началам анализа. Это важно, например, при вычислении экстремальных значений некоторых величин для вписанных и описанных тел.

В таблице 3 представлен анализ учебников по геометрии для учащихся 10-11 классов разных авторов в контексте последовательности изложения материала темы «Тела вращения» и «Объемы круглых тел».

Модернизация образования предполагает учет уровневой и профильной дифференциации в процессе обучения. С этой точки зрения методика обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел должна предусматривать возможность получения для наиболее подготовленных групп учащихся знаний углубленного уровня даже при получении базового образования.

Содержание материала по теме вычисления объемов круглых тел на базовом и углубленном профильном уровне различаются. Анализ различий представлен в таблице 4.

Проведем содержательный анализ материала по теме вычисления объемов круглых тел на примере ряда учебных пособий и представим его результаты в таблице (таблица 5).

Таблица 3 – Анализ учебников разных авторов по теме исследования

Л.С. Атанасян[5]	А.В. Погорелов[36]	И.Ф. Шарыгин [62]	И.М. Смирнова [46]
Раздел «Тела вращения», последовательность тем			
«понятие цилиндра; понятие конуса; усеченный конус; сфера и шар» [5] (16 часов).	«тела вращения: цилиндр, конус, шар; сечения тел вращения; понятие тела в геометрии» [36] (14 часов).	«понятие тела вращения; телавращения» [62] (10 часов)	«сфера и шар; цилиндр, конус; фигуры вращения; симметрия пространственных фигур; элементы симметрии круглых тел; примеры симметрии окружающем мире» [46].(25 часов)
Раздел «Объемы», введение понятия объема, последовательность тем			
«Каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов...» [5]. «Введение понятие объема тела; отношение объемов подобных тел; объем: цилиндра, конуса, шара» [5] (17 часов).	«Величина ограниченного тела характеризует его объем...» [36]. «Введение понятие объема тела; объем подобных тел; объем цилиндра, конуса, усеченного конуса; шара, шарового сегмента и сектора» [36](27 часов).	«Объем – это положительная величина, численное значение которой обладает свойствами: 1.объемы равных тел равны; 2.если тело разделено на две части, то его объем равен сумме объемов его частей (свойство аддитивности объема)» [62]. «Объема тела; объем цилиндра, конуса; принцип Кавальери и объем шара» [62](24 часов).	«Объем – это величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве, неотрицательные действительные числа» [46]. Объем –это «...число V, показывающее сколько раз единица измерения объема и ее части укладываются в данной фигуре» [46]. «Объём и его свойства; принцип Кавальери; объём цилиндра; конуса; шара и его частей; отношение объёмов подобных тел» [46] (20 часов).

Таблица 4 – Требования к знаниям учащихся при обучении теме вычисления объемов круглых тел на базовом и углубленном уровне

Базовый уровень	Углубленный уровень
– знать основные геометрические свойства, присущие сферам, цилиндрам, конусам; – уметь выражать и использовать взаимную зависимость геометрических параметров основных тел вращения; – умение вычислять объемы в несложных задачах на круглые тела и вписанные и описанные тела вращения.	– уметь решать более сложные задачи на вычисление объемов тел вращения; – иметь навыки по решению задач с усеченными, вписанными и описанными телами вращения; – иметь представление о способах решения задач на комбинации круглых тел; – уметь решать задачи на доказательство.

Таблица 5 – Анализ учебных пособий

Название	Теоретический аспект	Практический аспект
Геометрия. 10-11 класс. Учебник для общеобразоват. организаций./ Погорелов А.В. [36].	Материал излагается на научном уровне в четком и компактном стиле. Представлены свойства как всех тел вращения, так и усеченных конусов. Контрольные вопросы охватывают весь теоретический материал.	Приведены разнообразные задачи с учетом дифференцированного подхода. Например: <i>Для базового уровня:</i> Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найти объем конуса. <i>Для углубленного уровня:</i> В цилиндр объемом 72π наклонно вписан квадрат. Найти сторону квадрата.
Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия. 10-11 классы: Учебник для общеобразоват. организаций. [1]	В данном учебнике в программе 10 класса даются подробные сведения об основных телах вращения, сфере и шаре, конусе и цилиндре. Акцентируется внимание на свойствах симметрии. Подробно изложены понятия прямого кругового цилиндра и конуса как тел вращения. Отдельные параграфы посвящены усеченному конусу и коническим сечениям.	Приведем две практические задачи разного уровня: <i>Для стандартного уровня:</i> Пусть R_1 и R_2 – радиусы оснований усеченного конуса, а L – длина образующей. Найти объем такого конуса, если: а) $R_1 = 2R_2 = L = 1$ б) $L = 1$ и угол между образующими осевого сечения равен 60°. <i>Для углубленного уровня:</i> В сферу радиуса R вписан цилиндр. Найти объем такого цилиндра, если известно, что его площадь осевого сечения наибольшая.
Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов [4]	Данное учебное пособие содержит теоретический материал по стереометрии и, частично, по планиметрии в рамках курса средней школы, в том числе, раздел, посвященный фигурам вращения и вычислению их объемов. Пособие рассчитано не только для учащихся, но будет полезно и для преподавателей в качестве справочного материала.	Практический материал содержит большое количество подробно разобранных задач, в том числе задачи разного уровня сложности, которые предлагаются на итоговых экзаменах. Например: Найдите радиус шара, который вписан в правильную n – угольную пирамиду, с основанием a. Плоский угол при вершине равен φ.

Продолжение таблицы 5

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс. Учебник для общеобразоват. учреждений [46]	Данный учебник является двухуровневым, что позволяет ввести дифференциацию учащихся на базовом уровне, частично используя материал для профильного уровня. Помимо стандартного материала, в учебник включен материал научно-популярного и прикладного характера, а также помещены нестандартные и исследовательские задачи, исторические сведения.	В сборнике в подробном виде представлены задачи практически по всем видам задач на тела вращения и вычисление их объемов. Можно выделить нестандартные задачи на комбинации круглых тел следующего плана: «Чему равен объем наибольшего конуса, который можно поместить в сферу с радиусом 1 дм.»
Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы [45]	Классический задачник, в котором в компактном виде представлены как все основные формулы стереометрии, так и дополнительные соотношения между элементами круглых тел. Разобраны практически все типы задач, иллюстрирующие основы стереометрии, задачи на фигуры вращения; включены задачи на вписанные и описанные тела вращения. Задачи разбиты на три уровня сложности обеспечивая уровневую дифференциацию учащихся. Отдельное место уделено дополнительным задачам по стереометрии с использованием метапредметных связей.	В сборнике в подробном виде представлены задачи различной категорий сложности. Группа А Выразить объем конуса через его боковую поверхность S и расстояние r от центра основания до образующей. Группа Б Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90 градусов. Определить объем конуса. Группа В Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в n раз больше площади верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара.

Методический анализ учебных пособий показывает, что в них представлен достаточно большой объем задачного материала по исследуемой

теме, однако для её изучения отведено небольшое количество часов, отсутствует или недостаточно представлен материал по методам решения разнообразных задач на комбинации разнообразных пространственных фигур с телами вращения.

1.3 Типология задач на вычисление объемов круглых тел и основные методы и приемы их решения

При изучении в старших классах темы о телах вращения и в процессе обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел, как правило, ограничивается изложением основных свойств, которые применяются к решению только простых задач. При этом изучение тел вращения способствует формированию у учащихся нестандартных умений и навыков. Многообразие видов задач на вычисление объемов тел вращения позволяет полноценно учитывать уровневую дифференциацию учащихся.

Для подробного изучения данной темы можно рассмотреть следующую типологию задач:

1. Простейшие, типовые задачи на зависимости между основными характерными параметрами круглых тел.

Задача [38]: Найти объем конуса с образующей длиной l , если известно, что осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник (рисунок 1)

Решение:

По условию задачи $\triangle ACB$ –прямоугольный, $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Учитывая, что: $AC = CB = l$, находим высоту h конуса:

$$h = CD = BC \cos 45^\circ = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

Радиус основания r равен:

$$r = BD = BC \sin 45^\circ = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

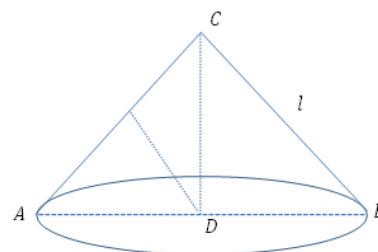


Рисунок 1– Конус

Находим объем:

$$V = \frac{1}{3}h \cdot S_{\text{осн}},$$

$$V = \frac{\pi}{3}hr^2,$$

$$V = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}l^3.$$

2. Задачи на вписанные и описанные тела вращения.

Задача [23]: Найти объем шара, вписанного в конус с высотой h , если известно, что осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник (рисунок 2).

Решение:

По условию задачи $\triangle ACB$ —прямоугольный, $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Учитывая, что: $h = CD$, $AC = CD = h\sqrt{2}$, $AB = 2h$.

Находим площадь S осевого сечения ACD :

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot CD = h^2.$$

с другой стороны:

$$S = \frac{1}{2}r \cdot (AC + CB + AB),$$

$$S = rh(1 + \sqrt{2}),$$

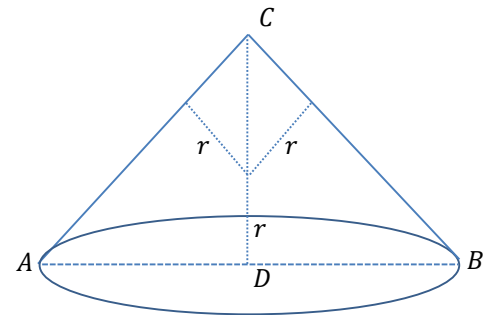


Рисунок 2— Конус

где r — радиус окружности, вписанной в ACB и, одновременно, r — радиус вписанного в конус шара.

Соответственно:

$$h^2 = rh(1 + \sqrt{2}),$$

$$r = \frac{h}{1 + \sqrt{2}},$$

$$r = h(\sqrt{2} - 1)$$

и искомый объем V шара равен:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi h(\sqrt{2} - 1)^3.$$

3. Задачи на комбинацию многогранников и круглых тел, а также, на вычисление их объемов.

Задача [45]: Найти объем шара, вписанного в правильный тетраэдр с длиной ребра равной l (рисунок 3).

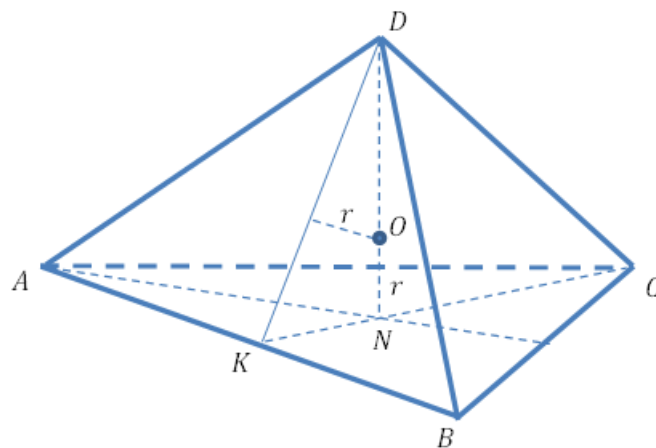
Решение:

Центр вписанного шара, точка O , лежит на высоте DN и равноудалена от DK и KC .

Находим элементы $\triangle DKN$:

$$DK = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad KN = \frac{1}{3}CK = \frac{l\sqrt{3}}{6},$$

$$DN = \sqrt{DK^2 - KN^2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$



$$\sqrt{8} = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

Рисунок 3 – Тетраэдр

Отсюда следует:

$$S_{DKN} = \frac{1}{2}r \cdot DK + \frac{1}{2}r \cdot NK,$$

$$S_{DKN} = \frac{rl\sqrt{3}}{3}.$$

С другой стороны:

$$S_{DNK} = \frac{1}{2}DN \cdot NK = \frac{l^2\sqrt{2}}{12}.$$

Таким образом:

$$\frac{rl\sqrt{3}}{3} = \frac{l^2\sqrt{2}}{12},$$

$$r = \frac{l\sqrt{6}}{12},$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$V = \frac{\pi l^3 \sqrt{6}}{216}.$$

4. Задачи, предполагающие использование метода вспомогательного объема для решения стереометрических задач с правильными многогранниками и телами вращения.

Задача [24]: Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с длиной ребра l . Найти объем шара с центром в точке A , который касается плоскости $A_1 BK$, где K – середина ребра AD (рисунок 4).

Решение:

Для вычисления объема V шара, найдем его радиус r , равный расстоянию AM от вершины A до сечения $A_1 BK$, или иначе, высоте пирамиды $A_1 ABK$. Воспользуемся методом вспомогательного объема:

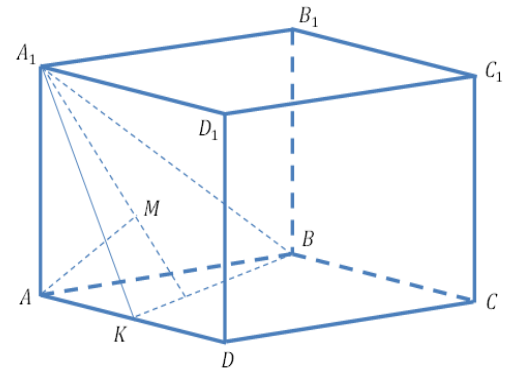


Рисунок 4 – Куб

$$V_{A_1 ABK} = \frac{1}{3} AA_1 \cdot S_{ABK} = \frac{1}{3} AM \cdot S_{A_1 KB},$$

$$r = AM = \frac{l \cdot S_{ABK}}{S_{A_1 KB}}.$$

Учитывая, что

$$A_1 K = KB = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{b\sqrt{5}}{2}.$$

Находим:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{4} l^2,$$

$$S_{A_1 KB} = \frac{1}{2} A_1 B \cdot \sqrt{BK^2 - \left(\frac{A_1 B}{2}\right)^2},$$

$$S_{A_1KB} = \frac{1}{2} a \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4} l^2 - \frac{l^2}{2}} = \frac{l^2 \sqrt{6}}{4}.$$

Таким образом:

$$r = \frac{l \cdot \frac{1}{4} l^2}{\frac{1}{4} l^2 \sqrt{6}} = \frac{l \sqrt{6}}{6}$$

и

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V = \frac{\pi l^3 \sqrt{6}}{27}.$$

5. *Стереометрические задачи, предусматривающие использование методов начал анализа применительно к вычислению объемов тел вращения.*

Задача [28]: Найти объем тела, полученного вращением параболы $y = x^2$, при $0 \leq x \leq 1$, вокруг а) оси x , б) оси y .

Решение:

В данном случае воспользуемся стандартными формулами из начал анализа. Объем V_x фигуры, полученной в результате вращения вокруг оси Ox равен:

$$V_x = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Для вычисления объема V_y фигуры, полученной в результате вращения вокруг оси Oy , перейдем к обратной функции (рисунок 5):

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ x &= \sqrt{y}, \\ 0 &\leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Получаем:

$$V_y = \pi \int_0^1 g^2(y) dy,$$

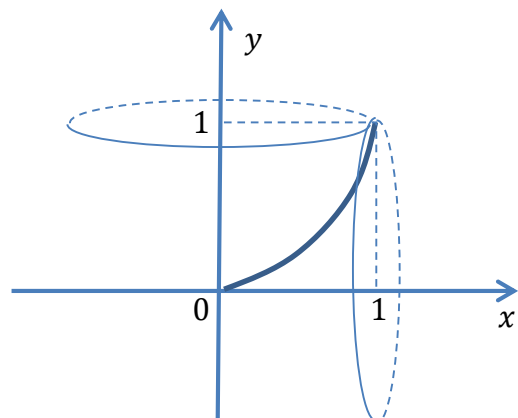


Рисунок 5 – Вращение параболы

$$V_y = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом:

$$V_x = \frac{\pi}{5},$$

$$V_y = \frac{\pi}{2}.$$

6. Задачи на сечения, их комбинации и вычисление объемов усеченных фигур, вписанных и описанных тел вращения.

Задача [45]: Найти объем шарового сегмента, образованного сечением с площадью $0,25\pi$, если радиус шара равен 1 (рисунок 6).

Решение:

Воспользуемся формулой для шарового сегмента:

$$V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right)$$

По условию задачи:

$$\pi r^2 = 0,25\pi, \quad r = 0,5$$

Далее:

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2},$$

$$h = 1 - \sqrt{1 - 0,5^2},$$

$$h = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Находим:

$$V_{\text{сегм}} = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right),$$

$$V_{\text{сегм}} = \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{9}{24} \sqrt{3} \right).$$

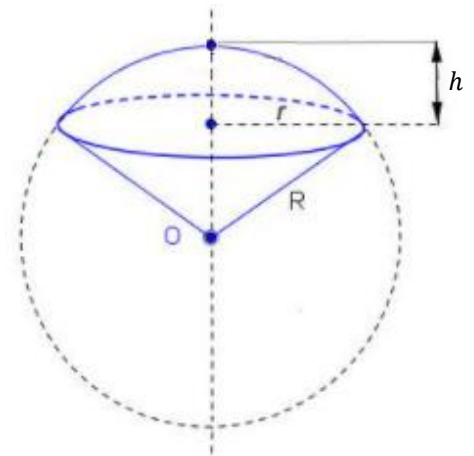


Рисунок 6 – Шаровой сегмент

7. Задачи на применение декартовых координат при решении геометрических задач по теме «Тела вращения».

Задача [39]: Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с длиной ребра 1. Найти объём конуса с образующей MK и высотой KA , если известно, что точка M принадлежит ребру AA_1 , K – середина ребра BC косинус угла между MK и KA равен $\frac{3}{\sqrt{29}}$.

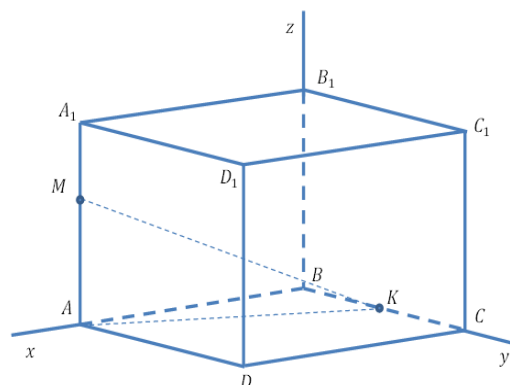


Рисунок 7 – Куб

Решение: (рисунок 7)

Решим задачу с помощью декартовых координат:

$$M(1; 0; z), K(0; 0,5; 0), A(1; 0; 0)$$

Соответственно:

$$\overline{KM} = (1; -0,5; z), \overline{KA} = (1; -0,5; 0)$$

Учитывая, что

$$(\overline{KM} \cdot \overline{KA}) = 1 + 0,5 \cdot 0,5 + z \cdot 0 = 1,25$$

$$|\overline{KM}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + z^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + z^2}$$

$$|\overline{KA}| = \sqrt{1^2 + 0,5^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Находим

$$\cos \alpha = \frac{(\overline{KM} \cdot \overline{KA})}{|\overline{KM}| \cdot |\overline{KA}|} = \frac{2,5}{\sqrt{\frac{25}{4} + 5z^2}}$$

Учитывая условия задачи, получаем:

$$\frac{2,5}{\sqrt{\frac{25}{4} + 5z^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}},$$

$$z = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, радиус конуса равен $r = z = \frac{3}{4}$.

Вычисляем объем конуса:

$$h = AK = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad V = \frac{3\pi\sqrt{5}}{32}.$$

8. *Задачи на применение векторов при решении геометрических задач по теме «Тела вращения».*

В качестве примера можно рассмотреть ту же задачу, что и в предыдущем пункте.

Помимо этого, весьма полезным является рассмотрение многоуровневых задач, которые позволяют стимулировать учащихся к переходу на более высокие по сложности уровни. Пример такой задачи разобран в параграфе 5

Подробное рассмотрение заданий в рамках указанной типологии позволяют полноценно учитывать уровневую дифференциацию учащихся, что является хорошим стимулом для достижения цели формирования мотивации к учебно-познавательной деятельности.

Среди приёмов решения задач на тела вращения следует обратить внимание на *общий алгоритм исследования задач по стереометрии*:

1. Изобразить, насколько это возможно, чертеж, соответствующий задаче. Для сложных фигур, ограничиться изображением проекции или сечения с нанесением данных и указать неизвестные параметры.

2. Переосмыслив содержание поставленной задачи, самостоятельно, своими словами, изложить заново условие задачи и изобразить ключевые параметры, которые помогут вычислить объем тела и другие неизвестные величины.

3. Вновь показать исходные данные и определить схему решения, ключевые этапы построения, расписать соответствующий алгоритм.

4. При необходимости, внести требуемые коррективы по итогам самостоятельного переосмысления задачи.

5. Постараться увязать исходные данные задачи и конечную цель, определить их взаимосвязь.

6. Используя свойства тел вращения, определить логическую цепочку, последовательно приводящую к требуемому результату

7. Построить алгоритм решения, начиная с исходных данных и двигаясь к результату, либо наоборот, от того, что надо найти к тому, что дано.

8. Используя построенную цепочку, выделить элементы решения задачи, которые опираются на основные свойства круглых тел, и те элементы, которые, вытекая из постановки задачи, могут быть вычислены, опираясь на известные теоремы и аксиомы стереометрии.

9. Записать выявленные закономерности в форме уравнений, формул и других необходимых соотношений между исходными параметрами задачи, либо в виде соответствующих вспомогательных геометрических построений.

10. Решить уравнения, найти требуемые параметры и провести необходимые доказательства.

11. Исходя из решения, записать ответ задачи в виде конкретных величин для неизвестных параметров или доказанных свойств и проведенных построений.

Особенность задач на круглые тела состоит в том, что для их решения достаточно вычислить ограниченное количество элементов:

- для вычисления объема шара: радиус шара;
- для конуса: два из трех параметров, радиус основания, высота или образующая;
- для прямого кругового цилиндра: высота и радиус основания;
- для тел вращения в общем виде: уравнение огибающей.

В большинстве задач используются сечения фигур в том или ином виде. Метод сечения позволяет свести стереометрическую задачу к основам планиметрии.

К другим методам, которые используются для решения задач на вычисление объемов круглых тел, относятся:

1. Метод вспомогательного объема.
2. Векторный метод.
3. Координатный метод.

Также метод проекций или метод опорных конфигураций могут быть включены в план обучения в качестве дополнительной информации.

1.4 Технология обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел

Под технологией обучения понимают способ реализации содержания обучения, который представляет собой систему форм, методов и средств обучения, и обеспечивает достижение поставленных целей [67].

Формы обучения – способы организации учебно-познавательной деятельности, предназначенные для получения учащимися знаний по школьным предметам, а также умений, навыков [57].

Под методами обучения понимают взаимозависимые способы действий преподавателя и учащегося, предназначенные для получения учащимися знаний по школьным предметам, а также умений, навыков и для их развития и воспитания. Методы обучения – это способы совместной деятельности учителя и учащихся, направленные на решение задач обучения, т.е. дидактических задач [58].

Под содержанием обучения понимают структурированные составные части учебного материала, которым должны овладеть учащиеся в процессе обучения. К средствам обучения относят объекты, созданные как

деятельностью человека, так и имеющие естественное происхождение, используемые в образовательном процессе и являющиеся носителями значимой информации в учебных целях.

В современных научно-педагогических работах ведутся поиски таких дидактических подходов к получению образования, которые дали бы гарантированный результат [21]. Тогда, преподавание превратится в технологический процесс, который можно изобразить схемой (рисунок 8) [6].

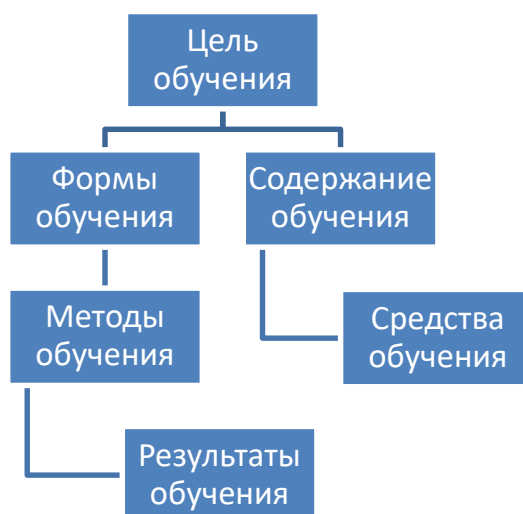


Рисунок 8 – Технологический процесс обучения

Схематически, процедуру разработки технологии обучения можно представить следующим образом (рисунок 9).

Технологии обучения можно классифицировать по разным аспектам.

Например, Г.К. Селевко рассматривает следующую классификацию технологий:

- *по уровню применения*: общепедагогические, частно-методические, локальные;
- *по ведущему фактору психического развития*: биогенные, социогенные, психогенные и идеалистические технологии;

- *по ориентации на личностные структуры:* информационные, операционные, эмоционально-художественные и эмоционально-нравственные, технология саморазвития, эвристические и прикладные;
- *по характеру содержания и структуры:* обучающие и воспитывающие, светские и религиозные, общеобразовательные и профессионально-ориентированные [44].



Рисунок 9 – Технология обучения

Академик В. П. Беспалько описал классификацию технологий по типам организации познавательной деятельности:

- *лекционное обучение;*
- *обучение с помощью аудиовизуальных технических средств;*
- *обучение с помощью учебной книги;*
- *групповые, дифференцированные способы обучения;*
- *компьютерное обучение;*
- *индивидуальное обучение* [7].

М. Кларин выделяет другие аспекты педагогических технологий: *исследовательские технологии*: технология опытно-экспериментальной работы; технология научного исследования; технология развивающего обучения; технология проектного обучения и т.д.; *диалоговые технологии*: технология дискуссии; технология коллективного способа обучения; технология диалога культур; тренинговые технологии и т.п.; *игровые технологии*: технология дидактической игры; технология ролевой игры; технология деловой игры и т.д. [25].

А.Ж. Жафяров выделяет следующие технологии обучения математике:

– Технология интенсификации обучения математике на основе схемных и знаковых моделей учебного материала (В.Ф. Шаталов) [63].

Цель: Развитие творческого мышления через формирование знаний, умений и навыков учащихся независимо от их индивидуальных особенностей, и возможность ускоренного обучения и усваивания материала [63].

Прогнозируемый результат: Приобщение к ежедневной учебно-познавательной деятельности и творческому мышлению, развитие трудолюбия, самостоятельности, уверенности в своих силах, способностях, формирование ответственности.

– Укрупнение дидактических единиц (П.М. Эрдниев) [67].

Цель: Достижение целостности математических знаний, создание совершенной последовательности разделов и тем школьных предметов, обеспечивающее их единство и целостность [67].

Прогнозируемый результат: умение устанавливать логические связи, выделять главное и существенное в изучаемом материале, применять обобщения, сделать более эффективным закрепление материала.

– Технология обучения математике на основе решения задач (Р.Г. Хазанкин) [60].

Цель: развитие индивидуальных способностей учащихся с помощью ключевых задач [60].

Прогнозируемый результат: успешное усваивание материала всеми группами учащихся с учетом уровневой дифференциации [60].

– Система развивающего обучения Л.В. Занкова [20].

Цель: достижение максимальной эффективности обучения для общего развития школьника, богатого содержания образования и средства педагогической деятельности, направленных на целостное развитие личности ребенка, его ума, воли, чувств, а не только на усвоение им знаний, умений, навыков [20].

Прогнозируемый результат: создание эмоционального фактора, который способствует быстрому развитию интеллектуальных, нравственных и творческих способностей ребенка.

– Технология развивающего обучения Д.Б. Элькони – В.В. Давыдова [13].

Цель: формирование у учащихся теоретического сознания и мышления, способов умственных действий и логики научного познания.

Прогнозируемый результат: возможность интенсифицировать умственное развитие через содержание учебного материала и методы организации обучения.

– Личностно-ориентированное развивающее обучение (И.С. Якиманская) [69].

Цель: эффективное содействие развитию и проявлению ребенком своих личностных качеств, формирование его индивидуальности, субъектности, способности к нравственной и творческой реализации своих возможностей. Помочь обучаемому найти наиболее рациональные для него приемы и способы работы за счет активации его самых развитых сторон личности, наиболее соответствующие его морально-психологическому складу характера.

Прогнозируемый результат: раскрытие, реализация и развитие личностного потенциала учащихся. Развитие самостоятельной инициативы и сотрудничества. Формирование у учащихся системы научных знаний на основе актуализации и «окультуривания» их субъектного опыта. Обретение своего индивидуального стиля познания и темпа учебной деятельности, содействие ребенку в формировании положительной Я-концепции, овладение умениями и навыками самопознания и самоуправления.

Перечисленные технологии используются при изучении различных предметов школьного курса. Однако большинство из них (технологии В.Ф. Шаталова [63], П.М. Эрдниева [67], Р.Г. Хазанкина [60], Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова [13]) разрабатывались на примере математики и показали свою эффективность в развитии предметных компетенций учащихся.

Выбор оптимальной технологии обучения является важным компонентом при подготовке и планировании занятий.

При разработке элективного курса и выборе соответствующей технологии обучения будем исходить из следующего: содержание обучения – задачи на вычисление объемов круглых тел, объем – 8 занятий по 2 академических часа.

Приоритетные цели – повышение предметных компетенций учащихся, формирование активной личности, повышение интереса учащихся.

При выборе технологии следует исходить из ориентации на приоритетную реализацию повышения предметных компетенций учащихся (рисунок 10).

Исходя из темы элективного курса были определены:

- организация содержания обучения: отбор задач на вычисление объемов круглых тел различной сложности, наиболее эффективных для обучения;
- выбор форм организации учебного процесса: лекции, практические занятия, контрольное занятие;

- выбор методов обучения: совершенствование знаний, умений и навыков по решению систем уравнений;
- выбор средств обучения: учебная литература по теме элективного курса.

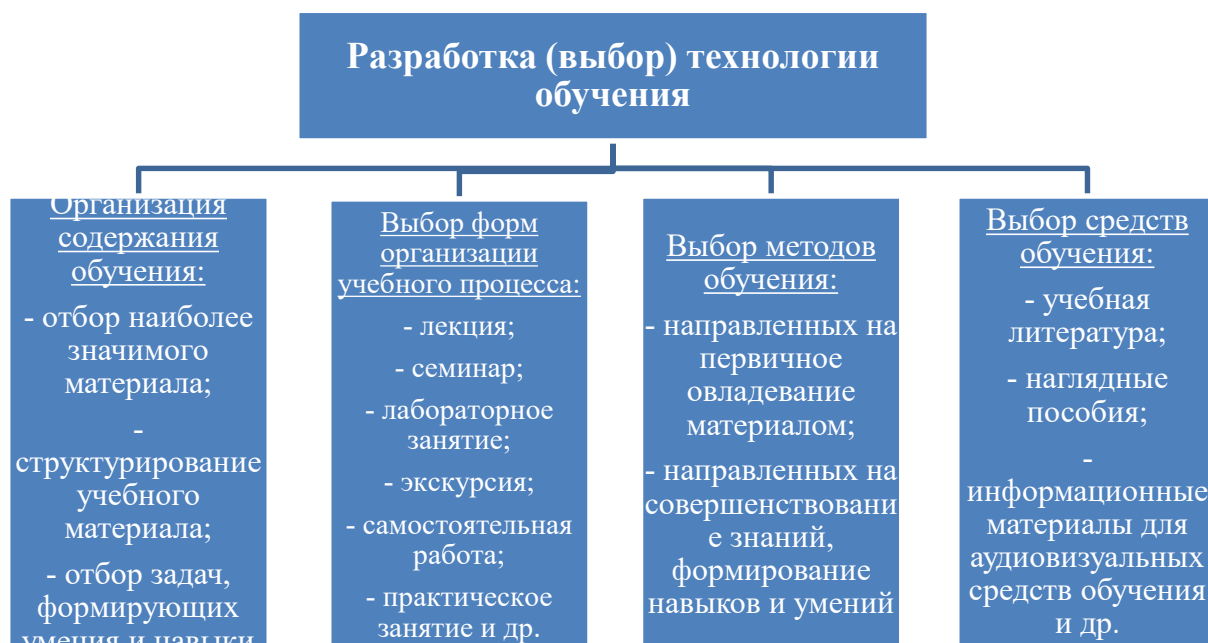


Рисунок 10 - Разработка (выбор) технологии обучения

Для методики обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел представляется более подходящей технология обучения математике с помощью решения ключевых задач, разработанная Р.Г. Хазанкиным [60].

Основана данная технология на разработанной системе из восьми типов уроков: *урок-лекция*, который раскрывает новую тему крупным блоком; *урок-решения ключевых задач*, среди которых выделяют решение задач различными методами, в том числе, решение задач олимпиадного характера; *урок-решение обучающих задач*; *зачетный урок*, когда повторяется целая тема с привлечением старшеклассников; *урок анализа зачетного занятия*; *контрольный урок*, который проводится в письменной форме; *урок анализа контрольной работы*.

На уроках-лекциях следует изложить все основные сведения о круглых телах и рассмотреть соотношения между их компонентами, а также, основные теоретические положения для решения задач с телами вращения и на их комбинацию с другими пространственными фигурами.

В качестве вводных можно использовать несколько типовых задач на вычисление объемов и площадей поверхностей круглых тел. Для учащихся с высоким уровнем мотивации можно рассмотреть задачи на комбинацию разных тел вращения.

Отдельный интерес представляют задачи на вписанные и описанные тела вращения, которые легко позволяют составить задачи для различных групп учащихся с учетом их уровневой дифференциации.

В рамках данной технологии важную роль играет отбор самих ключевых задач.

При отборе задачного материала предполагается руководствоваться следующими положениями:

- с помощью данных задач можно изучить все основные положения темы о телах вращения;
- задач не должно быть очень много, что предполагается самой технологией;
- по уровню сложности задачи должны быть рассчитаны на средний уровень подготовки, так чтобы у учащихся с низкой мотивацией появился интерес к теме и занятиям, а у «продвинутых» учащихся - интерес к дальнейшему углубленному изучению темы;
- задачи должны содержать различные подходы, предполагающие исследование, в том числе, и теоретические положения по теме;
- процесс решения задач не должен быть слишком длинным, чтобы постоянно поддерживать интерес учащихся.

Выбор данной технологии представляется наиболее оптимальным для достижения положительных результатов в повышении предметных компетенций учащихся.

Выводы по первой главе

1. Выделены основные цели и задачи обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в школьном курсе геометрии, проанализированы требования к предметным результатам освоения по ФГОС.

2. Произведён содержательный анализ материала по теме вычисления объемов круглых тел учебных пособий по геометрии 10-11 классов, входящие в комплект учебных материалов, рекомендованных министерством науки и высшего образования. Сравнительный анализ учебников, учебных пособий и аналогичных материалов по геометрии разных авторов позволяет выявить их преимущества и недостатки.

3. Сделаны выводы об отличии последовательности изложения теоретического и задачного материала и введения определений и понятий. Проанализированный материал по теме круглых тел не содержит принципиально новых научных результатов и говорит о том, что в его основе лежат традиционные подходы к изучению данной темы. Недостающим элементом указанных работ с точки зрения современных подходов к обучению является малое использование информационно-компьютерных технологий.

4. Предложен алгоритм решения геометрических задач, позволяющий учащимся повысить свои навыки и умения по теме «Вычисление объёмов круглых тел».

Регулярное использование таких задач по теме дает значительный эффект для развития логического мышления и пространственного воображения у старшеклассников.

Глава 2 Практическая реализация методики обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел

2.1 Методическая схема обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел

Тела вращения – обязательная к изучению тема в школьном курсе геометрии. Она играет важную роль для подготовки школьников к практической жизни. При объяснении данной темы и решении задач следует акцентировать внимание на аналогии, встречающиеся ученику в повседневной жизни: детали приборов и машин имеют схожие формы, предметы обихода человека и архитектурные сооружения, изделия гончарного производства.

Теоретический материал раздела о телах вращения захватывает небольшой объем, но здесь вводится множество новых понятий, способы их введения, методы изучения тоже весьма различны. При изучении фигур вращения очень велико значение чертежа. Чертеж является основным средством иллюстрации, развития пространственного воображения. В ходе решения некоторых задач возникает необходимость в решении планиметрической задачи [30].

Мишин В.И. писал: «Анализ состояния знаний учащихся показывает, в частности, недостаточно сформированные навыки в решении стереометрических задач, ошибки и недочеты как в выполнении графической части задания (неумение выполнить чертеж рассматриваемого тела вращения), так и в неумении проводить теоретические обоснования отдельных этапов решения, не всегда корректное использование теоретического материала, неаккуратно выполненные записи. Отрицательно сказывается на результатах работы отсутствие прочных вычислительных навыков у учащихся, утрата основных знаний и умений по курсу планиметрии» [30]. Прямые круговые конус и цилиндр, а также шар являются представителями класса тел вращения.

Телом вращения называется тело, полученное в результате вращения некоторой фигуры (обычно плоской) вокруг прямой. Это прямая называется осью вращения [54].

В условиях необходимости постоянного совершенствования программ, методического обеспечения и их учебного содержания с учетом дифференциации повышается значимость индивидуального, личностно-ориентированного подхода непосредственно в процессе обучения.

В целях уровневой дифференциации и преследуя цель «подтягивания» учащихся с низкой мотивацией, а также исходя из личностно-ориентированного подхода на занятиях, включая индивидуальную работу при изучении предмета, является целесообразным использование многоуровневых задач с применением метапредметных связей.

Рассмотрим такую задачу.

Задача 5.1.

Дан усеченный конус. Найти его объем, если известно, что:

1. Радиусы оснований равны R_1 и R_2 и угол наклона образующей к основанию равен α .
2. Радиус верхнего основания равен R_2 , длина образующей равна l и она наклонена к нижнему основанию под углом α .
3. Радиус нижнего основания равен R_1 и радиус окружности, вписанной в осевое сечение этого конуса равен r .
4. Высота и радиус основания цилиндра, имеющего наибольший объем среди вписанных в данный конус, равны r и h , соответственно, и образующая усеченного конуса равна l , $l > \sqrt{h^2 + 0,25r^2}$.

Решение.

Для учащихся со слабой подготовкой будут доступны пункты 1 и 2. Для учащихся среднего уровня вполне под силу и третья задача. А вот учащимся с высокой мотивацией к обучению и хорошо знакомых с текущим изучаемым

материалом по математике в целом стоит, помимо этого, сосредоточить усилия и на четвертом пункте. Проанализируем ход решения задачи по последнему пункту.

Здесь учащимся следует предварительно напомнить уже известные им знания, в том числе и по применению свойств производной для исследования функций.

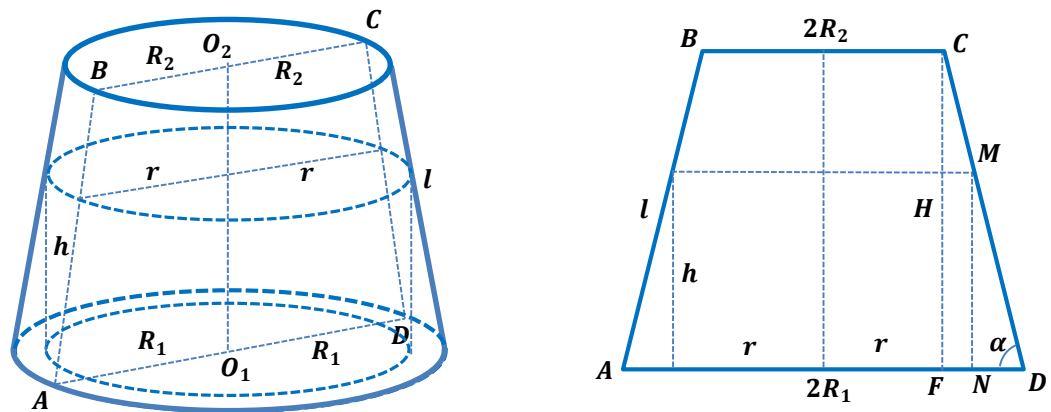


Рисунок 11 – Осевое сечение усеченного конуса

Ключевую фигуру для решения, которая связывает основные элементы, рассматриваемые в задаче, учащимся предлагается выбрать самостоятельно. Изображаем осевое сечение усеченного конуса с вписанным цилиндром (рисунок 11).

Затем, учащиеся самостоятельно записывают требуемые соотношения подобия.

Из подобия треугольников CFD и MND следует:

$$\frac{|CF|}{|MN|} = \frac{|FD|}{|ND|} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - r} \Rightarrow h = \frac{H(R_1 - r)}{R_1 - R_2} = (R_1 - r) \operatorname{tg} \alpha.$$

Объем вписанного цилиндра равен:

$$V_{\text{цил}} = \pi r^2 h = \frac{\pi H r^2 (R_1 - r)}{R_1 - R_2}.$$

По условию, этот цилиндр имеет максимальный объем из всех вписанных цилиндров в данный усеченный конус.

На данном этапе решения учащимся предлагается самостоятельно сформулировать задачу поиска r на математическом языке. Здесь они используют свойства производной к вычислению максимума для $V_{\text{цил}}(r)$ как функции с переменной r .

Используя общепринятые обозначения, необходимо найти значение переменной x , при котором функция $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\pi H}{R_1 - R_2} (R_1 x^2 - x^3)$$

принимает наибольшее значение. Учащиеся вспоминают алгоритм решения подобных задач:

- находим производную функции $f'(x)$,
- решаем уравнение $f'(x) = 0$,
- исследуем производную и находим точки экстремума.

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем:

$$V'_r = \frac{\pi H}{R_1 - R_2} (R_1 r^2 - r^3)' = \frac{\pi H}{R_1 - R_2} r(2R_1 - 3r),$$

$$V'_r > 0 \text{ при } r < \frac{2}{3} R_1, \quad V'_r < 0 \text{ при } r > \frac{2}{3} R_1.$$

Отсюда следует, что при

$$r = \frac{2}{3} R_1 \text{ и } h = (R_1 - r) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} R_1 \operatorname{tg} \alpha$$

объем цилиндра максимально возможный.

Находим:

$$R_1 = \frac{3}{2} r,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3h}{R_1} = \frac{2h}{r}.$$

Зная образующую усеченного конуса, получаем:

$$H = l \sin \alpha = l \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + r^2}}, \quad R_2 = R_1 - l \cos \alpha = \frac{3}{2} r - \frac{lr}{\sqrt{4h^2 + r^2}}.$$

Обращаем внимание учащихся, что по условию задачи

$$l > \sqrt{h^2 + 0,25r^2}.$$

Это означает, что

$$H > \sqrt{h^2 + 0,25r^2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + r^2}} \Rightarrow H > h$$

и цилиндр оказывается вписанным в усеченный конус.

Далее, учащимся будет полезно преобразовать формулу для объема усеченного конуса, и использовать ее в следующей форме:

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) = \frac{1}{3}\pi H\left(\frac{3}{4}(R_1 + R_2)^2 - \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } V &= \frac{1}{3}\pi l \sin \alpha \left(\frac{3}{4}(2R_1 - l \cos \alpha)^2 - \frac{1}{4}l^2 \cos^2 \alpha\right) = \\ &= \frac{\pi l h}{6(4h^2 + r^2)} \left(27r^2 \sqrt{4h^2 + r^2} - 18r^2 l + 2rl^2\right). \end{aligned}$$

Здесь же можно разобрать решение задачи для случая если:

$$l \leq \sqrt{h^2 + 0,25r^2}.$$

Несложно заметить, что в этом случае: $H \leq h$.

Обращаем внимание учащихся, что в этом случае единственно возможный результат: $H = h$, $R_2 = r$, $R_1 = r + \sqrt{l^2 - h^2}$, который соответствует расположению фигур, показанному на рисунке 12.

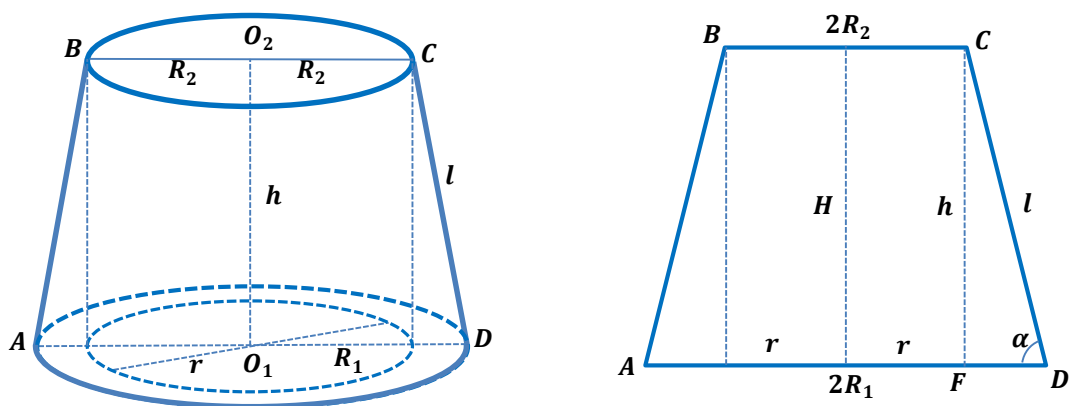


Рисунок 12 — Осевое сечение при равенстве высот

Объем усеченного конуса в этом случае равен:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) = \\ &= \frac{1}{3}\pi h\left(\left(r + \sqrt{l^2 - h^2}\right)^2 + \left(r + \sqrt{l^2 - h^2}\right)r + r^2\right), \\ V &= \frac{1}{3}\pi H(3r^2 + 3r\sqrt{l^2 - h^2} + l^2 - h^2). \end{aligned}$$

Заметим, что при $l \leq h$ задача не имеет решение. Задачи, аналогичные рассмотренной по структуре и учитывающие дифференциацию учащихся, позволяют определить текущий уровень знаний и навыков учащихся и являются хорошим стимулом для достижения цели формирования мотивации к учебно-познавательной деятельности.

Для решения задач по теме данной работы следует пользоваться следующей методической схемой.

Методическая схема

1-й этап. Анализ задачи.

1. Осмыслите задачу и определите, к какому типу она относится?
2. Определите характерные свойства фигур, участвующих в задаче?
3. Какие элементы задействованных фигур известны?
4. Что можно сказать о характерных элементах тел вращения?
5. Что требуется найти?

2-й этап. Процесс поиска решения задачи.

6. Сделайте чертеж и нанесите данные.
7. Запишите условие и требование задачи.
8. Можно ли сразу же предложить решение, используя стандартные формулы?
9. Вычисление каких элементов может помочь при решении задачи?
10. Какие вспомогательные фигуры следует рассмотреть?
11. Какими элементами вспомогательной фигуры можно воспользоваться?

1. Какие еще способы можно использовать для решения задачи?

3-й этап. План решения задачи.

Составляется исходя из ответов на поставленные на 1 и 2 этапе вопросы.

4-й этап. Оформление решения задачи.

Задача оформляется в письменном виде по плану.

5-й этап. Проверка.

Осуществляется проверка полученного ответа.

6-й этап. Ответ.

Записывается ответ к задаче согласно поставленному вопросу.

Проиллюстрируем первые три этапа данной методической схемы на примере решения задачи.

Задача 5.2. Дан правильный тетраэдр $DABC$. Плоскость, параллельная основанию ABC делит этот тетраэдр на пирамиду $DA_1B_1C_1$ и усеченную пирамиду $ABCA_1B_1C_1$, в которую можно вписать шар. Найти отношение объемов шара, вписанного в $DA_1B_1C_1$ к объему шара, вписанного в $ABCA_1B_1C_1$.

Решение. Вначале учащиеся приходят к выводу, что шар (O, r) , вписанный в $ABCA_1B_1C_1$ одновременно является шаром, вписанным в $DABC$. Соответственно, плоскость $A_1B_1C_1$ одновременно является касательной плоскостью к шару (O, r) . Радиус r этого шара определяем с помощью объемов (рисунок 13).

С одной стороны:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h,$$

где h — высота правильного тетраэдра $DABC$.

С другой стороны:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} r \cdot S_{\text{п.п.}},$$

где $S_{\text{п.п.}}$ — площадь полной поверхности правильного тетраэдра:

$$S_{\text{п.п.}} = 4 \cdot S_{ABC}.$$

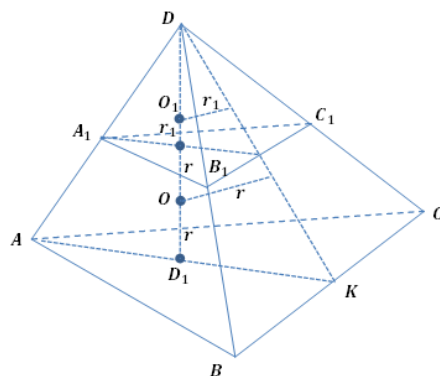


Рисунок 13 – Правильный тетраэдр $DABC$

Находим:

$$\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} r \cdot 4S_{ABC},$$

$$r = \frac{1}{4} h.$$

Приходим к выводу, что плоскость $A_1B_1C_1$ делит высоту h пополам. Отсюда следует, что все линейные размеры правильного тетраэдра $DA_1B_1C_1$ в $k = 2$ раза меньше размеров $DABC$. Тогда объем V_1 пирамиды $DA_1B_1C_1$ в $k^3 = 8$ раз меньше объема V пирамиды, вписанной в $DABC$. Соответственно ответ: $\frac{V}{V_1} = 8$.

Применение методической схемы

1-й этап. Анализ задачи.

1. Осмыслите задачу и определите, к какому типу она относится?

Это задача на вписанные в правильный тетраэдр шары.

Определите характерные свойства фигур, участвующих в задаче?

Правильный тетраэдр – треугольная пирамида, у которой все ребра равны между собой. Шары, которые касаются всех граней фигур, в которые они вписаны.

2. Какие элементы задействованных фигур известны?

Конкретных исходных данных нет. По условию определено лишь условие, которому соответствует плоскость $A_1B_1C_1$.

3. Что можно сказать о характерных элементах тел вращения?

Центр вписанной в правильный тетраэдр сферы совпадает с точкой пересечения его высот.

4. Что требуется найти?

Соотношение объемов вписанных шаров.

2-й этап. Процесс поиска решения задачи.

1. Сделайте чертеж и нанесите данные.

2. Запишите условие и требование задачи.

Дано: $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

Шары вписанные в $DA_1B_1C_1$ и $ABCA_1B_1C_1$

Найти: $\frac{V}{V_1} - ?$

3. Можем ли ответить на вопрос задачи сразу?

Нет, задача требует исследования свойств вписанных шаров.

4. Вычисление каких элементов может помочь при решении задачи?

Таковыми элементами являются r, r_1 и соотношение, в котором O и O_1 делят высоту DD_1 .

5. Какие вспомогательные фигуры следует рассмотреть?

Такой фигурой может быть треугольник DD_1K .

6. Какими элементами вспомогательной фигуры можно воспользоваться?

Через длину ребра правильного тетраэдра можно выразить все элементы треугольника DD_1K .

7. Какие еще способы можно использовать для решения задачи?

Наличие вписанных шаров наводит на мысль об использовании формул для объемов описанных многогранников.

3-й этап. План решения задачи.

1. Определить положение плоскости $A_1B_1C_1$

2. Применить формулы для объема правильного тетраэдра.
3. Выразить радиус r через высоту h .
4. Выразить радиус r_1 через высоту h .
5. Зная отношение линейных размеров определить искомое соотношение объемов шаров.

4-й этап. Оформление решения задачи.

Задача оформляется в письменном виде по плану.

5-й этап. Проверка.

Осуществляется проверка полученного ответа.

6-й этап. Ответ. Записывается ответ к задаче.

2.2 Элективный курс «Объемы круглых тел в задачах»

*Назначение, содержание и принципы отбора задач при составлении
элективного курса*

Элективные курсы являются достаточно эффективным способом для достижения целей индивидуального самоопределения учащихся в их профессионально-личностном развитии.

Учащиеся свободны в выборе направленности элективных курсов, поэтому, эти курсы не являются повторением основного учебного курса. Системы задач, лежащие в основе элективных курсов для старшеклассников, предназначены для:

- стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся;
- развития их умственных возможностей;
- обучения алгоритмам универсальных учебных действий;
- формирования представлений о современных технологиях лучшего восприятия материала [54, 65].

Помимо этого, с помощью предметных элективных курсов учащиеся:

- могут определиться со своей будущей специализацией и выбором вида профессиональной деятельности во взрослой жизни;
- продолжают получать знания в дополнение к основному курсу по выбранному направлению.

Основным способом при обучении с помощью элективных курсов является самообразование. Учащиеся ответственно подходят к подготовке к таким занятиям, что обусловлено самостоятельным выбором элективного курса.

Все это позволяет сделать вывод о том, что элективные курсы дают возможность поддерживать на высоком уровне изучение математики как профильного предмета.

Кроме этого, элективные курсы используются для внутрипрофильной дифференциации учащихся.

Обучение с помощью элективных курсов требует разнообразных форм и методов обучения. При их выборе следует учитывать особенности структуры и содержания курса, общий уровень развития учащихся, уровень их базовой подготовки, их познавательный интерес к различным подразделам программы [41, 42, 43].

Приведем некоторые основные формы организации занятий элективного курса. К ним относятся:

- лекционные занятия;
- занятия в форме свободного обсуждения;
- дискуссии и полемика;
- соревнования групп учащихся, игры;
- индивидуальные занятия-консультации;
- практические занятия, посвященные решению задач;
- групповая и индивидуальная учебно-познавательная исследовательская деятельность;

- дистанционная поддержка;
- контрольные и зачетные занятия.

Дифференциация в обучении учащихся осуществляется путем подбора задач, состоящих из различных уровней сложности.

По завершении программы элективного курса учащиеся могут представить индивидуальные творческие работы по их выбору или иные работы в форме проектной деятельности, как каждым учащимся, так и группой учащихся.

Само содержание элективных курсов обычно предполагает наличие некоторых компонентов. А именно:

- исторический материал, которому уделяется больше внимания, чем в основном учебном курсе по данному предмету;
- акцент на практическую работу, когда учащиеся самостоятельно ведут конспекты и получают навыки самостоятельной работы;
- индивидуальная и групповая работа с дополнительной литературой по избранному предмету и курсу;
- выступления перед группой, которые носят публичный характер и дают учащимся очень важный навык изложения материала в обществе.

Задачи, отобранные для элективного курса, как правило, удовлетворяют нескольким принципам:

1. Принцип преемственности, когда новые задачи можно решить с помощью уже полученных знаний и навыков, а также используя взаимосвязь основного и элективного курсов.

2. Принцип связи теории с практикой, когда задачи являются логическим продолжением полученных теоретических знаний, одновременно являясь средством полноценного восприятия нового материала.

3. Принцип полноты, при котором в цепочках задач отражаются математические идеи, а также присутствуют примеры, которые несут метапредметный характер.

4. Принцип контрастности, по которому задачи должны быть как с положительными, так и с отрицательными ответами.

5. Принцип овладения методами научного познания, который происходит в процессе решения задач с помощью применения эвристических приемов.

6. Принцип формирования исследовательских умений, который выполняется посредством применения поискового подхода в процессе обучения.

Таким образом, элективные курсы позволяют развивать и формировать у учащихся культуру логического и абстрактного мышления, помогают глубже изучить темы школьного курса, на которые выделено малое количество времени в основной программе общеобразовательной школы.

Для элективного курса рекомендуется применять программы, которые рассчитаны на один-два месяца, одну четверть или одно полугодие.

В процессе разработки программы элективного курса по геометрии необходимо:

- определить цель курса и функцию курса в рамках изучаемого основного учебного курса по геометрии;
- установить отличия в содержании элективного курса от содержания основного курса геометрии;
- распределить программу курса по темам с выделением необходимого количества часов по каждой из них;
- гарантировать наличие для учащихся конкретного курса по геометрии различных учебно-методических материалов;

- выделить основные виды учебно-познавательной деятельности учащихся, определить степень их самостоятельности;
- определить критерии успешного прохождения элективного курса по геометрии;
- подготовить контрольные задачи и вопросы для проведения промежуточного зачета.

Элективные курсы по геометрии могут выполнять различные функции, в том числе:

- являются углубленным вариантом определенных разделов базового курса, способствуя лучшему прохождению экзаменационных испытаний;
- служат основой для профильной ориентации учащихся в старших классах;
- способствуют самоопределению и знакомят учащихся с основными принципами предстоящей в будущем профессиональной деятельности;
- служат целью удовлетворения познавательных интересов учащихся в сферах, выходящих за рамки выбранного им профиля.

Исходя из этого, при проведении занятий преподаватели должны:

- придать курсу привлекательное название, интересные формы проведения и достигаемые цели;
- избегать дублирования основной программы по геометрии;
- включать принципиально новые, нестандартные для учащихся знания, вызывающие у них познавательный интерес;
- заложить в программу элективного курса быстрый и эффективный путь получения знаний, используя уже пройденный материал;
- обеспечить синхронность содержания элективных курсов с установленными государственными стандартами образования;

– делать акцент на личностно-деятельностный подход в обучении, смещать акценты на формирование умений через активную самостоятельную деятельность учащихся.

В связи с тем, что на изучение геометрии в старших классах общеобразовательной школы отводится недостаточное количество времени, целесообразным будет применение элективного курса при обучении решению задач на вычисление объемов круглых тел для повышения предметных компетенций учащихся по рассматриваемой теме.

Предлагаемый в данной работе элективный курс предполагает последовательное и систематизированное изложение основных методов и приемов решения задач на вычисление объемов круглых тел.

Элективный курс по геометрии в 11 классе по теме «Объемы круглых тел в задачах»

Решение задач по стереометрии часто вызывает затруднения, так как эти задачи требуют проведения доказательственных рассуждений, выдвижения гипотез и их обоснования, хорошо развитого абстрактного мышления.

Элективный курс по теме «Объемы круглых тел в задачах» представляет более подробное изучение теоретического материала и практическое решение задач. Задачи предназначены для учащихся старшей общеобразовательной школы, заинтересованных в углубленном изучении отдельных разделов математики, также для тех учащихся, которые хотят лучше подготовиться к ЕГЭ.

Основной задачей курса является углубление, обобщение знаний и умений обучающихся по теме «Тела вращения» и подготовка учащихся к ЕГЭ. Данный элективный курс обеспечивает систематизацию знаний и усовершенствование умений учащихся на уровне, требуемом при проведении такого экзамена.

Данная разработка предназначена для обучающихся 11 класса общеобразовательных учреждений. Она может быть использована учителями математики в учебной и во внеурочной деятельности.

В основу курса были взяты учебники по геометрии для 10-11 классов авторского коллектива Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И., учебники по геометрии для 10-11 классов и стереометрии для школ с углубленным изучением математики для 11 классов авторов Калинина А.Ю. и Терешина Д.А.

Разработанная программа и соответствующая технология проведения занятий рассчитана на 16 часов (2 часа в неделю). Представляется целесообразным проведение занятий в первой половине 11-го класса.

В рамках программы предполагается проведение 8 занятий по 2 академических часа каждое, в том числе, 6 занятий, посвященных изучению фактического материала, и 2 занятия консультационно-зачетного характера.

Первая часть каждого занятия должна быть посвящена теоретическим вопросам и проводиться в лекционной форме. Вторая часть должна проводиться в форме практического занятия, включать в себя анализ предыдущего домашнего задания и решение типовых задач в рамках нового материала текущего занятия.

В элективном курсе «Объемы круглых тел в задачах» применяется технология обучения математике с помощью ключевых задач.

Цели элективного курса:

1.Обучающая:

- формирование различных приемов мыслительной деятельности;
- изучение нового материала;
- обучение решению задач.

2. Воспитательная:

- формирование уверенности в своих знаниях;
- воспитывать самостоятельность в учебной деятельности.

3. Развивающая:

- развивать абстрактное мышление и пространственное воображение;
- развивать интерес к предмету.

Цель: Закрепление теоретических знаний по теме «Тела вращения» и выработка навыков и умений обучающихся при решении задачи на вычисление объемов круглых тел.

Задачи курса.

1. Обобщить и систематизировать знания, полученные на уроках геометрии в 7-11 классах на задачах уровня ЕГЭ.
2. Отработать методы решения ключевых задач на вычисление объема круглых тел и их комбинаций различными методами, в том числе векторным и координатным.
3. Выработать умение применять знания при решении практико-ориентированных задач.
4. Углубить знания, полученные в курсах «Планиметрия» и «Стереометрия» на уроках базового курса.
5. Расширить представления учащихся о приёмах и методах решения задач на вычисление круглых тел.
6. Развивать навыки выполнения задач на построение.

Методы, используемые на занятиях:

- объяснительно-иллюстративный;
- продуктивный.

Формы обучения:

- лекционные занятия;
- практические занятия;
- занятия в форме свободного обсуждения;
- контрольные занятия.

Формы контроля:

- текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется в результате выполнения обучающимися домашних заданий;
- итоговый контроль осуществляется проведением контрольной работы в письменном виде.

Формы организации деятельности:

- индивидуальная;
- парная;
- групповая.

Планируемые результаты.

В результате изучения курса учащиеся должны уметь решать задачи на вычисление объемов круглых тел.

Список источников для проектирования элективного курса [2, 3, 5, 8, 11, 23, 28, 32]. Тематическое планирование элективного курса представлено в таблице 6.

Таблица 6 - Тематическое планирование

№	Наименование тем	Кол-во часов
1	Вводное занятие. Изучение основных формул, определений и свойств тел вращения. Решение простейших типовых задач.	3
2	Задачи на вписанные и описанные тела вращения и на их комбинации, на вычисление их объемов.	3
3	Задачи на сечения, их комбинации и вычисление объемов усеченных фигур, вписанных и описанных тел вращения.	2
4	Стереометрические задачи, предусматривающие использование методов начал анализа применительно к вычислению объемов тел вращения.	2
5	Применение декартовых координат и векторов при решении геометрических задач по теме «Тела вращения».	2
6	Контрольная работа в письменной форме.	2
7	Завершающее занятие.	2

План проведения элективного курса «Объемы круглых тел в задачах»

1. Вводное занятие. Изучение основных формул, определений и свойств тел вращения. Решение простейших типовых задач.

На первом занятии вспоминаются понятия объема тела, рассматриваются виды тел вращения, определения цилиндра, конуса, шара.

Рассматриваются основные соотношения и формулы для:

- прямых и усеченных конусов;
- прямых цилиндров;
- сфер, шаровых секторов, сегментов.

Решаются простейшие задачи на вычисление объема круглых тел (базовый уровень ЕГЭ).

Рассматриваемые понятия и их определения:

Объёмом тела называется положительная величина, определённая для тела так, что:

- равные тела имеют равные объёмы;
- если тело составлено из конечного числа тел, то его объём равен сумме их объёмов [2]. Эти два свойства — основные свойства объёма [2].

Шаром называется фигура, образованная всеми точками пространства, находящимися от данной точки на расстоянии, не больше данного, (положительного) расстояния. Эта точка называется центром шара, а данное расстояние — его радиусом [2]. Шар получается путем вращения вокруг вертикальной оси круга [2].

Цилиндр - это тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1 [5]. Цилиндр получается путем вращения прямоугольника вокруг своей оси симметрии [2].

Конус — тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L [5]. Конус получается путем вращения вокруг своей оси равнобедренного треугольника [2].

Формулы объемов:

Объём цилиндра: $V = \pi R^2 H$,

где R – радиус основания цилиндра,

H – высота цилиндра.

Объём конуса: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$,

где R – радиус основания конуса,

h – высота конуса.

Объём шара: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$,

где R – радиус шара.

Объём усеченного конуса: $V = \frac{\pi h(R_1^2 + R_2^2)}{3}$,

где R_1 и R_2 – радиусы оснований конуса, h – высота конуса

Объём шаровой сегмента: $V = \frac{\pi h(h^2 + 3r^2)}{6}$

или

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

где R – радиус шара,

h – высота сегмента,

r – радиус основания сегмента

Вопросы и устные упражнения

(используются на всех уроках в качестве актуализации знаний):

1. «В каком цилиндре его сечение плоскостью, параллельной оси, может являться квадратом?» [8].
2. «Цилиндр катится по плоскости. Какая фигура описывается при этом его осью?» [47].
3. Приведите примеры использования в быту и в технике предметов, имеющих форму цилиндра.
4. Что в переводе с греческого означает термин «конус»? [8].

5. «Назовите несколько предметов, имеющих форму конуса» [8].
6. «Назовите формулу вычисления объема цилиндра (прямого кругового)» [60].
7. «Как изменится объем цилиндра, если: а) высоту увеличить в 5 раз; б) радиус его основания увеличить в 5 раз; в) радиус основания и высоту увеличить в 5 раз?» [8].
8. «Найдите емкость цилиндрической банки (в литрах), диаметр которой 2 дм, высота 1 дм» [45].
9. «Игрушечное ведро имеет размеры, в 10 раз меньшие, чем настоящее ведро, вмещающее 12 л воды. Сколько воды вмещает это ведро?» [62].
10. «Какая высота должна быть у водонагревателя цилиндрической формы диаметром 40 см, чтобы вместить 20 л воды?» [8].
11. «Первая кружка вдвое выше второй, но вторая вдвое шире первой. Какая из этих кружек вместительнее?» [43].
12. «По какой формуле вычисляется объем конуса?» [8].
13. «Назовите формулу для вычисления объема конуса через радиус и через диаметр основания конуса» [8].
14. «Как изменится объем конуса, если: а) высоту его увеличить в 3 раза; б) радиус его основания увеличить в 3 раза; в) радиус его основания и высоту увеличить в 4 раза?» [40].
15. «Радиус основания конуса увеличен в 2 раза. Во сколько раз надо уменьшить его высоту, чтобы объем конуса не изменился?» [8].
16. «Сколько литров воды вмещает сосуд конической формы, высота которого 30 см, а диаметр основания 20 см» [8].
17. «Диаметр парового котла, имеющего форму полушара, равен 6 м. Чему равен объем этого котла?» [8].
18. «Как надо изменить радиус шара R , чтобы получить шар, объем которого больше данного: а) в 8 раз; б) в 27 раз; в) в 2 раза; г) в n раз?» [36].

Задачи к уроку (базовый уровень ЕГЭ)

Цилиндр

1. «В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает высоты 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого? Ответ выразите в см» [32].
2. «В цилиндрический сосуд налили 6 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см» [29].
3. «В бак, имеющий форму цилиндра, налито 5 л воды. После полного погружения в воду детали, уровень воды в баке поднялся в 1,2 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров» [22].
4. «Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объём второй кружки больше объёма первой?» [10].

Конус

1. «В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает высоты. Объём сосуда 1400 мл. Чему равен объём налитой жидкости? Ответ дайте в миллилитрах» [11].
2. «В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?» [32].
3. «Через точку, лежащую на высоте прямого кругового конуса и делящую её в отношении 1 : 2, считая от вершины конуса, проведена плоскость, параллельная его основанию и делящая конус на две части. Каков объём той части конуса, которая примыкает к его основанию, если объём всего конуса равен 54?» [5].

Шар

1. «Чему равно отношение объемов двух шаров, радиусы которых 1 и 2 см?» [4].
2. «Однородный шар диаметром 3 см имеет массу 162 грамма. Чему равна масса шара, изготовленного из того же материала, с диаметром 2 см? Ответ дайте в граммах» [2].
3. «Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его сегмента равен 4 см, а радиус шара – 5 см?» [32].

Задачи к уроку (профильный уровень ЕГЭ)

Цилиндр

1. «В цилиндрический сосуд налили 2000 см³ воды. Уровень воды
2. при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см³.» [3].
3. «Объем первого цилиндра равен 12 м³. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.» [1].
4. «В цилиндрический сосуд налили 6 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.» [4].
5. «Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.» [32].

Конус

1. «Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?» [32].
2. «Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 1,5 раза, а высота останется прежней?» [5].

3. «Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π .» [8].

4. «Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .» [11].

5. «Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса» [3].

6. «Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π .» [16].

Шар

1. «Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?» [18].

2. «Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.» [24].

3. «Объем первого шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?» [32].

4. «Объем шара равен 288. Найдите площадь его поверхности, деленную на π » [22].

2. Задачи на вписанные и описанные тела вращения и на их комбинации, на вычисление их объемов

На втором занятии решаются простейшие задачи на вычисление объема вписанных и описанных тел вращения, рассматриваются задачи на комбинации тел вращения при вычислении объема тела.

Изучаются:

– соотношения между характерными элементами многогранников (призм, пирамид, усеченных пирамид) и вписанных и описанных сфер;

- формулы для объемов круглых тел, выраженные через линейные размеры вписанных и описанных фигур;
- комбинации круглых тел и их характерные геометрические особенности.

Задачи к уроку.

1. «В цилиндр вписан шар. Найдите объем шара, если объем цилиндра равен 60.» [32].
2. «Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем: а) цилиндра, если объем конуса равен 11 см^3 ; б) конуса, если объем цилиндра равен 96 см^3 » [11].
3. «Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса» [32].
4. «Объём первого цилиндра равен 12 м^3 . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра (в м^3)» [32].
5. «Найдите объем части цилиндра, изображенной на рисунке 14. В ответе укажите объем, деленный на π » [32].

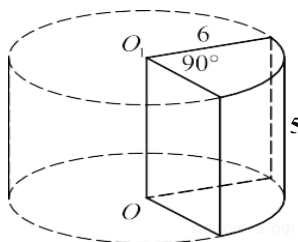


Рисунок 14 – Цилиндр

6. «Найдите объем части цилиндра, изображенной на рисунке 15. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$ » [32].

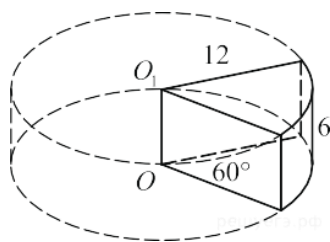


Рисунок 15– Цилиндр

7. «Найдите объем части цилиндра, изображенной на рисунке 16. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.» [32].

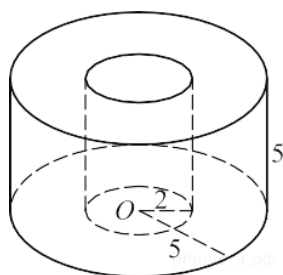


Рисунок 16 – Цилиндр

7. «Диаметр основания конуса равен 6 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса» [11].

8. «Найдите объем части конуса, изображенной на рисунке 17. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.» [32].

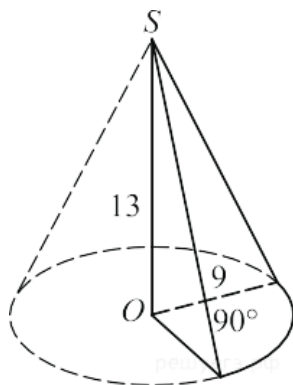


Рисунок 17–Конус

9. «Найдите объем части конуса, изображенной на рисунке 18. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.» [32].

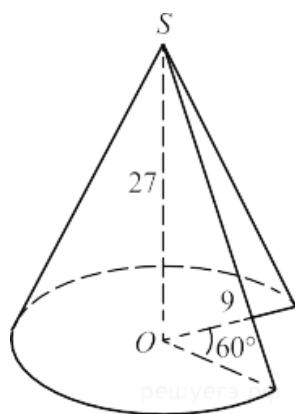


Рисунок 18 – Конус

10. «Шар, объем которого равен 60, вписан в цилиндр (рисунок 19). Найдите объем цилиндра» [32].

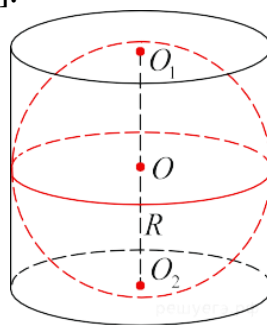


Рисунок 19 – Шар, вписанный в цилиндр

11. «Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину) (рисунок 20). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса» [11].

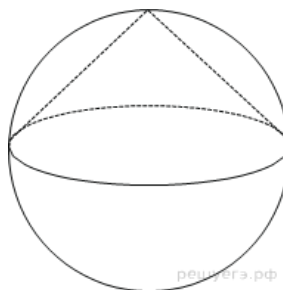


Рисунок 20 – Сфера, описанная около конуса

12. «Конус вписан в цилиндр. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 5.» [32].

13. «В конус вписан цилиндр так, что его верхнее основание пересекает высоту конуса в её середине. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 60.» [11].

14. «Шар объемом 8 вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.» [32].

15. «Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их объёмов и отношение площадей их поверхностей.» [11].

16. «В шар радиуса R вписан конус. Объём конуса составляет $\frac{1}{2}$ объёма шара. Найдите высоту конуса.» [11].

3. Задачи на сечения, их комбинации и вычисление объемов усеченных фигур, вписанных и описанных тел вращения.

Анализируется: построение сечений круглых тел при различном расположении секущих плоскостей; вычисление объемов шаровых секторов, сегментов и частей цилиндров и конусов.

Задачи к уроку

1. «Высота одного цилиндра вдвое больше высоты другого, а осевые сечения — равные прямоугольники. Найдите отношение их объёмов.» [2].

2. «Развёртка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник, диагональ которого равна d , а угол между диагоналями, обращённый к образующей, равен α . Найдите объём цилиндра.» [2].

3. «Прямоугольный треугольник ABC вращается сначала вокруг гипотенузы AB , а затем вокруг катета BC . Найдите отношение объёмов тел вращения, если угол A треугольника равен α .» [4].

4. «Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 3 см. Найдите объём тела вращения.» [3].

5. «В конус вписан шар и через их линию касания проведена плоскость. Найдите отношение объёма отсечённого конуса к объёму данного, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α .» [11].

6. «Около сферы описан усечённый конус, образующая которого составляет с большим основанием угол α . Площадь сферы равна Q . Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.» [4].

4. Стереометрические задачи, предусматривающие использование методов начал анализа применительно к вычислению объемов тел вращения.

Рассматриваются: основные положения начал анализа, используемые для решения задач геометрии; задачи на экстремальные значения, требующие исследования функций; типовые задачи на тела вращения, для решения которых используются понятие интеграла.

Задачи к уроку

1. «Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 64$, $y = -5$, $y = 5$, $x = 0$.» [28].

2. «Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс $y = x^2$, $y^2 = x$.» [28].

3. «Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0$ вокруг оси Ox » [34].

5. Применение декартовых координат и векторов при решении геометрических задач по теме «Тела вращения».

Изучаются:

- свойства декартовых координат и векторов, используемые для решения геометрических задач;

- типовые задачи на тела вращения, для решения которых целесообразно использовать декартовы координаты и свойства векторов.

Задачи к уроку

1. «В сферу радиуса R вписан конус. При какой высоте конуса его объём будет наибольшим?» [28]
2. «Найти высоту и объём прямоугольника периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует цилиндр наибольшего объёма.» [34].

6. Контрольная работа в письменной форме (Таблица 7)

Таблица 7 – Текст контрольной работы

1 ВАРИАНТ	2 ВАРИАНТ
1. Найдите объём конуса, диаметром 5 см и высотой 4 см. 2. Объём цилиндра равен $100\pi \text{ м}^3$. Чему равен радиус основания, если высота равна 4 м? 3. В цилиндрический сосуд налили 5000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 14 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 7 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 . 4. В цилиндр вписан шар. Найдите объём шара, если объём цилиндра равен 25. 5. Во сколько раз уменьшится объём конуса, если его высоту уменьшить в 3 раза?	1. Найдите объём конуса с диаметром 8 см и высотой 3 см. 2. Объём цилиндра равен $80\pi \text{ м}^3$. Чему равна высота, если радиус основания равен 4 дм? 3. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 . 4. В цилиндр вписан шар. Найдите объём шара, если объём цилиндра равен 40. 5. Во сколько раз увеличится объём конуса, если его радиус основания увеличить в 4 раза?

7. Завершающее занятие

На последнем занятии проводится разбор заданий контрольной работы, обсуждаются основные ошибки, подводятся итоги курса, рефлексия деятельности учащихся.

Система задач на вычисление объемов круглых тел для базового и профильного уровня в рамках элективного курса

Тема «Объемы круглых тел» состоит из следующих подтем: объём цилиндра; объём конуса; объём усеченного конуса; объём шара; объём шарового сегмента и сектора [10].

Рассмотрим системы задач по каждой из этих тем.

Система задач на тему «Объем цилиндра».

Задача 1. «Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно a , описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите объем цилиндра и площадь боковой поверхности цилиндра.» [39].

Задача 2. «Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.» [32].

Задача 3. «Высота бака цилиндрической формы равна 20 см, а площадь его основания 150 см^2 . Чему равен объем этого бака (в литрах)? В одном литре 1000 см^3 .» [32].

Задача 4 «Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.» [32].

Система задач на тему «Объем конуса».

Задача 5. «Пусть h , r и V соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите объем, если высота равна 3 см, а радиус основания 1,5 см.» [5].

Задача 6. «Докажите, что объем конуса равен одной шестой произведения площади осевого сечения на длину окружности основания.» [39].

Задача 7. «Найдите объем и площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см вокруг прямой, проходящей через вершину меньшего угла треугольника параллельно меньшей его стороне.» [39].

Система задач на тему «Объем усеченного конуса».

Задача 8. «В усеченном конусе проведены диагонали всех осевых сечений. Диагонали каждого осевого сечения взаимно перпендикулярны, равны d и делят друг друга в отношении 1:3. Найдите объем усеченного конуса.» [38].

Задача 9. «Радиусы оснований усеченного конуса R и r ($R > r$), образующая наклонена к плоскости основания под углом в 45° . Найдите объем.» [39].

Задача 10. «Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 21 см, а его образующая 30 см. Плоскость, параллельная основаниям, делит боковую поверхность конуса на равновеликие части. Найдите отношение объемов полученных усеченных конусов.» [39].

Система задач на тему «Объем шара».

Задача 11. «В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 см. Найдите объем шара, если каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угла.» [38].

Задача 12. «Прямая треугольная призма, стороны основания которой равны 29 см, 35 см и 48 см, описана около шара. Найдите объемы шара и призмы.» [39].

Задача 13 «В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Расстояние от центра шара до стороны основания пирамиды равно 5 дм, а до бокового ребра – 3 дм. Найдите объем и площадь поверхности шара.» [38].

Задача 14. «Найдите отношение объемов шара радиуса R и равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен радиусу шара.» [39].

Задача 15. «Около шара описаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. Докажите, что объем цилиндра есть средняя пропорциональная величина между объемами шара и конуса.» [39].

Система задач на тему «Объем шарового сегмента и сектора»:

Задача 16. «Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см?» [5].

Задача 17. «Шар радиуса 10 см пересечен плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объем отсеченного шарового сегмента.» [38].

Задача 18. «Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его сегмента равен 60 см, а радиус шара – 75 см?» [38].

Задача 19. «Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объем получившегося шарового сектора.» [5].

Учитывая значимость правильного восприятия геометрических тел как образов реальных объектов, представляется целесообразным изучение темы об объемах круглых тел в рамках системы задач повышенной трудности.

Наиболее сложными задачами считаются задачи на комбинацию тел вращения по сравнению с другими задачами с круглыми телами.

Такие задачи обычно вызывают значительные затруднения у многих выпускников. В большинстве случаев, их решение требует достаточно развитого пространственного воображения, аккуратности и определённых навыков по решению задач планиметрии.

Приведем решение одной из таких задач.

Задача 6.1. Вычислить объем «рожка с мороженым» в виде фигуры, изображенной на рисунке и состоящей из конуса с высотой h_1 и шарового сегмента высотой h_2 , который виден из центра шара под углом α .

Решение:

Объем шарового сегмента вычисляется по формуле:

$$V_1 = \pi h_1^2 \left(R - \frac{1}{3} h_1 \right),$$

где R – радиус шара. Учащиеся из прямоугольного треугольника $BCD(O_1$ – центр шара) (рисунок 21) определяют следующие зависимости:

$$\widehat{BDC} = \frac{\alpha}{2}, \quad |OC| = h_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{|OC|}{2R-h_1} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$2R = h_1 + |OC| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$R = \frac{1}{2}(h_1 + h_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \frac{h_1}{2 \sin^2 \alpha}.$$

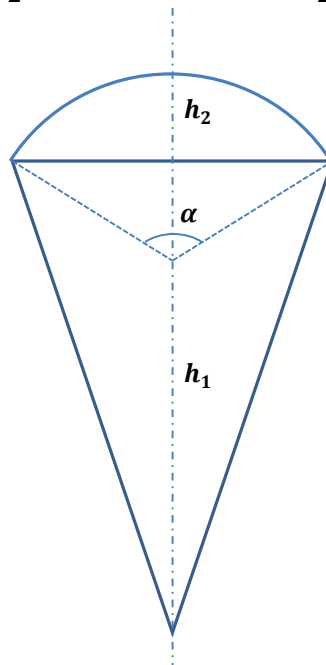


Рисунок 21 — Осевое сечение рожка

Таким образом, $V_1 = \pi h_1^2 \left(\frac{h_1}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{3} h_1 \right) = \pi h_1^3 \frac{3-2 \sin^2 \alpha}{6 \sin^2 \alpha}.$

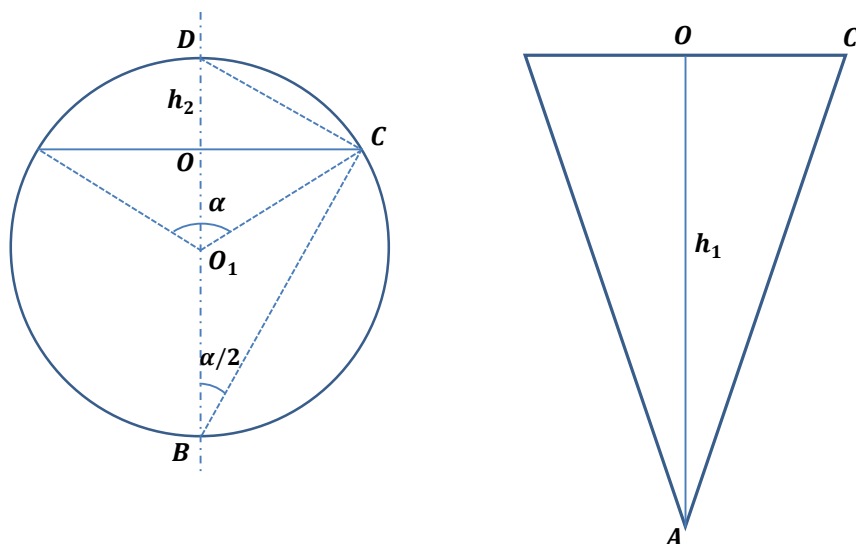


Рисунок 22 — Осевое сечение сферы и конуса

Далее, учащиеся определяют объем самого «рожка» с помощью высоты конуса h_2 и радиуса r его основания (рисунок 22):

$$r = |OC| = h_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Получаем:

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi h_1^2 h_2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

На заключительном шаге вычисляем искомый объем:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi h_1^2 \left(h_2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + h_1 \frac{3 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \right).$$

Использование задач, на комбинации тел вращения [3, 5], позволяет реально учесть уровневую дифференциацию, мотивировать учащихся к преодолению соответствующих «рубежей» в образовательном процессе.

В качестве еще одного примера приведем решение задачи из нескольких пунктов ко второму занятию элективного курса.

Чтобы решить эту задачу требуются знания как планиметрии, так и тригонометрии. Следует проверить готовность к этому учащихся непосредственно на занятии либо с помощью предшествующего домашнего задания.

Задача 6.2.

Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, двугранный угол между боковыми гранями пирамиды равен $\arccos \frac{7}{32}$. Точки A_1 и B_1 – середины ребер AD и BD соответственно, BC_1 – высота в треугольнике DBC (рисунок 23).

Найти:

- 1) площадь треугольника $A_1 B_1 C_1$;
- 2) объем шара, вписанного в пирамиду $ABCD$;
- 3) радиус вписанного в пирамиду $A_1 B_1 C_1 D$ шара [61].

Решение: Для решения задачи по первому пункту, учащиеся рассматривают сечение пирамиды плоскостью $A_1B_1C_1$ (рисунок 23) и находят площадь $\Delta A_1B_1C_1$, используя угол α : $S = \frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \sin \alpha$, где $\alpha = \widehat{A_1B_1C_1}$.

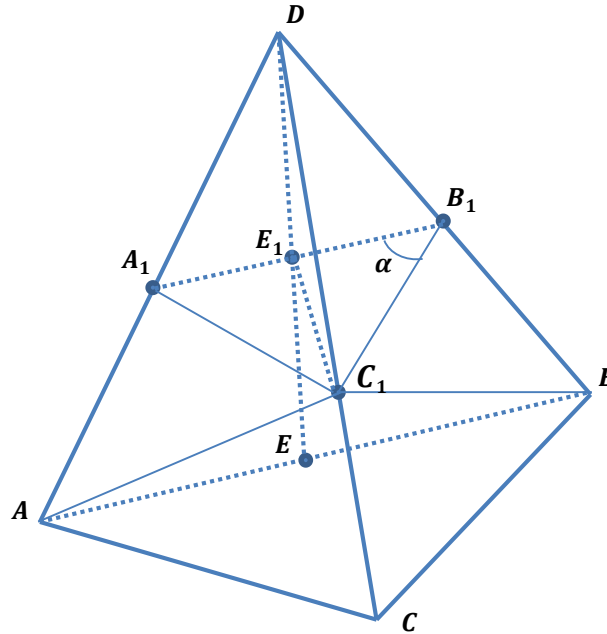


Рисунок 23 – Правильная треугольная пирамида.

Затем, самостоятельно определяют вид $\Delta A_1B_1C_1$ и записывают выражение для вычисления угла α : $\cos \alpha = \frac{E_1B_1}{B_1C_1} = \frac{3}{2 \cdot B_1C_1}$.

Таким образом, задача сводится к вычислению длины отрезка B_1C_1 . Для учащихся это означает решение задачи из планиметрии о вычислении медианы в ΔBC_1D (рисунок 24).

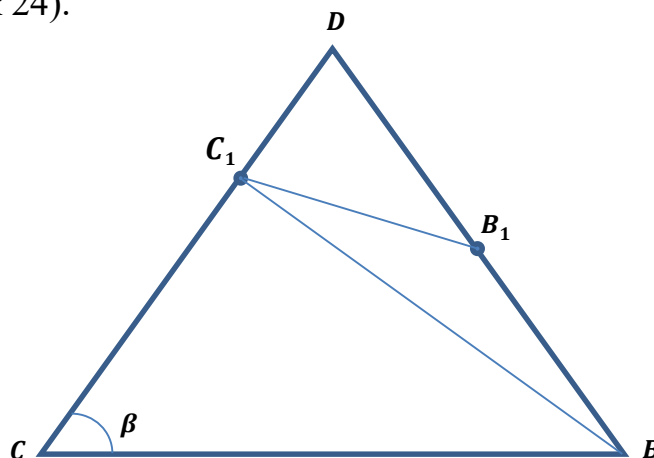


Рисунок 24 – Сечение пирамиды

Можно предложить учащимся воспользоваться стандартной формулой для медианы треугольника:

$$B_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2C_1D^2 + 2BC_1^2 - BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(CD - 6\cos\beta)^2 + 2(6\sin\beta)^2 - BD^2}$$

$$CD = BD = \frac{3}{\cos\beta}, \quad \sin\beta = \frac{BC_1}{6}.$$

Очевидно, для решения задачи необходимо вычислить длину отрезка BC_1 , что можно сделать, используя второе, пока незадействованное исходное условие задачи:

$$\gamma = \widehat{AC_1B} = \arccos\frac{7}{32}, \quad \cos\gamma = \frac{7}{32}.$$

Получаем:

$$BC_1 = \frac{BE}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}} = \frac{24}{5}.$$

Таким образом,

$$\sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}, \quad CD = BD = 5,$$

$$B_1C_1 = \frac{5}{2}$$

и, соответственно:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{2 \cdot B_1C_1}\right) = \arccos\frac{3}{5}.$$

Подставляя найденное значение угла α , находим:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot B_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{5} = 3.$$

Для решения задачи по второму пункту учащиеся сначала самостоятельно находят объем V пирамиды $ABCD$, исходя из стандартных базовых знаний:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot H = 3\sqrt{39}.$$

Площадь полной поверхности пирамиды равна:

$$S_{\text{пов.}} = S_{ABC} + 3S_{ABD} = 9\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2}CD \cdot BC \cdot \sin\beta = 9\sqrt{3} + 36.$$

Тогда, радиус вписанного шара равен:

$$r = \frac{3V}{S_{\text{пов.}}},$$

$$r = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{3} + 4}.$$

Объем вписанного шара равен:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$V = \frac{156\sqrt{36}}{3(\sqrt{3} + 4)^3}\pi.$$

Заметим, что:

$$V_{ABCC_1} = \frac{CC_1}{CD}V = \frac{18}{25}V,$$

$$V_{ABDC_1} = \frac{7}{25}V,$$

$$S_{A_1B_1B} = \frac{1}{4}S_{ABD},$$

$$V_{A_1B_1BC_1} = \frac{1}{4}V_{ABDC_1} = \frac{7}{100}V.$$

Наконец по третьему пункту, учащиеся вновь используют стандартную формулу для вписанного шара:

$$R = \frac{3V_{A_1B_1C_1D}}{S_{\text{пов.}}} = \frac{63\sqrt{39}}{100S_{\text{пов.}}},$$

где $S_{\text{пов.}}$ — площадь полной поверхности пирамиды $A_1B_1C_1D$:

$$S_{\text{пов.}} = S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1B_1D} + 2S_{B_1C_1D}$$

Далее следует:

$$S_{A_1B_1D} = \frac{1}{4}S_{ABD} = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$$

$$S_{B_1C_1D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CD - 6 \cos \beta}{CD} S_{BCD} = \frac{7}{50} S_{ABD} = \frac{42}{25}.$$

В результате получаем:

$$R = \frac{63\sqrt{39}}{100\left(6+\frac{84}{25}\right)} = \frac{7\sqrt{39}}{104}.$$

Задачи, аналогичные рассмотренной по структуре и учитывающие основные позиции элективного курса и уровневую дифференциацию учащихся, являются хорошим стимулом для достижения цели формирования мотивации к учебно-познавательной деятельности.

Приведем варианты задач для базового и профильного уровня.

Задачи для базового уровня.

1. Найти отношение объема шара к объему конуса, если шар вписан в конус, сечением которого является треугольник [32].
2. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Основание конуса вписано в основание пирамиды, при этом их вершины совпадают. Найти отношение объемов конуса и пирамиды [40].
3. Найти объем конуса, полученного путем вращения отрезка прямой $y = x$, $0 \leq x \leq 1$ вокруг: оси x ; оси y [39].
4. Конус и цилиндр имеют одинаковое основание r и равные высоты h . Найти отношение объема конуса к объему шара, описанного вокруг цилиндра [36].
5. Найдите объем шарового сектора, который получится путем вращения кругового сектора под углом $\alpha = 30^\circ$ вокруг одного из граничных радиусов [32].
6. Найти площадь сечения шара радиуса 1 плоскостью, отстоящей от центра шара на расстояние 0,5 [29].

Задачи для профильного уровня.

1. Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани. Найти отношение объемов шара, ограниченного этой сферой, и куба [10].

2. Две противоположные вершины куба являются центрами оснований цилиндра, а остальные вершины лежат на его боковой поверхности. Найти отношение объемов цилиндра и куба [24].

3. Высота конуса равна диаметру его основания. В конус вписан куб так, что его четыре вершины расположены на основании, а четыре оставшиеся на боковой поверхности конуса. Найти отношение объемов куба и конуса [18].

4. Найти объем шара, вписанного в тетраэдр, если объемы вневписанных шаров равны: V_1, V_2, V_3 и V_4 [5].

5. Найти объем тела, полученного вращением фигуры $y = \cos x$,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ вокруг:}$$

– оси Ox ;

– оси Oy [24].

6. Оси двух бесконечных прямых круговых цилиндров радиуса r каждый, пересекаются под углом α . Найти объем пересечения цилиндров [11].

7. Найти объем тора, полученного вращением круга радиуса r , центр которого удален от оси вращения на расстояние l [39].

Данная система задач, удовлетворяет следующим условиям:

- охватывает все основные виды заданий;
- направлена на формирование прикладных умений;
- способствует усвоению основных формул для вычисления объемов круглых тел;
- содержит задания разного уровня.

Для составления данной системы задач использовались учебники, методические пособия и задачки по геометрии для общеобразовательных учреждений разных авторов [5, 10, 11, 18, 24, 29, 32, 36, 38, 39, 40] и материалы сайта «Решу ЕГЭ» [32].

2.3. Педагогический эксперимент и его результаты

Практическая апробация экспериментальной программы элективного курса «Объемы круглых тел в задачах» проводилась на базе МАОУ «Гимназия №1» г.о. Балашиха Московской области.

В апробации были задействованы учащиеся 11«а» класса, изъявившие желание получить базовые и дополнительные знания в рамках элективного курса «Объемы круглых тел в задачах».

В таблице 8 представлен фактический план занятий по элективному курсу «Объемы круглых тел в задачах».

Таблица 8 – Фактический план занятий по элективному курсу «Объемы круглых тел в задачах»

№	Тема	Дата
1	Вводное занятие. Изучение основных формул, определений и свойств тел вращения. Решение простейших типовых задач.	19.10.2020
2	Вводное занятие. Изучение основных формул, определений и свойств тел вращения. Решение простейших типовых задач. Задачи на вписанные и описанные тела вращения и на их комбинации, на вычисление их объемов.	21.10.2020
3	Задачи на вписанные и описанные тела вращения и на их комбинации, на вычисление их объемов.	02.11.2020
4	Задачи на сечения, их комбинации и вычисление объемов усеченных фигур, вписанных и описанных тел вращения.	04.11.2020
5	Стереометрические задачи, предусматривающие использование методов начал анализа применительно к вычислению объемов тел вращения.	09.11.2020
6	Применение декартовых координат и векторов при решении геометрических задач по теме «Тела вращения».	11.11.2020
7	Контрольная работа в письменной форме.	16.11.2020

В рамках курса было проведено семь занятий по 2 академических часа каждое.

Большинство учащихся успешно овладели знаниями по базовым понятиям.

Задачи на нахождение объема тел вращения после прохождения курса практически перестали вызывать затруднения, а значит, повысились предметные компетенции учащихся.

Представим результаты итоговой контрольной работы в таблице 9.

Таблица 9 – Результаты контрольной работы

Номер задания	Решили правильно	Решили неправильно	Не приступали к решению
1	80%	20%	0%
2	70%	30%	0%
3	60%	30%	10%
4	40%	40%	20%
5	20%	40%	40%

Наибольшие затруднения у учащихся вызвали задания №4 и №5. Приведем анализ типичные ошибок учащихся (таблица 10) и количественный анализ результатов (таблица 11).

Таблица 10 – Типичные ошибки учащихся

№ задания	Неверный выбор способа решения	Неверное использование формул	Ошибка в вычислениях
1	0%	0%	20%
2	0%	10%	10%
3	0%	10%	10%
4	10%	20%	20%
5	20%	10%	10%

Таблица 11 – Анализ результатов контрольной работы

Оценка	Количество учащихся
5	10%
4	40%
3	45%
2	5%

На констатирующем этапе экспериментальной работы по завершении курса занятий учащимся были заданы следующие вопросы:

- Были ли занятия в лекционной форме интересны для Вас?
- Какой материал вызвал у Вас наибольшие затруднения?
- Какой материал оказался наиболее легким?
- Считаете ли Вы полезными для себя знания, полученные во время посещения занятий?

Учащиеся посчитали курс интересным и познавательным. Учащиеся испытывали затруднения в изучении тем №5 и №6, задавали вопросы, просили пояснить решение задач.

По завершении экспериментальной работы её результаты обсуждались среди педагогического состава кафедры математики МАОУ «Гимназия №1».

Было отмечено повышение познавательной активности обучающихся в ходе проведения занятий элективного курса, замечаний и предложений по организации программы курса не было.

Выводы по второй главе

1. Рассмотрены методические основы обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел и рассмотрена система задач в рамках элективного курса.

2. Элективный курс направлен на получение учащимися ценностных ориентиров:

- формирование умения к логическим рассуждениям;
- формирование интеллектуальных умений, в том числе, выбор стратегии решения задач, анализ и сопоставление данных;
- развитие учебно-познавательной активности и ее индивидуализация;
- формирование способностей выявлять закономерности;
- привлечение учащихся к групповой деятельности и обмену своими предложениями в ходе свободного общения на занятиях.

Предложенная система задач в рамках элективного курса с учетом дифференцированного подхода даёт возможность систематизировать знания и показать учащимся, что решение даже сложных, на первый взгляд, стереометрических задач сводится к решению простейших типов задач планиметрии.

3. Проведён педагогический эксперимент, который состоял из обучающего, контролирующего и констатирующего этапов. Обучающий этап представлял собой изучение темы «Объемы круглых тел в задачах» на элективном курсе, разработку и внедрение методики решения задач по теме «Тела вращения». Контролирующий этап состоял в определении результативности проведенной работы посредством анализа результатов зачётного занятия. Представленные результаты проведенного эксперимента, показали, что большинство учащихся владеет навыками решения задач по данной теме, но изучение данной темы требует дополнительного времени.

Заключение

Задачи на вычисление объемов круглых тел описывают многие явления реального мира. Обучение решению таких задач способствует развитию геометрического мышления и пространственного воображения учащихся. Тема «Тела вращения» является обязательной к изучению в курсе геометрии 10-11 класса и знания по ней подлежат проверке в ходе проведения единого государственного экзамена по математике базового и профильного уровней.

В ходе проведенного исследования по данной теме описаны основные цели и задачи обучения решению задач на вычисление объемов круглых тел в школьном курсе геометрии. Проведен содержательно-методический анализ теоретического материала по теме «Объемы круглых тел». Предложен алгоритм решения стереометрических задач по данной теме. Типология задач охватывает все основные виды задач и методы их решения.

Разобраны задачи различной степени сложности, и в том числе, приведены решения некоторых многоступенчатых задач. Также, разобраны задачи, решение которых требует твердых метапредметных знаний.

Рассмотренная методическая схема решения задач нацелена на учащихся различной степени подготовки и с различным уровнем мотивации, в том числе, и тем, кто желает не только быть успешным на школьных занятиях, но и подготовиться к поступлению в высшее учебное заведение и успешно в нем обучаться.

В работе приведены методические особенности создания элективного курса по геометрии, предложена система задач. Описаны результаты эксперимента. По результатам проведенного эксперимента можно сказать, что реализация разработанного элективного курса показала его эффективность. Таким образом, поставленные задачи исследования разрешены, и цель данной работы достигнута.

Список используемой литературы

1. Азевич, А.И. Задачи по геометрии. 10-11 классы: дидактические материалы и контрольные работы. – М.: Школьная Пресса, 2005. – 144 с.
2. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик – 4-е изд. – М.: Рос. акад. наук, Рос. акад.- образования, изд-во «Просвещение», 2006. – 240 с.
3. Александров, А.Д. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб.пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик – Висагинас, Alfa, 1998. – 576 с.
4. Александров, А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. для 10 кл. школ с углубл. изучением математики. / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик – 4-е изд., дораб. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад. образов., изд-во «Просвещение», 2006; – 270 с.
5. Атанасян, Л. С. Геометрия [Текст] : учеб.пособие. В 2 ч. Ч. 2. - Москва: Просвещение, 1987. - 352 с. : ил. - Библиогр.: с. 348. - 1-10.
6. Бабанский, Ю. К. Избранные педагогические труды [Текст] / [сост. М. Ю. Бабанский ; АПН СССР]. - Москва : Педагогика, 1989. - 560 с. - Библиогр: с. 547-555. - 2-70.
7. Беспалько, В.П. Слагаемые педагогической технологии. – М.: Педагогика, 1989.- 192 с.
8. Виноградова, А. В. Устные упражнения по стереометрии / А. В. Виноградова. — Москва : Прометей, 2014. — 130 с. — ISBN 978-5-9905886-7-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/30416.html> (дата обращения: 22.12.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
9. Всероссийский проект Открытые уроки : официальный сайт. – Москва – Обновляется в течение суток. – <https://открытыеуроки.рф/> (дата обращения 01.06.2020). – Текст : электронный.

10. Гавришко, А.А. Методика обучения теме «Объемы геометрических тел» в курсе геометрии общеобразовательной школы. Магистерская диссертация – ТГУ, 2018. – 122 с.
11. Готман, Э. Г. Стереометрические задачи и методы их решения. — М.: МЦНМО, 2006. — 160 с.: ил. — ISBN 5-94057-263-4.
12. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Изд-во «Вербум – М», «Издательский центр «Академия», 2003. – 432 с.
13. Давыдов, В. В. Организация развивающего обучения в V-IX классах средней школы // Психологическая наука и образование – 1997 с.
14. Дорофеев, Г.В. Чертеж в геометрической задаче / Г.В. Дорофеев, Н.Х. Розов // Квант. –1976. – №6. – с. 49-56.
15. Дорофеев, С.Н. Деятельностный подход к обучению старшеклассников распознаванию геометрических образов / С.Н. Дорофеев, Н.В. Наземнова // Азимут научных исследований: педагогика и психология. - 2017. - Т. 6. - № 2 (19). - С. 52-55.
16. Дубровский, В. Учимся работать с «Математическим конструктором» // Математика / Ежегод. учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». – 2009. – № 13. – с. 2–48.
17. Ермак, Е.А. Развитие пространственного мышления при изучении геометрии: Учебное пособие. Псков: Псковский государственный университет, 2014. – 48 с.
18. Жафяров, А. Ж. Элективные курсы по геометрии для профильной школы : учебно-дидактический комплекс / А. Ж. Жафяров. — Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2017. — 509 с. — ISBN 978-5-379-02030-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/65269.html> (дата обращения: 20.12.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей.
19. Жовнир, Я.М. Фузионизм в системе преподавания геометрии в средней школе. Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. пед. наук. Киев, 1970. – 20 с.

- 20.Занкова, Л.В.: развитие, творчество, достижения: материалы межрегион. научно-практич. конф., посвященной 60-летию системы развивающего обучения Л.В. Занкова / под ред. О.Н. Нагаевой ; Обл. гос.бюдж. учр-е дор. профессион. образ-я «Ряз. Ин-т развития образования». – Рязань, 2017. – 109с .
- 21.Зорина, Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. М., «Педагогика», 1978. Ермак Е.А. Развитие пространственного мышления при изучении геометрии: Учебное пособие. Псков: Псковский государственный университет, 2014. – 48 с.
- 22.Имайкина, В.М. О теме «Длина, площадь, объем» в старших классах гуманитарного профиля // Матем. обр., 2014. – выпуск 4(72). – С. 16-28.
- 23.Калинин, А.Ю. Геометрия. 10-11 классы. / Калинин А.Ю., Терешин Д.А. – Новое изд., испр. и доп.–М.: МЦНМО, 2011. – 640 с.
- 24.Калинин, А.Ю. Стереометрия 11: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики/ Калинин А.Ю., Терешин Д.А. – М.: МФТИ, 2005. – 336 с.
- 25.Кларин, М.В. Инновации в мировой педагогике: обучение на основе исследования, игры и дискуссии. (Анализ зарубежного опыта) - Рига, НПЦ «Эксперимент», 1995 - 176 с.
- 26.Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе [Текст] : Общая методика: учеб.пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. институтов. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Просвещение, 1980. - 367 с. : ил. - Библиогр.: с. 351-364. - 0-95.
- 27.Концепция развития математического образования в Российской Федерации: утв. распоряжением Правительства РФ от 24 дек. 2013 г. № 2506-р. [Электронный ресурс] // Режим доступа:
<http://www.apmath.spbu.ru/docs/metod/1391175942.pdf>
28. Лопатко, И.Г. Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла / И.Г. Лопатко – Текст : электронный // Инфоурок.ru : [сайт]. – 2020. – 02 сентября – <https://infourok.ru/otkritiy-urok-po-matematike-na-temu->

vichislenie-obemov-tel-vrascheniya-s-pomoschyu-opredelennogo-integrala-1809886.html

29. Лыхина, И.А. Методика изучения темы «Тела вращения» в старшей школе [Электронный ресурс] : выпускная квалификационная работа бакалавра : 44.03.05 / И. А. Лыхина. — Лесосибирск : СФУ; ЛПИ — филиал СФУ, 2019. Режим доступа: <http://elib.sfu-kras.ru/>— Последнее обновление 17.12.2020
30. Мишин, В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ. мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. — Москва: Просвещение, 1987. — 416 с.
31. Настольная книга учителя математики. Нормативные документы, методические рекомендации и справочные материалы для организации работы учителя / Сост. Л.О. Рослова. М.: при обучении геометрии. / Современные проблемы Астрель, 2004. — 429 с.
32. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://ege.sdamgia.ru/>. — Последнее обновление 11.09.2020.
33. Ольбинский, И.Б. Методика обучения учащихся старших классов рефлексивному исследованию математических задач. Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. пед. наук. Москва, 2002. — 22 с.
34. Официальный сайт ООО «Инфоурок» - курсы, тесты, видеолекции, материалы для учителей. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://infourok.ru/>. — Последнее обновление 11.09.2020.
35. Перельман, Я.И. Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? // Математика в школе, 2016. № 1. с. 25–30.
36. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и профил. уровни / А.В. Погорелов. — 13-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 175с.

- 37.Поздняков, С.Н. Информационная среда как новый фактор обучения математике / Всероссийская конференция «Математическое образование на рубеже веков». М.: МЦНМО, 2000. – с. 208–211.
- 38.Потоскуев, Е. В. Геометрия [Текст] : 10 кл. : задачник для кл. с углубл. и профильным изучением математики / под науч. ред. А. Р. Рязановского. - Москва : Дрофа, 2003. - 250 с. : ил. - ISBN 5-7107-5597-4 : 35-95.
- 39.Потоскуев, Е. В. Геометрия [Текст] : 11 кл. : задачник для кл. с углубл. и профильным изучением математики / под науч. ред. А. Р. Рязановского. - Москва : Дрофа, 2003. - 235 с. : ил. - ISBN 5-7107-6988-6 : 33-15.
- 40.Саакян, С.М. Изучение геометрии в 10-11 классах: кн. для учителя. 4-е изд., дораб. / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов– М.: Просвещение, 2010. – 248 с.
- 41.Саакян, С.М. Изучение темы «Цилиндр, конус, шар» в 11 классе / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов // Математика в школе. – 2002. – № 5. – С. 25.
- 42.Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике [Текст] . - Москва : Просвещение, 1995. - 240 с. : ил. - (Библиотека учителя математики). - Библиогр.: с. 239. - 11500-00.
- 43.Саранцев, Г.И. Составление геометрических задач на заданных чертежах // Математика в школе. 1993. – №6. – С. 14 – 16с.
- 44.Селевко, Г. К. Педагогические технологии на основе дидактического и методического усовершенствования УВП [Текст] . - Москва : НИИ школьных технологий, 2005. - 284 с. - (Энциклопедия образовательных технологий). - ISBN 5-87953-196-1 : 30-00.с.
- 45.Сканави, М.И. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. – М.: Высшая школа, 1992. – 519 с.
- 46.Смирнова, И.М. Геометрия. 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

- 47.Смирнова, И.М. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10-11 классы : учеб.пособие для общеобразоват. учреждений / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов – М.: Мнемозина, 2007. – 64 с.
- 48.Стогова, О.В. Отдельные аспекты методики обучения теме «Тела вращения» и решению задач на вычисление объёмов круглых тел / О.В. Стогова, С.Ш. Палферова // Международный научный журнал «ВЕСТНИК НАУКИ» – 2020, №11 (32), Том 2, С. 24-31.
- 49.Стогова, О.В. О практической апробации системы задач повышенной трудности по теме «Объёмы тел вращения» / О.В. Стогова, С.Ш. Палферова // Международный научный журнал «ВЕСТНИК НАУКИ» – 2020, №11 (32), Том 2, С. 32-39.
- 50.Стогова, О.В. Обучение решению задач – основной путь повышения качества математических знаний // Совершенствование математического образования – 2020: состояние и перспективы развития: Материалы XI Международной научно-методической конференции / Под общ.ред. проф. Г.Х. Гайдаржи. – г. Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2020. – С. 377-381.
- 51.Стогова, О.В. Методика обучения решению задач на вычисление объёмов круглых тел в курсе геометрии общеобразовательной школы // образовательный портал «Инфоурок»<https://infourok.ru/referat-po-matematike-na-temu-1-metodika-obucheniya-resheniyu-zadach-na-vychislenie-obemov-kruglyh-tel-v-kurse-geometrii-obsheob-4637273.html>.
- 52.Стогова, О.В. Некоторые вопросы технологии обучения теме «тела вращения» и решению задач на вычисление объёмов круглых тел // образовательный портал «Инфоурок» <https://infourok.ru/statya-na-temu-3-nekotorye-voprosy-tehnologii-obucheniya-teme-tela-vrasheniya-i-resheniyu-zadach-na-vychislenie-obemov-kruglyh-t-4637275.html>.
- 53.Тумашева, О.В. Формирование метапредметных умений при обучении математике: проблемы и пути решения // Математика в школе. – 2016. № 4. – С. 35–38.

54. Учимся решать задачи: «Многогранники и круглые тела» // Математика. – 1999. – №3. – С.28–29.
55. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]: // Министерство образования и науки Российской Федерации. URL : <http://минобрнауки.рф/документы/543>
56. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – М.: Омега-Л, 2014. – 134 с.
57. Филатова, О.М. Типология форм обучения / О.М. Филатова // Известия ПГПУ. – 2008. – №7 (11). – С. 154. – 158 с.
58. Формы, методы и средства обучения [Электронный ресурс]: Лекция. – Режим доступа: <https://texts.news/knigi-pedagogike-uchebniki/lektsiya-formyimetodyi-sredstva-67787.html>.
59. Хайдаров, Б. Система учебных задач, обладающих свойством структурной полноты, как средство активизации познавательной деятельности учащихся (на примере стереометрии) : автореферат дис. кандидата педагогических наук / Б. Хайдаров. – Москва – 1992 – 16 с.
60. Халамайзер, А.Я. Из опыта работы Хазанкина Р.Г. // Математика в школе. – 1987. – № 4 – С. 16-21.
61. Шабунин, М.И. Математика: пособие для поступающих в вузы / М.И. Шабунин. – 8-е изд., электрон. – М. : Лаборатория знания, 2020. – 747 с.
62. Шарыгин, И. Ф. Геометрия [Текст] : учебник : базовый уровень : 10-11 кл. - Гриф МО. - Москва : Дрофа, 2013. - 237 с. : ил. - (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия). - ISBN 978-5-358-11050-2 : 327-00.
63. Шаталов, В. Ф. Эксперимент продолжается [Текст] . - Москва : Педагогика, 1989. - 335 с. : ил. - 1-10.
64. Щепин, О.Н. Наглядно-конструктивный подход к изучению стереометрии в, старших классах средней школы: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. –М., 1999. – 126 с.

65. Элективные курсы в профильном обучении: образовательная область «Математика» / Министерство образования РФ. – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс. – 2004. – 96 с.
66. Эргашев, А. Взаимосвязь планиметрии и стереометрии в преподавании геометрии. Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. пед. наук. Ташкент, 1978. – 18 с.
67. Эрдниев, П. М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения [Текст] . В 2 ч. Ч. 2. - Москва : Просвещение, 1992. - 255 с. : ил. - 60-00.
68. Якиманская, И. С. Развитие пространственного мышления школьников. - М.: Педагогика, 1980. - 239 с.
69. Якиманская, И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе / И. С. Якиманская. - М. : Сентябрь, 2002. – 96 с.
70. D. Vallo, V. Duris, Specific Method how to Solve Selected Stereometry Tasks in Educational Process / Procedia - Social and Behavioral Sciences 116:2957-2961 – 2014.
71. Dan Pedoe, Geometry: A Comprehensive Course / (Dover Books on Mathematics Edition – 2013.
72. I.E. Leonard, J.E. Lewis, Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective / L.: Wiley – 2014. – 496 p.
73. I.E. Leonard, J.E. Lewis, Solutions Manual to Accompany Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective/ L.: Wiley– 2014. – 176 p.
74. Kay David C., College Geometry / N.Y.: Holt, Rinehart and Winston – 1969. – 218 p.