МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

# ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

| | | |
|---|---|---|
| Студент | Д.З. Захарова<br>(И. О. Фамилия) | (личная подпись) |
| Научный руководитель | канд. пед. наук, доцент Н.Н. Кошелева<br>(ученая степень, звание, И. О. Фамилия) | |

Тольятти 2021

**Оглавление**

## Введение

**Актуальность и научная значимость настоящего исследования.** В настоящее время отмечается повышенное внимание к совершенствованию организации и содержанию обучения. В том числе осуществляются активные поиски эффективных методик, позволяющих значительно повысить уровень обучения математике.

Разработка той или иной методики обучения напрямую зависит от уровня его дифференциации. В основу дифференциации обучения математике в современных школах легла концепция, предложенная М.И. Башмаковым [17, с. 8], при которой выделяются базисный, основной и углубленный уровни изучения предмета. В процессе углубленного изучения математики у учащихся формируется устойчивый интерес к предмету, развиваются их математические способности. Обучение на данном уровне предусматривает высокое качество сформированности знаний, умений и навыков, необходимых для дальнейшего обучения в ВУЗе, а также в будущей профессиональной деятельности, требующей высокой математической грамотности. Успешность решения задач углубленного изучения математики во многом зависит от методики обучения, в процессе реализации которой учащиеся получают возможность овладеть основным программным материалам на высоком уровне.

В условиях технического и научного прогресса возникает необходимость пересматривать методические особенности преподавания той или иной темы по математике, в частности анализировать различные подходы к введению основных понятий, а также усовершенствовать системы задач на усвоение понятий. Тема «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры также требует дополнительной разработки и тщательного анализа. Она является связующим звеном в контексте как внутрипредметной, так и межпредметной интеграции. Так, её изучение необходимо для усвоения последующей темы, а именно, «Степень числа с рациональным и действительным показателем», а также для нахождения производной и первообразной. Данная тема может быть использована и при решении задач. Так, Г.В. Дорофеев [21, с. 8] отмечает, что необходимость изучения понятия «корня n-ой степени» вытекает из естественных практических задач на процентные вычисления.

Важное значение имеет методика введения понятия «корень n-ой степени». Как известно, формирование понятийного аппарата учащихся является одной из основных задач учителя математики. Организация усвоения понятий реализуется в рамках абстрактно-дедуктивного и конкретно-индуктивного методов. Проанализировав действующие учебные пособия общеобразовательных школ по алгебре, можно сделать вывод о существующих разногласиях авторов относительно использования того или иного метода, а также самой методики введения исследуемого понятия. Кроме того, в некоторых учебно-методических комплексах разработанный задачный материал не вполне соответствует углубленному уровню обучения. В связи с этим, необходимо выявить наиболее эффективную методику введения понятия «корень n-ой степени», а также подкрепить материал различными дифференцированными заданиями.

Методика обучения теме «Корень n-ой степени» была рассмотрена в учебных пособиях по методике преподавания математике (С.Е. Ляпин, 1956) [34], «Степени и корни» (А.К. Артёмов, 1959) [15], «Процентные вычисления» (Г.В. Дорофеев, 2003) [21]. Также данному вопросу посвящена статья «Корректность определения степени действительного числа с рациональным показателем» (Н.Н. Яремко, 2020) [58]. Применение понятия «корня n-ой степени» отражено в статьях «О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений» (А.Н. Марасанов, 2010) [30], «Методика формирования познавательных универсальных учебных действий при обучении методу тождественных преобразований на материале иррациональных выражений» (Н.И. Фирстова, 2015) [55].

Анализ диссертационных работ показал, что в ряде исследований рассмотрены некоторые методические особенности обучения учащихся теме «Корень n-ой степени». Так, в работе Н.Н. Топуридзе [52] представлена методическая разработка преобразования алгебраических иррациональных выражений. Также автор рассматривает корректность формулировки свойств корня n-ой степени в различных учебниках алгебры (начиная с XVIII века). В работе А. Ю. Шемякиной [56] исследуемая тема рассматривается как элемент числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы. Т.А. Михайлова [35] в своей диссертации представляет методику обучения функциям на уроках математики в 7-11 классах на основе пропедевтики. Автор определяет умения учащихся по теме «Степенная функция» (строить график функции $y=x^n$, знать свойства степенной функции с натуральным показателем, уметь решать уравнения $x^n = a$ при четных и нечетных значениях n, выполнять простейшие преобразования и вычисления выражений, содержащих корни, применяя изученные свойства арифметического корня n-ой степени) и задачи изучения данной темы.

*Актуальность и научная значимость* исследования обусловлена:

– требованиями ФГОС среднего общего образования к реализации деятельностного подхода в обучении математике;

– отсутствием единых методических основ для реализации обучения исследуемой теме.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями между* необходимостью качественного усвоения знаний учащихся по теме «Корень n-ой степени» на углубленном уровне и недостаточной разработкой методики обучения данной теме, а также сложившимися разночтениями учебных пособий, используемых в настоящее время.

Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему** диссертационного исследования: выявление методических особенностей обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

**Объектом** исследования является процесс обучения алгебре и началам анализа в общеобразовательной школе.

**Предмет** исследования: методика обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

**Целью** исследования является выявление методических особенностей обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

**Гипотеза** исследования состоит в том, что разработанные методические материалы, учитывающие методические особенности обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы, будут способствовать повышению качества усвоения данной темы.

Для реализации поставленной цели необходимо решить ряд **задач**, а именно:

1. Определить основные цели и задачи обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры.

2. Проанализировать различные подходы к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа» авторов действующих учебных пособий общеобразовательной школы.

3. Определить понятие «арифметического корня n-ой степени из числа $a$» и рассмотреть его основные свойства.

4. Проанализировать типы и виды задач по исследуемой теме.

5. Определить формы, методы и технологии организации учебной деятельности обучающихся при обучении теме «Корень n-ой степени из действительного числа».

6. Проанализировать пропедевтику изучения данной темы в курсе алгебры основной школы.

7. Разработать методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и арифметический корень n-ой степени из числа $a$».

8. Разработать систему упражнений по исследуемой теме.

9. Провести педагогический эксперимент.

**Теоретико-методологическую основу исследования** составили работы А. К. Артёмова [15], М. К. Потапова [47], Ю.К. Бабанского [16], И.П. Лобанок [27], Г.К. Муравина [43], Н.Н. Яремко [58].

**Базовыми для настоящего исследования** явились работы Е.В. Буцко [4], Н.Е. Фёдоровой [54], Е.И. Лященко [26].

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов** исследования: анализ учебно-методической и научной литературы; анализ ФГОС [53]; анализ школьных программ и учебных пособий для общеобразовательной школы; проведение педагогического эксперимента по проверке основных положений исследования.

**Основные этапы исследования**:

*1 этап* (2018/19 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ);

*2 этап* (2019/20 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации;

*3 этап* (2019/20 уч.г.): выявление методических основ и разработка методических рекомендаций по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа $a$» и арифметический корень n-ой степени из числа $a$» в углубленном курсе алгебры общеобразовательной школы; разработка системы упражнений по теме «Корень n-ой степени из действительного числа»;

*4 этап* (2020/21 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, формулирование выводов.

**Опытно-экспериментальная база исследования:** МБУ «Школа №43», г.о. Тольятти Самарской области.

**Научная новизна** проведенного исследования заключается в том, что в нем даны методические рекомендации по введению понятия «корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры, а также приведена система упражнений, направленных на углубленное изучение данной темы.

**Теоретическая значимость** исследования состоит в том, что в нем: выявлены методические особенности обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы; приведены основные виды задач по исследуемой теме.

**Практическая значимость** исследования определяется тем, что в нём разработаны: методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа *a*» и «арифметический корень n-ой степени из числа *a*»; система упражнений по теме «Корень n-ой степени из действительного числа *a*».

**Достоверность** и обоснованность результатов исследования обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, а также результатами прохождения педагогической практики.

**Личное участие автора** в организации и проведении исследования состоит в определении методических рекомендаций по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и арифметический корень n-ой степени из числа *a*»; разработке системы упражнений по теме «Корень n-ой степени из действительного числа».

**Апробация и внедрение результатов работы** велись в течение всего исследования. Результаты докладывались на следующих конференциях:

– IX Международной научной конференции «Математика, образование, культура» (24-26 апреля, 2019 г., г. Тольятти);

– XI Международной научно-методической конференции «Совершенствование методического образования – 2020: состояние и перспективы развития» (5-6 ноября 2020 г., г. Тирасполь).

По теме диссертационной работы было опубликовано 3 статьи [18, 19, 20].

*Экспериментальная проверка* предлагаемых методических рекомендаций осуществлялась в период производственной (педагогической) и преддипломной практики на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ. Констатирующий и поисковой этапы эксперимента проведены на базе МБУ «Школа № 43», г.о. Тольятти учителем математики Оксаной Леонидовной Серко.

**На защиту выносятся:**

1. Методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и «арифметический корень n-ой степени из числа $a$».

2. Система упражнений по теме «Корень n-ой степени из действительного числа» в курсе алгебры общеобразовательной школы.

**Структура выпускной квалификационной работы** состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 11 рисунков, 7 таблиц, список используемой литературы (63 источника), Приложение. Основной текст работы изложен на 89 страницах.

## Глава 1 Методические основы обучения теме «Корень n-ой степени» в общеобразовательной школе

### 1.1 Основные цели и задачи обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры

В федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС) [53] утверждается, что изучение предметной области «Математика» должно обеспечить:

1) сформированность представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;

2) сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления;

3) сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач;

4) сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В соответствии с ФГОС [53], требования к результатам освоения базового курса математики должны включать:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

3) владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

4) владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

5) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

6) сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин.

В сборнике рабочих программ по алгебре и началам анализа Бурмистровой Т. А. [18] утверждается, что предметные результаты освоения курса алгебры и начал математического анализа на углубленном уровне ориентированы преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путём более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоения основ наук, систематических знаний и способов действий, присущих данному учебному предмету. Автор отмечает, что требования к результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знание основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

4) сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, способность характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

5) способность составлять вероятностные модели по условию задачи и вычислять вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследовать случайные величины по их распределению.

В программе по математике Фёдоровой Н.Е. [54, с. 59] к учебнику Алимова Ш.А. отмечается, что целью изучения темы является подготовка учащихся к изучению понятия степени с действительным показателем. Авторы утверждают, что в результате изучения темы «Корень n-ой степени» все учащиеся должны знать определение арифметического корня n-й степени и его свойства, а также должны уметь выполнять действия с корнями и доказывать свойства корня натуральной степени (для учащихся с углубленным курсом алгебры).

В методическом пособии к учебнику Г.К. Муравина [43, с. 36], отмечаются следующие **требования к результатам** изучения данной темы, а именно: у учащихся должны быть сформированы: знания об определении корня n-ой степени и свойствах корней n-й степени, умения их формулировать и применять при вычислениях значений выражений, упрощении выражений, а также при решении уравнений; представления о графике функции $y = \sqrt[n]{x}$, как симметричном графику $y = x^n$относительно прямой y = x.

Подведя итог всему вышеизложенному, выделим основную **цель и задачи** обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры общеобразовательной школы.

**Цель:** подготовить учащихся к изучению понятия степени с действительным показателем.

**Задачи:**

– сформировать у учащихся знания определения корня n-ой степени и его свойств;

– сформировать умение рационально применять свойства корня n-ой степени при преобразовании выражений, содержащих радикалы, а также при решении уравнений и неравенств;

– сформировать у учащихся умение самостоятельно доказывать свойства корня n-ой степени;

– сформировать у учащихся представление о графике функции $y = \sqrt[n]{x}$ и его свойствах.

## 1.2 Различные подходы к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа» в общеобразовательной школе

На сегодняшний день существует ряд учебников по алгебре, широко применяемых в общеобразовательной школе. Тема «корень n-ой степени» в основном затрагивается в 10-11 классах. Однако в учебнике по алгебре Ю.Н. Макарычева (Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова) [29] данная тема входит в программу 9 класса. Рассмотрим подход к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа» авторов данного пособия.

В основе введения понятия лежит абстрактно-дедуктивный метод, то есть составители сразу вводят понятие «корня n-ой степени из числа $a$». Но перед этим напоминают учащимся определение квадратного корня из числа $a$». Далее авторы рассматривают степенную функцию y=$x^n$, где n-нечётный показатель. С помощью графика делается вывод, что для любого числа $a$ существует единственное значение x, n-я степень которого равна $a$. Затем в учебнике рассматривается функция y=$x^n$ с чётным показателем n.

Здесь авторы отмечают, что при любом $a > 0$ существует два противоположных значения x, n-я степень которых равна $a$, при $a = 0$ такое число одно, при

$a < 0$ таких чисел нет. В пособии отмечается, что, если n-нечётное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом $a$, если n-чётное число, то только при $a \geq 0$. После этого составители переходят к определению «арифметического корня n-ой степени из числа $a$».

Рассмотрим еще один подход к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа $a$» в учебнике Алимова Ш. А. [14]. Автор начинает тему с решения уравнения: $x^4 = 81$. Найдя его корни ($x_{1,2} = \pm 3$), применив формулу разности квадратов, Алимов Ш. А. сразу отмечает, что их называют корнями четвёртой степени из числа 81, а положительный корень уравнения $x = 3$ - арифметическим корнем четвёртой степени из числа 81.

Далее автор даёт определение «арифметического корня натуральной степени n». Определение «корня нечётной степени из отрицательного числа» в учебнике отсутствует. Но автор поясняет его на примере решения уравнения: $x^3 + 8 = 0$, где $x = -2$. Алимов Ш.А. отмечает, что число -2 является кубическим корнем из числа -8, но оно не является арифметическим корнем. Его называют *корнем нечётной степени из отрицательного числа*. При этом авторы выделяют связь между корнем нечётной степени из отрицательного числа $a$ и арифметическим корнем из числа $-a = |a|$: $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$.

Рассмотрим подход к введению понятия, предложенный Г.К. Муравиным в учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень» [42].

Для данного УМК характерна функциональная линия. Автор начинает тему с рассмотрения графиков квадратичной функции $y = x^2$ и графика функции $y = x^3$(рисунок 1).

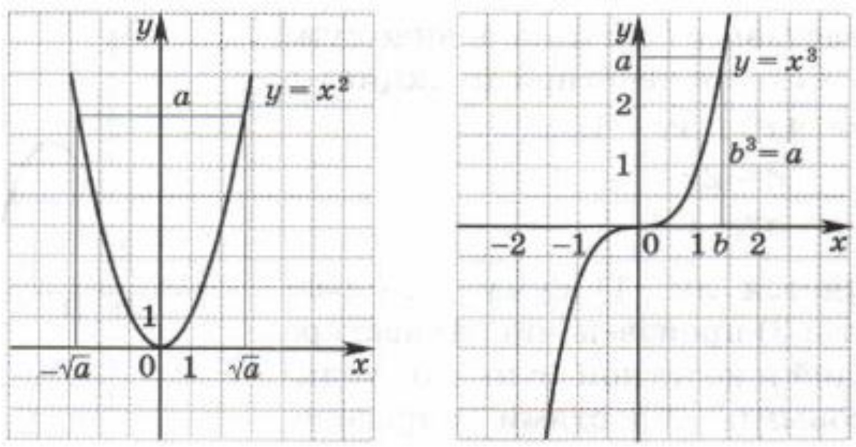



Рисунок 1 - Графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$

По графику квадратичной функции Муравин Г. К. показывает, что для любого положительного числа $a$ можно найти числа, квадраты которых равны $a$. Также и по графику функции $y = x^3$ для любого числа $a$ можно найти такое число $b$, что $b^3 = a$.

Итак, автор делает вывод, что по графику функции $y = x^n$ можно найти число, n-я степень которого известна. Далее Муравин Г. К. вводит понятие «корня n-ой степени из числа $a$.

Мерзляк А. Г. [33] вводит исследуемое понятие абстрактно-дедуктивным методом. Автор связывает его с решением уравнения $x^n = a$ и с помощью графиков показывает зависимость числа его корней от чётности/нечётности показателя n. При этом Мерзляк А. Г. поясняет, что при нечётном n функция $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$-возрастающая, и поскольку E(y)=R, то уравнение $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} = a$ имеет единственный корень при любом $a$. При чётном n функция $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и принимает все положительные значения, следовательно при $a \geq 0$ уравнение $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} = a$ на этом промежутке имеет единственный корень. А поскольку функция чётная, то при $a > 0$ уравнение имеет 2 противоположных по знаку корня, при $a < 0$ решения нет, при $a = 0$ уравнение имеет один корень: $x = 0$.

Рассмотрим подход к введению понятия, предложенный А. Г. Мордковичем [37]. Для данного УМК также характерна функционально-графическая линия.

В учебнике для введения понятия «корень n-ой степени из действительного числа $a$» авторы используют конкретно-индуктивный метод. Мордкович А. Г. начинает тему с графического решения уравнений $x^4 = 1$ и $x^4 = 16$ и отмечает, что с помощью построенных графиков легко можно найти корни этих уравнений. Далее автор предлагает так же графически решить уравнение: $x^4 = 5$, тем самым сталкивая учащихся с проблемой нахождения корней этого уравнения. Чтобы решить данное уравнение, Мордкович А. Г. вводит новый символ $\sqrt[4]{}$, с помощью которого можно определить корни этого уравнения: $\pm\sqrt[4]{5}$. Затем в учебнике рассматривается уравнение с нечётной степенью: $x^5 = 7$. Решив его графически, автор устанавливает, что оно имеет только один корень: $\sqrt[5]{7}$ (рисунок 2).

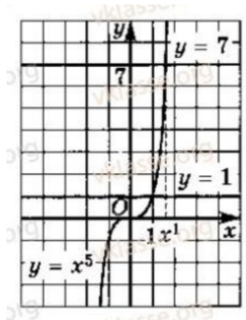



Рисунок 2 - Графическое решение уравнения $x^5 = 7$

Таким образом, автор делает вывод, что решая уравнение $x^n = a$, где $a > 0, n \epsilon N, n > 1$, можно получить в случае чётного n – 2 корня: $\pm\sqrt[n]{a}$, в случае нечётного n – 1 корень: $\sqrt[n]{a}.$ После этого Мордкович А. Г. вводит понятие «корня n-ой степени из неотрицательного числа $a$». Хочется отметить, что автор не выделяет данное понятие как «арифметический корень n-ой степени», а понятие «корень n-ой степени из действительного числа» он как бы разбивает на два определения:

1. Корень n-ой степени из неотрицательного числа $a$.

2. Корень нечётной степени n из отрицательного числа $a$.

Стоит отметить, что второе определение авторы вводят после закрепления первого определения практическими примерами.

Проанализировав некоторые зарубежные учебные пособия по алгебре и началам анализа [59, 61, 62, 63], нами было выявлено, что авторы вводят исследуемое понятие только абстрактно-дедуктивным методом. Кроме того, ни в одном учебнике не используется функционально-графический способ введения понятия. Весь материал излагается довольно кратко.

Важным является не только эффективная методика введения исследуемого понятия, но и его грамотная трактовка. В статье Яремко Н. Н., Глебовой М. В. [58] ставится вопрос о корректности определения понятия «корня n-ой степени из действительного числа». Авторы отмечают, что математические понятия корня n-й степени из действительного числа и степени действительного числа с произвольным показателем достаточно тесно связаны между собой. При решении показательных и степенно-показательных уравнений необходимо оперировать ими обоими, грамотно переходить от одного к другому. Авторы проанализировали ряд учебников общеобразовательных учреждений по алгебре и рассмотрели определения данных понятий. Так, не во всех учебных пособиях в определении понятия корня n-ой степени отмечается, что показатель степени $n \geq 2.$ Яремко Н. Н. делает акцент на важности этого момента, так как объемы «генетических» понятий должны совпадать. Например, в учебно-методическом комплексе Макарычева Ю. Н. даётся такое определение: «Корнем n-й степени из числа a (n – произвольное либо любое натуральное число) «называется такое число, n-я степень которого равна a». Здесь только оговорено, что n-натуральное число, получается, что автор допускает, что n может равняться 1. В ряде учебников таких авторов, как Мордкович А. Г., Патрусевич М. Я.  отмечено, что n не может быть равным 1. Яремко Н.Н. разделяет точку зрения профессора Мордковича А. Г., исключающую n=1 при определении корня $\sqrt[n]{a}$. В то же время авторы статьи предлагают другой вариант – определить $\sqrt[n]{a}$ при n=1 дополнительным отдельным соглашением: $\sqrt[1]{a} = a$.

## 1.3 Арифметический корень n-ой степени из числа $a$ и его основные свойства

Прежде чем дать определение «арифметического корня $n$-ной степени» дадим сначала определение «корня n-ой степени из действительного числа».

***Корнем n-ой степени из числа а,*** *где* $n \in N, n > 1$, называется такое число, n-я степень которого равна $a$. Обозначается так: $\sqrt[n]{a}$, где $a$ – подкоренное выражение, n-показатель корня [46, с. 207].

**Пример 1.** Согласно определению, корнем третьей степени из числа 8 является число 2, так как $2^3 = 8$. А корнями четвёртой степени из числа 16 является противоположные числа: -2 и 2, так как $(-2)^4$=16 и $2^4 = 16$.

Согласно данному определению корень n-ой степени из числа $a$ – это решение уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и от $a$.

В зависимости от чётности или нечётности показателя n выражение $\sqrt[n]{a}$ может иметь или не иметь смысл при отрицательных значениях $a$ [42, с. 53]. Так, если:

1) n – чётное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при неотрицательных значениях $a$ (так как любое число, возведённое в чётную степень принимает только неотрицательные значения);

2) n – нечётное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любых значениях $a$ (так как при возведении положительного числа в нечётную степень получается положительное число, а при возведении отрицательного числа – получается отрицательное число).

**Пример 2**. Выражение $\sqrt[3]{-64}$ имеет смысл, так как показатель степени (число 3) – нечётный, а подкоренное выражение – число отрицательное. Таким образом, $\sqrt[3]{-64} = -4$. А выражение $\sqrt[4]{-81}$ не имеет смысла, так как показатель степени – число чётное, а подкоренное выражение – число отрицательное.

В работе Артёмова А. К. «Степени и корни» [15, с. 46], основанной на личном опыте автора, рассмотрены некоторые методические особенности введения понятия «арифметического корня n-ой степени». Так, автор ставит вопрос: «Всегда ли существует корень степени n из неотрицательного числа и будет ли этот корень (если он существует) единственным?» Ответом на этот вопрос является теорема о том, что корень n-ой степени из любого неотрицательного числа существует и притом имеет единственное неотрицательное значение $\sqrt[n]{a},$ где $a \geq 0$ и n-натуральное число, n>1. Артёмов А. К. приводит следующий пример, после рассмотрения которого становится понятным, для чего вводится понятие «арифметического корня n-ой степени: вычислить $\sqrt{9} + \sqrt{36}\,[15, \text{с}. 46]$. Далее автор приводит различные варианты решений:

$$(\pm 3) + (\pm 6) = \begin{cases} 3 + 6 = 9 \\ -3 + 6 = 3 \\ 3 - 6 = -3 \\ -3 - 6 = -9 \end{cases}$$

Именно из-за вышеприведённых утверждений возникла некоторая двойственность относительно понятия «корня n-ой степени». Нахождение суммы становится затруднительным, так как учитываются все знаки перед корнем. То есть приходилось бы всегда рассматривать несколько случаев, что составляло бы неудобства для многих математических операций. Поэтому математиками было введено понятие «арифметического корня n-ой степени».

Рассмотрим, как Колмогоров А.Н. [5] вводит понятие «арифметического корня n-ой степени». Автор рассматривает функцию $f(x) = x^n$, так как корень n-ой степени из числа $a$ – это решение уравнения $x^n = a,$ и число корней этого уравнения зависит от n и от $a.$ На промежутке $[0;\ +\infty)$ функция возрастает при любом n и принимает все значения из промежутка $[0;\ +\infty)$. Колмогоров, опираясь на «теорему о корне», отмечает, что уравнение $x^n = a$ для любого $a \in [0;\ +\infty)$ имеет только один неотрицательный корень. Именно его и называют арифметическим корнем n-ой степени из числа $a.$

Итак, ***арифметическим корнем n-ой степени*** из неотрицательного числа $a$, где $n \in N, n > 1,$ называется неотрицательное число, n-я степень которого равна $a$ [5, с. 207].

Иногда арифметический корень обозначают так: $\underset{+}{\sqrt[n]{a}}$ [46, с. 49].

Интересным является предложение Петрушко И.М. [46, с. 50] считать корни нечётной степени алгебраическими, а корни чётной степени – арифметическими.

Вернёмся к примеру 1. Мы отметили, что корнями четвёртой степени из числа 16 являются противоположные числа: -2 и 2. Однако, только число 2 является арифметическим корнем n-ой степени. То есть, $\sqrt[4]{16} = 2$, а $\sqrt[4]{16} \neq -2$.

По определению «арифметического корня n-ой степени» для любого неотрицательного числа $a$: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Здесь стоит отметить, что для любого действительного $a$:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \begin{cases} a, \text{если } n - \text{нечётное} \\ |a|, \text{если } n - \text{чётное} \end{cases}$$ [5, с. 209].

Корни нечётной степени из отрицательных чисел всегда можно выразить через арифметический корень n-ой степени»:

$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, где n-нечётное число, $a > 0$.

Например, $\sqrt[3]{-0{,}125} = -\sqrt[3]{0{,}125} = -0{,}5.$

***Свойства арифметического корня n-ой степени.***

Если $a \geq 0$, $b > 0$, а n, m и k - натуральные числа, причём $n \geq 2, m \geq 2$, то можно выделить следующие свойства арифметического корня n-ой степени:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ [37, с.44].

В работах Юлдыбаевой А. С. «Особенности методики обучения решению иррациональных уравнений и неравенств» [57] и Кепшиной «Методика обучения теме «Степени и корни» [22] в курсе алгебры основной школы» уже были рассмотрены свойства арифметического корня n-ой степени, а также были приведены их доказательства. Но сам способ доказательства имеет «общепринятый» характер, он описан во всех учебно-методических комплексах по алгебре и началам анализа, кроме учебника авторского коллектива Мордковича А. Г. Поэтому в работе приведены доказательства всех свойств, предложенные данным автором, кроме третьего свойства, доказательство которого рассмотрено именно «общепринятым» методом.

*Доказательство свойства 1.* Приведём доказательство, описанное Мордковичем А. Г.: введём следующие обозначения: $\sqrt[n]{ab} = x$, $\sqrt[n]{a} = y$, $\sqrt[n]{b} = z$. Докажем, что при $x \geq 0, y \geq 0$ и $z \geq 0$ будет выполняться равенство $x = yz$. Если $\sqrt[n]{ab} = x$, то $x^n = ab$. Если $\sqrt[n]{a} = y$, то $y^n = a$, точно так же $z^n = b$. Тогда $x^n = y^n z^n \Rightarrow x^n = (yz)^n$. А если степени двух неотрицательных чисел равны и показатели степеней равны, то равны и основания степеней, следовательно $x = yz \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Что и требовалось доказать [37, с. 44].

*Доказательство свойства 2.* Данное свойство доказывается аналогично первому. Пусть $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x, \sqrt[n]{a} = y, \sqrt[n]{b} = z, \Rightarrow x^n = \frac{a}{b}, y^n = a, z^n = b.$ Тогда $x^n = \frac{y^n}{z^n}, \Rightarrow\ x^n = \left(\frac{y}{z}\right)^n$. Так как степени двух неотрицательных чисел равны и показатели степеней равны, то $x = \frac{y}{z}, \Rightarrow \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Что и требовалось доказать [37, с. 44-45].

**Пример 3.** Найти значение выражения: 1) $\sqrt[3]{\frac{1}{64} \cdot 27 \cdot 1000}$; 2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Решение. 1) Воспользуемся первым свойством: $\sqrt[3]{\frac{1}{64} \cdot 27 \cdot 1000} =$

$= \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000} = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 10 = \frac{30}{4} = 7{,}5.$

2) Воспользуемся вторым свойством: $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

*Доказательство свойства 3.* Заметим, что n-ая степень числа $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$равна $a^m$: $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m = a^m$. Что и требовалось доказать [5, с. 210].

*Доказательство свойства 4.* Данное свойство доказывается аналогично свойствам 1 и 2. Пусть $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x, \sqrt[n\cdot m]{a} = y$. Тогда $x^n = \sqrt[m]{a}, \Rightarrow x^{n\cdot m} = a.$ Точно так же $y^{nm} = a$. Значит $x^{n\cdot m} = y^{n\cdot m}, \Rightarrow x = y, \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. Что и требовалось доказать [37, с. 46].

*Доказательство свойства 5.* Пусть $\sqrt[kn]{a^{mk}} = x$. Докажем, что $x^{kn} = a^{mk}$. Пусть $\sqrt[n]{a^m} = y$. Тогда $y^n = a^m$. Возведём обе части равенства в одну и туже степень k: $y^{nk} = a^{mk}$. Получается, что $= a^{mk}$ и $y^{nk} = a^{mk} \Rightarrow x^{kn} = y^{nk} \Rightarrow x = y.$ Что и требовалось доказать [37, с. 47]. То есть значение арифметического корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же число.

**Пример 4.** Вычислить: 1) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^{-2}$; 2)$\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[7]{5^{21}}$.

Решение. 1) Применим свойство 3: $\left(\sqrt[4]{25}\right)^{-2} = \sqrt[4]{25^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \frac{1}{5}$.

2) Воспользуемся четвёртым свойством: $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5\cdot 2]{1024} = \sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2.$

3) Применим свойство 5: $\sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125.$

Данное свойство не всегда имеет место по отношению к неарифметическим корням. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2, \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Но $2 \neq -2$. Значит, $\sqrt[3]{-8} \neq \sqrt[6]{(-8)^2}$.

Овчинникова А. С. в своей работе «Методика обучения тождественным преобразованиям в теме «Степени и корни»» [45, с. 29] даёт методические рекомендации по устранению типичных ошибок учащихся при преобразовании выражений, содержащих радикалы. Автор отмечает, что данные свойства, применяемые при действиях с радикалами, определены только для арифметических корней. Если не учитывать того, что по определению арифметического корня n-ой степени, под корнем может быть только неотрицательное число, а также величина самого корня положительна или равна нулю, то можно допустить ошибку в преобразованиях. Овчинникова А. С. приводит следующий пример: равенство $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ верно лишь при условии, что $x \geq 0$. А если $x < 0$, то $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{-x}$ .

## 1.4 Типы и виды задач по теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры и начал анализа

Тема «Корень n-ой степени» включает в себя изучение следующего материала:

1. Понятие корня n-ой степени из действительного числа, понятие арифметического корня n-ой степени из числа $a$.

2. Свойства арифметического корня n-ой степени.

3. Функция $y = \sqrt[n]{x},$ её график и свойства.

4. Преобразование выражений, содержащих радикалы.

По мнению М.Р. Леонтьевой [27, с. 15], для усвоения некоторого содержания учащиеся должны выполнить специальную деятельность, адекватную заданному содержанию. Задачи — это и есть то средство, с помощью которого можно организовать учебную деятельность учащихся, направленную на усвоение некоторого содержания. Из этого следует, что виды и типы упражнений должны полностью охватывать изучаемый материал и соответствовать ему.

По мнению Д. Андерсон [60], решение задач признается важным жизненным навыком, включающим целый ряд процессов, включая анализ, интерпретацию, рассуждение, прогнозирование, оценку и рефлексию. Учащиеся нуждаются в глубоких математических знаниях и общей способности рассуждать.

В классах с углубленным изучением математики необходимо использование только тех учебных пособий, которые соответствуют углубленному уровню обучения. Такие пособия отличаются наполненностью различными видами задач и их широкой типологией, а также дифференцированностью упражнений. Именно проработка заданий различного типа и уровня является залогом успешного усвоения материала. Так, например, Галицкий М. Л. [19, с. 4] считает, что именно решение задач – это главное средство углубленного изучения математики в школе.

Нами был проведён анализ учебно-методической литературы по алгебре и началам анализа, ориентированной на углубленный курс обучения, а, именно, были рассмотрены учебно-методические комплексы Алимова Ш. А., Мордковича А. Г., Муравина Г. К., Колмогорова А. Н. Проанализировав задачный материал данных пособий, можно выделить следующие виды задач по теме «Корень n-ой степени»:

1. Задачи на вычисление.
2. Задачи на преобразование выражений, содержащих корень n-ой степени.
3. Задачи на решение уравнений и неравенств.
4. Задачи функционально-графического содержания.

Углубленное изучение математики предполагает проработку не только усложнённых заданий, но и базовых упражнений. Поэтому мы приведём примеры задач как «простых», так и «сложных» в зависимости от их типа.

***Типы задач.***

***1. Задачи на применение понятия «корня n-ой степени»***

Данный тип задач прослеживается во всех вышеуказанных пособиях. Именно с таких упражнений и начинается закрепление теоретического материала.

**Пример1.** Докажите, что верно равенство: а) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2}$; б) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$ [38, с. 29].

Решение: а) $\frac{1}{2}>0$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}\ \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}>0$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$.

**Пример 2**. Имеет ли смысл выражение: а) $\sqrt[6]{-8}$; б) $\sqrt[3]{-15}$; в) $\sqrt[4]{5-\sqrt{22}}$ [42, с. 59].

Решение: а) выражение $\sqrt[6]{-8}$ не имеет смысла, так -8<0 и степень чётная; б) выражение $\sqrt[3]{-15}$ имеет смысл, так как -15<0 и степень нечётная; в) $4<\sqrt{22}<5,\Rightarrow 0<5-\sqrt{22}<1$. Степень чётная и $\sqrt[4]{5-\sqrt{22}}>0,\Rightarrow$выражение имеет смысл.

**Пример 3.** Вычислите: а) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; б) $-3\sqrt[3]{-64}$; в) $3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[3]{27}$; г) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}$. [14, с. 21].

Решение: а) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}=\sqrt[4]{\frac{625}{81}}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$; б) $-3\sqrt[3]{-64}=-3\cdot(-4)=$

$=12$; в) $3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[3]{27}=6-12=-6$; г) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}=$

$=\frac{1}{3}-0{,}1-0{,}2=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$.

**Пример 4.** Между какими целыми числами расположено число: а) $\sqrt[4]{52}$; б) $\sqrt[5]{-670}$ [38, с. 30]?

Решение: а) $2^4=16,\Rightarrow \sqrt[4]{16}=2$; $3^4=81,\Rightarrow \sqrt[4]{81}=3$. Значит, $2<\sqrt[4]{52}<3$;

б)$(-3)^5=-243,\Rightarrow \sqrt[5]{-243}=-3;\ (-4)^5=-1024,\Rightarrow \sqrt[5]{-1024}=-4$. Значит, $-4<\sqrt[5]{-670}<-3$.

**Пример 5.** Сравните значения выражений: $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$ [14, с. 23].

Решение:$1<\sqrt{3}<2, 3<\sqrt[3]{30}<4,\Rightarrow 4<\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}<6; 3<\sqrt[3]{63}<4$. Значит, $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}>\sqrt[3]{63}$.

***2. Задачи на решение степенных уравнений***

**Пример 1.** Решить уравнения: а) $x^7=\frac{1}{128}$; б) $x^8=15$; в) $(3-2x)^3=$ $=8$; г) $(x^2-5x+2)^6=64$ [42, с. 58].

Решение: а) $x^7=\frac{1}{128}\Leftrightarrow x=\sqrt[7]{\frac{1}{128}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; б) $x^8=15\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[8]{15}$;

в) $(3-2x)^3=8\Leftrightarrow 3-2x=\sqrt[3]{8},\Leftrightarrow 3-2x=2\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=0{,}5$;

г) $(x^2-5x+2)^6=64\Leftrightarrow x^2-5x+2=\sqrt[6]{64}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+2=2 \\ x^2-5x+2=-2 \end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=1 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\pm\sqrt[8]{15}$; в) $x=0{,}5$; г) 0; 1; 4; 5.

***3. Задачи на решение иррациональных уравнений (содержащих корень n-ой степени)***

**Пример 1.** Решить уравнения: а)$\sqrt[7]{x}=-1$; б)$\sqrt[3]{7-4x}=4$; в)$\sqrt[6]{x^2+7x+13}=1$; г) $\sqrt[3]{x^3+37}=-3$ [42, с. 60].

Решение: а)$\sqrt[7]{x}=-1\Leftrightarrow x=-1$; б) $\sqrt[3]{7-4x}=4\Leftrightarrow 7-4x=64\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x=-57\Leftrightarrow x=-14{,}25$; в)$\sqrt[6]{x^2+7x+13}=1\Leftrightarrow x^2+7x+13=1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+7x+12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-3 \end{array}\right.$; г)$\sqrt[3]{x^3+37}=-3\Leftrightarrow x^3+37=-27\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3=-64\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-64}\Leftrightarrow x=-4$.

Ответ: а) -1; б) -14,25; в) -4;-3; г) -4.

**Пример 2.** Решить уравнения: а) $\sqrt{3x^2+7x+6}=x-1$;

б) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x}=1$ [42, с. 60].

Решение:

а) $\sqrt{3x^2+7x+6}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3x^2+7x+6})^2=(x-1)^2 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+7x+6=x^2-2x+1 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+9x+5=0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-9+\sqrt{41}}{4} \\ x=\dfrac{-9-\sqrt{41}}{4} \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$$

б) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}=1+\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(1+\sqrt{x}\right)^2 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6=1+2\sqrt{x}+x \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}=5 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2,5 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6,25$

Ответ: а) нет решения; б) 6,25.

**Пример 3.** Решить уравнения: а) $\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x}-3=0$; б) $\sqrt[4]{x^3+1}-$ $-\frac{6}{\sqrt[4]{x^3+1}}=1$ [38, с. 39].

Решение: а) $\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x}-3=0$. Замена: $\sqrt[8]{x}=t, \sqrt[4]{x}=t^2, t\geq 0$. Получим:

$$t^2+2t-3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-3-\text{не удовлетворяет условию} \\ t_2=1 \end{array}\right.$$

Вернёмся к замене: $\sqrt[8]{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.

б) $\sqrt[4]{x^3+1}-\frac{6}{\sqrt[4]{x^3+1}}=1$.

ОДЗ: $x^3+1>0 \Leftrightarrow x^3>-1 \Leftrightarrow x>-1$

Замена: $\sqrt[4]{x^3+1}=t$. Получим:

$$t-\frac{6}{t}=1$$

$$t^2-t-6=0, t\neq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 3 \end{array}\right.$$

Вернёмся к замене: $\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x^3+1} = -2 \\ \sqrt[4]{x^3+1} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x^3+1 = 81 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x^3 = 80 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = \sqrt[3]{80} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{80}$.

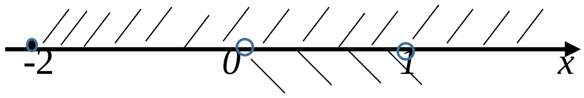
Ответ: а) 1; б) $\sqrt[3]{80}$.

### *4. Задачи на решение иррациональных неравенств*

**Пример 1**. Решите неравенство: а) $x+2 < \sqrt{4+5x}$ [42, с. 60].

Решение: $x+2 < \sqrt{4+5x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ (x+2)^2 < 4+5x \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 < 0 \\ 4+5x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -0{,}8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -0{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$




Ответ: $x \epsilon (0; 1)$.

### *5. Задачи на вычисление*

**Пример1.** Вычислить:

а) $\frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$; в) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$ [14, с. 23].

Решение: а) $\frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{54 \cdot 120}{5}} = \sqrt[4]{1296} = 6$; б) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} =$

$= \sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{27} - \sqrt{4} = 2+3-2 = 3$; в) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7+\sqrt{22}} = \sqrt[3]{\left(7-\sqrt{22}\right) \cdot \left(7+\sqrt{22}\right)} =$

$= \sqrt[3]{49-22} = \sqrt[3]{27} = 3$.

**Пример 2.** Вычислить: $\frac{x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 - \sqrt[4]{4}}{x - \sqrt{3}}$ при $x = \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$ [38, с. 45].

Решение: если $x = \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$, то $\frac{x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 - \sqrt[4]{4}}{x - \sqrt{3}} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}\right) + 3 - \sqrt[4]{4}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2} - 6 + 2\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + 3 - \sqrt[4]{4}}{-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[4]{4}}{-\sqrt[3]{2}} = -1 + \frac{\sqrt[12]{4^3}}{\sqrt[12]{2^4}} =$$

$$= -1 + \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2} - 1.$$

**Пример 3.** Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$ [38, с. 44].

Решение. Выделим квадрат двучлена:

$$\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4\left(7-4\sqrt{3}\right)} = \sqrt[4]{2^2\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left|1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-1.$$

***6. Задачи на преобразование буквенных выражений, содержащих радикалы***

**Пример 1.** Упростите выражение: а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; б) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^2\cdot c}$;

в) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5 - \sqrt[5]{a}\right)\div\sqrt[10]{a^2}$ [14, с. 22].

Решение: а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^3 = a^2b$; б) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^2\cdot c}\cdot\sqrt[4]{b^5\cdot c^2} =$

$= |a|b^2|c|$; в) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5 - \sqrt[5]{a}\right)\div\sqrt[10]{a^2} = (a\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{a})\div\sqrt[5]{a} = a-1$.

**Пример 2.** Упростите выражение, считая что все переменные принимают только положительные значения: $\sqrt[4]{\dfrac{16r^{16}s^{12}}{81p^{24}q^4}}$ [38, с. 37].

Решение: $\sqrt[4]{\dfrac{16r^{16}s^{12}}{81p^{24}q^4}} = \dfrac{2r^4s^3}{3p^6q}$.

**Пример 3.** Упростите: $\sqrt[4]{(x+6)^4} + \sqrt{(x-3)^2}$, если $-1 < x < 2$ [14, с. 23].

Решение: $\sqrt[4]{(x+6)^4} + \sqrt{(x-3)^2} = |x+6| + |x-3|$. Если $-1 < x < 2$, то $|x+6| +$ $+|x-3| = x+6+3-x = 9$.

**Пример 4.** Внесите переменные под знак корня: $-mn^3\sqrt[6]{-mn}$ [38, с. 38].

Решение: $-mn^3\sqrt[6]{-mn}=\sqrt[6]{m^6n^{18}(-mn)}=\sqrt[6]{-m^7n^{19}}$ .

**Пример 5.** Вынесите множитель из-под знака корня: $\sqrt[5]{64x^{12}y^{10}}$ [42, с. 64].

Решение: $\sqrt[5]{64x^{12}y^{10}}=y^2\cdot\sqrt[5]{2^5\cdot 2\cdot x^{10}\cdot x^2}=2x^2y^2\sqrt[5]{x^2}$ .

**Пример 6.** Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\div\sqrt[16]{x^{11}}$ [38, с. 41].

Решение:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\div\sqrt[16]{x^{11}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}}\div\sqrt[16]{x^{11}}=\sqrt{x\sqrt[8]{x^7}}\div\sqrt[16]{x^{11}}=\sqrt[16]{x^{15}}\div\sqrt[16]{x^{11}}=\sqrt[16]{x^4}$$

**Пример 7.** Выполните действия: $\left(2\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(4p-2\sqrt{pq}+q\right)$[38, с. 41].

Решение: $\left(2\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(4p-2\sqrt{pq}+q\right)=\left(2\sqrt{p}\right)^3+\left(\sqrt{q}\right)^3=8\sqrt{p^3}+\sqrt{q^3}$ .

**Пример 8.** Разложите на множители: $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}$ [38, с. 42].

Решение: $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}=\sqrt[3]{a^3\cdot a}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^3\cdot b}=$

$=\sqrt[3]{a^3}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})+\sqrt[3]{b^3}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=(a+b)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.

**Пример 9.** Сократите дробь, считая, что все переменные принимают только неотрицательные значения: $\dfrac{6\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-1}{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$ [38, с. 43].

Решение: $\dfrac{6\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-1}{2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{\left(3\sqrt[3]{x}-1\right)\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}(2\sqrt[3]{x}+1)}=\dfrac{3\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$.

***7. Задачи на преобразование числовых выражений, содержащих радикалы***

**Пример 1.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}$ [38, с. 43-44].

Решение:

а) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{4\cdot\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}=\dfrac{4\sqrt[3]{9}-3+\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{9^3}}=\dfrac{4\sqrt[3]{9}-3+\sqrt[3]{81}}{12}$;

б) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}=\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2}{\frac{\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}\right)}{\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{3^3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}\right)}{8}=\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{4}$

**Пример 2.** Упростите выражение: $\sqrt{50}-\sqrt[3]{3}-6\sqrt{2}+\sqrt[3]{24}+\sqrt{8}$ [38, с. 41].

Решение: $\sqrt{50}-\sqrt[3]{3}-6\sqrt{2}+\sqrt[3]{24}+\sqrt{8}=5\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-6\sqrt{2}+2\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$

***8. Задачи на доказательство***

**Пример 1.** Докажите тождество: $\sqrt[4]{6a\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{3\sqrt{2a}-2\sqrt{3a}}=\sqrt{6a}$ [38, с. 45].

Доказательство:

$$\sqrt{\sqrt{6a}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\sqrt{6}a\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}}=$$

$$=\sqrt{\left(3a\sqrt{12}-2a\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}}=\sqrt{\left(6a\sqrt{3}-6a\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}}=\sqrt{6a}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\cdot(5+2\sqrt{6})}=$$

$$=\sqrt{6a}\cdot\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6})}=\sqrt{6a}\cdot\sqrt[4]{1}=\sqrt{6a}\,.$$

**Пример 2.** Доказать, что: $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$ [14, с. 23].

Доказательство:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=4+2\sqrt{3}-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}+4-2\sqrt{3}=$$

$$=8-2\sqrt{16-12}=8-4=4=2^2,\Rightarrow\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2.$$

Тема «Корень n-ой степени» включает в себя изучение функции $y=\sqrt[n]{x}$, её графика и свойств. Стоит отметить, что не в каждом учебнике присутствуют задачи на исследование функции, на построение, на решение уравнений и неравенств с помощью графиков. Учебное пособие Мордковича А.Г., напротив, насыщенно такими типами заданий.

***9. Задачи на исследование функции $y=\sqrt[n]{x}$***

**Пример 1.** Найти область определения функции:

а) $y=\sqrt{8-16x}+\sqrt[12]{10x+20}$; б) $y=\sqrt[5]{\frac{1+9x}{4+3x}}$; в) $y=\sqrt[4]{\frac{10x^3-21x^2+4}{x^2-4x-21}}$ [38, с. 33].

Решение: а) $D(y)=\begin{cases}8-16x\ge 0\\10x+20\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16x\le 8\\10x\ge -20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{1}{2}\\x\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-2;\frac{1}{2}];$

б) $D(y)=4+3x\ne 0\Leftrightarrow 3x\ne -4\Leftrightarrow x\ne -\frac{4}{3}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-\frac{4}{3})\cup(-\frac{4}{3};+\infty);$

в) $D(y)=\frac{10x^3-21x^2+4}{x^2-4x-21}\ge 0$

$x^2-4x-21\ne 0$

$\left[\begin{array}{l}x_1\ne -3\\x_2\ne 7\end{array}\right.$

$10x^3-21x^2+0x+4\ge 0$

$x=2$

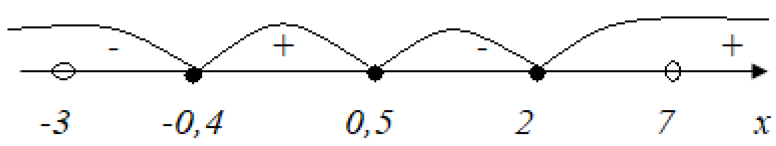
$$\begin{array}{r|l}10x^3-21x^2+0x+4 & x-2\\ \hline \underline{10x^3-20x^2} & 10x^2-x-2\\ -x^2+0x & \\ \underline{-x^2+2x} & \\ -2x+4 & \\ \underline{-2x+4} & \\ 0 & \end{array}$$

$10x^3-21x^2+0x+4=(x-2)(10x^2-x-2)$

$(x-2)(10x^2-x-2)=0$

$x=2;\ 10x^2-x-2=0$

$\mathrm{D}=81\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0{,}5\\x_2=-0{,}4\end{array}\right.$




$x\epsilon[-0{,}4;0{,}5]\cup[2;7)\cup(7;+\infty)$

Ответ: а)$D(y)=[-2;0{,}5]$; б) $D(y)=\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right);\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$; в)$D(y)=[-0{,}4;0{,}5]\cup[2;7)\cup(7;+\infty)$.

**Пример 2.** Найдите область значений функции: $y=\sqrt[6]{x}-3$ [38, с. 34].

Решение: а) так как степень чётная, то $E(y) = [-3; +\infty)$.

**Пример 3.** Найдите наибольше и наименьшее значение функции $y = \sqrt[4]{x}$ на отрезке [5;16] [38, с. 34].

Решение: $y_{наим} = \sqrt[4]{5}, y_{наиб} = \sqrt[4]{16} = 2$.

***10. Задачи на построение графика функции и применение графика к решению уравнений и неравенств***

**Пример 1.** Постройте график функции: $y = 4\sqrt[5]{2x+4}$ [38, с. 32].

Построение. График функции $y = 4\sqrt[5]{2(x+2)} - 1$ получается сдвигом графика функции $y = 4\sqrt[5]{2x}$ на 2 единицы влево по оси абсцисс и на одну единицу вниз по оси ординат (рисунок 3).

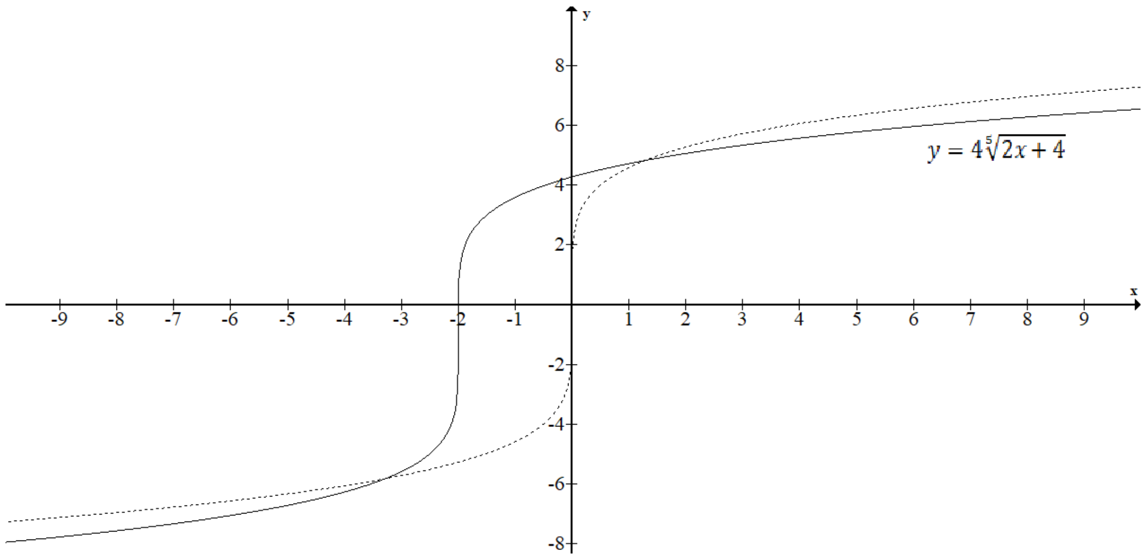



Рисунок 3 - График функции $y = 4\sqrt[5]{2x+4}$

**Пример 2.** Выясните с помощью графика, сколько корней имеет уравнение, и найдите приближённые значения этих корней:
$\sqrt[3]{x} = (x-1)^2$ [42, с. 58].

Решение. Построим графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = (x-1)^2$ (рисунок 4).

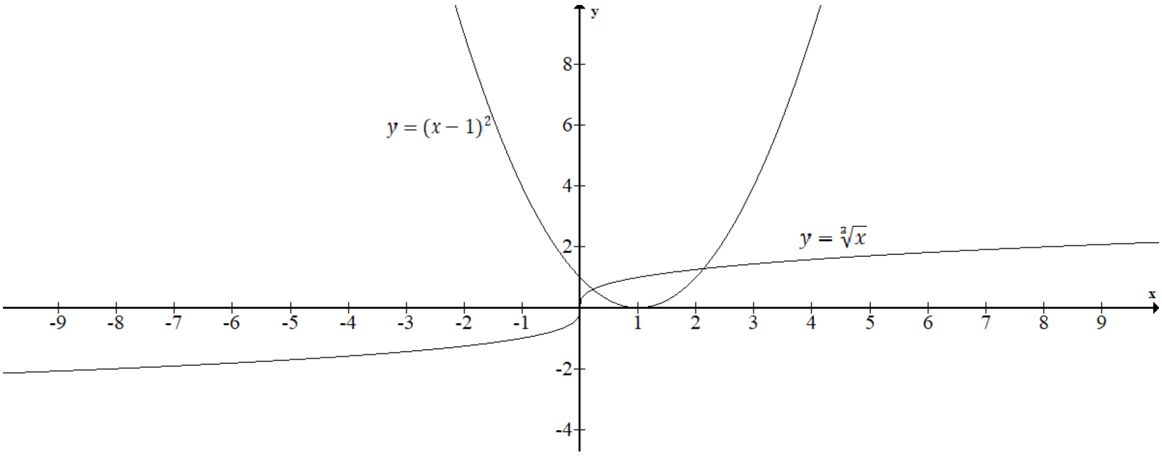



Рисунок 4 - Графическое решение уравнения $\sqrt[3]{x} = (x-1)^2$

Ответ: $x \approx 0{,}2; x \approx 2{,}1$.

**Пример 3.** Решите графически неравенство: $\sqrt{x} \geq 2x - 1$ [42, с. 58].

Решение. Построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2x - 1$ (рисунок 5). И найдём решение неравенства.

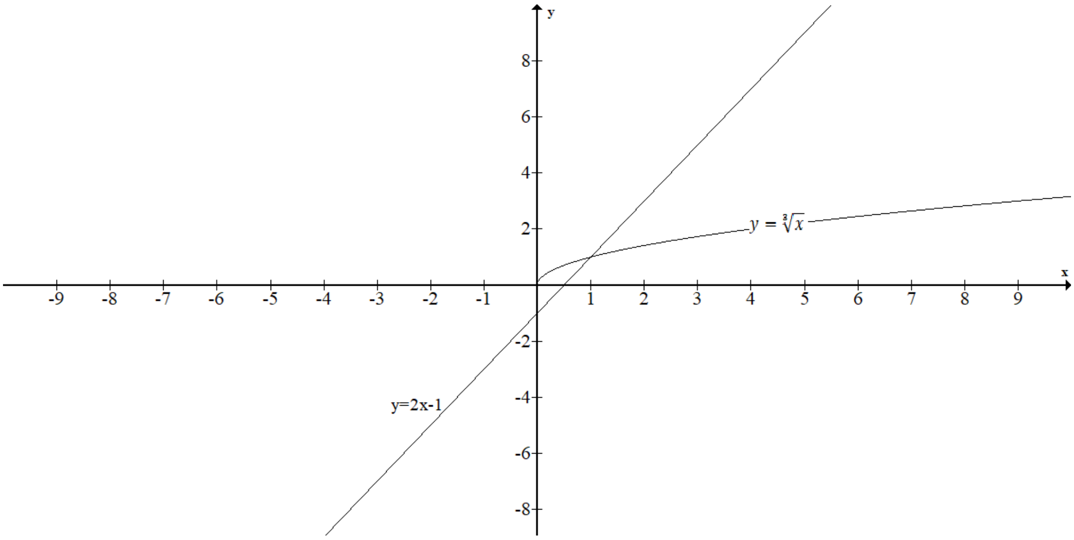



Рисунок 5 - Графическое решение неравенства $\sqrt{x} \geq 2x - 1$

Ответ: $x \in [0; 1]$.

**Пример 4.** Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ точка С (-343; -7) [42, с. 58]?

Решение*:* принадлежит, так как $\sqrt[3]{-343} = -7$.

## 1.5 Формы, методы и технологии организации учебной деятельности обучающихся при обучении теме «Корень n-ой степени из действительного числа»

Автор учебного пособия «Педагогика» Бабанский Ю.К. [16] даёт следующее определение «метода обучения»: *метод обучения* - способ упорядоченной взаимосвязанной деятельности преподавателя и обучаемых, деятельности, направленной на решение задач образования, воспитания и развития в процессе обучения. Автор отмечает, что цели и задачи обучения не могут быть реализованы без соответствующих методов деятельности.

Рассмотрим классификацию методов обучения в виде схемы (рисунок 6).

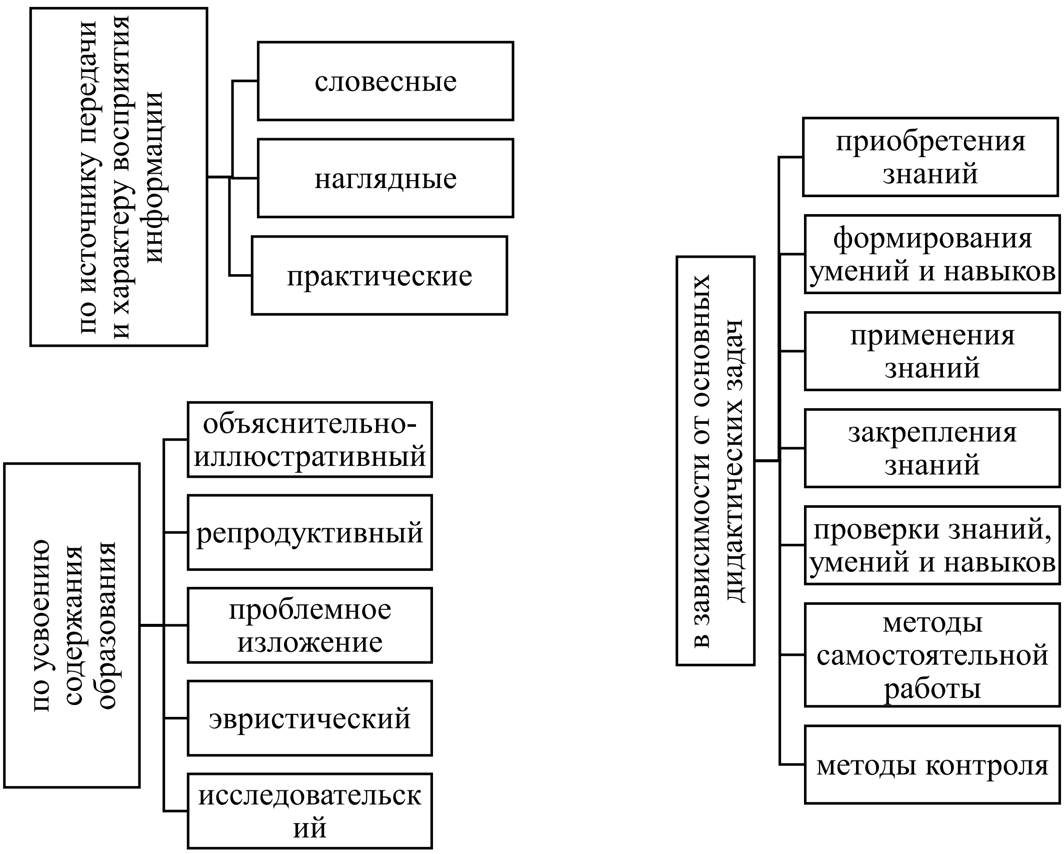



Рисунок 6 - Классификация методов обучения

При выборе и сочетании методов обучения необходимо руководствоваться следующими критериями:

– соответствие методов принципам обучения;

– соответствие целям и задачам обучения;

– соответствие содержанию данной темы;

– соответствие учебным возможностям школьников;

– соответствие имеющимся условиям и отведенному времени для обучения;

– соответствие возможностям самих учителей.

Эти возможности определяются их предшествующим опытом, уровнем теоретической и практической подготовленности, личностными качествами учителя.

Итак, выделим основные методы организации учебной деятельности при обучении старшеклассников теме «корень n-ой степени из действительного числа».

По нашему мнению, оптимальным словесным методом обучения данной теме является беседа. С помощью неё учитель налаживает контакт с учениками, контролирует уровень имеющихся знаний учащихся в процессе диалога, а также степень усвоения материала.

Бабанский Ю. К. подразделяет наглядные методы обучения на две большие группы: методы иллюстраций и демонстраций [16]. При обучении теме «Корень n-ой степени» важно применять метод иллюстраций. В качестве иллюстраций могут выступать изображения графиков функций на интерактивной доске. Иллюстративный метод важно сочетать со словесным.

Необходимо сочетать репродуктивный и проблемно-поисковые методы при обучении исследуемой теме. По мнению Бабанского Ю. К., проблемно-поисковые методы применяются с целью развития навыков творческой учебно-познавательной деятельности, они способствуют самостоятельному овладению знаниями. Проблемное обучение особенно эффективно при формировании понятий, теорем. Однако, этот метод имеет минусы, так как он несёт за собой большой расход времени на объяснение материала. При репродуктивном методе учитель сам формулирует понятия, теоремы, выделяет главное. Но он практически исключает развитие самостоятельности учащихся, творческих способностей. Поэтому учителю важно уметь применять два этих метода вместе. Так, например, при введении понятия «корень n-ой степени» можно применить проблемно-поисковой метод. А репродуктивный метод использовать при обучении свойствам арифметического корня n-ой степени.

Метод самостоятельной работы предполагает работу учащихся с учебником, с дополнительной справочной литературой. Например, ученики могут самостоятельно рассмотреть свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ и законспектировать их в тетрадь. Также целесообразно самостоятельно изучить пункт «преобразования иррациональных выражений» (в учебнике А. Г. Мордковича), так как он предполагает использование ранее изученных материалов и содержит примеры решения задач. Самостоятельная работа способствует улучшению организационной деятельности учащихся.

Важнейшим методом при обучении теме «Корень n-ой степени» является практический метод. Его необходимо использовать с целью формирования навыков и умений при решении задач.

Формы организации обучения есть не что иное, как процесс согласованной деятельности учителя и учащихся, реализуемый в установленном порядке и определенном режиме. Они носят социальный характер, регламентируют совместную деятельность учителя и учащихся, определяют соотношение индивидуального и коллективного обучения, степень активности учеников в познавательной деятельности и руководства ею со стороны учителя. Форма обладает по отношению к методу определенной автономностью и устойчивостью. Примером такой формы является урок – устойчивая форма, осуществляющаяся при применении самых различных методов [50, с.15]. Выделяют следующие типы уроков:

1) уроки овладения учащимися новыми знаниями;

2) уроки формирования и усвоения умений и навыков;

3) уроки обобщений и систематизации знаний;

4) уроки комплексного применения знаний, умений и навыков;

5) контрольно-проверочные уроки.

Все вышеперечисленные типы уроков применяются в процессе обучения старшеклассников теме «Корень n-ой степени».

В учебном пособии Ивановой Т. А. [51] отмечается, что благодаря технологическому подходу к обучению можно направить весь процесс обучения на достижение учебных целей. В основе педагогической технологии лежит идея управления учебным процессом, разработка и реализация обучающего цикла.

*Технология организации учебной деятельности* предполагает использование той или иной формы обучения во время проведения уроков. В педагогике выделяют три основные формы организации учебной деятельности:

– фронтальная;

– групповая;

– индивидуальная.

***Фронтальная форма*** **организации учебной деятельности -** вид деятельности учителя и учащихся на уроке, при которой весь класс одновременно выполняет одинаковую, общую для всех работу, обсуждая, сравнивая и обобщая результаты. При таком обучении все учащиеся выступают как одно целое, а каждый ученик принимает участие в нём как член коллектива, выполняя порученную ему часть общей работы [16]. Но данная форма имеет свои недостатки – она не учитывает индивидуальные особенности каждого учащегося. Во время такой работы пока «слабые» ученики стараются понять материал, «сильные» ученики уже теряют к нему интерес. Поэтому необходимо сочетать фронтальную форму с другой формой.

*Индивидуальная форма* учебной работы на уроке характеризуется высоким уровнем самостоятельности учащихся. При таком обучении учитываются уровень развития и возможности каждого ученика [16].

*Групповая форма* характеризуется делением коллектива на группы, в которых происходит обсуждение каких-либо вопросов, задач под руководством лидера группы.

Обучение теме «Корень n-ой степени» стоит организовывать с использованием фронтальной и индивидуальной форм обучения. Так, при сообщении новой информации, а именно, при введении понятия «корня n-ой степени», а также при рассмотрении свойств корня n-ой степени необходимо применять фронтальное обучение, так как очень важно донести материал до всех учащихся в одинаковой форме. Индивидуальную и групповую формы обучения целесообразно применять при закреплении материала, а именно при решении задач. Во время прорешивания учащимися однотипных задач (например, на нахождение области определения) можно дать «сильным» ученикам упражнения усложненного уровня (при условии, что они справляются с базовыми заданиями) и предоставить им возможность выйти к доске. В случае, если задание решено верно, учащийся объясняет всему классу его решение. Также задачи необходимо дифференцировать с учётом фактических знаний и умений учащихся.

## Выводы по первой главе

При написании первой главы выполнена следующая работа:

1. Поставлены основные цели и задачи обучения теме «корень n-ой степени из действительного числа». Так, основной целью обучения является подготовка учащихся к изучению понятия степени с действительным показателем. Для этого необходимо решить ряд задач по формированию определённых знаний и умений у учеников, а именно: знания определения корня n-ой степени и его свойств, умения рационально применять свойства

корня n-ой степени, умения самостоятельно доказывать свойства корня n-ой степени, формирование представления о графике функции $y = \sqrt[n]{x}$ и его свойствах.

2. Проведён анализ различных подходов к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа». Были рассмотрены учебные пособия таких авторов, как Мордкович А. Г., Муравин Г. К., Алимов Ш. А., Макарычев Ю.Н., Мерзляк А.Г. Каждый подход имеет свои особенности. Однако, стоит отметить, что подходы к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа» Мордковича А. Г., Мерзляка А.Г., Алимова Ш. А. начинаются с рассмотрения степенного уравнения: $x^n = a.$ Для решения уравнения данного вида авторы применяют либо алгебраический метод (характерен для Алимова Ш. А.), либо функционально-графический (характерен для Мордковича А. Г., Мерзляка А.Г.). Макарычев Ю.Н. и Муравин Г.К. вводят понятия посредством рассмотрения функции $y = x^n$. По нашему мнению, в классах с углубленным изучением алгебры и начал анализа для введения понятия «корня n-ой степени из действительного числа» целесообразно использование конкретно-индуктивного метода и функционально-графической линии, что характерно для пособий Мордковича А. Г и Муравина Г. К. Также, стоит отметить, что методика введения понятия во всех проанализированных пособиях с углубленным изучением математики ничем не отличается от методики, представленной в пособиях тех же авторов, ориентированных на базовый уровень.

3. Рассмотрено понятие «арифметического корня n-ой степени», представлены его основные свойства с приведением доказательства по каждому из них. Рассмотрены примеры с решениями по применению данных свойств.

4. Проведён анализ видов и типов задач по исследуемой теме в учебниках общеобразовательной школы. Рассмотрены примеры по каждому из типов задач (в том числе усложнённые) с приведённым решением. Стоит

отметить, что для классов с углубленным изучением математики необходимо наличие дифференцированного задачного материала. Важно формировать у учащихся навыки преобразования иррациональных выражений разной степени сложности. Также, важное значение имеет насыщенность задачного материала различными типами заданий: на вычисление и преобразование выражений, решение уравнений и неравенств, на доказательство, на построение графиков и исследование функции $y = \sqrt[n]{x}$ и т. д. Не во всех учебных пособиях можно увидеть такую насыщенность дифференцированными упражнениями разного типа. Наиболее эффективные задачные материалы представлены в учебниках Мордковича А. Г. и Муравина Г. К.

5. Выявлены наиболее эффективные формы, методы и технологии организации учебной деятельности для обучающихся при обучении теме «корень n-ой степени из действительного числа». Так, в качестве словесного метода обучения можно использовать беседу, а в качестве наглядных – иллюстрации. Также, нами было выявлено, что необходимо сочетать проблемно-поисковый метод обучения с репродуктивным для более эффективного усвоения нового материала. Особенно важное значение для организации учебной деятельности принимает метод самостоятельной работы учащихся и практический метод.

Основной формой обучения является урок. Для осуществления грамотной технологии организации учебной деятельности при обучении теме «корень n-ой степени из действительного числа» необходимо использовать фронтальную и индивидуальную формы учебной работы на уроках в зависимости от типа урока.

# Глава 2 Реализация методики обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры

## 2.1 Пропедевтика изучения темы «Корень n-ой степени из действительного числа» в курсе алгебры основной школы

Пропедевтика в предметной области «Математика» – сообщение предварительных знаний по той или иной математической теме, излагаемое в элементарной, систематизированной и сжатой форме и ведущее как к внутрипредметной, так и межпредметой интеграции школьного курса математики. Предшествует более основательному изучению какой-либо темы [28].

Пропедевтическое обучение математике выполняет обучающую функцию, сближая материалы смежных дисциплин или различных тем одной дисциплины, благодаря внутрипредметным или межпредметным интеграционным связям, этим самым способствуя более качественному усвоению материала.

Лобанок И.П. [28] выделяет следующие виды пропедевтики при обучении математике: перспективно-опережающее обучение, точечная пропедевтика и эпизодическая. В зависимости от степени удалённости во времени пропедевтического материала от момента его основного изучения автор выделяет ближнюю, среднюю и дальнюю пропедевтику.

Методика обучения теме «Корень n-ой степени из действительного числа» имеет характер перспективно-опережающего обучения. Перспективно-опережающее обучение – это пропедевтическое изучение материала задолго до его изучения по плану параллельно с основным материалом. Тема при этом развивается постепенно, со всеми логическими переходами [28]. Рассмотрим, как именно это происходит.

Предварительные знания по теме «корень n-ой степени из действительного числа» учащиеся начинают получать в 8 классе при изучении темы «Арифметический квадратный корень и его свойства». Однако, уже в 5 классе можно встретить задачи по темам: «Степень числа. Квадрат и куб числа», связанные с определением корня n-ой степени.

**Пример 1.** Квадрат какого числа равен 4; 16; 36; 81; 900? Куб какого числа равен 1; 8; 64; 125; 27000 [31, с.105]?

**Пример 2.** Чему равна сторона квадрата, если его площадь 36 см$^2$ [31, с. 111]?

Далее, в 7-м классе при изучении темы: «Степень с натуральным показателем» также встречаются подобные задачи.

**Пример 3.** Представьте в виде куба число: 64; -216; 0,008; $-\frac{1}{64}$; $4\frac{17}{27}$ [7, с. 96].

**Пример 4.** Вычислите ребро куба, если его объём равен: 27 мм$^3$; 0,125 см$^3$; 64 дм$^3$; $\frac{8}{125}$ м$^3$ [6, с. 84].

**Пример 5**. Назовите числа, четвёртая степень которых равна: 16; 0,0001; $\frac{1}{81}$; $\frac{256}{625}$ [6, с. 87].

**Пример 6.** Назовите число, пятая степень которого равна: -32; 243; 100000; $\frac{1}{32}$; $-7\frac{19}{32}$ [6, с. 87].

**Пример 7.** Найдите x, если: а) $2x^3 = -250$; б) $2x^4 = 162$; в) $5x^5 = 160$; г) $3x^6 = 192$ [6, с. 88].

Конечно, для решения данных задач необходимо и достаточно воспользоваться понятием «степени числа». Но уже на этом этапе можно говорить о пропедевтическом обучении исследуемой теме.

В 8 классе происходит усвоение понятия арифметического корня n-ой степени при n=2 и его свойств. При этом прослеживается не только внутрипредметная интеграция, но и межпредметная. Например, изучаемое понятие «Арифметический квадратный корень» на пропедевтическом уровне, сопряжено с изучением «Теоремы Пифагора» в курсе геометрии. Тема «Арифметический квадратный корень» является основным пропедевтическим материалом к исследуемой нами теме. Приведём некоторые примеры задач 8-го класса.

**Пример 8.** Докажите, что $\sqrt{169}$=13 [9, с.75].

**Пример 9.** Вычислите: $\sqrt{\frac{121}{64}}$ [9, с. 75].

**Пример 10.** Найдите значение выражения: $\frac{1}{3}\sqrt{0,36}+\frac{1}{5}\sqrt{900}$ [9, с. 75].

**Пример 11**. Имеет ли смысл выражение: а) $\sqrt{-100}$; б) $\sqrt{(-10)^2}$ [9, с. 76] ?

**Пример 12.** При каком значении переменной х верно равенство: $5-\sqrt{x}=0$ [9, с. 77] ?

**Пример 13.** Решите уравнение: а) $x^2=8$; б) $\frac{1}{4}a^2=10$ [9, с. 78].

**Пример 14.** При каких значениях переменной имеет смысл выражение: а) $-5\sqrt{x}$; б) $\sqrt{-2x}$ [9, с. 79]?

**Пример 15.** Найдите значение выражения: $\left(2\sqrt{6}\right)^2+\left(-3\sqrt{2}\right)^2$ [9, с. 80].

**Пример 16**. Решите графически уравнение: $\sqrt{x}=6-x$ [9, с. 87].

**Пример 17**. Найдите значение выражения: а) $\sqrt{9\cdot 64\cdot 0,25}$; б) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{196}{9}}$ [9, с. 91].

**Пример 18.** Упростите выражение: а) $\sqrt{36x^2}$, если $x\leq 0$; б) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x\geq 0$. [9, с. 95].

**Пример 19.** Вычислите: а) $\sqrt{\left(-6\right)^4}$; б) $\sqrt{2^8\cdot 3^2}$ [9, с. 96].

**Пример 20.** Вынесите множитель за знак корня:$\sqrt{363}$. [9, с. 98].

**Пример 21**. Внесите множитель под знак корня: $3\sqrt{2a}$ [9, с. 98].

**Пример 22.** Разложите на множители выражение: $a-5\sqrt{a}$ [9, с. 103].

**Пример 23.** Сократите дробь: $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$ [9, с. 103].

**Пример 24.** Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби: $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ [9 с. 103].

Далее тема развивается постепенно, переходя в темы «Решение квадратных уравнений», «Решение квадратных неравенств» и т. д. Теперь учащиеся сталкиваются с применением данного понятия на протяжении всего курса алгебры.

В школьных учебниках по алгебре за 8-ой класс также присутствуют задачи, связанные с определением корня n-ой степени при $n \geq 2$.

**Пример 25**. Найдите корни уравнения: 1) $x^4 - 16 = 0$; 2) $(x^2)^3 = 64$; 3) $x^{99} = -392^0$ [41, с.98].

**Пример 26.** Вычислите: а) $\sqrt[3]{216}$; б) $\sqrt[3]{125}$ [8, с. 61].

**Пример 27.** Докажите, что а) $\sqrt[3]{1000} = 10$; б) $\sqrt[3]{3{,}375} = \frac{3}{2}$; в) $\sqrt[3]{7^{12}} = 7^4$ [8, с. 61].

Стоит отметить, что только в УМК  А. Г. Мордковича за 8-ой класс [39] есть первоначальные сведения о корне n-ой степени из действительного числа при $n \geq 2$. А именно, вводится понятие «кубического корня из неотрицательного числа $a$». Автор немного забегает вперёд и пишет о существовании понятия «корня n-ой степени из неотрицательного числа $a$». Однако на этом Мордкович А. Г. останавливается, оговариваясь, что данное понятие учащимся предстоит изучить в 11 классе. Здесь уже можно говорить о перспективно-опережающем обучении, то есть о постепенном подведении учащихся к теме «Корень n-ой степени из действительного числа».

Анализ школьной учебной литературы показал, что тему «Корень n-ой степени из действительного числа» при $n \geq 2$ учащиеся изучают в 9 классе на пропедевтическом уровне. Однако, по некоторым учебным пособиям изучение данной темы предполагается только в старших классах. Подробный анализ учебников представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Анализ школьных учебников на изучение темы «Корень n-ой степени из действительного числа» в 9-11 классах

| № | Авторы учебника | Изучение темы «Корень n-ой степени из действительного числа» в 9, 10, 11 классах | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 9 | 10 | 11 |
| 1 | Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова | + | – | – |
| 2 | С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин | + | + | – |
| 3 | А. Г. Мордкович, П. В. Семёнов | – | – | + |
| 4 | Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина | + | + | – |
| 5 | Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин и др. | + | + | – |
| 6 | А. Г. Мерзляк, П. В. Полонсикй, М. С. Якир | – | + | – |

По данным таблицы очевидно, что в учебно-методических комплексах Мордковича А. Г. [37] и Мерзляка А. Г. [33] исследуемая тема изучается только в старших классах, а по УМК Макарычева Ю. Н. [29] только в 9 классе.

Стоит обратить внимание на то, что в учебниках Никольского С. М. [11, 2], Муравина Г. К. [41, 42] и Алимова Ш. А. [13, 14] тему «Корень n-ой степени» предполагается изучать и в 9-м, и в старших классах. Причём, изложение теоретического материала в данных пособиях, как в 9-м, так и в старших классах ничем не отличается. Практическая часть немного дополнена заданиями. Не совсем понятно, для чего авторы дублируют данную тему. На этом основании сложно говорить о том, что в 9-м классе тема «Корень n-ой степени» является пропедевтическим материалом для её дальнейшего изучения в 10-11 классах, так как материал даётся в полном объёме. Стоит отметить, что в учебниках Макарычева Ю. Н. [29] и Муравина Г.К. [41] сразу после её изучения идёт некоторый разрыв, и начинаются другие темы, не имеющие с ней никакой связи. Здесь у более любопытных учащихся, заинтересованных математикой, возникают вопросы: «Для чего мы вообще изучали данную тему? Как и где она может пригодиться?» Ясно, что она служит пропедевтическим материалом к теме «Степень с рациональным и действительным показателем», которая в полном объёме изучается в старших классах. Однако в учебниках за 9 класс Никольского С. М. [11] и Алимова Ш. А. [13] всё же выдержана данная последовательность. Но в старших классах эти же темы вновь повторяются.

В учебнике Мордковича А. Г. [36] за 9-ый класс рассматривается функция $y = \sqrt[3]{x}$. Автор даёт определение «кубического корня из числа $a$» и рассматривает график функции и её свойства. Теоретический материал подкрепляется соответствующими заданиями.

**Пример 28.** Вычислить: а) $\sqrt[3]{-125}$; б) $\sqrt[3]{216}$ [1, с. 88].

**Пример 29.** Вынесите множитель за знак радикала: а) $\sqrt[3]{250y}$; б) $\sqrt[3]{-512a^8}$ [1, с. 88].

**Пример 30.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби: а) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$; б) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$ [1, с. 88].

**Пример 31.** Выполните указанные действия: а)$\sqrt[3]{54 \cdot 5} \cdot \sqrt[3]{100}$ ; б)$\left(\sqrt[3]{5} + \right.$ $\left. + \sqrt[3]{15}\right) \cdot \sqrt[3]{25}$ [1, с. 88].

**Пример 32.** Решите уравнения: а)$\sqrt[3]{x} = -10$; б)$\sqrt[3]{4 - 2x} = 4$ [1, с. 89].

И, хотя в 8 классе Мордкович А. Г. немного упоминает о существовании корней степени $n \geq 2$ , он никак не подкрепляет это соответствующим задачным материалом (кроме примеров 9 и 10). В связи с этим, данные сведения у учащихся не откладываются. Именно поэтому, в 9-м классе у учеников может возникнуть вопрос: «Если существует корень третьей степени, то может ли существовать корень четвёртой, пятой и т.д. степеней?» Кепшина О. В. [22] также в своей работе отмечает странным тот факт, что учащиеся основной школы должны уметь решать уравнения вида: $x^2 = 2$, $x^3 = 5$, а решать уравнения $x^5 = 2$ – нет.

Таким образом, в настоящих учебных пособиях всех вышеперечисленных авторов существуют некоторые разногласия и противоречия относительно пропедевтического обучения теме «Корень n-ой степени из действительного числа» в курсе алгебры 9 класса. Такие рассуждения приводят к тому, что обучение исследуемой теме на пропедевтическом уровне в настоящее время не является совершенным.

На наш взгляд, пропедевтика изучения исследуемой темы наиболее удачно выдержана в учебно-методических комплексах Мордковича А. Г. Автор постепенно подводит учащихся к основному изучению темы с 7 по 9 классы. Отсутствует дублирование одного и того же материала в 9-м и старших классах в отличии от учебных пособий других авторов. По нашему мнению, при изучении темы «Функция $y = \sqrt[3]{x}$» в 9 классе целесообразно дать ученикам дополнительную информацию о существовании корня n-ой степени при $n \geq 2$, но не просто как теоретический материал, а в процессе решения нестандартных задач, например, на вычисление корней 4, 5, 6 и т.д. степеней. Это могут быть дополнительные задачи к основному материалу. В процессе решения таких упражнений предполагается, что учитель даёт дополнительную информацию, но в сжатой форме. При осуществлении данного условия, обучение теме «Корень n-ой степени из действительного числа» на пропедевтическом уровне будет являться более совершенным.

## 2.2 Методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и «арифметический корень n-ой степени из числа *a*»

Одной из основных целей методики преподавания математики является выявление наиболее рациональных способов введения того или иного понятия. Правильное представление о новом понятии играет очень важную роль в развитии математической грамотности учащихся, а также в их дальнейшем обучении. Введение математических понятий осуществляется абстрактно-дедуктивным или конкретно-индуктивным способами, при этом может быть выделен приоритет как числовой линии, так и функционально-графической.

Исследуемые понятия «корень n-ой степени из действительного числа» и «арифметический корень n-ой степени из числа *a*» рассматриваются в 10-11 классе при изучении темы «Корень n-ой степени». В §2 данной работы были представлены различные подходы к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа» в школьных учебниках. В результате было выявлено отсутствие единой методики введения исследуемых понятий. В связи с этим, в данной диссертации разработаны методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и «арифметический корень n-ой степени из числа *a*», способствующие, на наш взгляд, наиболее качественному усвоению данных определений.

Изучение темы «Корень n-ой степени» обобщает и расширяется понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня. Поэтому, по мнению Буцко Е. В., [4, с. 32] целесообразно перед изучением этой темы повторить указанные понятия. Также автор рекомендует после введения понятия «корня n-ой степени» отработать сначала понятие корня нечётной степени, так как оно воспринимается учащимися легче, чем понятие корня чётной степени. Буцко Е. В. считает, что нужно мотивировать необходимость введения понятия «арифметического корня n-ой степени» существованием двух корней чётной степени.

Фёдорова Н. Е., Ткачёва М.В. [54, с. 60] при изучении теоретического материала рекомендуют использовать различные источники информации по темам: «Квадраты чисел», «Натуральные степени числа 2», «Натуральные степени числа 3», «Модуль числа», «Формулы сокращенного умножения». Также, по мнению авторов, в классах с углубленным изучением математики при изучении темы можно применить частично-поисковой метод: доказательство единственности арифметического корня натуральной степени и его свойств полезно провести с помощью учащихся или в процессе индивидуальной работы с последующим обсуждением.

Авторы методических рекомендаций к учебнику Никольского С.М. - Потапов М. К., Шевкин А. В. [48, с. 61] обращают внимание на то, что необходимо давать лишь словесное описание тех чисел, которые называют корнями степени n из неотрицательного числа. А для доказательства существования корней следует использовать графический метод и непрерывность функции $y = x^n$.

Муравин Г.К. и Муравина О. В. [43, с.35] рекомендуют вводить понятие «корень n-ой степени» по аналогии с квадратным корнем (рассматривая операцию, обратную возведению в n-ую степень). Авторы рекомендуют ввести исследуемое понятие с помощью графиков $y = x^n$ при чётном и нечётном n, после чего с помощью этих же графиков ввести обозначение $\sqrt[n]{x}$ и понятие арифметического корня n-ой степени.

Артёмов А. К. в методическом пособии «Степени и корни» [15, с. 45] предлагает вводить понятие «корень n-ой степени» по аналогии с определением понятия «квадратного корня». Автор приводит такие примеры: $\sqrt{9} = \pm 3;\ (\pm 3)^2 = 9;\ \sqrt[3]{8} = 2, 2^3 = 8;\ \sqrt[4]{16} = \pm 2, (\pm 2)^4 = 16.$ Автор отмечает, что у учащихся необходимо добиться прочного знания того, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. С этой целью ученикам следует давать задания вида: дан $\sqrt[3]{a^2}$. Чему равна третья степень этого числа? Понятие «арифметический корень n-ой степени из числа $a$» автор вводит посредством рассмотрения такого примера: найти сумму $\sqrt{9} + \sqrt{36}$. Применяя понятие «корня n-ой степени», Артёмов А. К. отмечает, что, если учитывать все знаки перед каждым корнем, нахождение суммы становится затруднительным ввиду неоднозначности ответа $(9;\ -9;\ -3; 3)$, поэтому стоит ограничиться лишь положительными значениями. Таким образом автор предлагает ввести понятие «арифметический корень n-ой степени». Для закрепления определения Артёмов А. К. предлагает рассмотреть примеры на «выделение арифметический значений корней из данных чисел»: $\sqrt[3]{8};\ \sqrt[4]{256};\ \sqrt[5]{-32}$.

Приведём основные *методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и «арифметический корень n-ой степени из числа a».*

Исследуемые понятия стоит вводить конкретно-индуктивным методом. Данный метод обеспечивает высокую активность учащихся на уроке, а также обратную связь с учителем.

В процессе такой деятельности преподаватель может оценить, насколько эффективно происходит усвоение понятий.

Перед началом изучения темы, рекомендуется вспомнить определения «квадратного корня» и «арифметического квадратного корня». Также стоит провести актуализацию знаний (устно).

**Пример 1.**

1. Представить в виде куба числа: 8; $125$; $\frac{1}{64}$; $-343; 0,001$; $(-2)^6$.

2. Решить уравнения: $x^2 = 0{,}64$; $x^2 = 32$; $x^2 = -9$.

3. Имеют ли смысл выражения: $\sqrt{-100}$; $\sqrt{(-2)^4}$; $\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^3}$.

Исследуемые понятия необходимо рассматривать в таком порядке:

1. Введение понятия «корень n-ой степени из действительного числа».

2. Рассмотрение двух случаев решения уравнения $x^n = a$ при нечётном n и чётном n.

3. Введение понятия «арифметический корень n-ой степени из числа a».

Так как понятие «корень n - ой степени из действительного числа» связано с уравнением $x^n = a$, тему следует начать с решения уравнений данного вида, корни которых учащиеся могут найти без труда.

**Пример 2.** Решить уравнения: а) $x^4 = 49$; б) $x^3 = 125$.

Далее необходимо рассмотреть уравнение, приближённые корни которого возможно найти с помощью графического решения.

**Пример 3.** Решить уравнение: $x^4 = 3$.

Учащимся необходимо объяснить, что по графику данного уравнения возможно найти число (приближённо), четвёртая степень которого равна 3. После этого целесообразно ввести понятие «корня n-ой степени».

**Определение 1.** Корнем n-ой степени из действительного числа, где $n \epsilon N, n > 1$, называют такое число, n-я степень которого равна $a$.

Учителю стоит пояснить ученикам данное определение на примере.

**Пример 4.** Корень третьей степени из числа 8 равен 2, так как $2^3 = 8$. Корень четвёртой степени из числа 81 равен 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Сразу же стоит ввести математический символ $\sqrt[n]{\ }$.

Так как число корней уравнения $x^n = a$ зависит от n и от $a$, то далее необходимо рассмотреть 2 случая решения данного уравнения: сначала при нечётном n, затем при чётном n. Во время объяснения стоит применить иллюстративно-графический метод (рисунок 7, рисунок 8).

1. Если n - нечётное натуральное число, то функция $y = x^n$ возрастающая, E(y) = R, и уравнение имеет единственный корень при любом $a$.

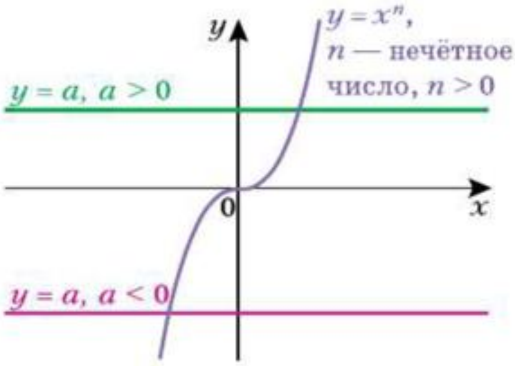



Рисунок 7 - Графическое решение уравнения $x^n = a$ при нечётном n

2. Если n-чётное натуральное число, то функция $y = x^n$ – чётная и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, а значит уравнение $x^n = a$ при $a > 0$ имеет 2 противоположных по знаку корня. При $a = 0$ корень один: $x = 0$. Так как E(y)= $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ уравнение не имеет решений.

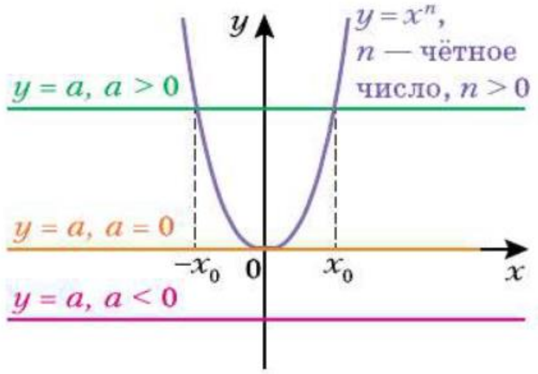



Рисунок 8 – Графическое решение уравнения $x^n = a$ при чётном n

Далее необходимо сделать выводы из данных рассуждений:

1. При нечётном n существует корень n-ой степени из любого числа, и притом только один.

2. При чётном n существует 2 корня n-ой степени из любого положительного числа $a$; корень n-ой степени из числа 0 равен 0; корней чётной степени из отрицательного числа не существует. То есть под корнем чётной степени может быть только неотрицательное число.

Для закрепления данных выводов можно привести схематическую запись решения уравнения $x^n = a$ (рисунок 9), а также примеры решения уравнений.

**Пример 5.** Решить уравнение: $x^3 = 27$; $x^4 = 6$; $x^3 = -11$.

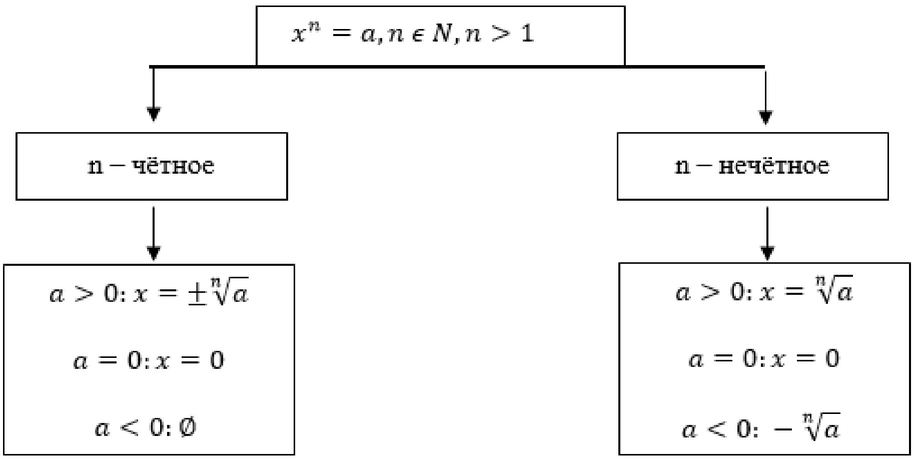



Рисунок 9 – Схема решения уравнения $x^n = a$

После приведённых выше выводов стоит перейти к введению понятия «арифметический корень n-ой степени из числа $a$». Так как с частным видом данного понятия учащиеся уже знакомы, можно сразу дать его определение и ввести обозначение.

**Определение 2.** Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа $a$, где n$\in$N, n>1, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна $a$. Обозначается: $\sqrt[n]{a},$ где $a$ —подкоренное выражение, n-показатель корня.

Здесь стоит обратить внимание учащихся на то, что в соответствии с определением, значением корня чётной степени из положительного числа является только положительное число.

На данном этапе можно привести основное свойство корня n-ой степени:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \begin{cases} a, \text{если } n - \text{нечётное} \\ |a|, \text{если } n - \text{чётное} \end{cases}$$

Данное понятие следует подкрепить примером.

**Пример 6.** Вычислить: $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[4]{256}$; $\sqrt[6]{0{,}000001}$.

Учащимся необходимо объяснить, что корень нечётной степени из отрицательного числа не является арифметическим. Но его всегда можно выразить через арифметический: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$ Здесь же стоит привести доказательство и пример.

**Пример 7.** $\sqrt[3]{-11} = -\sqrt[3]{11}.$

Для того, чтобы ученики быстрее освоили процесс извлечения корня n-ой степени, можно показать обратную операцию извлечения корня, то есть возведение в степень в виде таблицы 2.

Таблица 2 – Операции извлечения корня и возведения в степень

| | |
|---|---|
| $5^4$=625 | $\sqrt[4]{625} = 5$ |
| $(-4)^3 = -64$ | $\sqrt[3]{-64} = -4$ |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ | $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ |
| $0{,}1^3$=0,001 | $\sqrt[3]{0{,}001}$ |

Необходимо также уделять внимание правильному чтению корней n-ой степени.

Понятие «арифметического корня n-ой степени» полезно закрепить задачами на применение понятия.

**Пример 8.** Имеет ли смысл выражение: а) $\sqrt[10]{14}$; б) $\sqrt[3]{-38}$; в) $\sqrt[4]{-16}$?

**Пример 9.** Решить уравнения: а) $\sqrt[5]{x^2+7}=2$; б) $\sqrt[4]{2x+18}=-3$; в) $\sqrt[4]{2x+1}=0{,}2$.

**Пример 10**. Найдите область определения выражения: $\sqrt[8]{x^2-x-90}$.

## 2.3 Система упражнений по теме «Корень n-ой степени из действительного числа»

Для закрепления теоретических знаний учащихся, необходимо разработать систему упражнений, обеспечивающих усвоение учебного материала в полном объёме. В учебном пособии Лященко Е.И. [26, с.69] выделяет общие и специфические особенности систем обучающих задач, направленных на формирование элементов теоретических знаний. Общим для систем задач, направленных на усвоение учащимися понятий, теорем и правил, является наличие в них задач, подготавливающих введение соответствующего элемента теоретических знаний, связанных с его анализом, с его применением. Среди подготовительных задач выделяются задачи на мотивацию изучения понятий, теорем, правил и задачи на актуализацию знаний, умений и навыков, необходимых при работе с новым учебным материалом.

Автор выделяет следующие особенности системы задач на усвоение понятия и его определения:

1. Наличие задач, связанных с показом практической значимости нового понятия или с его значимостью для дальнейшего продвижения в изучении математики.

2. Наличие задач на актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия.

3. Наличие задач на выделение существенных признаков понятия.

4. Наличие задач на распознавание формируемого понятия.

5. Наличие задач на усвоение текста определения понятия.

6. Наличие задач на использование символики, связанной с понятием.

7. Наличие задач на установление свойств понятия.

8. Наличие задач на применение понятия.

Лященко Е.И. отмечает, что данная система задач обладает избыточностью. Некоторые виды задач могут отсутствовать, это зависит от содержания самого материала и от места его изучения.

По мнению Ивановой Т.А., система упражнений и задач должна соответствовать следующим принципам [51, с.151].

1. Принцип однотипности. Однотипная система упражнений - совокупность упражнений одного и того же типа.

2. Принцип непрерывного повторения.

3. Принцип вариативности.

4. Принцип единственного различия.

5. Принцип наличия контрпримера. В роли контрпримеров могут выступать задачи с неполными или противоречивыми условиями и любые другие упражнения, провоцирующие учащихся на ошибку.

6. Принцип полноты.

7. Принцип сравнения. Под принципом сравнения понимают чередование упражнений на прямые и обратные операции и любых других задач, когда желательно показать их взаимосвязь, сходство и различия.

8. Постепенное нарастание сложности.

9. Принцип цикличности.

Проанализировав различные методики по составлению системы упражнений, а также изучив требования к ним, нами была составлена система упражнений по теме «Корень n-ой степени из действительного числа» согласно методике Л. Е. Лященко. Задания, отмеченные звёздочкой, являются задачами повышенной трудности. Ответы и решения к системе задач приведены в Приложении А.

*Задачи на актуализацию знаний и умений:*

**Задача 1.** «Вычислить: а) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; б) $-\sqrt{(-3)^2}$; в) $\left(\sqrt{5}\right)^6$; г) $\left(-\sqrt{11}\right)^4$; д) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$; е) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$» [8, с. 58].

**Задача 2**. Решить уравнение: а) $x^2 = 13$; б) $3x^2 - 78 = 0$; в) $21x^2 + 189 = 0$.

**Задача 3.** При каких значениях $a$ имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{-a}$; б) $\sqrt{3+a}$; в) $\sqrt{\frac{2}{a+18}}$; г) $\sqrt{a^2-16}$.

**Задача 4.** Упростите выражение: а) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-4\right)^2}$; в) $\sqrt{(a+3)^2}$, если $a < -3$; г) $\sqrt{1+4k+4k^2}$, если $k \geq -0{,}5$.

*Задачи на мотивацию изучения понятия:*

**Задача 5.** «1) Выпишите все натуральные числа, кубы которых не превышают 10000; 2) Выпишите все целые числа, четвёртые степени которых не превышают 100000» [2, с. 101].

**Задача 6**. Решить уравнение: *а)* $x^3 = -1000$; б) $x^4 = 144$; в) $x^5 = \frac{1}{32}$; г) $x^6 = 64$.

**Задача 7.** Решить графически уравнение и найти его приближённые корни: а) $x^3 = 7$; б) $x^4 = 2$.

*Задачи с показом практической значимости понятия:*

**Задача 8.** «Вычислите ребро куба, если его объём равен: 27 мм$^3$; 0,125см$^3$; 64 дм$^3$; $\frac{8}{125}$ м$^3$» [6, с. 84].

**Задача 9.** «Выразите радиус R шара из формулы объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Варианты ответов: а) $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4V}}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3V}{\pi}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3V}}$» [42, с. 36].

**Задача 10**. По формуле «сложного процента»

$S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ можно рассчитать конечную (итоговую) сумму по вкладу за определённый период времени, зная стартовую сумму вклада и конечную сумму, а также процентную ставку, где $S_n -$ конечная сумма; $S_0 -$ стартовая сумма вклада; $p -$ставка начисляемого процента; n – число периодов начисления процентов. И, напротив, зная стартовую и конечную сумму, можно узнать процентную ставку. Выразите из данной формулы $p$. [21, с. 103].

*Задачи на распознавание формируемого понятия:*

**Задача 11**. «Верно ли, что:

1) число -3 является арифметическим корнем четвёртой степени из числа 81?

2) число 5 является корнем третьей степени из числа 125?

3)число 10 является арифметическим корнем шестой степени из числа 1000000?

4) число $-\frac{1}{2}$ является корнем пятой степени из числа $-\frac{1}{32}$ ?» [42, с. 58].

**Задача 12.** «Является ли записью арифметического корня выражение: а) $\sqrt[3]{-2}$; б) $-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[3]{(-2)^2}$; г) $\sqrt[4]{(-3)^3}$?» [11, с.109].

*Задачи на выделение существенных признаков понятия:*

**Задача 13.** «Докажите, что верно равенство: а) $\sqrt{361}$=19; б) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$; в) $\sqrt[3]{343} = 7$; г) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$» [38, с.29].

**Задача 14. «**Верно ли равенство: а) $\sqrt[3]{-27} = -3$; б) $\sqrt[3]{64} = -4$; в) $-\sqrt[4]{16} = -2$; г) $\sqrt[4]{625} = -5$?» [2, с. 106].

**Задача 15. «**Имеет ли смысл выражение: а) $\sqrt[6]{16}$; б) $\sqrt[4]{-25}$; в) $\sqrt[5]{-5}$; г) $\sqrt[4]{5-\sqrt{22}}$?» [42, с. 59].

**Задача 16. «**Найдите ошибку в рассуждениях:

а) $2 = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(2)^4} = \sqrt[4]{(-2)^4} = -2$; б) $5 = \sqrt[6]{15625} = \sqrt[6]{(5)^6} = \sqrt[6]{(-5)^6} = -5$» [38, с. 29].

**Задача 17.** «Вычислите: а) $\sqrt[3]{0{,}125}$; б) $\sqrt[4]{0{,}0625}$; в)$\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; г)$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; д)$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; е) $\sqrt[7]{-128}$» [38, с. 30].

**Задача 18.** «Вычислите: а) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt[5]{32}-0{,}5\sqrt[3]{-216}$;

в) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}$; г) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$; д) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}$» [14, с. 121].

**Задача 19.** «Подберите такое число $a$, чтобы выполнялось равенство: а) $\sqrt[3]{a}=-4$; б) $\sqrt[6]{-a}=\frac{2}{3}$; в) $\sqrt[4]{-a}=2$; г) $\sqrt[5]{a}=1\frac{1}{2}$» [38, с. 30].

**Задача 20.** «Вычислите: а) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; б) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$; в) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; г)$\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$» [33, с.92].

**Задача 21.** «Между какими соседними целыми числами расположено число: а)$\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{-19}$; в) $\sqrt[4]{52}$; г) $\sqrt[5]{-670}$?» [38, с. 30].

**Задача 22.** «Расположите в порядке возрастания числа:
а) 2, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{17}$; б) $\sqrt[3]{75}$, 4, $\sqrt[5]{1000}$; в) 3, $\sqrt[5]{40}$, $\sqrt[3]{7}$; г) 2, $\sqrt[6]{60}$, $\sqrt[4]{20}$» [38, с. 31].

**Задача 23.** «Расположите в порядке убывания: а) -1, $\sqrt[3]{-5}$, $\sqrt[4]{0{,}1}$;
б) 0, $\sqrt[3]{-0{,}25}$,$\sqrt[5]{-29}$; в) -2, $\sqrt[5]{-1{,}5}$, $\sqrt[3]{-9}$; г) 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{-2}$» [38, с. 31].

**Задача 24.** «При каких значениях переменных имеет смысл значение выражения: а)$\sqrt[6]{x}$; б)$\sqrt[12]{\frac{1}{x^2}}$; в) $\sqrt[7]{3+6x}$; г) $\sqrt[4]{25-x^2}$; д) $\sqrt[8]{x^2-x-90}$; е) $\sqrt[16]{20x-x^2+96}$?» [42, с. 60].

*Задачи на применение понятия к решению уравнений и неравенств:*

**Задача 25.** «Решите уравнение: а) $x^3=216$; б)$x^4=256$;
в) $x^5=-1024$; г) $x^6=729$» [10, с. 112].

**Задача 26.** «Решите уравнение: а) $x^2=10$; б)$x^5=-43$;
в) $x^8=15$; г) $(3-2x)^3=8$; д) $(5-3x)^6=\frac{1}{64}$; е) $(9x-x^2-4)^4=256$;

ж) $(x^2-5x+2)^6=64$» [42, с. 55].

**Задача 27.** «Решите уравнения: а) $x^8-82x^4+81=0$; б) $x^{12}+x^6-12=0$; в) $x^6-25x^3-54=0$; г) $x^8+13x^4-48=0$» [32, с. 76].

**Задача 28.** «Решите уравнение: а) $\sqrt[3]{x-5}=-3$; б) $\sqrt[4]{4-5x}=-2$; в) $\sqrt[5]{2x+8}=-1$; г) $\sqrt[3]{7-4x}=4$» [38, с. 31].

**Задача 29.** «Решите уравнение: а) $\sqrt[3]{x^2-9x-19}=-3$; б) $\sqrt[4]{x^2-10x+25}=2$; в) $\sqrt[7]{2x^2+6x-57}=-1$; г) $\sqrt[6]{x^2+7x+13}=1$» [38, с. 31].

**Задача 30.** «Решите неравенство: а) $\sqrt[3]{3x+1}<4$; б) $\sqrt[8]{4x+1}\le 1$; в) $\sqrt[4]{x^2-8}>\sqrt[4]{2x}$; г) $\sqrt[10]{x+2}>1$» [33, с. 93].

*Задачи на применение понятия к исследованию функции $y=\sqrt[n]{x}$:*

**Задача 31. «**Найдите область определения функции: а) $y=\sqrt{5x+8}+\sqrt[4]{2x-4}$; б) $y=\sqrt[10]{3x-12}-\sqrt[4]{2x-1}$; в) $y=\sqrt{x^2+4x-12}$; г) $y=\sqrt[6]{4-x^2-3x}$» [38, с.33].

**Задача 32.** «Найдите область определения функции: а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-8}{3x+5}}$ б) $y=\sqrt[5]{\dfrac{1+9x}{4+3x}}$; в) $y=\sqrt[6]{x^2-6x+5}-\sqrt{x^2-3x}$; г) $y=\sqrt[4]{\dfrac{10x^3-21x^2+4}{x^2-4x-21}}$ д) $y=\dfrac{\sqrt[4]{-x^3+5x^2-8x+4}}{\sqrt{x^2-9|x|+18}}$; е) $y=\sqrt[6]{x^3-6x^2+11x-6}+\sqrt{6x^3+17x^2+6x-8}$»[38, с. 33].

*Задачи на установление свойств понятия:*

**Задача 33.** «Найдите значение числового выражения: а) $\sqrt[5]{243\cdot\dfrac{1}{32}}$; б) $\sqrt[5]{0,00032\cdot 243}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{0,0625}}$; г) $\sqrt[5]{48\cdot 162}$; д) $\sqrt[6]{\dfrac{16}{0,25}}$»[38, с. 36].

**Задача 34.** «Найдите значение числового выражения: а) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{4}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}$; в) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{1024}}{\sqrt[4]{4}}$; д) $\sqrt[4]{32\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{8\cdot 27}$» [38, с.36].

**Задача 35. «**Найдите: а) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 7^5}$; б) $\sqrt[6]{3^{18}\cdot 10^{24}}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}\cdot 11^4}{5^8\cdot 2^{16}}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^{6}\cdot 7^{4}}}$ » [33, с. 80].

**Задача 36.** «Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{40}$; б) $\sqrt[5]{-64}$; в) $\sqrt[4]{243}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{250}{16}}$; д) $\sqrt[4]{1296}$; е) $\sqrt[4]{50625}$ » [2, с. 110].

**Задача 37.** «Упростите выражение, считая, что все переменные принимают только положительные значения:

а) $\sqrt[5]{1024x^{10}y^5z^{15}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{343m^{12}}{64n^3p^{15}}}$; в) $\sqrt[4]{0,0081a^{12}b^4c^{20}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{16r^{16}s^{12}}{81p^{24}q^4}}$ » [38, с.37].

**Задача 38.** «Вычислить: а) $\sqrt[4]{3^3\cdot 4^2}\cdot\sqrt[4]{4^6\cdot 3^5}$; б) $\sqrt[3]{7^2\cdot 2}\cdot\sqrt[3]{7^4\cdot 2^2}$;

в) $\sqrt[6]{5^{10}}\cdot\sqrt[6]{2^{12}\cdot 5^2}$; г) $\sqrt[5]{6^2\cdot 3^7}\cdot\sqrt[5]{6^3\cdot 3^3}$ » [38, с. 37].

**Задача 39.** «Вычислить: а) $\left(\sqrt[6]{7^3}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[6]{9}\right)^{-3}$; в) $\left(\sqrt[10]{32}\right)^2$; г) $\left(\sqrt[8]{16}\right)^{-4}$ »

[14, с. 22]

**Задача 40.** «Упростите выражение: а) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}$; г) $\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt{4}}}$; д) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\div\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; е) $\sqrt[3]{32\sqrt[4]{4}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$ » [2, с. 114 ].

**Задача 41. «**Вычислить: а) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$; г) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; д) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$ »[14, с. 23].

**Задача 42.** «Вычислите значение выражения:

а) $\left(4\sqrt[3]{72}-3\sqrt[3]{9}+5\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{3}$; б) $\dfrac{5\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}$ » [32, с. 89].

**Задача 43. «**Приведите радикалы к одному показателю корня:

а) $\sqrt{3};\sqrt[3]{4};\sqrt[6]{7}$; б) $\sqrt{2};\sqrt[3]{3};\sqrt[4]{4}$; в) $\sqrt{6};\sqrt[4]{17};\sqrt[8]{40}$; г) $\sqrt[5]{3};\sqrt[3]{2};\sqrt[15]{100}$ » [38, с. 38].

**Задача 44.** «Сравните: а) $\sqrt{3},\sqrt[3]{5},\sqrt[4]{8}$; б) $\sqrt{2},\sqrt[4]{5},\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ и $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$;

г) $\sqrt[4]{8\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2\sqrt[4]{8}}$ » [42, с.60].

**Задача 45.** «Упростите выражение: а) $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^3}$ ; б) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$ ;

в) $\sqrt[9]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$ ; г) $\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2}$ » [32, с.82].

**Задача 46.** «Упростить: а) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при 1) $x \geq 2;$ 2) $x < 2;$

б) $\sqrt{(3-x)^6}$ при 1) $x \leq 3;$ 2) $x > 3$; в) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}$ , если $-1 < x < 2;$

г) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}$ , если $-3 < x < -1$» [14, с. 23].

**Задача 47.** «Внесите переменные под знак корня: а) $ad^2\sqrt[4]{-ad^2}$

б) $-p^3q\sqrt[8]{p^2q}$ ; в) $-mn^3\sqrt[6]{-mn}$ ; г) $xy\sqrt[4]{x^2y^3}$ » [38, с. 38].

**Задача 48.** «Вынесите переменные из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{a^6b^9}-\sqrt[4]{-a^7b^5}$ ; б) $\sqrt[6]{-lm^{12}}+\sqrt[4]{-l^4m^{15}}$ » [38, с. 38].

**Задача 49.** «Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{32a^6}$, если $a \leq 0$; б) $\sqrt[4]{-625a^5}$; в) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, если $a < 0, b < 0$;

г) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, если $a > 0$» [33, с. 99].

**Задача 50.** «Упростите выражение: а) $\sqrt[4]{0,0001b^{20}}$ , если b≥0;

б) $-5\sqrt{4x^2}$ , если x≤0; в) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$ , если p≥0; г) $-0,1\sqrt[6]{1000000z^{42}}$ , если z≥0;

д) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, если m≤0, n≤0; е) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}$ , если b≥0, c≤0» [32, с. 82 ].

*Задачи на применение свойств изучаемого понятия к преобразованию выражений, содержащих радикалы:*

**Задача 51.** «Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{2\sqrt[3]{9}}$; в) $\frac{8}{\sqrt[5]{16}}$; г) $\frac{12}{7\sqrt[6]{243}}$» [38, с. 43].

**Задача 52.** «Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{10}{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{7}}$; б) $\frac{11}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6}}$; в) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$; г) $\frac{3}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{6}}$ [38, с. 43].

**Задача 53.** «Сократите дробь**:** а) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ ; б) $\frac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$;

в) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$» [33, с. 98].

**Задача 54.** «Найдите значение выражения: а) $\dfrac{4-3\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)^2}$; б) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$; г) $\dfrac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45}\right)^2}$» [38, с. 44].

**Задача 55.** «Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; б) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$» [14, с. 23].

**Задача 56.** [33, с. 100]. «Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2}}$»

**Задача 57.** [33, с. 100]. «Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$; б) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$»

***Задача 58. «**Вычислите: а) $\dfrac{x^2-2x+3-\sqrt[4]{4}}{x-\sqrt{3}}$ при $x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$;

б) $\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ при $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$» [38, с. 45].

***Задача 59.** «Доказать, что а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$; б) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+$ $+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$» [14, с. 23].

*Задачи на применение свойств изучаемого понятия к решению уравнений, неравенств и их систем:*

**Задача 60.** «Решите уравнения: а) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{5x}+13+\dfrac{\sqrt[3]{5x}}{5}=2\sqrt[3]{5x}$;

б) $\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{x}=0$; в) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6=0$; г) $\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x}-3=0$» [38, с. 39].

**Задача 61.** «Решите уравнение: а) $\sqrt[4]{(x+4)^4} = x+4$;
б) $\sqrt[6]{(x^2-2x-3)^6} = 3+2x-x^2$» [32, с.82].

***Задача 62.** «Решите уравнение: $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$» [32, с. 83].

***Задача 63.** «Найдите все значения $a$, при оторых уравнение имеет единственный корень: $\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+4\sqrt[6]{x+\sqrt{x}}+a=0$» [42, с. 66].

***Задача 64.** «Решите уравнение:
а) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$; б) $\sqrt[3]{x+10}-\sqrt[3]{x-9}=1$» [42, с. 66].

***Задача 65.** «Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$; б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x\sqrt{y}}+\sqrt[3]{y\sqrt{x}}=12,\\ xy=64.\end{cases}$» [42, с. 66].

Отметим, что в данной системе задач представлены следующие виды и типы задач.

1. *Задачи на решение уравнений, неравенств и их систем:* на решение простейших степенных уравнений (№2, 6, 25, 26 (а-в)); на решение простейших степенных уравнений графическим способом (№7); на решение степенных уравнений, сводящихся к линейным (№ 26 (г-д)); на решение степенных уравнений, сводящихся к полным квадратным уравнениям (№ 26 (е, ж)); на решение степенных уравнений методом замены переменной (№27); на решение иррациональных уравнений, сводящихся к линейным (№ 28); на решение иррациональных уравнений, сводящихся к полному квадратному (№ 29); на решение иррациональных уравнений методом замены переменной (№ 60); на решение иррациональных уравнений с модулем (№ 61, 62); на решение иррациональных уравнений с применением ФСУ (№ 64); на решение системы уравнений, содержащей иррациональное уравнение, решаемое методом подстановки и введением новой переменной (№ 65); на решение иррационального неравенства (№ 30); на решение уравнения с параметром (№63).

2. *Задача на нахождение области определения выражения / функции*: на нахождение области допустимых значений переменной иррационального выражения (№ 3, №24); на нахождение области определения функции $y = \sqrt[n]{x}$ (№ 31, № 32).

*3. Задачи на вычисление:* на вычисление корней n-ой степени с применением понятия «корня n-ой степени» (№ 17, 18); на вычисление корней n-ой степени с применением основного свойства «корня n-ой степени» (№1, 20); на нахождение значения числового выражения, содержащих корень n-ой степени с применением 1-го или нескольких свойств (№ 33-36, 38, 39, 41, 42); на вычисление дробного числового выражения с применением формул ФСУ (№ 54); на нахождение значения выражения с подстановкой (№ 58); на нахождение числа по его степени (№ 5, 8, 11).

*4. Задачи на преобразование иррациональных числовых выражений:* на упрощение выражения с применением основного свойства корня n-ой степени (№4 (а,б)); на упрощение выражения с применением 1-го или нескольких свойств (№ 40, 43-45); на преобразования в знаменателе дробных иррациональных выражений (№ 51, 52); на доказательство тождества (№ 59); сравнение чисел (расположением на числовой прямой) с применением свойства корня n-ой степени (№21-23).

*5. Задачи на преобразование буквенных иррациональных выражений*: на упрощение выражений с применением основного свойства корня n-ой степени (№4 (в, г), №37, 46, 50); на внесение множителя под знак корня (№ 47); на вынесение множителя из-под знака корня (№ 48, 49); на сокращение дробей с применением ФСУ и свойств корня n-ой степени (№ 53); на упрощение выражений с применением ФСУ, свойств корня n-ой степени (№ 55, 56); на доказательство тождества (№ 57).

*6. Задачи на работу с формулой:* на выражение требуемой величины из формулы с применением понятия «корень n-ой степени» (№ 9, 10).

## 2.4 Описание педагогического эксперимента

Экспериментальная работа была проведена на базе МБУ «Школа №43» г. о. Тольятти учителем математики Оксаной Леонидовной Серко в 2020 учебном году. Она включала в себя констатирующий и поисковый этапы эксперимента.

В эксперименте участвовало 27 учеников 11-го класса, обучающихся на профильном уровне. Ученики учатся по учебному пособию А.Г. Мордковича.

Цель констатирующего этапа эксперимента – определение у учащихся уровня сформированности понятия «корня n-ой степени из действительного числа», «арифметического корня n-ой степени из числа $a$», выявление уровня умения решать задачи по теме «Корень n-ой степени».

В статье «Введение понятия корня n-ой степени в курсе алгебры общеобразовательной школы» [23] нами было отмечено, что тема «Корень n-ой степени» имеет важное значение в контексте внутрипредметных интеграционных связей. Так, понятие «корень n-ой степени» связано с понятием степени с дробно–рациональным показателем. Изучение данной темы имеет важное значение для нахождения производной и первообразной. Знание свойств арифметического корня n-ой степени и свойств степени с рациональным показателем, а также умения их применять позволяют решать степенные и иррациональные уравнения, неравенства и их системы.

Известно, что в заданиях ЕГЭ на профильном уровне присутствуют задания на знания понятия корня n-ой степени и его свойств, а именно:

– на решение иррациональных уравнений и неравенств;

– на преобразование числовых иррациональных выражений;

– на преобразование буквенных иррациональных выражений;

Успешная сдача экзамена предполагает хорошее знание исследуемой темы.

Для достижения поставленной цели констатирующего этапа эксперимента нами была составлена контрольная работа в двух вариантах, где представлены следующие типы задач:

– на вычисление (№1, задания могут встретиться на ЕГЭ);

– на нахождение области определения функции (№4);

– на решение уравнений, содержащих радикалы (№2, №6, задания могут встретиться на ЕГЭ);

– на решение неравенств, содержащих радикалы (№8);

– на преобразование выражений, содержащих радикалы (№ 3, №5, №7).

Задания под номерами 6-8 являются задачами повышенного уровня сложности.

Задача № 8 выполняется по желанию учащихся, решение которой влияет только на повышение оценки.

С целью выявления уровня сформированности понятий «корня n-ой степени из действительного числа» и «арифметического корня n-ой степени из числа $a$» в работу включены 2 теоретических вопроса.

Ответы учащихся на данные вопросы не будут влиять на результат контрольной работы.

1. Выберите верное утверждение. *Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа* $a$ *называют…*

A) такое число, n-я степень которого равна $a$;

B) такое неотрицательное число, n-я степень которого равна $a$;

C) нет правильного ответа.

2. Выберите верное(ые) утверждение(ия) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = \ldots$

A) $a$;

B) $a$, если n-нечётное;

C)$|a|$, если n-нечётное;

D)$|a|$, если n-чётное.

*Вариант 1.*

**№ 1. Найдите значение выражения:**

а) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}+\sqrt[4]{0,0001}$ [20]; б) $\frac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$ [43];

в) $\sqrt[3]{\frac{3^9\cdot 7^3}{2^{12}}}$ [32]; г) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$ [32].

**Решение.**

а) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}+\sqrt[4]{0,0001}=\sqrt[5]{-\frac{243}{32}}+0,1=-\frac{3}{2}+0,1=-1,5+0,1=-1,4$;

б) Применим свойство корня n-ой степени $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$:

$$\frac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}=\frac{\sqrt[5]{10\cdot 16}}{\sqrt[5]{5}}=\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[5]{\frac{160}{5}}=\sqrt[5]{32}=2;$$

в) Применим свойство корня n-ой степени:

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

$$\sqrt[3]{\frac{3^9\cdot 7^3}{2^{12}}}=\sqrt[3]{\frac{(3^3)^3\cdot 7^3}{(2^4)^3}}=\frac{3^3\cdot 7}{2^4}=\frac{27\cdot 7}{16}=\frac{189}{16}=11,8125;$$

г) Применим свойство корня n-ой степени $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ и формулу сокращенного умножения – разность квадратов:

$$\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}=\sqrt[4]{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}=\sqrt[4]{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[4]{36-20}=\sqrt[4]{16}=2.$$

**№ 2. Решите уравнения:** а) $2x^6-36=0$ [32]; б) $\sqrt[6]{x^2-2x+61}=2$ [20].

**Решение.**

а) $2x^6-36=0\Leftrightarrow 2x^6=36\Leftrightarrow x^6=18\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[6]{18}$

**Ответ:** $\pm\sqrt[6]{18}$.

б) Возведём обе части уравнения в шестую степень:

$\sqrt[6]{x^2-2x+61}=2$

$\left(\sqrt[6]{x^2-2x+61}\right)^6=(2)^6$

$x^2-2x+61=64$

$x^2-2x-3=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{array}\right.$

**Ответ:** -1; 3.

**№ 3. Упростите выражение при заданных значениях х:**

а) $\sqrt[4]{(2x+5)^4}=|2x+5|=-2x-5$ при $x<-2{,}5$; б) $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt[4]{(4+x)^4}$, при $x>4$ [3].

**Решение.** а) $\sqrt[4]{(2x+5)^4}=|2x+5|$. Если $x<-2{,}5$, то $\sqrt[4]{(2x+5)^4}=|2x+5|=-2x-5$ б) $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt[4]{(4+x)^4}=|x-3|+|4+x|=x-3+4+x=2x+1$

Если $x>4$, то $|x-3|+|4+x|=x-3+4+x=2x+1$.

**№ 4. Найдите область определения функции:**

$y=\sqrt[6]{x^2-x-2}-\dfrac{\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt[4]{-x-1}}$ [20].

**Решение.** Найдём область допустимых значений. Под корнем чётной степени может быть только неотрицательное число, под корнем нечётной степени могут быть все действительные числа, знаменатель дроби не должен быть равен нулю. Решение сводится к системе:

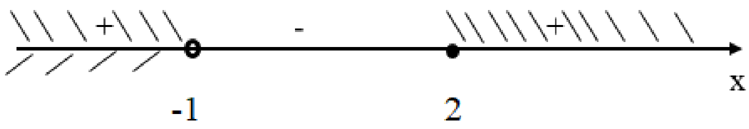
$$D(y)=\begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ -x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1).$$

$x^2-x-2\geq 0$

$x^2-x-2=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{array}\right.$

Изобразим решения неравенств на числовой прямой:




Решение системы неравенств – это и есть область определения функции.

**Ответ:** $D(y)=(-\infty;-1)$.

**№ 5. Упростите выражение:** $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}+3\sqrt[5]{ab}}{\sqrt[5]{a^2}+6\sqrt[5]{ab}+9\sqrt[5]{b^2}}$ [20].

**Решение.** $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}+3\sqrt[5]{ab}}{\sqrt[5]{a^2}+6\sqrt[5]{ab}+9\sqrt[5]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[5]{a}\left(\sqrt[5]{a}+3\sqrt[5]{b}\right)}{\left(\sqrt[5]{a}+3\sqrt[5]{b}\right)^2}=\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a}+3\sqrt[5]{b}}$

**№ 6. Решите уравнение:**

$\sqrt[5]{(3x+1)^6}-5\sqrt[5]{(3x+1)^3}+4=0$ [44].

**Решение.** Введём новую переменную t: $\sqrt[5]{(3x+1)^3}=t$, тогда

$\sqrt[5]{(3x+1)^6}=t^2$. Получим уравнение:

$$t^2-5t+4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=4 \\ t_2=1 \end{array}\right.$$

Вернёмся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{(3x+1)^3}=1 \\ \sqrt[5]{(3x+1)^3}=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (3x+1)^3=1 \\ (3x+1)^3=4^5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1=1 \\ (3x+1)^3=1024 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=0 \\ 3x+1=\sqrt[3]{1024} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{\sqrt[3]{1024}-1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{\sqrt[3]{512\cdot 2}-1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{8\sqrt[3]{2}-1}{3} \end{array}\right.$$

**Ответ:** 0; $\dfrac{8\sqrt[3]{2}-1}{3}$.

**№ 7. Найдите значение выражения:** $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ при $x=\sqrt[3]{4^4}$ [47].

**Решение.** Упростим выражение, воспользовавшись свойствами корня n-ой степени $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ и $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ :

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[12]{x} \cdot \sqrt[24]{x} = \sqrt[24]{x^6} \cdot \sqrt[24]{x^2} \cdot \sqrt[24]{x} = \sqrt[24]{x^6 \cdot x^2 \cdot x} = \sqrt[24]{x^9} = \sqrt[8]{x^3}$$

Если $x = \sqrt[3]{4^4}$ , то $\sqrt[8]{x^3} = \sqrt[8]{\left(\sqrt[3]{4^4}\right)^3} = \sqrt[8]{4^4} = \sqrt{4} = 2$.

**Ответ:** 2.

**№ 8. Решите неравенство:** $\sqrt[6]{x-1} < -x+3$[20].

**Решение.**

Решим неравенство графическим методом. Построим график функции $y = \sqrt[6]{x-1}$ и график функции $y = -x + 3$.

График функции $y = \sqrt[6]{x-1}$ получим путём сдвига графика функции $y = \sqrt[6]{x}$ по оси абсцисс на одну единицу вправо. Графиком функции $y = -x + +3$ является прямая. Составим таблицу 3 значений:

$y = -x + 3$

Таблица 3 – Таблица значений

| | | |
|---|---|---|
| x | 3 | 1 |
| y | 0 | 2 |

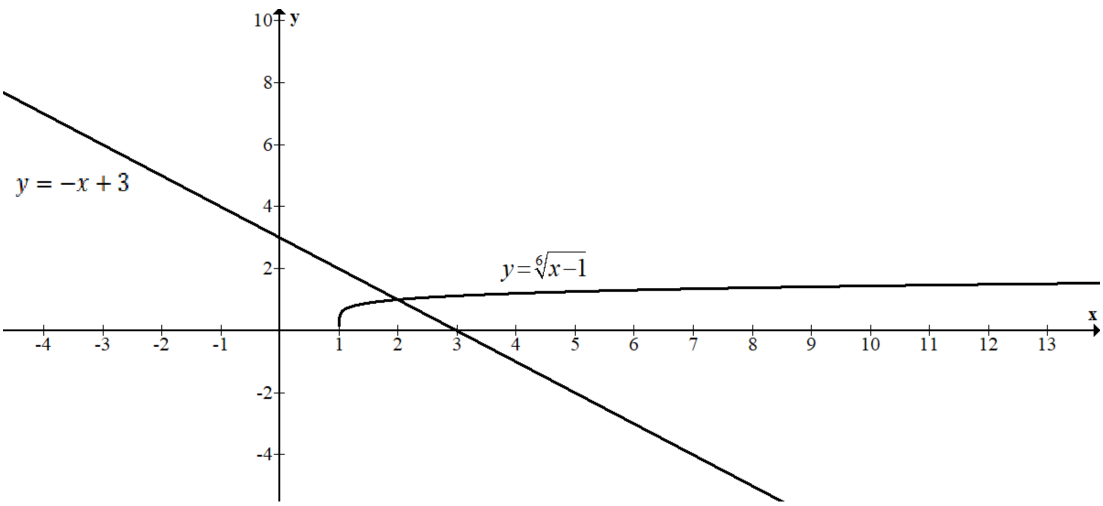



Рисунок 10 – К заданию 8

По графику (рисунок 10) найдём решение неравенства $\sqrt[6]{x-1} < -x+3$. Очевидно, что $\sqrt[6]{x-1} = -x+3$ при $x = 2$. Знак неравенства-строгий, а значит точка x=2 не включается в область решения.

**Ответ:** $x \in [1; 2)$.

*Вариант 2.*

**№1. Найдите значение выражения:** а) $\sqrt[4]{0,0081} - \sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$ [20];

б) $\frac{\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{5}}$ [44]; в) $\sqrt[4]{\frac{5^8 \cdot 11^4}{2^{16}}}$ [32]; г) $\sqrt[3]{9-3\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{9+3\sqrt{6}}$ [32].

**Решение.**

а) $\sqrt[4]{0,0081} - \sqrt[3]{-1\frac{61}{64}} = 0,3 - \sqrt[3]{-\frac{125}{64}} = 0,3 - \left(-\frac{5}{4}\right) = 0,3 + 1,25 = 1,55$;

б) Применим свойство корня n-ой степени $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$:

$$\frac{\sqrt[4]{15} \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{27 \cdot 15}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{27 \cdot 15}{5}} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = 3;$$

в) Применим свойство корня n-ой степени $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$:

$$\sqrt[4]{\frac{5^8 \cdot 11^4}{2^{16}}} = \frac{5^2 \cdot 11}{2^4} = \frac{25 \cdot 11}{16} = \frac{275}{16} = 17\frac{3}{16};$$

г) Применим свойство корня n-ой степени $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ и формулу сокращенного умножения – разность квадратов:

$$\sqrt[3]{9-3\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{9+3\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\left(9-3\sqrt{6}\right)\left(9+3\sqrt{6}\right)} = \sqrt[3]{81-54} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

**№ 2. Решите уравнения:** а) $8x^4 - 64 = 0$ [9]; в) $\sqrt[4]{x^2+2x+78} = 3$ [20].

**Решение.** а) $8x^4 - 64 = 0 \Leftrightarrow 8x^4 = 64 \Leftrightarrow x^4 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{8}$.

**Ответ:** $\pm\sqrt[4]{8}$.

б) Возведём обе части уравнения в четвёртую степень:

$$\sqrt[4]{x^2+2x+78}=3$$
$$x^2+2x+78=81$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=1 \end{array}\right.$$

**Ответ:** -3; 1.

**№ 3. Упростите выражение:** а) $\sqrt[6]{(1+3x)^6}$ , при $x \geq -\frac{1}{3}$;

б) $\sqrt[4]{(5+x)^4}-\sqrt[6]{(x-1)^6}$ при $x < -6$ [3].

**Решение.** а) $\sqrt[6]{(1+3x)^6}=|1+3x|$. Если $x \geq -\frac{1}{3}$, то $|1+3x|=1+3x$;

б) $\sqrt[4]{(5+x)^4}-\sqrt[6]{(x-1)^6}=|5+x|-|x-1|$. Если $|5+x|-|x-1|=-5+x-(1-x)=-5+x-1+x=$ $=2x-6$.

**№ 4. Найдите область определения функции:** $y=\sqrt[6]{x^2-x-2}-\dfrac{\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt[4]{-x-1}}$ [20].

**Решение.** Найдём область допустимых значений. Под корнем чётной степени может быть только неотрицательное число, под корнем нечётной степени – любое действительное число. Знаменатель дроби не может быть равен нулю. Составим и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ -x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ x<-1 \end{cases}$$

$$x^2-x-2\geq 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{array}\right.$$

Изобразим решения неравенств на числовой прямой:

Решение системы неравенств – это и есть область определения функции.

**Ответ:** $D(y)=(-\infty;-1)$.

**№ 5. Упростите выражение:** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}$ [20]

**Решение.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\left(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}\right)}$.

**№ 6. Решите уравнение:** $\sqrt[5]{(4x-1)^6}-4\sqrt[5]{(4x-1)^3}+3=0$ [44].

**Решение.** Введём новую переменную $t=\sqrt[5]{(4x-1)^3}$, тогда

$$\sqrt[5]{(4x-1)^6}=t^2$$

$$t^2-4t+3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=3 \\ t_2=1 \end{array}\right.$$

Вернёмся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{(4x-1)^3}=3 \\ \sqrt[5]{(4x-1)^3}=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (4x-1)^3=3^5 \\ (4x-1)^3=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (4x-1)^3=243 \\ 4x-1=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-1=\sqrt[3]{243} \\ 4x=2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt[3]{243}+1}{4} \\ x=0,5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt[3]{9\cdot 27}+1}{4} \\ x=0,5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\sqrt[3]{9}+1}{4} \\ x=0,5 \end{array}\right.$$

**Ответ:** 0,5; $\dfrac{3\sqrt[3]{9}+1}{4}$.

**№ 7. Найдите значение выражения** $\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$ при $x=\sqrt[5]{27^4}$ [47].

**Решение.** Упростим выражение, воспользовавшись свойствами корня n-ой степени $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ и $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$:

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[24]{x}=\sqrt[24]{x^6}\cdot\sqrt[24]{x^3}\cdot\sqrt[24]{x}=\sqrt[24]{x^6\cdot x^3\cdot x}=\sqrt[24]{x^{10}}=\sqrt[12]{x^5}$$

Если $x=\sqrt[5]{27^4}$, то $\sqrt[12]{x^5}=\sqrt[12]{(\sqrt[5]{27^4})^5}=\sqrt[12]{27^4}=\sqrt[3]{27}=3$. **Ответ:** 3.

**№ 8. Решите неравенство:** $\sqrt[5]{x+3}>-x-1$ [20].

**Решение.** Решим неравенство графическим методом. Построим график функции $y=\sqrt[5]{x+3}$ и график функции $y=-x-1$. График функции $y=\sqrt[5]{x+3}$ получим путём сдвига графика функции $y=\sqrt[5]{x}$ на три единицы влево по оси абсцисс. Графиком функции $y=-x-1$ является прямая.

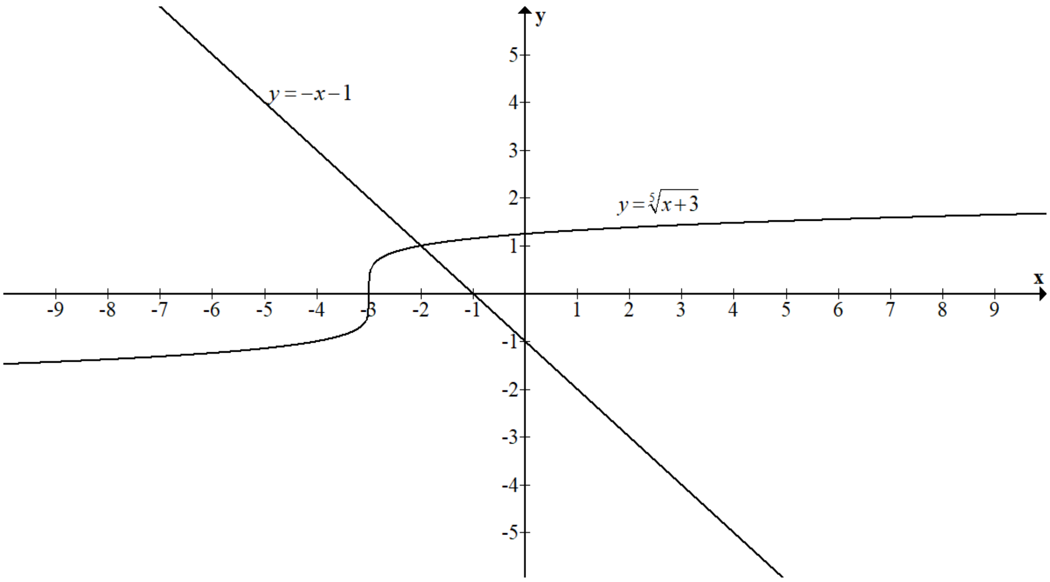



Рисунок 11 – К заданию 8

По графику (рисунок 11) найдём решение неравенства $\sqrt[5]{x+3}>-x-1$. Очевидно, что $\sqrt[5]{x+3}=-x-1$ при $x=-2$. Знак неравенства строгий, а значит точка x=−2 не будет включена в область решения.

**Ответ**: $x\in(-2;+\infty)$.

Результаты теоретической и практической части контрольной работы представлены в таблицах 4 и 5 соответственно.

Таблица 4 - Результаты теоретической части контрольной работы

| № задания | Количество учащихся | |
|---|---|---|
| | Выполнили верно | Выполнили неверно |
| 1 | 16 (59,3%) | 11 (40,7%) |
| 2 | 14 (51,8%) | 13 (48,1%) |

Таблица 5 - Результаты практической части контрольной работы

| № задания | Количество учащихся | | |
|---|---|---|---|
| | Выполнили верно | Выполнили неверно | Не приступили к заданию |
| 1 | 24 (88,8%) | 3 (11,1%) | 0 (0%) |
| 2 | 22 (81,5%) | 4 (13,3%) | 1 (3,7%) |
| 3 | 14 (51,8%) | 12 (44,4%) | 1 (3,3%) |
| 4 | 16 (59,2%) | 7 (25,9%) | 4 (14,8%) |
| 5 | 16 (59,2%) | 8 (29,6%) | 3 (11,1%) |
| 6 | 9 (33,3%) | 12 (44,4%) | 6 (22,2%) |
| 7 | 8 (29,6%) | 13 (48,1%) | 6 (22,2%) |
| 8 | 5 (18,5%) | 9 (33,3%) | 13(48,1%) |

Результаты теоретической части контрольной работы указывают на недостаточную сформированность у учащихся понятий «корня n-ой степени из действительного числа» и «арифметического корня n-ой степени из числа $a$». Практически половина класса неверно ответила на представленные вопросы.

Анализ таблицы 5 показывает, что у учащихся вызвало трудности задание на нахождение области определения функции. С ним справились 59,2% учеников. Хуже всего учащиеся справились с 8-м заданием – на решение неравенства - всего 5 человек, а 9 человек не смогли верно решить это задание. Низкие показатели успешного решения имеют задания на решение уравнения с заменой переменной и на преобразование иррационального выражения (№ 6). При решении шестой и седьмой задачи допущено большое количество ошибок – 13 учащихся не справились с 7 заданием, 12 – с задачей № 6. Также стоит обратить внимание на задание 3. Задача относится к лёгкой степени сложности, однако только 14 учащихся решили её верно.

Стоит отметить, что лучше всего учащиеся справились с заданиями на нахождение значения выражения (к этому заданию приступили все учащиеся), на решение уравнений (задание № 2).

Нами были проанализированы типичные ошибки учащихся при решении контрольной работы. Анализ ошибок представлен в таблице 6.

Таблица 6 - Виды ошибок

<table>
<tr><td colspan="4">Задание 1</td></tr>
<tr><td>Вычислительная ошибка</td><td>Неверное применение свойства корня n-ой степени</td><td colspan="2">Неверное применение ФСУ</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задание 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычислительная ошибка</td><td colspan="2">Неверный ход решения (не возведена в степень правая часть уравнения)</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задание 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нет подробного объяснения</td><td>Неверно раскрыт модуль</td><td>Упущен модуль</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задание 4</td></tr>
<tr><td>Неверно определена ОДЗ</td><td colspan="2">Неверно решена система неравенств</td><td>Вычислительная ошибка</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">3</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задание 5</td></tr>
<tr><td>Неверное применение свойств корня n-ой степени</td><td colspan="2">Неверное применение формулы ФСУ</td><td>Неверное сокращение дробей</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">3</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задание 6</td></tr>
<tr><td>Неверный ход решения уравнения</td><td>Не правильно произведена замена</td><td>Неверный ход решения совокупности уравнений на этапе возврата к замене</td><td>Вычислительная ошибка</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задание 7</td></tr>
<tr><td>Неверное применение свойств корня n-ой степени</td><td colspan="2">Вычислительная ошибка</td><td>Неверное применение свойств степеней</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="2">1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="4">Задание 8</td></tr>
<tr><td>Неверный ход решения неравенства</td><td colspan="2">Неверно построены графики функций</td><td>Неверно найдено решение неравенства</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">3</td><td>4</td></tr>
</table>

Анализ ошибок показал, что учащиеся испытывают трудности в основном с применением свойств корня n-ой степени. Особенно ученики путаются в правильности применения того или иного свойства при преобразовании выражений, содержащих радикалы. Отметим, что особое значение имеет задание на нахождение области определения функции, так как от правильности нахождения ОДЗ зависит решение большинства уравнений и неравенств. Ошибки в данном задании указывают на то, что не всеми учащимися раскрыто понятие «корня n-ой степени из действительного числа» в полной мере. Также на это указывают и ошибки в задании 3.

Стоит отметить, что у учащихся имеются ошибки при решении более сложных уравнений, содержащих радикалы (в нашем случае – с введением новой переменной).

В таблице 7 представлены итоговые результаты контрольной работы.

Таблица 7 - Результаты контрольной работы

| Оценка | Количество учеников, получивших данную оценку |
|---|---|
| «5» | 3 (10%) |
| «4» | 8 (26,6%) |
| «3» | 10 (33,3%) |
| «2» | 9 (30%) |

Таким образом, можно сделать вывод о том, что подавляющая часть учащихся испытывают трудности при решении заданий на тему «Корень n-ой степени». Разработанная нами система упражнений как раз направлена на формирование умений решать задачи по исследуемой теме. А предлагаемые нами методические рекомендации по введению понятий «корня n-ой степени из действительного числа» и «арифметического корня n-ой степени из числа $a$» могут способствовать более эффективному усвоению темы, как на теоретическом, таки на практическом уровне.

## Выводы по второй главе

При написании второй главы магистерской диссертации была выполнена следующая работа:

1. Проанализирована пропедевтика изучения темы «Корень n-ой степени из действительного числа» в курсе алгебры основной школы. Было выявлено,

что предварительные знания по исследуемой теме учащиеся получают в 8 классе при изучении понятия «арифметического квадратного корня». Однако, некоторые задачи, связанные с понятием «корня n-ой степени», можно встретить уже в 5-7 классах при изучении степеней. Также был проведён анализ действующих учебников по алгебре 9-11 классов. В результате было выявлено, что авторы по-разному раскрывают пропедевтику темы «Корень n-ой степени из действительного числа». В некоторых учебных пособиях данная тема дублируется в 9 и 10 классах. В других частично затрагивается в 9-м классе. В итоге нами была выявлена наиболее «удачная» пропедевтика исследуемой темы.

2. Приведены методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и «арифметический корень n-ой степени из числа *a*», которые, по нашему мнению, могут способствовать более качественному усвоению данных понятий в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа.

3. Разработана система упражнений по теме «Корень n-ой степени из действительного числа».

4. Проведён констатирующий и поисковый этапы эксперимента. В ходе эксперимента была составлена контрольная работа в двух вариантах по теме «Корень n-ой степени из действительного числа». В результате написания контрольной работы были проанализированы виды ошибок учащихся, количество ошибок, а также выставлены оценки. Было выявлено, что учащиеся испытывают трудности при решении задач по исследуемой теме.

## Заключение

Сформулируем основные выводы и результаты проведённого исследования.

1. Определены основные цели и задачи обучения теме «Корень n-ой степени» в углубленном курсе алгебры.

2. Проанализированы различные подходы к введению понятия «корень n-ой степени из действительного числа» авторов действующих учебных пособий общеобразовательной школы. Выявлено, что авторы рассмотренных учебников связывают данное понятие с решением уравнения $x^n = a$. Однако, единой методики введения данного понятия нет. Для её реализации авторы применяют как конкретно-индуктивный, так и абстрактно-дедуктивный методы. При этом приоритет может отдаваться как числовой линии, так и функционально-графической.

3. Определено понятие «арифметического корня n-ой степени из числа $a$», рассмотрены его основные свойства, а также приведены их доказательства.

4. Проанализированы типы и виды задач по исследуемой теме.

5. Определены формы, методы и технологии организации учебной деятельности обучающихся при обучении теме «Корень n-ой степени из действительного числа».

Так, при введении понятия «корень n-ой степени» следует сочетать проблемно-поисковой метод обучения с репродуктивным. При этом обучение теме стоит организовывать с использованием фронтальной и индивидуальной форм обучения.

6. Проанализирована пропедевтика изучения данной темы в курсе алгебры основной школы.

7. Разработаны методические рекомендации по введению понятий «корень n-ой степени из действительного числа» и «арифметический корень n-ой степени из числа $a$».

Так, данные понятия стоит вводить конкретно-индуктивным методом, делая акцент на функционально-графической линии. Важно осуществить грамотный переход от понятия «корень n-ой степени из действительного числа» к понятию «арифметический корень n-ой степени из числа $a$».

8. Разработана система упражнений по исследуемой теме, удовлетворяющая требованиям к системе задач Е. И. Лященко.

9. Проведён педагогический эксперимент, который включал в себя поисковой и констатирующий этапы. В результате эксперимента выявлено, что учащиеся испытывают затруднения при решении задач по исследуемой теме.

Всё вышеизложенное даёт основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, решены.

## Список используемой литературы


1. Алгебра 9 класс в 2 ч.: ч. 2. Задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд. испр. - М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В.Шевкин. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс / М.И. Шабунин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, Р.Г. Газарян. – М.: Просвещение, 2010. – 207 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 10 класс: методическое пособие / Е.В. Буцко, А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 92 с.

5. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров [и др.] — 17-е изд. - М.: Просвещение, 2008. - 384с.

6. Алгебра. 7 класс. В 2 ч.: ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под ред. А.Г. Морковича. – 17-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.

7. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

8. Алгебра. 8 класс. в 2 ч.: ч. 2. Задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под ред. А.Г.Мордковича.– М.: Мнемозина, 2010. – 271 с.

9. Алгебра. 8 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

10. Алгебра. 9 класс.: учебник для 9 класса с углубленным изучением математики / Н.Я Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев. – 7-еизд. – М.: Просвещение, 2006. – 369 с.

11. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.

12. Александрова, Л.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: самостоятельные работы для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / Л.А. Александрова. - М.: Мнемозина, 2015. -134 с.

13. Алимов, Ш.А. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.

14. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни) 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва — М.: Просвещение, 2016. — 463 с.

15. Артёмов, А.К. Степени и корни: методические рекомендации / А. К. Артемов. - М.: Учпедгиз, 1959. - 72 с.

16. Бабанский, Ю.К. Педагогика: учебное пособие для студентов педагогических учебных заведений / Ю.К. Бабанский. – М.: Просвещение, 1983. – 479 с.

17. Башмаков, М.И. Уровень и профиль школьного математического образования / М.И. Башмаков // Математика в школе. - 1993. - № 2. С. 8−9.

18. Бурмистрова, Т.А. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы: учеб. пособие для учителей

общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2016. – 128 с.

19. Галицкий, М.Л. Углубленное изучение алгебры и математического анализа: метод. рекомендации и дидакт. материалы: пособие для учителя / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1997. – 352 с.

20. Глизбург, В.И. Математика: алгебра и начала математического анализа. 11 класс: контрольные работы для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / В.И. Глизбург; под ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2016. – 61 с.

21. Дорофеев, Г.В. Процентные вычисления. 10-11 кл: учебно-методическое пособие / Г.В. Дорофеев, Е.А. Седова. - М.: Дрофа, 2003. - 144 с.

22. Кепшина, О.В. Методика обучения теме «Степени и корни» в курсе алгебры основной школы: бакалаврская работа / О.В. Кепшина. – Тольятти, 2018. – 59 с.

23. Кошелева, Н.Н. Введение понятия корня n-ой степени в курсе алгебры общеобразовательной школы / Н.Н. Кошелева, Е.С. Павлова, Д.З. Захарова // Математика и математическое образование: сборник трудов IX международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», 24-26 апреля 2019 г., Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р. А. Утеевой. – Тольятти: ТГУ, 2019. - С. 234-236.

24. Кошелева, Н.Н. Применение понятия «корень n-ой степени» при решении кубических уравнений. Формула Кардано / Н.Н. Кошелева, Д.З. Захарова // Азимут научных исследований: педагогика и психология, 2021. – №1(33) [в печати].

25. Кошелева, Н.Н. Рекомендации по усовершенствованию задачного материала ЕГЭ по теме «Корень n-ой степени из действительного числа» / Н.Н. Кошелева, Д.З. Захарова // Сборник трудов XI Международной научно-методической конференции «Совершенствование методического образования

– 2020: состояние и перспективы развития», 5-6 ноября 2020 г., Россия, г. Тирасполь / под общ. ред. проф. Г.Х. Гайдаржи. – Тирасполь: Изд-во Приднестровский ун-т, 2020. – С. 207-212.

26. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко [и др.]; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

27. Леонтьева, М.Р. Упражнения в обучении алгебре: учебное пособие для учителя / М.Р. Леонтьева, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 1985. – 128 с.

28. Лобанок, И.П. Пропедевтика как средство интеграции в обучении математике: учеб.-метод. пособие / И.Н. Лобанок. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. – 68 с.

29. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; под ред. Г.В. Дорофеева. - М.: Просвещение, 1997. — 270с.

30. Марасанов, А.Н. О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений / А.Н. Марасанов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. – 2010. – № 3(67). С. 127-134.

31. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – М.: Мнемозина, 2013. - 280 с.

32. Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый уровень: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович, М.С. Якир. - М.: Вентана-Граф, 2014. – 176 с.

33. Мерзляк, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков. – М.: Вентана – Граф, 2021. – 480 с.

34. Методика преподавания математики. Часть 2: пособие для учителей математики 8—10 классов средней школы / С.Е. Ляпин, С.А. Гастева, З.Я. Квасникова, Б.И. Крельштейн. – М.: Учпедгиз, 1956. – 745 с.

35. Михайлова, Т.А. Пропедевтика как основа процесса обучения функциям на уроках математики в 7-11 классах: дис. …канд. пед. наук: защищена 2015: утв. 2015 / Т.А. Михайлова. – Биробиджан, 2015. – 180 с.

36. Мордкович, А.Г. Алгебра 9 класс в 2 ч.: ч. 1. Учебник для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

37. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч.: ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. — 2-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2014. — 311 с.

38. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: ч. 2. Задачник. Профильный уровень / А. Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Л.И. Звавич. — 2-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2014. — 311 с.

39. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. в 2 ч.: ч. 1. Учебник для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

40. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

41. Муравин, Г.К. Алгебра. 9 класс: учебник / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

42. Муравин, Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

43. Муравин, Г.К. Методические рекомендации к учебнику «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс»: методическое пособие для учителя / Г.К. Муравина, О.В. Муравина, 2010. – 147 с.

44. Общеобразовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/. – Последнее обновление 8.12.2020.

45. Овчинникова, А.С. Методика обучения тождественным преобразованиям в теме «Степени и корни»: бакалаврская работа / А.С. Овчинникова - Челябинск, 2017. – 79 с.

46. Петрушко, И.М. Сборник задач по алгебре, геометрии и началам анализа: учебное пособие / И.М. Петрушко, В.И. Прохоренко, В.Ф. Сафонов. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 576 с.

47. Потапов, М.К. Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – 12-е изд. – М.: Просвещение, 2019. – 159 с.

48. Потапов, М.К. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10 класс: пособие для учителей общеобразоват. организаций / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 191 с.

49. Рурукин, А.Н. Контрольно-измерительные материалы. Алгебра и начала анализа. 11 класс: контрольно-измерительные материалы / А.Н. Рурукин. – М.: ВАКО, 2017. – 96 с.

50. Селевко, Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. Т. 1: учебное пособие / Г.К. Селевко. – М.: НИИ шк. технологий, 2006. – 816 с.

51. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева; под ред. Т.А. Ивановой. – Н. Новгород, 2009. - 355 с.

52. Топуридзе, Н.Н. Преобразования иррациональных выражений и иррациональные уравнения в средней школе: автореф. дис. …канд.пед. наук: защищена 1955: утв. 1955 / Н.Н. Топуридзе. – Тбилиси, 1955. - 29 с.

53. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 6.10.2009 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/. - Последнее обновление 25.05.2020.

54. Федорова, Н.Е. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10 класс: пособие для учителей общеобразоват. организаций / Н.Е. Фёдорова, М.В. Ткачёва. - М.: Просвещение, 2015. – 224 с.

55. Фирстова, Н.И. Методика формирования познавательных универсальных учебных действий при обучении методу тождественных преобразований на материале иррациональных выражений / Н.И. Фирстова// Конференциум АСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. – Москва, 2015. – №1.С. 3109-3120.

56. Шемякина, А.Ю. Проектирование числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы: магист. дис.: защищена 2017: утв. 2017 / А.Ю. Шемякина. – Тольятти, 2017. – 117 с.

57. Юлдыбаева, А.С. Особенности методики обучения решению иррациональных уравнений и неравенств: бакаларская работа / Юлдыбаева А.С. – Челябинск, 2017. – 79 с.

58. Яремко, Н.Н. Корректность определения степени действительного числа с рациональным показателем / Н.Н. Яремко, М.В. Глебова // Наука и школа. – 2020. – С. 165-175.

59. Abramovich, S. Teaching Mathematics through Concept Motivation and Action Learning / S. Abramovich, Arcadii Z. Grinshpan, David L. Milligan // Hindawi. – Volume 2019, 2019. – 13 p. [Электронный ресурс]: https://www.hindawi.com/journals/edri/2019/3745406/.

60. Anderson J. Mathematics Curriculum Development and the Role of problem Solving / J. Anderson // The University of Sydney, 2009. – p. 8. [Электронный ресурс]: https://www.researchgate.net/publication/255630930_Mathematics_Curriculum_Development_and_the_Role_of_Problem_Solving.

61. Bittinger, Marvin L. Intermediate Algebra: textbook / Marvin L. Bittinger, Judith A. Beecher, Barbara L. Johnson. Twelfth edition. – Boston, 2015. – p. 497-502.

62. Star, J. R. Teaching Strategies for Improving Algebra Knowledge in Middle and High School Students / P. Caronongan, A. Foegen, J. Furgeson, B. Keating, M. R. Larson, J. Lyskawa, W. G. McCallum, J. Porath, R. M. Zbiek. - Washington, DC, 2015. – 64 p. [Электронный ресурс]: https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/PracticeGuide/wwc_algebra_040715.pdf.

63. Sullivan, Michael. Algebra & trigonometry: textbook / Michael Sullivan, Chicago State University. - Tenth edition. – 2016. – p. 73-79.

Приложение А

**Ответы и указания решения к системе задач по теме «Корень n-ой степени» в курсе алгебры общеобразовательной школы**

**1. Ответ:** а) 11; б) -3; в) 125; г) 121; д) 63; е) 1,25.

**2. Ответ:** а) $x = \pm\sqrt{13}$; б) $\pm\sqrt{26}$; в) $\emptyset$.

**3. Ответ:** а) при $a \leq 0$; б) при $a \geq -3$; в) при $a > -18$; г) при $a\epsilon(-\infty;\ -4] \cup [4; +\infty)$.

**4. Решение:** а) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} = \left|\sqrt{5}-2\right| = \sqrt{5}-2$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-4\right)^2} =$ $= \left|\sqrt{15}-4\right| = 4-\sqrt{15}$; в) $\sqrt{(a+3)^2} = |a+3| = -a-3$;

г) $\sqrt{1+4k+4k^2} = |1+2k| = 1+2k$.

**5.** Ответ: 1)1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,18, 19, 20, 21; 2) $0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7, \pm8, \pm9, \pm10, \pm11, \pm12, \pm13, \pm14, \pm15, \pm16,$ $\pm17$.

**6.** Ответ: а) $x = -10$; б) $x = \pm2\sqrt{3}$; в) $x = 0{,}5$; г) $x = \pm2$.

**7.** Ответ: а) $x \approx 1{,}9$; б) $x \approx 1{,}2$.

**8**. Ответ: 3 мм; 0,5 см; 4 дм; 0,4 м.

**9.** Ответ: а) $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

**10**. Ответ: $p = \left(\sqrt[n]{\frac{S_n}{S_0}} - 1\right) \cdot 100$.

**11**. Ответ: а) нет; б) да; в) да; г) да.

**12**. Ответ: а) нет; б) да; в) да; г)нет.

**13.** Решение: а) $19 > 0$ и $361 > 0$ и $19^2 = 361 \Rightarrow \sqrt{361} = 19$; б) $\frac{1}{2} > 0$ и $\frac{1}{64} > 0$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 64 \Rightarrow \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$; в) $7 > 0$ и $343 > 0$ и $7^3 = 343 \Rightarrow \sqrt[3]{343} = 7$; г) $\frac{2}{3} > 0$ и $\frac{32}{243} > 0$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.

**14**. Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

**15**. Ответ: а) имеет; б) не имеет; в) имеет; г) имеет.

**16.** Решение: а) $\sqrt[4]{(-2)^4} \neq -2$; б) $\sqrt[6]{(-5)^6} \neq -5$.

**17.** Ответ: а) 0,5; б) 0,5; в) 0,4; г) 1,5; д) 1,5; е) -2.

**18.** Ответ: а) $-4{,}75$; б)5; в) $4\frac{1}{3}$; г) -11; д) $\frac{1}{30}$.

**19.** Ответ: а) -64; б) $-\frac{64}{729}$; в) -16; г) $\frac{243}{32}$.

**20.** Ответ: а) -2; б) 0,75; в) 11; г) 160.

**21**. Ответ: а) $2<\sqrt{5}<3$; б) $-3<\sqrt[3]{-19}<-2$; в) $2<\sqrt[4]{52}<3$; Г) $-4<\sqrt[5]{-670}<-3$.

**22**. Ответ: а) $\sqrt[3]{5}, 2\ \sqrt[4]{17}$; б) $\sqrt[5]{1000}$, 4, $\sqrt[3]{75}$; в) $\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{40}, 3$; г) $\sqrt[6]{60}$, 2, $\sqrt[4]{20}$.

**23**. Ответ: а) $\sqrt[4]{0{,}1}, \sqrt[3]{-5}, -1$; б) 0, $\sqrt[3]{-0{,}25}, \sqrt[5]{-29}$; в) $\sqrt[5]{-1{,}5}$, -2, $\sqrt[3]{-9}$; г) 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{-2}$.

**24.** Ответ: а) $x \geq 0$; б) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $x \epsilon (-\infty;\ +\infty)$; г) $x \in [-5; 5]$; д) $x \in (-\infty; 9] \cup [10; +\infty)$; е) $x \in [-4; 24]$.

**25**. Ответ: а) $x = 6$; б) $x = \pm 4$; в) $x = -4$; г) $x = \pm 3$.

**26**. Ответ: а) $x = \pm\sqrt{10}$; б) $x = -\sqrt[5]{43}$ ; в) $x = \pm\sqrt[8]{15}$; г) $x = 0{,}5$; д) $x = 1{,}5; 1\frac{5}{6}$; е) $x = 1; 8; 0; 9$; ж) 0; 1; 4; 5.

**27.** Ответ: а) -1; 1; -3; 3; б) $-\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[6]{3}$; в) $-\sqrt[3]{2}; 3$; г) $-\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{3}$.

**28.** Ответ: а) $x=-22$; б) $\emptyset$; в) $x=-4{,}5$; г) $x=-14{,}25$.

**29.** Ответ: а) 1; 8; б) 1;9; в) -7; 4; г) -4; -3.

**30**. Решение: а) $\sqrt[3]{3x+1}<4 \Leftrightarrow 3x+1<64 \Leftrightarrow 3x<63 \Leftrightarrow x<21$;

б) $\sqrt[8]{4x+1}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1\le 1 \\ 4x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x\ge -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{4};0\right]$;

в) $\sqrt[4]{x^2-8}>\sqrt[4]{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8>2x \\ x^2-8\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$

$x^2-2x-8>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=4 \end{array}\right.$

$x^2-8\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty;-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2};+\infty)$

$x=\pm 2\sqrt{2}$

Объединим решения: $x\in(4;+\infty)$.

г) $\sqrt[10]{x+2}>1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>1 \\ x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\ge -2 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;+\infty)$.

Ответ: а) $x\in(-\infty;21)$; б) $x\in\left[-\dfrac{1}{4};0\right]$; в) $x\in(4;+\infty)$; г) $x\in(-1;+\infty)$.

**31**. Ответ: а) $[2;+\infty)$; б) [4;+∞); в) $(-\infty;\ -6]\cup[2;+\infty)$; г) [-4; 1].

**32**. Ответ: а) $\left(-\infty;-1\dfrac{2}{3}\right)\cup[8;+\infty)$; $б)\left(-\infty;-1\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[-\dfrac{1}{9};+\infty\right)$;

$в)(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$; $г)(-3;-0,4]\cup[0,5;2]\cup(7;+\infty)$; д) $x\in(-\infty;-6)\cup(-3;1]\cup\{2\}$;

е) $[1;2]\cup[3;+\infty)$.

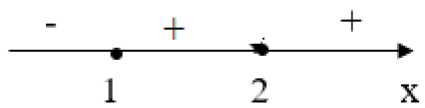
д) Решение: $D(y)=\begin{cases}-x^3+5x^2-8x+4\ge 0\\ x^2-9|x|+18>0\end{cases}$

$x^3-5x^2+8x-4\le 0$

$x^3-5x^2+8x-4=0$

$x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)^2$

$\left[\begin{array}{l}x_1=1\\ x_2=2\end{array}\right.$

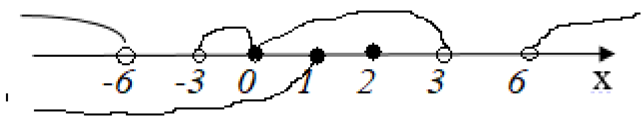



$x\in(-\infty;1]\cup\{2\}.$

$x^2-9|x|+18>0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-9x+18>0\\ x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+9x+18>0\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;3)\cup(6;+\infty)\\ x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-6)\cup(-3;+\infty)\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in[0;3)\cup(6;+\infty)\\ x\in(-\infty;-6)\cup(-3;0)\end{array}\right.$$

Объединим полученные решения:




$x\in(-\infty;-6)\cup(-3;1]\cup\{2\}.$

е) Решение:

$$\begin{cases} x^3-6x^2+11x-6\ge 0 \\ 6x^3+17x^2+6x-8\ge 0 \end{cases}$$

$$x^3-6x^2+11x-6\ge 0$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$$

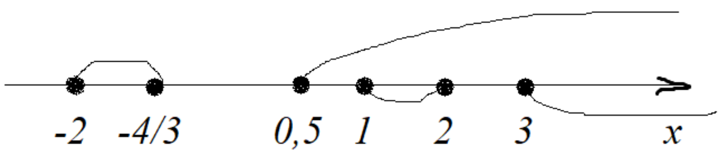
$$6x^3+17x^2+6x-8\ge 0$$

$$6x^3+17x^2+6x-8=(x+2)(x-0,5)(x+1\frac{1}{3})$$

$$(x+2)(x-0,5)(x+1\frac{1}{3})=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0,5 \\ x=-1\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Объединим решения:




$x\in[1;2]\cup[3;+\infty)$.

**33**. Ответ: а) 1,5; б) 0,6; в) 4; г) 6; д) 2.

**34.** Ответ: а) 2; б) 0,5; в) 10; г) 4; д) 12.

**35.** Ответ: а) 28; б) 270000; в) $\frac{297}{400}$; г) 56.

**36**. а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $-2\sqrt[5]{2}$; в) $3\sqrt[4]{3}$; г) $-2,5$; д) 6; е) 15.

**37**. Решение: а) $\sqrt[5]{1024x^{10}y^5z^{15}}=4\sqrt[5]{(x^2)^5y^5(z^3)^5}=4x^2yz^3$;

б) $\sqrt[3]{\frac{343m^{12}}{64n^3p^{15}}}=\sqrt[3]{\frac{343(m^4)^3}{64n^3(p^5)^3}}=\frac{7m^4}{4np^5}$; в) $\sqrt[4]{0,0081a^{12}b^4c^{20}}=0,3a^3bc^5$; г) $\sqrt[4]{\frac{16r^{16}s^{12}}{81p^{24}q^4}}=\frac{2r^4s^3}{3p^6q}$.

**38.** Ответ: а) $\sqrt[4]{3^3\cdot 4^2}\cdot\sqrt[4]{4^6\cdot 3^5}=\sqrt[4]{3^3\cdot 4^2\cdot 4^6\cdot 3^5}=\sqrt[4]{3^8\cdot 4^8}=9\cdot 16=144$;

б) $\sqrt[3]{7^2\cdot 2}\cdot\sqrt[3]{7^4\cdot 2^2}=\sqrt[3]{7^6\cdot 2^3}=49\cdot 2=98$; в) $\sqrt[6]{5^{10}}\cdot\sqrt[6]{2^{12}\cdot 5^2}=\sqrt[6]{5^{12}\cdot 2^{12}}=25\cdot 4=100$;

г) $\sqrt[5]{6^2\cdot 3^7}\cdot\sqrt[5]{6^3\cdot 3^3}=\sqrt[5]{6^5\cdot 3^{10}}=6\cdot 9=54$.

**39**. Ответ: а) 7; б)$\frac{1}{3}$; в) 2; г) 0,25.

**40**. Решение: а) $\sqrt{2\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{12}}=\sqrt[4]{12}$; б) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{18}}=\sqrt[6]{18}$;

в) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{24}}=\sqrt[9]{24}$; г) $\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt{4}}}=\sqrt{2\sqrt[4]{\sqrt{64}}}=\sqrt{2\sqrt[4]{8}}=\sqrt{\sqrt[4]{128}}=\sqrt[8]{128}=2$;

д) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\div\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[6]{16}:\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2}$; е) $\sqrt[3]{32\sqrt[4]{4}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}=2\sqrt[3]{\sqrt[4]{1024}}\cdot\sqrt{\sqrt[4]{64\sqrt[3]{4}}}=$

$=2\sqrt[12]{1024}\cdot\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{64^3\cdot 4}}}=2\sqrt[12]{1024}\cdot\sqrt[24]{4^{10}}=2\sqrt[12]{1024}\cdot\sqrt[12]{4^5}=2\sqrt[12]{4^{10}}=2\sqrt[6]{4^5}=4\sqrt[3]{4}$.

**41.** Ответ: а) 2,8; б) 3; в) 0,5; г) 4; д) 4.

**42.** Ответ: а) 25; б) 7; в) -1.

**43.** Ответ: а) $\sqrt[6]{27},\sqrt[6]{16},\sqrt[6]{7}$ ; б) $\sqrt[12]{64},\sqrt[12]{64},\sqrt[12]{81}$; в) $\sqrt[8]{40},\sqrt[8]{289},\sqrt[8]{1296}$;

г) $\sqrt[15]{100},\sqrt[15]{32},\sqrt[15]{27}$.

**44.** Ответ: а) $\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{2\sqrt[4]{8}}>\sqrt[4]{8\sqrt{2}}$

**45.** Решение: а) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}=\sqrt{\sqrt{6}-2}$; б) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left|1-\sqrt{2}\right|}=\sqrt{\sqrt{2}-1}$;

в) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\sqrt[3]{\left|\sqrt{3}-2\right|}=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

**46.** Решение: а) 1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$; 2) $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$;

б) 1)$\sqrt{(3-x)^6}=|3-x|^3=(3-x)^3$; 2) $\sqrt{(3-x)^6}=|3-x|^3=(x-3)^3$;

в) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+6|+|x-3|=x+6+3-x=9$;

г) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}=|2x+1|-|4+x|=-2x-1-4-x=-3x-5$.

**47.** Решение: а) $ad^2\sqrt[4]{-ad^2}=\sqrt[4]{-a^5d^{10}}$; б) $-p^3q\sqrt[8]{p^2q}=\begin{cases}-\sqrt[8]{p^{26}q^9},\ p\ge 0\\ \sqrt[8]{p^{26}q^9},\ p<0\end{cases}$;

в) $-mn^3\sqrt[6]{-mn}=\sqrt[6]{-m^7n^{19}}$; г) $xy\sqrt[4]{x^2y^3}=\begin{cases}\sqrt[4]{x^6y^7},\ x\ge 0\\ -\sqrt[4]{x^6y^7},\ x<0\end{cases}$

**48**. Решение: а) $\sqrt[4]{a^6b^9}-\sqrt[4]{-a^7b^5}=-ab^2\sqrt{a^2b}+ab\sqrt[4]{-a^3b}$;

б) $\sqrt[6]{-lm^{12}}+\sqrt[4]{-l^4m^{15}}=-lm^2\sqrt[6]{-l}+lm^3\sqrt[4]{-m^3}$.

**49.** Решение: а) $\sqrt[4]{32a^6}=2|a|\sqrt[4]{2a^2}=-2a\sqrt[4]{2a^2}$; б) $\sqrt[4]{-625a^5}=5|a|\sqrt[4]{-a}$;

в) $\sqrt[6]{a^7b^7}=|a|\cdot|b|\sqrt[6]{ab}=ab\sqrt[6]{ab}$; г) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}=|a^3|\cdot|b^3|\sqrt[6]{a^2b}=a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$.

**50**. Решение: а) $\sqrt[4]{0,0001b^{20}}=0,1|b^5|=0,1b^5$; б) $-5\sqrt{4x^2}=-10|x|=10x$;

в) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}=|p^3|\cdot|q^4|=p^3\cdot q^4$; г) $-0,1\sqrt[6]{1000000z^{42}}=-1|z^7|=-z^7$;

д) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}=|m^3|\cdot|n^5|=m^3n^5$; е) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}=ab^2|a^{12}||b^{18}||c^{11}|=-a^{13}b^{20}c^{11}$.

**51.** Решение: а) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; б) $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{9}}=\dfrac{3\sqrt[3]{81}}{2\cdot 9}=\dfrac{3\cdot 3\sqrt[3]{3}}{18}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$; в) $\dfrac{8}{\sqrt[5]{16}}=\dfrac{8\sqrt[5]{2}}{2}=4\sqrt[5]{2}$;

г) $\dfrac{12}{7\sqrt[6]{243}}=\dfrac{12\sqrt[6]{3}}{7\cdot 3}=\dfrac{4\sqrt[6]{3}}{7}$.

**52.** Решение: а) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{7}}=\dfrac{10\left(\sqrt[3]{12^2}+\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{7^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt[3]{12^2}+\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{7^2}\right)}=$

$=\dfrac{10\left(\sqrt[3]{144}+\sqrt[3]{84}+\sqrt[3]{49}\right)}{12-7}=\dfrac{10\left(\sqrt[3]{144}+\sqrt[3]{84}+\sqrt[3]{49}\right)}{5}$;

б) $\dfrac{11}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6}}=\dfrac{11\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6}\right)\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}\right)}=\dfrac{11\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}\right)}{5+6}=\dfrac{11\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}\right)}{11}=$

$=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{36}$.

в) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\frac{4\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{81}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{81}\right)}=\frac{4\left(\sqrt[3]{9}-3+\sqrt[3]{81}\right)}{3+9}=\frac{4\left(\sqrt[3]{9}-3+\sqrt[3]{81}\right)}{12}=\frac{\sqrt[3]{9}-3+\sqrt[3]{81}}{3}$

г) $\frac{3}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{6}}=\frac{3\left(\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{36}\right)}{(\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{6})\left(\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{36}\right)}=\frac{3\left(\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{36}\right)}{9}=\frac{\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{36}}{3}.$

**53.** Решение: а) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$;

б) $\frac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}=\frac{\left(\sqrt[12]{x}+3\right)\left(\sqrt[12]{x}-3\right)}{\sqrt[12]{x}+3}=\sqrt[12]{x}-3$;

в) $\frac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[8]{a}\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\sqrt[8]{b}}{\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)}=\frac{\sqrt[8]{a}\sqrt[8]{b}(\sqrt[8]{b}-\sqrt[8]{a})}{\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)}=-\frac{\sqrt[8]{a}\sqrt[8]{b}}{\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}}$;

г) $\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt[3]{x^3}-4^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{\left(\sqrt[3]{x}-4\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-4}.$

**54.** Решение: а) $\frac{4-3\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)^2}=\frac{4-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}+\sqrt{8}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-4+2\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}=-1$;

б) $\frac{\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}=\frac{\sqrt[3]{9^2}+2\sqrt[3]{9}\sqrt{3}+3}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}=\frac{3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3^4}\sqrt[6]{3^3}+3}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}=\frac{3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[6]{3}+3}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}=\frac{3\left(\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1\right)}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}=3$

в)

$$\frac{\left(\sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{24}+2\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{6}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}\left(4+3\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{24}+2\sqrt{12}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}\left(4+3\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}\left(2+2\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{3}\left(4+3\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}(3+2\sqrt{2})}{\sqrt{3}\left(4+3\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+4}{\left(4+3\sqrt{2}\right)}=1;$$

г) $\dfrac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45}\right)^2}=\dfrac{\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2}{3-2\sqrt{3}\sqrt[4]{45}+\sqrt[4]{45^2}}=\dfrac{\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2}{3-2\sqrt{3}\sqrt[4]{45}+3\sqrt{5}}=\dfrac{\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2}{3-2\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt[4]{5}+3\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2}{3-6\sqrt[4]{5}+3\sqrt{5}}=\dfrac{\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2}{3\left(1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{1}{3}$.

**55.** Решение: а) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=$

$=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{b}$;

б) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=$

$=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^2}=2\sqrt[3]{ab}$;

в) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left(\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=$

$=\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}=1$.

**56.** Решение:

а) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}=\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}=$

$=\left(\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2-4\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1-4\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt[6]{x}-1\right)}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[6]{x}+1}=\sqrt[6]{x}$;

б)

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)=\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}-\sqrt[4]{a}\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}-\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a}\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}\sqrt{a}+\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)=\left(\frac{\sqrt[4]{a}\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b}}\right)=\frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\sqrt[4]{b}}=-\sqrt[4]{a}\,.$$

**57.** Доказательство: а) $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\frac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}:\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}=\frac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$$

$$\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$$

$$\frac{\sqrt[6]{x}+1}{x}=\frac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$$

б) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$

$$\frac{\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}+\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$$



$$\frac{\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$$

$$\frac{\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$$

$$\frac{\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$$

$$\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$$

**58**. Решение: а) $\dfrac{x^2-2x+3-\sqrt[4]{4}}{x-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)^2-2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)+3-\sqrt[4]{4}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}=$

$$=\frac{3-2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-6+2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}+3-\sqrt{2}}{-\sqrt[3]{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}}{-\sqrt[3]{2}}=\frac{-\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{16}}{-\sqrt[6]{4}}=\sqrt[6]{2}-\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2}-\sqrt[3]{2};$$

б)Если $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$, то $\sqrt{1+2x}=\sqrt{1+2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{1-2x}=\sqrt{1-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.$$

Получим: $\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}=\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}=\dfrac{1+2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}}=$

$$=\frac{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3}=\frac{6}{6}=1$$

**59**. Решение: а) $4+2\sqrt{3}>4-2\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}>0$;



$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=4$$
$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=4$$
$$4+2\sqrt{3}-2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}+4-2\sqrt{3}=4$$
$$8-2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}=4$$
$$8-2\sqrt{16-12}=4$$
$$8-4=4$$
$$4=4$$

б) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$

$$\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3=3^3$$
$$\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)=27$$
$$9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{81-80}\cdot3=27$$
$$18+9=27$$
$$27=27$$

**60.** Ответ: а) 200; б) 0; 64; в) 16; 81; г) 1.

**61**. Решение:

а) $\sqrt[4]{\left(x+4\right)^4}=x+4\Leftrightarrow\begin{cases}|x+4|=x+4\\ x\geq-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+4=x+4\\ -x-4=x+4\end{array}\right.\\ x\geq-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\in R\\ -2x=8\end{array}\right.\\ x\geq-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\in R\\ x=-4\end{array}\right.\\ x\geq-4\end{cases}$

б) $\sqrt[6]{\left(x^2-2x-3\right)^6}=3+2x-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\left|x^2-2x-3\right|=3+2x-x^2\\ -x^2+2x+3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=3+2x-x^2\\ -x^2+2x+3=3+2x-x^2\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow$

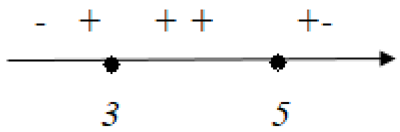
$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2x^2-4x-6=0\\ x\in R\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=0\\ x\in R\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\\ x\in R\end{array}\right.\\ -1\leq x\leq 3\end{cases} \Rightarrow x\in[-1;3]$



Ответ: а) $[-4;+\infty)$; б) $[-1;3]$.

**62**. Решение: $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2 \Leftrightarrow |x-3|+|5-x|=2$

$x=3; x=5$




1) $x<3$: $3-x+5-x=2 \Leftrightarrow -2x=-6 \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow \varnothing$

2) $3\leq x<5: x-3+5-x=2 \Leftrightarrow 2=2 \Rightarrow 3\leq x<5$

3) $x\geq 5: x-3+x-5=2 \Leftrightarrow x=5$

Ответ: $x\in[3;5]$.

**63**. Решение: Пусть $4\sqrt[6]{x+\sqrt{x}}=t$, $t\geq 0$. Тогда:

$t^2+4t+a=0$

Уравнение будет иметь единственный корень, если D=0.

$D=16-4a$

$16-4a=0 \Leftrightarrow a=4$

Ответ: при $a=4$.

**64.** Решение:

а) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$

Продолжение Приложения А

$$\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^3=8$$

$$\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^3=8$$

$$1+\sqrt{x}+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2+1-\sqrt{x}=8$$

$$3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2=6$$

$$\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^2\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^2=2$$

$$\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)=2$$

$$\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)\cdot 2=2$$

$$\sqrt[3]{1-x}=1$$

$$\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3=1 \Leftrightarrow 1-x=1 \Leftrightarrow x=0$$

Ответ: 0.

б) $\sqrt[3]{x+10}-\sqrt[3]{x-9}=1$

$$\left(\sqrt[3]{x+10}-\sqrt[3]{x-9}\right)^3=1$$

$$x+10-3\left(\sqrt[3]{x+10}\right)^2\left(\sqrt[3]{x-9}\right)+3\left(\sqrt[3]{x+10}\right)\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2-x+9=1$$

$$-3\left(\left(\sqrt[3]{x+10}\right)^2\left(\sqrt[3]{x-9}\right)-\left(\sqrt[3]{x+10}\right)\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2\right)=-18$$

$$\left(\sqrt[3]{x+10}\right)^2\left(\sqrt[3]{x-9}\right)-\left(\sqrt[3]{x+10}\right)\left(\sqrt[3]{x-9}\right)^2=6$$

$$\left(\sqrt[3]{x+10}\right)\left(\sqrt[3]{x-9}\right)\left(\sqrt[3]{x+10}-\sqrt[3]{x-9}\right)=6$$

$$\left(\sqrt[3]{x+10}\right)\left(\sqrt[3]{x-9}\right)\cdot 1=6$$

$$\sqrt[3]{(x+10)(x-9)}=6$$

$$(x+10)(x-9)=216$$

$$x^2-9x+10x-90-216=0$$



$$x^2-9x+10x-90-216=0$$

$$x^2+x-306=0$$

$$D=1225$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=17 \\ x_2=-18 \end{array}\right.$$

Ответ: -18; 17.

**65.** Решение: а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28; \end{cases}$

Пусть $\sqrt[3]{x}=a, \sqrt[3]{y}=b$. Тогда $x=a^3, y=b^3$. Получим:

$$\begin{cases} a+b=4, \\ a^3+b^3=28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-b, \\ (4-b)^3+b^3=28. \end{cases}$$

$$(4-b)^3+b^3=28 \Leftrightarrow 64-48b+12b^2-b^3+b^3=28 \Leftrightarrow 12b^2-48b+36=0 \Leftrightarrow b^2-4b+3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} b_1=3 \\ b_2=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=3\\a=1\end{cases}\\\begin{cases}b=1\\a=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=27\\x=1\end{cases}\\\begin{cases}y=1\\x=27\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (1; 27); (27;1).

б) ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt[3]{x}\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}\sqrt{x}=12,\\xy=64.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}\sqrt{\dfrac{64}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{64}{x}}\sqrt{x}=12\\y=\dfrac{64}{x}\end{cases}$

$$\sqrt[3]{x}\cdot\frac{8}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt{x}=12\,\Big|:4$$

$$2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=3$$

Продолжение Приложения А

Пусть $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=t, t>0$

$$2t+\frac{1}{t}-3=0\Leftrightarrow\frac{2t^2-3t+1}{t}=0\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0$$

$D=9-8=1$

$$\left[\begin{array}{l}t_1=1\\t_2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=1\\\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=1$

$\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}$

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^6=\left(\sqrt{x}\right)^6$

$x^2=x^3$

$x=1$

$\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

$2\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}$

$\left(2\sqrt[3]{x}\right)^6=\left(\sqrt{x}\right)^6$

$64x^2=x^3\,\Big|:x^2$

$x=64$

Если $x=1$, то $y=64$; если $x=64$, то $y=1$.

Ответ: (1; 64); (64; 1).