МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

Студент З.А. Абильева
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент Н.Н. Кошелева
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Стремительное развитие современного мира диктует необходимость подготовки высокообразованных людей, способных к непрерывному саморазвитию с учетом постоянной вариации экономических и социально-психологических тенденций высокотехнологического общества, с целью обеспечения их конкурентоспособности, гибкости и адаптивности к видоизменяемым требованиям и критериям социально-экономического окружения. В становлении компетентного сообщества основополагающим фактором выступает ориентирование на развитии личностных характеристик индивида, таких как умения постоянно пополнять багаж необходимых знаний и применять их на практике, другими словами, формирование предметных и метапредметных компетенций.

В связи с этим перед школой, рассматриваемой в качестве отправной ступени для вступления в общество, ставится задача в создании благоприятных условий и поиске эффективных средств повышения уровня усвоения предметных знаний и умений и их применение в последующей профессиональной деятельности, что находит естественное отражение в современных образовательных стандартах, в том числе ФГОС РФ.

Предмет «математика» не является исключением. В силу многосложности фундаментальных математических понятий, их теоретической и оптимизационно-прикладной направленности, программы школьного курса математики неоднократно совершенствовались с целью преодоления недочётов и противоречий в содержании предмета [68]. Однако до настоящего времени, усвоение некоторых разделов математики характеризуется низким качеством, к таковым относится и функциональная линия.

Принимая во внимание основополагающую роль функциональной содержательно-методической линии в качестве связующего звена, обеспечивающего целостность разделов математики на внутрипредметном уровне, и фактора создания взаимосвязи с другими дисциплинами естественнонаучной области на межпредметном уровне, введение функциональной линии в школьную программу математического образования является существенным достижением развития теоретических и методических основ преподавания математики. Однако, несмотря на первичные цели обоснованности введения функционального блока в курс алгебры и начал математического анализа, а именно, предоставления возможности учащимся получить сведения о прикладной направленности изучаемых математических явлений, подача данного раздела и по сегодняшний день носит абстрактно-теоретический характер, что особенно ощутимо через призму видоизмененного мироощущения и восприятия информации современного поколения Z.

Как показывает статистика результатов ЕГЭ за последние 2015-2019 годы, процент учащихся, способных продемонстрировать знания и навыки решения функционально-графических задач снижается. Причинами такого явления могут послужить низкая заинтересованность в предмете, в частности при переходе к изучению курса алгебры и начала математического анализа, в силу непонимания большинства абстрактных понятий, ассоциирования функции с формулами, неспособности интегрирования полученного знания по отношению к новым изучаемым темам, а, именно, рассмотрение различных видов элементарных функций вне взаимосвязи между собой, высокой степени формализма изложения тем преподавателями без опоры на когнитивную визуализацию вводимых понятий и значений, что приводит к ложному пониманию статичности функции [81]. Все эти факторы негативно отражаются на способности учащихся оперировать изученными понятиями и распознавать функционально-поведенческие паттерны реальных событий в дальнейшей профессиональной деятельности.

В этой связи усиление наглядности через динамически изменяющийся графически-визуальный ряд абстрактно-аналитических объектов с опорой на непосредственное участие учащихся в создании функциональных моделей позволило бы сформировать у них функциональные знания и навыки при интерпретации и построении графиков функций на более высоком уровне, повысить мотивацию к учению курса алгебры и начал математического анализа за счет интуитивного мышления и радости понимания математических явлений.

Методика обучения функциональной линии в курсе алгебры является предметом исследования многих диссертационных работ, в которых рассматривались: «методические особенности формирования функционально-графической линии курса алгебры в условиях личностно ориентированного обучения» (Л.В. Тихонова [67], 2002 г.); «дифференциальная работа учителя математики при формировании понятия функции в курсе алгебры основной школы» (И.В. Антонова [10], 2004 г.); «реализация функционально-графической линии в персонализированном обучении общеобразовательному курсу математики с использованием компьютерной системы MATHCAD» (С.Ю. Попадьина [56], 2009 г.); «теория и методика изучения функции в основной школе в контексте модульного обучения» (О.В. Мишенина [39], 2004 г.); «развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации» (А.В. Фирер [73], 2018 г.).

Можно констатировать, что на сегодняшний день изучение методики функциональной линии с точки зрения поиска эффективных педагогических средств, в том числе средствами когнитивной визуализации является актуальным. Однако, теория и методика функциональной линии в данных работах рассматривалась в общем аспекте.

Учитывая, что знания и умения, связанные со степенной функцией, являются стержневыми в понимании показательной и логарифмической функций, а также при переходе к изучению математического анализа, рассмотрение методических основ обучения степенной функции определяет актуальность данного исследования.

Таким образом, *актуальность и научная значимость исследования* обусловлена сложившимися к настоящему времени **противоречиями между***:* необходимостью научно-обоснованного изучения степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа и недостаточной разработанностью методических основ обучения степенной функции; изучения большого объема абстрактно-теоретического материала, связанного с темой исследования, и недостаточной разработанностью системой задач по данной теме с позиции когнитивной визуализации.

Вышеназванные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических особенностей обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре и началам математического анализа общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа в общеобразовательной школе.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что повышение качества математической подготовки обучающихся по теме «Степенная функция» будет достигаться, если выявить методические особенности обучения степенной функции в школьном курсе математики и с их учетом разработать систему упражнений по данной теме.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования**:

1. Выявить теоретические и исторические аспекты формирования содержания функциональной содержательно-методической линии в курсе алгебры и начал математического анализа.

2. Раскрыть основные цели и задачи обучения теме «Степенная функция» в школьном курсе математики.

3. Рассмотреть различные подходы к формированию понятия степенной функции и ее свойств в курсе алгебры и начал математического анализа.

4. Рассмотреть применение когнитивно-визуального подхода как одного из эффективных подходов к изучению степенной функции на уроках алгебры и начал математического анализа.

5. Представить методические рекомендации по проведению пропедевтической работы по теме «Степенная функция» в курсе алгебры основной школы.

6. Описать методическую схему изучения степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа и представить методические рекомендации по обучению теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа.

7. Разработать или подобрать математические задания для системы упражнений по теме исследования для базового и профильного уровней, решение которых направлено на формирование умений обучающихся по теме «Степенная функция» и показать методику работы с ними.

8. Провести педагогический эксперимент и проанализировать его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Г.И. Саранцева [61], Н.С. Подходовой [54], В.П. Покровского [55].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы В.А. Далингера [19, 20, 21], Г.К. Муравина [42, 43], Т.А. Михайловой [38], А.В. Фирер [73].

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов исследования**: теоретические - анализ психолого-педагогической, математической и методической литературы, работ по истории математики и истории математического образования, школьных программ, учебников и учебных пособий в аспекте изучаемой проблемы; изучение опыта работы отечественной и зарубежной школ по исследуемой теме; эмпирические - анализ собственного педагогического опыта работы, наблюдение, беседы, тестирование, констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента.

Основные этапы исследования:

1 этап (2019/2020 уч.г.): сравнительный анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, школьных учебников, нормативных документов (образовательных стандартов, программ), позволивший определить степень разработанности проблемы исследования, сформулировать гипотезу и задачи исследования.

2 этап (2019/2020 уч.г.): рассмотрение различных подходов к изучению темы исследования, уточнение теоретических аспектов методики обучения степенной функции.

3 этап (2020/2021 уч.г.): определение методических основ исследования по теме диссертации, разработка системы упражнений по теме исследования для базового и профильного уровней, организация и проведение констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента с целью выявления исходного состояния предмета исследования и апробации методики обучения.

4 этап (2020/2021 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата диссертационного исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по проведенной работе в рамках диссертационного исследования.

Опытно-экспериментальная база исследования: МШ «Haileybury Astana», г. Нур-Султан, Казахстан.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика обучения степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы, основанная на когнитивно-визуальном подходе.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- выявлены основные цели и задачи обучения степенной функции в школьном курсе математики общеобразовательной школы, требования к математической подготовке обучающихся;

- рассмотрены различные подходы к изучению степенной функции, с выделением когнитивно-визуального подхода как наиболее соответствующего требованиям в отношении предметных и метапредметных компетенций при изучении степенной функции;

- выявлены методические особенности обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны: методические рекомендации по обучению теме «Степенная функция» в курсе алгебре и начал математического анализа общеобразовательной школы; система упражнений по теме исследования, включающей визуализированные задачи (базовые, повышенной трудности, прикладной направленности).

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, адекватных его целям, предмету и задачам; комплексным анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических особенностей и рекомендаций по обучению теме «Степенная функция»; разработке системы упражнений по теме исследования для базового и профильного уровней курса алгебры и начал математического анализа, в описании результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов исследования велись в течение всего исследования. *Экспериментальная проверка* предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности) и преддипломной практики на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, в период работы учителем математики на базе МШ «Haileybury Astana», г. Нур-Султан, Казахстан, а также докладывались в рамках участия в XI международной научно-методической конференции «Совершенствование математического образования – 2020: состояние и перспективы развития», посвященной 90-летию ПГУ имени Т.Г. Шевченко (ноябрь, 2020 г., онлайн-конференция ПГУ). *Теоретические выводы и практические результаты* исследования представлены в 3-х публикациях [1, 2, 27].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения степенной функции и ее свойствам в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

2. Система упражнений по теме «Степенная функция» для базового и профильного уровней старшей школы, включающая визуализированные задачи, в том числе прикладной направленности и повышенной сложности.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 37 рисунков, 14 таблиц, список используемой литературы (82 источника), 2 приложения. Основной текст работы изложен на 104 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

1.1 Содержание функциональной линии в курсе алгебры и начал математического анализа

Функциональная содержательно-методическая линия курса школьной математики является одной из основополагающих линий, проходящей через весь курс, начиная с арифметических зависимостей в начальной школе, затрагивая некоторые геометрические модели, и лежит в основе сущности математического анализа и высших разделов данной научной дисциплины.

Фундаментальной ролью функциональной линии является объединение разделов математики как школьного предмета в единое целое, отображение практической направленности приобретенных математических знаний и навыков к реалиям вещественного мира, а также создание взаимосвязи с другими дисциплинами естественнонаучной области. Именно функция позволяет учащимся увидеть динамичность, изменчивость и закономерность реальных процессов и явлений.

Несмотря на достаточную разработанность понятия функции и широкое употребление уже к началу XVIII века, введение функциональной линии в школьную программу математического образования происходило не сразу. Так в западной системе образования инициатором включения функциональной линии в школьный курс выступает немецкий математик Феликс Клейн (1849-1925), который был убежден в доминировании понятия функции в современной математике, его реформистские взгляды легли в основу разработки Меранской программы в 1905 году, где ключевым моментом являлось изучение функциональной зависимости, имеющей большое приложение в естествознании и технике. Данная программа оказала влияние на преподавание математики в ряде других стран, в том числе и в России [64].

Необходимо отметить, что задолго до меранской программы на рубеже XIX и XX веков за изучение функций в российских учебных заведениях выступали такие педагоги как М.В. Остроградский, по инициативе которого в кадетских корпусах были введены элементы математического анализа, а также В.П. Шереметьевский, писавший о необходимости формирования основного курса математики вокруг идеи о функциях [36].

Пересмотр школьных программ в пользу включения функционально-графической линии, разрабатываемых для отечественных средних учебных заведений произошел только в начале XX века после проведения I и II Всероссийских съездов преподавателей математики (1912-1914 гг.), где была озвучена идея «опустить из курса математики средней школы некоторые вопросы второстепенного значения, провести через курс и ярко осветить идею функциональной зависимости» [24, С. 131].

Так в своем докладе [75] профессор А.Я. Хинчин определил основные три причины необходимости включения понятия функции и ее свойств в школьный материал:

1) только функции отражают явления реального мира, воплощая в себе «подвижность, динамичность действительности и взаимную обусловленность реальных величин» [75, С. 68];

2) понятие функции отражает диалектику современного математического мышления, приручая оперировать величинами не в условиях «искусственной неподвижности», а в «их живой изменчивости…, взаимной связи и обусловленности» [75, С. 68];

3) функциональная зависимость – это стержень высшей математики и «качество подготовки учащихся к усвоению курса математики в высшей школе в значительной степени измеряется тем, насколько твердо, полно и культурно они свыклись с этим важнейшим понятием» [75, С. 68].

Активная разработка функционального материала для школьного курса началась в 60-е годы XX века. В это время В.Л. Гончаров разрабатывает методическое пособие «Начальная алгебра», где основной фокус направлен на изучение числовых (алгебраических) функций. Целью данного издания, как пишет сам автор, является понимание, что «учебный, школьный предмет, именуемый «алгеброй», отнюдь не есть первая подготовительная ступень к изучению современной алгебры в собственном смысле слова, как научной дисциплины, а есть (вместе с другими математическими предметами) первая, подготовительная ступень к изучению математического анализа, издавна и поныне являющимся действенным орудием в руках физика, инженера, техника, исследователя и практика в любой области точного знания» [17, С. 6]. Его методические идеи находят отражение в трудах Е.М. Васильевой, где главной линией проходит понятие функциональной зависимости и важности акцентирования внимания учащихся на графическом ее представлении. В работе Е.М. Васильевой отмечено, что «понятие функциональной зависимости имеет огромное значение для формирования диалектико-материалистического мировоззрения учащихся и для показа практических приложений математики» [11, С. 3].

В ходе развития функционально-графической линии немаловажное значение было отведено вопросу «какое определение понятия «функция» стоит рассматривать в средней школе?»:

1) как *аналитическое выражение*, сформулированное Л. Эйлером в середине XVIII века или, другими словами, «оперативное», однако, ограничивающее понятие функции в силу отождествления ее только с одним способом задания, исключая функции, заданные кусочно, графически, таблично;

2) как *графическое представление*, данной концепции придерживался Ф. Клейн, утверждая, что школьник легко воспринимает новое научное знание только через призму наглядности. Однако, недостатком данного

определения является существование функциональных зависимостей, которые нельзя представить в виде графика;

3) как *табличное представление*, вытекающее из понятия соответствия между элементами множеств значений аргумента и значений функции, но при этом, данное определение накладывает на понятие функции некую статичность, что приводит к непониманию изменчивости природы функции.

В результате в современной школьной математике используется теоретико-множественный подход, что позволяет рассматривать все варианты определения понятия функции и способы ее задания: аналитический, графический, табличный, словесный. Вариации введения определения зависят только от возрастной категории школьников, начиная от наглядно-интуитивного восприятия зависимости до формального определения, формируемого в старших классах, и видения авторов учебно-методических комплексов, которые в большей степени придерживаются *генетической* трактовки понятия «функция», позволяющей отобразить динамическую природу функции и применить ее к моделированию реальных процессов. Единственным недостатком данной трактовки является возможность ее применения только к числовым функциям, поэтому для расширения понятия на ее геометрическую интерпретацию в школьном курсе также приводится и *логическая* трактовка, позволяющая расширить математический язык в рамках функциональной зависимости.

На сегодняшний день функциональная содержательно-методическая линия школьного курса математики включает изучение широкого класса элементарных функций, получивших свое название в силу широты их применения. Данные функции обычно рассматриваются в поле вещественных или комплексных чисел, иными словами, являются числовыми функциями. Если проводить классификацию согласно выполняемым операциям, их можно разделить на алгебраические и трансцендентные. Алгебраические функции подразделяются на рациональные (целые многочлены и дробные) и иррациональные. К трансцендентным относятся показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Элементарные функции также связаны с понятиями непрерывности и геометрическими преобразованиями, что дает возможность связать их с другими линиями школьного курса математики.

Учитывая принятую дидактическую методику перехода от простого к сложному, от известного факта к неизвестному с сохранением блочности изучаемого материала и его полноты, а также с учетом требований образовательных стандартов нового поколения, функционально-графическая линия может быть условно разбита на этапы и распределена по классам следующим образом (Таблица 1):

Таблица 1 – Примерное содержание функционально-графической линии по классам

Этап	Класс	Изучаемые элементы
Пропедевтический – подготовка к изучению функций в основной школе	1-6 классы	Понятие зависимости величин; наблюдение за результатом при изменении одной из величин; знакомство и построение таблиц, круговых диаграмм; изучение прямоугольной системы координат и координат точек; формулы нахождения периметра и площадей прямоугольника, квадрата, круга; понятие прямой и обратной пропорции; знакомство и рассмотрение графиков движения.
Основной – изучение понятия функции и функций элементарными средствами	7 класс	На базе линейной функции первичное представление о функции в большей мере индуктивным методом с превалированием наглядности. Понятия зависимой и независимой переменных, области определения и значения функции; способы задания функции: словесный → табличный → графический → аналитический; рассмотрение графиков и свойств линейной функции изучение понятия степени, построение графиков вида $y = x^2,\ y = x^3$.
	8 класс	Функция обратной пропорциональности вида $y = {}^{k}/_{x}$ и ее график; функция вида $y = \sqrt{x}$ и ее график, сравнение и связь с функцией вида $y = x^2$;

Продолжение таблицы 1

Основной	9 класс	Формальное определение понятия функции; квадратичная функция, ее график и свойства; квадратный трехчлен и функция вида $y = ax^2 + bx + c$, ее график, приведение к виду $y = a(x-h)^2 + k$; понятие возрастания и убывания функции; промежутки знакопостоянства; наибольшее и наименьшее значение функции; нули функции; понятия четной и нечетной функции; простейшие геометрические преобразования графиков; степенная функция с натуральным показателем (определение степенной функции); дробно-линейные функции.
Завершающий – введение в математический анализ	10-11 классы	Степенная функция при различных фиксированных показателях и ее графики и свойства; функция корня n-степени; обратные и сложные функции; показательная функция, ее график и свойства; логарифмическая функция, ее график и свойства; тригонометрические и обратные тригонометрические функции, их графики и свойства (периодичность); обобщение и систематизация сведений о функциях; исследование функций (экстремумы, асимптоты); производная степенной функции с целым показателем, синуса, косинуса; производная сложной функции; производная обратной функции; первообразная и интеграл; применение производной к исследованию функций и решению задач.

Как видно из таблицы 1, через весь курс функциональной содержательно-методической линии проходит изучение степенной функции и ее частных видов, на базе свойств степенной функции вводятся общие свойства функций, термины и понятия, связанные с ней, понятия четной и нечетной функции, сложной функции и обратной. Первичное знакомство с процессами дифференцирования и интегрирования также проводится на примере степенной функции. Это дает основание заключить, что понимание и знание степенной функции, ее свойств и графиков является ключевым моментом в полноте восприятия функциональной линии в школьном курсе математики в целом.

1.2 Основные цели и задачи обучения теме «Степенная функция» в школьном курсе математики

Определив, что изучение степенной функции является ключевой составляющей к пониманию функционально-графической линии, и базируясь на требованиях государственных образовательных стандартов нового поколения к предметной области «Математика» рассмотрим основные цели и задачи обучения теме исследования.

В учебнике для академического бакалавриата под редакцией Н.С. Подходовой и В.И. Снегуровой [54] необходимость изучения функции рассматривается как:

– основа метода решения уравнений, неравенств, задач с параметрами, в частности сравнение области значений функций, как пересечение данных множеств или как метод графического решения;

– идея «*всеобщей связи, непрерывности, бесконечности, интерполяции (приближения)*» [54, С. 255];

– демонстрация значимости и распространенности понятия в других науках и дисциплинах, так как большинство физических законов и связей имеют функциональную основу;

– как средство развития функционального мышления, позволяющее видеть зависимости между изменчивыми элементами;

– как средство развития умения манипулировать абстрактными понятиями, умения анализировать и др.

А.Г. Мордкович [41] подчеркивает, что основная цель главенства функционально-графической линии в школьном курсе алгебры носит психологическую подоплеку, а именно, *устранение противоречия образа мышления*, так как для овладения алгеброй существенную роль играет левополушарное мышление, отвечающее за умение логически рассуждать, систематизировать, анализировать, в то время как преобладающим мышлением учащихся, начинающих курс алгебры, является правополушарное, то есть восприятие мира таким, какой он есть. Таким образом, функциональный материал позволяет установить так называемый «мост» между логической и творческой стороной восприятия мира, так как, опираясь на возможности правого полушария, формирует условия для гармоничной работы всего мозга.

В рамках развивающего потенциала функциональной линии акцентируется внимание на том, что изучение функций позволяет начать знакомство с более сложными концепциями курса алгебры *с зоны ближайшего развития ребенка* [15], то есть вводить новые понятия интуитивным способом, основываясь на личном опыте учащегося, что также дает понять прикладную направленность функциональной линии. Например, дорога ребенка от дома до школы как зависимость скорости перемещения и своевременного прихода в школу подводит к физическому закону равноускоренного движения $v = v_0 + at$.

Согласно примерной образовательной программе основного общего образования целью изучения функциональной содержательно-методической линии является «*получение школьниками конкретных знаний о функциях как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов (равномерных, равноускоренных, экспоненциальных, периодических и др.*)» [58].

Учитывая структуру распределения функционального материала основной школы от линейной до степенной с натуральным показателем, а также более высокий уровень восприятия учащимися 7-9-х классов новых математических понятий по сравнению со старшеклассниками, основной функциональный блок, позволяющий плавно перейти к изучению трансцендентных функций и начал математического анализа приходится на этап изучения функций, входящих в семейство степенной функции, определим о***сновные цели*** изучения степенной функции:

– создание психологической основы гармоничного развития обоих полушарий головного мозга;

– формирование функциональных понятий у школьников основной и старшей школы с целью дальнейшего успешного освоения функционального материала в высших учебных заведениях и представлений о функции в виде математической модели с целью представления и исследования реальных процессов и явлений;

– формирование диалектического мышления, раскрытия общекультурной роли математики во взаимосвязи с другими областями деятельности;

– формирование умения применять символьный, графический и словесный язык математики;

– создание взаимосвязи между существующими практическими знаниями учащихся и аналитической структурой курса алгебры с учетом зоны ближайшего развития ребенка;

– формирование умения применять функциональные знания о степенной функции к другим видам функций методом обобщения, к решению задач из межпредметных областей;

– облегчение процесса изучения показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических функций, введения в математический анализ на основе анализа и обобщения свойств степенной функции со свойствами вышеуказанных функций, а также геометрической интерпретации степенной функции для изучения производной функции, предела функции и первообразной;

– формирование навыков ведения исследовательской, проектной и социальной деятельности.

В отношении знаниевого компонента по теме «Степенная функция» согласно *примерной основной образовательной программе среднего общего образования* (протокол от 28 июня 2016 г.) [57] школьным курсом алгебры и начал математического анализа предусмотрен следующий минимальный объем умений и навыков:

– оперирование понятиями: зависимость величин, степенная функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание и убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции, асимптоты функции, четная и нечетная функции, обратная функция;

– нахождение значения функции по значению аргумента функции, заданной аналитически, графически, таблично, словесно;

– построение и чтение графиков частных видов степенной функции;

– соотношение графиков функции с их аналитическими формулами;

– прогнозирование поведения степенной функции и определение ее свойств по графику, формуле;

– нахождение наибольшего и наименьшего значения степенной функции;

– применение свойств степенной функции к решению уравнений, неравенств и их систем;

– геометрические преобразования степенной функции с последующим переносом полученных знаний к другим классам функций;

– построение и исследование простейших математических моделей, в том числе из межпредметных областей науки;

– использование полученных функциональных знаний к практическим расчётам, к решению задач прикладной направленности.

1.3 Различные подходы к введению понятия «степенная функция» в школьном курсе математики

Несмотря на единство целей и задач при обучении функционального материала, в том числе степенной функции, ее свойствам и графикам, понятиям, связанными с ней, существуют различные подходы к месту введения, формулировке определения, методу обучения теме исследования.

Однако, с учетом того, что в настоящее время основополагающим моментом в обучении в старшей школе является выпуск плеяды граждан, обладающих совокупностью компетенций, которая позволит им и далее расширять полученную систему знаний, умений и навыков в их профессиональной деятельности с высокой степенью адаптации в жизненно меняющихся условиях, самостоятельности и активности, и, в рамках ФГОС РФ [70, 71], основной акцент ставится на ***личностно-деятельностном подходе*** и в обучении функциональной содержательной линии. С целью его реализации потребовался пересмотр существующих методик, форм и технологий обучения математическим концепциям.

При проведении сравнительного анализа популярных среди учителей учебно-методических комплексов алгебры за 7-11-е классы, аккредитованных к использованию на территории Российской Федерации, утвержденных приказом Министерства просвещения РФ от 28 декабря 2018 года за №345, можно отметить, что авторы учебных комплексов в той или иной мере имеют различные подходы к обучению степенной функции и отдельных частных ее видов.

Принимая во внимание разветвленность степенной функции, структурирование материала по ней в одном разделе учебника не представляется возможным, в этой связи знакомство с ней начинается в 7-8-х классах и продолжается до завершения старшей школы. Параллельно проводится изучение свойств степени, что позволяет расширить знания не только функционального материала по степенной функции, но также сопоставить свойства и особенности графиков частных видов степенной функции со свойствами других семейств функций в целом, в частности, обобщение понятия области изменения, возрастания и убывания, четности и нечетности, и обратных функций, символики преобразования графиков, новые виды уравнений и неравенств.

В учебниках алгебры 7-9-х классов авторов Ю.Н. Макарычева [5, 6, 7], Ш.А. Алимова [9] превалирует ***проблемный подход*** с фокусом на прикладной составляющей функционального материала с целью формирования понятия функции как модели реальной ситуации. Понятие функции вводится в 7-ом классе теоретически-формально, определение степенной функции вводится в 9-ом классе, однако, в 7-8-х классах проходит активная пропедевтика степенной функции, в частности при введении функции вида $y = x^2, y = x^3, y = \frac{1}{x}, y = \sqrt{x}$ отмечается их принадлежность к классу степенной функции без введения определения таковой.

В учебниках алгебры и начал математического анализа автора Ш.А. Алимова [9] выполняется повторение пройденного функционального материала с целью его обобщения в семейство степенной функции, также вводятся понятия ограниченных на множестве функций с последующим введением понятий наименьшего и наибольшего значения функции.

От указанных концепций автор переходит к рассмотрению свойств частных видов степенной функции при разных значениях показателя p, в частности, когда показатель - четное натуральное, нечетное натуральное, отрицательное целое число. С перечислением свойств степенной функции при $p = -2n$, где n - натуральное, вводятся понятия горизонтальной и вертикальной асимптот, далее свойства функции при $p = -(2n-1)$. Свойства при положительном и отрицательном нецелом показателе p, где $p \in \mathbb{R}$, позиционируются автором как более сложный материал, ориентированный на профильный уровень [9, С. 44].

В рамках рассматриваемых свойств указывается в виде перечисления область определения функции, множество ее значений, четности и нечетности, возрастания и убывания, ограниченности на заданном множестве, наличие наименьшего или наибольшего значений функции. Каждому отдельному случаю значения показателя p имеется рисунок с графиком функции.

Отличительной характеристикой используемого подхода в указанных учебниках является его ориентированность именно на личность школьника, что позволяет изучать приведенный в учебниках материал самостоятельно, в силу простоты его изложения и достаточного уровня визуализации.

В учебно-методических комплексах (УМК) по алгебре автора С.М. Никольского применяется ***дифференцированный подход***, включая в учебниках для 8-9-х классов [47,48] одновременно задачи для базового уровня и с углубленным изучением математики, в 10-11-х классах – базового и профильного [46]. Изложение материала характеризуется высокой степенью научности и фундаментальности. При этом изучение функционального материала начинается в 8-ом классе с введения понятия функции как соответствия множеств, далее рассматриваются функции вида $y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x}$, вводятся понятия четной и нечетной функции. В старших классах проводится обобщение функционального материала в §3 [46, С. 93], где повторение определения «функция» и «график функций» проводится через корреляцию с физическими процессами, такими как скорость и время, а также через геометрическую интерпретацию (объем, площадь, мера угла). Однако, идея соответствия вводится аналитически без схематического представления.

Далее рассматриваются примеры функций из ранее изученных, то есть новое знание базируется на известном. Визуальная составляющая в основном сконцентрирована при отображении графиков функции в теоретическом материале.

Основной отличительной чертой изучения степенной функции в указанном УМК является отсутствие ее определения и обобщения ранее изученных ее классов, рассматривая каждый из них по отдельности *без объединения их в единое семейство степенной функции*. В большей степени задачи и упражнения ориентированы на формирование навыков работы с функциями аналитически. Не рассматриваются задачи из межпредметных областей или прикладного характера.

Обучение теме исследования по УМК автора Г.К. Муравина [43, 44, 45] основывается на ***системно-деятельностном подходе***, по принципу дифференцирования заданий и укрупнения дидактических единиц. Изучение функций начинается в 7-ом классе [45] на *наглядно-интуитивном* уровне, определение степенной функции приводится в 10-ом классе через рассмотрение свойств частных видов степенных функций через сравнение квадратичной и кубической функции. Вводится область определения данных функций, при этом формулировка подается интуитивно без акцента на термин и ввода символики, в точности «функции…определены и непрерывны на всей числовой прямой» [43, С. 46]. Положительным моментом при введении понятия функции является исследовательский характер, при этом теоретические пояснения сопровождаются визуальным рядом, что облегчает восприятие и способствует развитию навыка сравнительного анализа.

Далее рассматривается область значений и свойства возрастания и убывания функции. Необходимо отметить, что аналитическое (формульное) выражение показателя опущено в объяснении и заменено на более легкие к восприятию слова, то есть вместо $n = 2k$ использована следующая формулировка «если n - четное число», аналогично для n – нечетное.

В §6 учебника [43, С. 48] вводится понятие корня -степени, автор вводит этот термин через призму существующих знаний квадратичной и кубической функции, а также их графики и свойства. Интересным приемом представления графика функции с дробным показателем является прием сопоставления таблицы значений функций $x = y^n$ и $y = x^n$. В последствии происходит переход к графику степенной функции с положительным дробным показателем. Сопоставив функции с формулами, приведенными выше, рассматривается понятие обратной функции. При этом автор вводит функции с радикалом в степени без позиционирования как степенные, что отражено в учебнике в виде отдельно изучаемого модуля с переходом к термину иррациональные уравнения.

Упражнения характеризуются разными уровнями сложности, направленные на понимание и использование функциональных понятий, терминов и символики, закрепление навыка построения графиков функций согласно проведенному аналитическому анализу формулы функции. Задачный материал обширен, однако, отсутствуют задачи на моделирование реальных процессов.

Реализуемый автором подход при разработке содержания учебно-методического комплекса по алгебре для средней и старшей школы соответствует современным требованиям образования, так как может быть использован для самостоятельного изучения учащимися. Многие упражнения носят исследовательский характер, однако в большей мере, построены на анализе теоретической части без включения задач из межпредметных областей.

В учебниках А.Г. Мордковича находит применение ***проблемный подход***. Однако, как утверждает сам автор, проблемную ситуацию должен создавать сам ученик и он же должен найти решение к ней. В статье [41] также отмечено, что при введении функциональных понятий следует придерживаться ***системного подхода***, включающего три уровня: на начальном этапе, применяется ***наглядно-интуитивный*** подход с постепенным переходом к *описательному уровню* и по мере возникновения необходимости сформулировать точное определение понятия перейти на *формальный* уровень подачи функционального материала. При переходе к преподаванию в старших классах элементов математического анализа А.Г. Мордкович акцентирует внимание на уменьшении объема схоластики и формализма, и увеличении объема иллюстративного компонента учебной информации, в точности «больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие мозга» [41, С. 5], что соответствует его взглядам рассмотрения математики как *гуманитарного предмета*.

Вышеуказанные подходы также рассматриваются другими авторами методических пособий и статей по методике преподавания функциональной линии.

Так В.П. Покровский отмечает, что основным методом обучения функциональной линии является «сочетание ***графического и аналитического методов исследования***, которое позволяет содействовать гармоничному развитию мышления учащихся, активизируя оба полушария головного мозга: и правое, отвечающее за образы, и левое, отвечающее за логические рассуждения» [55, С. 28].

Однако, он также подчеркивает, что аналитический метод все-таки превалирует в старшей школе за счет более развитой способности к оперированию абстрактными понятиями и акцентирует на необходимости обучения умению анализировать графики функции, иными словами, учащиеся 10-11-х классов должны уметь переводить визуальный ряд на вербальный и символический язык математики.

Автор не ограничивает выбор методов изложения с точки зрения математической строгости, отмечая, что общефункциональные свойства можно вводить как на *наглядно-интуитивном, словесно-описательном* уровне и через введение строгого определения. Также В. П. Покровский ставит акцент на важности геометрической интерпретации функциональной зависимости с целью формирования правильного восприятия и осмысления реальных процессов.

В.П. Покровский приводит к рассмотрению общую методическую систему формирования и закрепления понятий, связанных с функциональной зависимостью, которая состоит из 5 этапов:

1-ый этап: мотивация на изучение нового вида функций, которая основывается на рассмотрении в начале урока пары текстовых практических задач, в ходе которых формируются представления о новом виде функций и задается формула функции;

2-ой этап: формулирование общих сведений об изучаемом виде функции из полученной в ходе решения формулы, введение названия, характерных признаков с целью формирования навыка различать данный вид от других видов функций;

3-ий этап: построение графика функции. На начальном этапе процесс построения графика функции базируется на составлении таблицы ее значений, иными словами «по точкам». Далее вычленяются особенности данного графика, то есть обучающиеся определяют свойства, характерные для изучаемой функции;

4-ый этап: проведение исследования функции на определение основных свойств или их отсутствие при сравнении с другими видами. Здесь автор отмечает, что в 10–11-х классах исследование проводится аналитически не по графику, а по формуле;

5-ый этап: «закрепление основных понятий и теоретических фактов» [55, С. 30]. Решение задач и упражнений на применение изученных свойств функции данного вида.

С позиции ***личностно-деятельностного подхода*** также разработаны и другие частные методики обучения функциональной линии. Одна из таких частных методик представлена Л.С. Капкаевой [24], которая основывается на исследовательском характере заданий. Иными словами, учащиеся сами в ходе направляемого исследования должны прийти к формулировкам функциональных понятий. Для этой цели автором разработана система дидактических материалов, основанных на *методе листков*, сущность которого заключается в создание последовательно поставленных задач и вопросов, ведущих к формированию понимания классификации функций и их свойствам.

И.Ю. Иванова в статье [22] отмечает, что с точки зрения предпрофильной подготовки при введении и изучении понятий функциональной зависимости важную роль занимает решение задач исследовательского характера, что определяет ***метаметодический подход***, обосновывая ее тем, что углубление метапредметных связей на уроке математики позволит учащимся легко моделировать реальные процессы, что является существенно важным при решении практико-ориентированных задач будущих профессий. Также авторы рассматривают возможность создания модульного обучения на базе дистанционного с элементами интерактивности для учащихся старших классов. При этом И.Ю. Иванова [23] указывает, что в силу абстракции математических понятий и отсутствия их связи с жизнью такие понятия трудны в усвоении. В этой связи при введении новых понятий необходимо дать учащимся возможность использовать свой субъектный опыт для проведения параллелей между родовыми и соподчиненными определениями изучаемых понятий, что послужит лучшему запоминанию, так как создается взаимосвязь с последующим определением свойств понятия и его соотнесения с абстрактной средой. Так на примере понятия «функция» автор демонстрирует применение метаметодического подхода к ее изучению (рисунок 1):

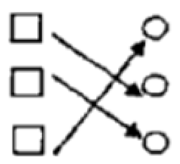
Образ межпредметного понятия «функция» (соподчиненные)	*Образ математического понятия «функция» (родовое)*
	
Примеры: функции телефона, функции менеджера, функции растений, функции кровеносной системы.	Элементы множества располагаются на координатных осях. Образ отображает графическое представление функции

Рисунок 1 – Создание взаимосвязи между соподчиненным и родовым понятием по И.Ю. Ивановой

В зарубежной литературе о подходах к обучению математике, в том числе к изучению функций, все большую долю внимания занимает ***конструктивистский подход.*** Так в работах [78, 80] авторы отмечают, что построение абстрактных математических концепций необходимо вводить, основываясь на восприятии эмпирического мира самого учащегося. Для этого необходимо деконструировать понятие и дать возможность учащимся создать свое понимание темы, отмечая, что процесс познания является адаптивной деятельностью, в которой учитель играет роль навигатора, ставя различного рода задачи, требующие от учащихся активного участия в дискурсе, групповых рассуждениях, интерпретации и рефлексии, иными словами, создавать условия при которых учащийся становится инициатором создания собственного объема знаний о математических концепциях, жизнеспособных в его реальности. Особую роль при применении конструктивизма отводится решению задач прикладной направленности, что перемежается с метаметодическим подходом.

В.А. Далингер [21] считает, что именно визуальное восприятие играет существенную роль в формировании и понимании математических понятий, определяя, что в математике необходимо визуализировать все, что поддается визуализации. Автор отмечает, что в современной школе учителя все еще делают основной упор на логическое мышление, хотя исследования в области психологии доказывают, что 80% получаемой информации воспринимается человеком через зрительный канал.

В своих работах В.А. Далингер [19, 20] подготавливает основу для разработки дидактической системы баланса ***логического и наглядно-образного мышления***. Согласно точке зрения автора достоинством данного подхода является учет индивидуальных особенностей каждого ребёнка, а именно разность восприятия наглядных материалов: одни охватывают всю картину в целом с дальнейшим вычленением деталей, другие фиксируют конкретные признаки с последующим синтезом в единое целое. При этом В.А. Далингер определяет функцию и ее графическое отображение «ядром школьной математики», и что основной целью учителя должно быть формирование умения видеть физическую закономерность между объектами или явлениями. Однако, в работах также отмечается, что воспитание «математического зрения» — это такой же сложный процесс как обучение письму или речи.

В результате анализа современных учебников по алгебре, статей и работ, посвященных методике преподавания функциональной содержательно-методической линии в школьном курсе, можно выделить основную тенденцию перехода от строгого формализма изложения к гуманистическому подходу, фокусирующемуся на доступности изложения посредством *наглядности, моделирования реальных процессов, решения контекстных междисциплинарных задач.*

Таким образом, можно прийти к заключению, что главную роль в формировании осознанного понимания понятий функциональной линии, в частности степенной функции, в курсе алгебры и начал математического анализа играет *наглядно-образный подход, решение практических задач из межпредметных областей, исследовательский характер построения заданий*. Однако во избежание «лево- или правополушарного крена» [21, С. 7] в процессе обучения необходимо совмещать аналитический и графический методы представления функций, что будет способствовать гармоничному развитию мышления, а решение задач исследовательского и прикладного характера позволит сформировать необходимые компетенции для дальнейшей профессиональной деятельности учащихся.

1.4 Применение когнитивно-визуального подхода к изучению степенной функции

С учетом вышеизложенного изучение степенной функции в старших классах с соблюдением условия совмещения графического и аналитического методов, связи с межпредметными дисциплинами, прикладной направленности изучаемой темы эффективнее всего при применении ***когнитивно-визуального подхода***, основным принципом которого является создание взаимосвязи абстрактно-логического содержания учебного материала с наглядно-интуитивными методами, направленными на активизацию познавательной деятельности.

Преимуществами когнитивно-визуального подхода является учет личностных качеств учащихся, а именно, соотнесение к определённому типу доминирования вида восприятия: аналитическому или наглядно-образному складу мышления. Однако, согласно В.С. Ротенбергу даже для «аналитиков» существенную роль в логическом структурировании получаемых знаний играет образное мышление, которое позволяет избежать формальности, «бесплодности» [60, С. 198] полученного нового знания. Для «геометров», для которых наглядно-образное мышление является доминирующим, построение образов к каждому виду нового знания является необходимым для формирования долгосрочных детализированных знаний и умений.

Как показывает практика изучение функциональных понятий с опорой только на логический компонент мышления учащихся приводит к их заучиванию без осознанного понимания сущности изучаемых понятий. «Когнитивно-визуальный подход, снимая приоритет логического компонента, позволяет обеспечить сбалансированную работу мозга при разумном сочетании логического и образного компонентов мышления» [21, С. 37].

В.А. Далингер представляет методику, основанную на специально разработанной системе визуализированных задач в комбинации с информационно-компьютерными технологиями, так как работа учащего на уроках математики в большей степени построена на их решении, и с точки зрения когнитивно-визуального подхода является основным продуктивно-методическим средством для формирования глубокого понимания функциональной линии.

Автор в методическом пособии дает следующее определение визуализированной задаче – это «задача, в которой образ явно или неявно задействован в условии, ответете, задает метод решения задачи, создает опору каждому этапу решения задачи либо явно или неявно сопутствует на определенных этапах ее решения» [21, С. 112]. Схематически классификация визуализированных задач по месту визуального образа представлена на рисунке 2.

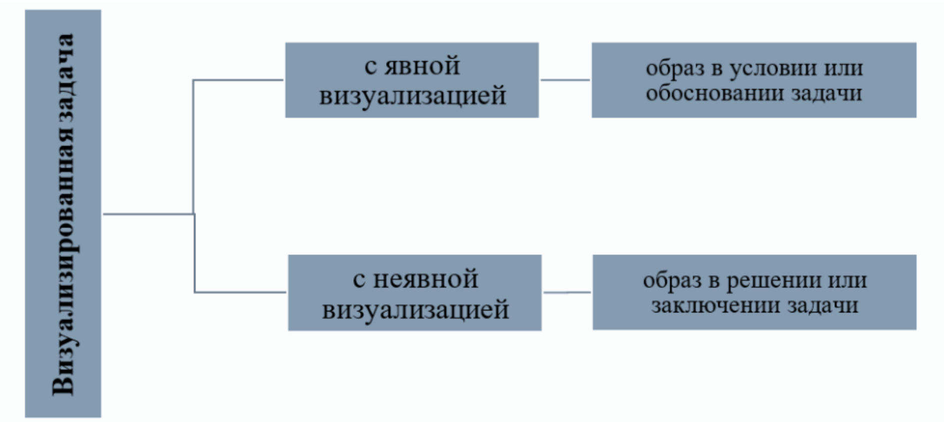


Рисунок 2- Классификация визуализированных задач по месту визуального образа (по В.А. Далингеру)

Классификация визуализированных задач по месту согласно дидактическим функциям представлена на рисунке 3.

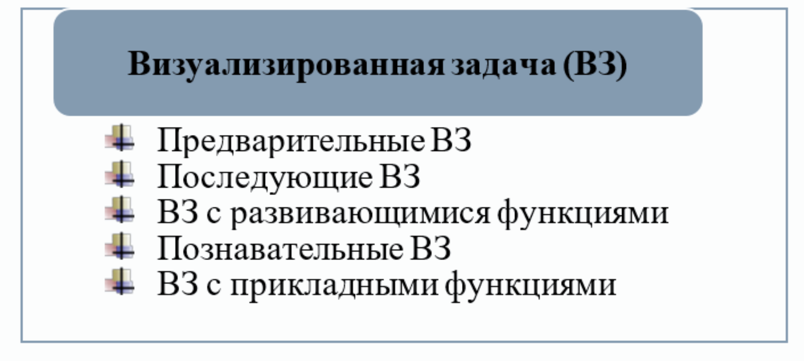


Рисунок 3- Классификация визуализированных задач по месту согласно дидактическим функциям (В.А. Далингер)

Данный подход находит отражение в работах О.О. Князевой, А.В, Фирер, С.Ю. Попадьиной. В этих работах информационно-компьютерные технологии (далее – ИКТ) и разработанные для них учебные программы математической визуализации выступают в качестве основного средства.

В работе О.О. Князевой [25] в рамках обучения математическому анализу особое место отводится компьютерному сопровождению при построении графиков функций, диаграмм, описывающих динамику изучения процессов. Автор предлагает следующую схему реализации (рисунок 4):

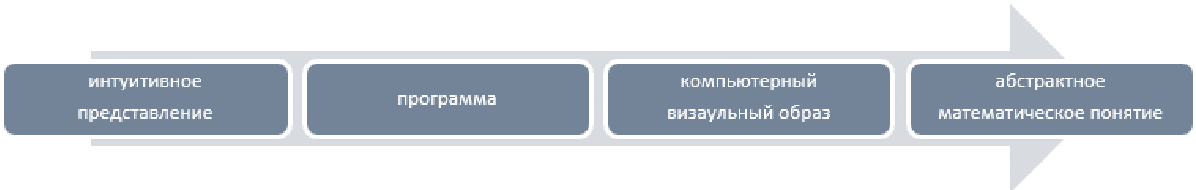


Рисунок 4 – Схема реализации наглядности средствами ИКТ

В автореферате диссертации С.Ю. Попадьиной [56] рассматривается разработка специального курса по функционально-графической линии в компьютерной системе MATHCAD с целью изменения подачи информации со статичного рассмотрения графиков к динамичному наблюдению за характеризующими функцию свойствами. При этом автор данной работы особо отмечает, что эта система позволяет персонализировать процесс обучения данной содержательно-методической линии курса математики.

А.В. Фирер [73] отмечает, что использование ИКТ в учебном процессе позволяет увеличить возможные варианты решения задач за счет моделирования виртуальных экспериментов, исследования компьютерных моделей или возможности создания совместных информационных материалов в синхронизированном режиме. В своей работе она отмечает, что, несмотря на широкий спектр приведенных программ и приложений, включая интерактивных, выбор ограничивается подготовкой самого преподавателя, наличием дружелюбного русифицированного интерфейса и доступностью ресурса большей аудитории. Основной упор по данной методике также делается на решении визуализированных задач, при этом, подразделяя их на задачи с явной визуализацией (если наглядный элемент присутствует в условии задачи) и неявной (если визуальный элемент – в решении к задаче).

А.В. Фирер отмечает, что элементами визуализации в рамках обучения функциональной линии могут служить не только графики, но и таблицы, диаграммы (круги Эйлера, таблицы значений, модель Фрейера, блок-схемы, кластеры) [73].

Также автор показывает необходимость визуального сопровождения систематически и целенаправленно на каждом этапе процесса обучения понятиям функциональной линии и приводит несколько приемов:

– распределение по группам - развитие навыка классифицировать данные;

– составление модели Фрейера: например, разделение блоков на аналитический вид функции и графический вид функции с целью формирования навыка математического видения и сопоставления аналитической формы с графическим ее отображением;

– создание ментальных карт с целью консолидации известных фактов по изученной теме;

– алгоритмизация информации на примере блок- схем;

– перекодирование информации;

– дополнение рисунка, при котором в заданный рисунок вносится новая информация (график новой функции);

– выделение цветом.

М.Ю. Пермякова [52], отмечая возникающие трудности при изучении функций, связанные с абстрактностью теоретического материала, также рекомендует сочетать когнитивно-визуальный подход с различными типами моделей демонстрации функционального материала, но вместе с тем использовать традиционные методики обучения, ориентированные на формирование функционально-графической грамотности. Одной из таких моделей выделяется *графический алгоритм*, «как эффективное средство визуального описания динамики процесса решения функционально-графической задачи» [52, С. 108]. Принцип данного алгоритма заключается к сведению текстового содержания к минимуму, а представленная информация должна быть изложена просто. Графический алгоритм – это серия рисунков (кадров) (рисунок 5), в которой представлен поэтапный ход решения задачи, и выполняет одновременно иллюстративную и когнитивную функции. Применение рассмотренного алгоритма эффективно при решении задач «двух типов: 1) дана вербальная информация, нужно восстановить визуальную; 2) дана визуальная информация, нужно восстановить вербальную» [52, С. 108].

Рисунок 5 – Графический алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции (по М.Ю. Пермяковой)

Для применения когнитивно-визуального подхода к изучению степенной функции необходимо соблюдать основные положения конструирования визуальной среды:

– при вводе новых функциональных понятий следует опираться на зрительное восприятие учащихся, то есть оформлять в виде таблицы, схемы, графика и других наглядно-образных средств, так как это способствует лучшему запоминанию по сравнению с информацией, представленной в устной или письменной форме;

– необходимо помнить, что мыслительный процесс учащегося основан на сопоставлении окружающей действительности с формами, звуками, конкретными образами, а не с отвлеченными понятиями;

– учебная наглядность должна применяться планомерно и структурированно: например, рассматривая наглядный материал в целом, далее акцентируя внимание на главных и второстепенных элементах с дальнейшим переходом снова к целостному восприятию;

– позволить учащимся самим создавать визуализированные материалы, что способствует не только их обучению, но и развитию их мышления;

– использовать компьютерную поддержку при изучении, закреплении нового знания;

– использовать три способа представления функционально-графических знаний (геометрический, символический, словесный);

– учитывать возможности и личностные качества учащихся в декодировании наглядно-образной информации;

– дозировать наглядность и взвешенно подходить к выбору методов ее использования.

Рассмотрим примеры заданий из раздела «Степенная функция» учебников алгебры 10-11-х классов с применением когнитивно-визуального подхода:

Задача 1 [72]. Даны графики функций (рисунок 6):

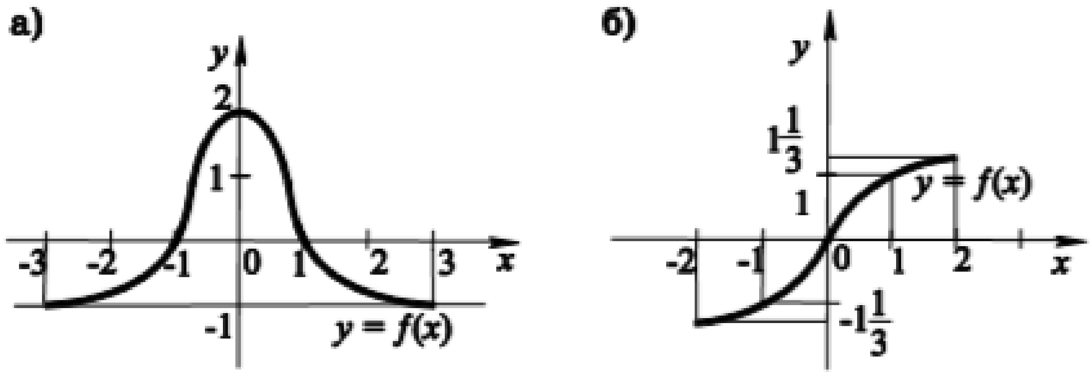


Рисунок 6 – Графики функции к задаче 1

1) Какова область определения функции у $= f(x)$?
2) Каково множество значений функции у $= f(x)$?
3) Является ли функция четной / нечетной?
4) На каких промежутках функция возрастает / убывает?
5) При каких значениях x функция принимает значение, равное 0?
6) Каково значение функции при $x = 0$? $x = 2$?

Данная задача относится к визуализированным задачам открытого типа, где образ (графики функции) даны в условии задачи. Такие графические задачи на этапе систематизации (повторения) знаний позволяют реконструировать определения функциональных свойств и понятий, а также определить умение учащихся читать графики функций, то есть, переводить графическую (образную) информацию в словесную или аналитическую. При решении данного типа задач формируется навык не только «смотреть», но и «видеть», выявлять существенные сходства и различия графической информации.

Задача 2 [21]. Решите неравенство $x > \sqrt{x}$.

Эту задачу можно отнести к задачам с неявной визуализацией, так как кроме аналитического решения приведения к равносильной системе неравенств, ее можно решить графически (изобразив графики функций в одной системе координат), зная свойства функций $y = x$ и $y = \sqrt{x}$

(рисунок 7). Таким образом, учащиеся могут видеть, что график функции $y = x$ выше графика функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $(1, +\infty)$, что и является решением неравенства. Целесообразно также показать аналитическое решение задачи для сравнения полученных результатов:

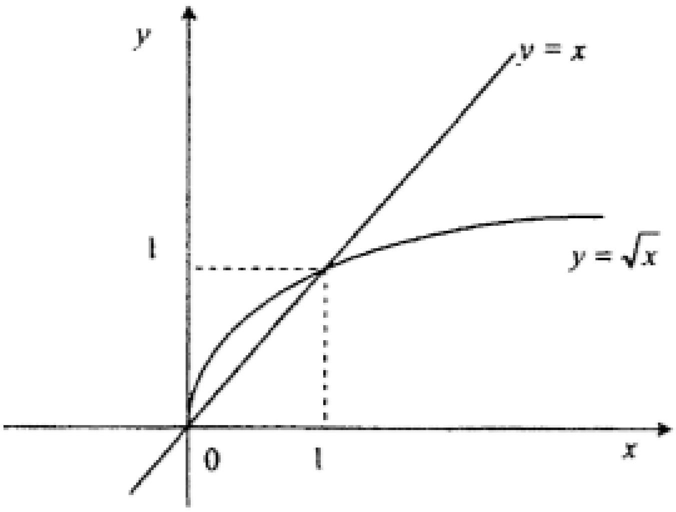


Рисунок 7 – Графическое решение задачи 2

Главной функцией рассмотрения задач типа АГ (аналитическое описание - графический образ) является «оживление» формул, задающих функции, так как без графического образа функция в сознании учащегося остается просто набором символов и не несет никакой смысловой нагрузки.

Задача 3 [43, С. 47]. Дана часть параболы (рисунок 8). Дополните ее так, чтобы получившийся график задавал 1) четную функцию; 2) нечетную функцию; 3) задайте полученные функции формулой или кусочно и укажите промежутки возрастания и убывания. Имеет ли функция точку разрыва?

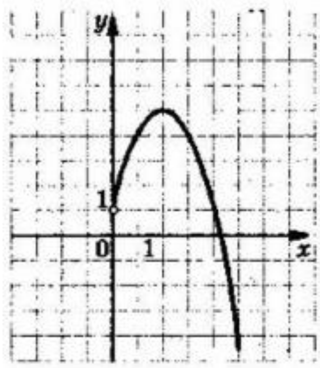


Рисунок 8 – График функции к задаче 3

Задача 3 относится к задачам типа ГГ (графический образ – графический образ) с явной визуализацией с развивающими функциями: позволяет перевести знания четности и нечетности функций из формальных в познавательную деятельность учащихся, что в последующем дает возможность сформировать графические навыки в общетеоретическом плане с дальнейшим переносом на задачи других функциональных зависимостей, заданных аналитически.

Несомненно, нужно понимать, что применение когнитивно-визуального подхода «не снимает необходимости обучения школьников навыкам дедуктивного мышления, однако планомерное интегрирование резервов визуального мышления в совокупности со специально разработанными материалами на доказательство способствует его формированию, а также развитию эвристических приемов и повышению уровня логической строгости» [21, С. 185].

Дальнейшее применение когнитивно-визуального подхода к изучению степенной функции рассматривается во 2-ой главе данной работы.

Выводы по первой главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

1) исследована история формирования функциональной содержательно-методической линии в школьном курсе математики, с переходом от включения некоторого объема функционального материала до ведущей роли в формировании математических понятий. Рассмотрены различные трактовки определения «функции», включенные к изучению в школьной программе алгебры с учетом теоретико-множественного подхода, а также примерное содержание функционального материала в курсе математики основной и старшей школы. Определена существенная роль

степенной функции при формировании знаний функционально-графической линии в целом;

2) выявлены основные цели и задачи обучения степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа, как фактора создания психологической основы для гармоничного развития аналитического и творческого мышления ребенка, создания взаимосвязи курса алгебры с реалиями эмпирической зоны развития ребенка, формирования базовых функционально-графических знаний с последующим переносом на изучение трансцендентных функций и начал математического анализа, осознания практической значимости изучения функционального материала и связи с межпредметными областями науки;

3) рассмотрены основные подходы к изучению функциональной содержательно-методической линии в целом, и степенной функции в частности. Выявлено, что процесс изучения степенной функции более эффективен при использовании гуманистического подхода с усилением наглядно-образного компонента обучения и опорой на правополушарное мышление, позволяющие активизировать познавательную деятельность учащихся и повысить качество усвоенных знаний и умений. Однако, объем наглядности должен быть сбалансирован с традиционным (аналитическим) методом изучения функций;

4) рассмотрен факт эффективности применения когнитивно-визуального подхода к изучению степенной функции в рамках соблюдения условия совмещения графического и аналитического методов, связи с межпредметными дисциплинами, прикладной направленности. Выявлены основные преимущества данного подхода. Выделена визуализированная задача как основное продуктивно-методическое средство для глубокого понимания функционального материала, рассмотрена ее классификация и приемы реализации в учебном процессе при изучении степенной функции.

Глава 2 Методические аспекты обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа

2.1 Пропедевтика понятия «степенная функция» в курсе алгебры основной школы

Рассматривая математику как инструмент познания окружающего мира, в ходе изучения которой вырабатываются как общеобразовательные умения (такие, как проведение анализа, способность к обобщению, систематизации и классификации), так и специфические математические навыки описания реальных процессов и явлений научным языком, нужно отметить важность развития функционально-графической грамотности учащихся на высоком уровне.

Несмотря на доминантность функциональной линии в школьном курсе математике, школьники показывают низкий уровень функционально-графической грамотности, примерно 40-60% согласно анализам результатов ЕГЭ за 2015-2019 годы, что негативно отражается на усвоение курса математики в целом и способности применять функциональный материал к решению реальных ситуаций (при обращении к выходным данным участия России в международных сравнительных исследованиях PISA за 2015 и 2018 годы Россия заняла 23 и 30 место соответственно).

Одной из причин возникновения трудностей с пониманием степенной функции в старших классах является проблема преемственности знаний на уровне темы, во взаимосвязи с другими темами предмета и на уровне самого предмета. Еще К.Д. Ушинский, классик советской педагогики, писал, что в процессе усвоения знаний установление внутренних связей между новым приобретённым знанием и ранее изученным влияет на качество понимания смысла изучаемого понятия и эффективности его применения к последующим [69].

Этого же мнения придерживается Т.А. Михайлова, отмечая, что низкий уровень сформированности умений по функциональной содержательно-методической линии обусловлен разрозненностью функционального материала во временных рамках, несистематическим обращением к линии «Функции», что приводит к формальности усвоения темы исследования [37].

Для устранения вероятности высокого процента непонимания понятия «степенная функция» в старших классах, необходимо, чтобы процесс изучения степенной функции и ее свойств имел непрерывный характер. Для реализации непрерывности следует осуществлять пропедевтическую работу в 7-9-х классах, которая позволит создать взаимосвязь между отдельными частными видами степенной функции с дальнейшим переносом полученных знаний и умений к другим видам функций, а также развитию метапредметных компетенций.

К изучению пропедевтики функциональной линии подходили такие авторы как В.А. Гуськов [18], А.А. Вендина [13], Т.А. Крылова [28], однако принимаемые ими пропедевтические меры приходятся только на начальные классы в рамках формирования общего понимания функциональной зависимости. В то время как в работе [38] под *функциональной пропедевтикой* понимается непрерывный процесс создания связи между ранее изученным, изучаемым (пропедевтический элемент) материалом и функциональным материалом, подлежащим изучению в последующих классах (пропедевтируемый элемент). Другими словами, необходимо создавать непрерывные связи между понятиями от функции к функции с целью создания благоприятных условий формирования методов удержания функциональных знаний и умений в долговременной памяти школьника, способности быстрого воспроизведения имеющейся базы данных при обращении к новому материалу, а также ее дальнейшего расширения.

При этом подчеркивается необходимость введения предпонятий на интуитивном уровне на основе графических представлений, с целью установления прямой связи между геометрическим образом и самим понятием, чтобы учащиеся могли создать ассоциативный ряд между аналитическим фактом и его графической интерпретацией [30]. С позиции пропедевтики именно интуитивное понимание является первостепенным в процессе познания. Однако, рассматривая интуитивное введение предпонятий с психологической точки зрения, методисты рекомендуют взять во внимание влияние первого знакомства с вводимым понятием или «силу первого впечатления», отмечая, что прочность усвоения нового математического знания зависит от того, насколько удачно подобран дидактический прием (демонстрация, исследовательская активность) ввода нового материала, иными словами, чем удачнее произошло первое знакомство с понятием, тем естественнее и быстрее учащийся может воспроизвести или применить его при последующем его изучении [31, С.32].

Принимая во внимание факт преобладания учебного материала по степенной функции в качестве основы для изучения других видов функций и содержательно-методических линий школьного курса математики (предметный уровень) и демонстрации функциональной связи многих природных и социально-экономических закономерностей (метапредметный уровень), рассмотрим возможность реализации непрерывной пропедевтической работы в средней школе, в частности, при создании взаимосвязи между отдельными частными видами степенной функции с дальнейшим переносом полученных знаний и умений к степенной функции с действительным и иррациональным показателем и развитию метапредметных компетенций.

Если рассматривать структуру построения информационных блоков по введению и изучению степенной функции в школе, то можно отметить отсутствие соблюдения планомерности, систематичности и непрерывности процесса усвоения знаний и навыков по теме исследования. В частности, учащиеся редко ассоциируют изучаемые ими частные виды степенной функции с ней. Так в их понимании линейная функция, квадратичная, кубическая или функция обратной пропорциональности не имеют ничего общего между собой, в том числе, при рассмотрении свойств, каждое из них выступает отдельно для указанных видов функций.

Если для примера взять свойство монотонности функции, то при обучении теме «Линейная функция» убывание или возрастание функции объясняется учащимся значением углового коэффициента, в связи с этим им сложно увидеть, как взаимосвязь между значением аргумента и значением функции влияет на ее поведение. Однако, интегрирование свойств углового коэффициента с определением 1 позволяет учащимся установить данную связь. При этом понятие возрастания и убывания необходимо вводить при первом знакомстве с функциями в 7-ом классе, полагаясь на визуальный аспект подачи материала, с дальнейшим расширением понятия, упоминая и рассматривая данное свойство при изучении квадратичной, кубической, степенной функции общего вида.

Определение 1. *Функция возрастает, если большему значению аргумента* x *на заданном промежутке соответствует большее значение функции* $f(x)$, *и функция убывает, если на заданном промежутке большему значению аргумента* x *соответствует меньшее значение функции* $f(x)$.

Этот подход позволяет ввести предпонятие монотонности функции на интуитивном уровне с постепенным укрупнением понятийной нагрузки, провести параллель по свойству монотонности между индивидуально заданными видами функций.

В целом пропедевтическая работа в первую очередь направлена на формирование основных понятий и определений некоторых свойств функций через обобщенные представления (предпонятия) на интуитивном уровне, а также создание ассоциативных связей между ними. Основным средством выступают стандартные задания первоначального знакомства с предпонятием с дальнейшим укрупнением дидактических единиц при изучении последующих видов функций [38]. Стандартные задания способны выступать в качестве пропедевтического материала, направленного на сближение как внутри отдельно взятой темы, так между несколькими дисциплинами.

Рассмотрим возможность реализации пропедевтической работы, нацеленной на формирование предпонятий степенной функции, при изучении темы «Квадратичная функция».

В таблице 2 приведен возможный пропедевтический поэтапный переход от умений, подлежащих формированию на этапе изучения квадратичной функции, к умениям, необходимых для изучения степенной функции:

Таблица 2 – Переход от пропедевтического элемента по теме «Квадратичная функция» к пропедевтируемому элементу по теме «Степенная функция»:

Пропедевтический элемент		**Пропедевтируемый элемент**
Определение квадратичной функции	→	Определение степенной функции
Нахождение области определения и области значения квадратичной функции	→	Нахождение области определения и области значения степенной функции
Нахождение значения квадратичной функции при заданном аргументе аналитически, графически, таблично	→	Нахождение значения степенной функции при заданном аргументе аналитически, графически, таблично
Построение и интерпретация графика квадратичной функции, в том числе с учетом геометрических преобразований функции	→	Построение и интерпретация графиков степенной функции с учетом показателя степени. Геометрические преобразования графиков степенной функции
Нахождение точек пересечения графика квадратичной функции с осями координат (нулей функции) графически	→	Нахождение точек пересечения графиков степенной функции с осями координат, определение наибольшего и наименьшего значения функции
Определение интервалов знакопостоянства, возрастания и убывания функции	→	Определение интервалов знакопостоянства, возрастания и убывания степенной функции
Аналитическое, графическое, табличное представление квадратичной функции	→	Аналитическое, графическое, табличное представление степенной функции, в том числе методом геометрических преобразований
Решение задач прикладного характера на применение свойств квадратичной функции	→	Описание моделей реальных процессов с помощью степенной функции, решение задач прикладного характера на применение свойств степенной функции

Следуя вышеуказанному поэтапному переходу от функции к функции, рассмотрим некоторые примеры стандартных заданий с включением элементов визуализации, позволяющими обеспечить преемственность функциональных знаний между квадратичной (КФ) и степенной функцией (СФ), а также создать опорный образ, ведущий к поиску метода решения, развитию знаково-символических действий и навыков моделирования.

Примеры заданий, направленные на формирование умений определять вид функции и распознавать ее аналитическое представление:

Задача КФ 1. Установите какие из приведенных функций являются квадратичными, соединив стрелками с соответствующим понятием*:*

$a)\ y = x^2 + 3$ *Квадратичная*

$b)\ y = 2x + 9$

$c)\ y = x^3 + 2x^2 + 1$ *Не квадратичная*

$d)\ y = \frac{x^2}{5}$

Задача СФ 1. Установите какие из приведенных функций относятся к степенной, соединив стрелками с соответствующим понятием*:*

$a)\ y = 2\sqrt{x}$ *Степенная*

$b)\ y = x$

$c)\ y = 2^x$ *Не степенная*

$d)\ y = \frac{1}{5x^3}$

Задача КФ 2. Без выполнения построений выясните графикам каких функций принадлежат точки (заполните таблицу 3):

Таблица 3 – Таблица к задаче КФ 2:

	$y = 2x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$	$y = -x^2$
A $(5;\ 50)$	✓		
B $(0{,}2; -0.04)$			
C $(-1;\ 0{,}5)$			
D $(-2;\ 8)$			

Задача СФ 2. Без выполнения построений выясните графикам каких функций принадлежат точки (заполните таблицу 4):

Таблица 4 – Таблица к задаче СФ 2:

	$y = x^3$	$y = \frac{1}{2x}$	$y = -x^{\frac{1}{2}}$
A $(5;\ 125)$	✓		
B $(1;\ -1)$			
C $(-2; -0.75)$			
D $(3;\ 27)$			

Решение подобных задач позволяет учащимся использовать ранее полученные знания для классификации новых математических объектов, а также проводить знаково-символическую перекодировку, при этом, опираясь на уже известные им алгоритмы решения.

Дублирование заданий по аналогии позволяет обеспечить пропедевтическое повторение для актуализации функциональных умений, являющимися опорными при введении нового вида функций (пропедевтируемого элемента) [38].

Примеры заданий, направленные на формирование умений представлять функции в табличном виде, строить графики, понимать область определения и область значения функции, определять свойства функции:

Задача КФ 3 [37]**.** Заполните таблицу 5 значений для функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ и постройте график функции на промежутке $[-4;\ 5)$, определите промежутки возрастания и убывания функции. Определите расположение графика относительно оси абсцисс.

Таблица 5 – Таблица к задаче КФ 3:

x	-4		0	1	
y		5.5	1	1.5	3

Задача СФ 3. Заполните таблицу 6 значений для функции $y = 0.1x^5$ и постройте график функции на промежутке $(-2;\ 2]$. Укажите является ли функция возрастающей или убывающей на указанном промежутке. Является ли функция ограниченной снизу/сверху?

Таблица 6 – Таблица к задаче СФ 3:

x	-2		0	1	2
y		-0.1	0	0.1	

Указанные упражнения позволяют ввести пропедевтируемое понятие «ограниченности функции», не рассматриваемое при изучении квадратичной функции. При этом на этапе изучения квадратичной функции целесообразно рассматривать упражнения, целью которых является нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, при этом постановка вопроса может звучать следующим образом [38]:

– обозначьте число, при котором значения функции больше / меньше него;

– укажите координаты точки, определяющей наибольшее или наименьшее значение функции;

– определите, как коэффициент при x^2 влияет на ограниченность функции (сверху/снизу).

На этапе изучения степенной функции проводится укрупнение данного типа заданий с целью расширения представления об ограниченности функции.

Основной пропедевтической целью указанных упражнений является формирование интуитивного осмысления концепции, что, если значения функции выше / ниже некоторого числа, следовательно, функция ограничена снизу / сверху соответственно.

Примеры заданий, направленные на формирование умений читать графики функций, строить графики функций методом геометрических преобразований:

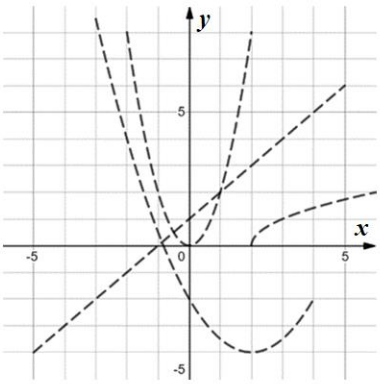
Задача КФ 4. Найдите точки пересечения графиков функций $y = x^2 - 2x - 1$, $y = 2x + 1$ графически.

Задача СФ 4. Найдите точки пересечения графиков функций $y = \frac{1}{3}x^3$, $y = 3x$ графически.

Данный тип заданий направлен на создание ассоциативной связи между аналитическим представлением функции и ее графическим образом, а также как, опираясь на графики функций x^2 и x^3, сформировать умения построения новых функций методом геометрических преобразований и их чтения.

Задача КФ 5. Выделите цветом графики, которые являются графиками квадратичной функции (рисунок 9.а).

Задача СФ 5. Выделите синим цветом графики степенной функции с показателем степени $2k$, зеленым – с показателем степени $\frac{1}{k}$, красным – с показателем степени $2k - 1$ где k – натуральное число (рисунок 9.б).

а) 

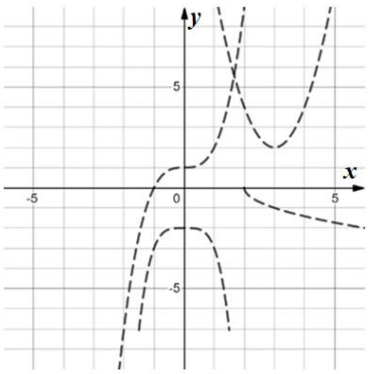
б) 

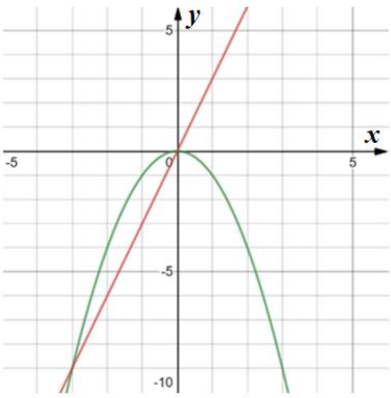
Рисунок 9 – Графики функций к задачам КФ 5 и СФ5

Задача КФ 6. На рисунке 10.а представлена графическая модель системы уравнений. Запишите ее аналитическое представление и ее решение.

Задача СФ 6. На рисунке 10.б представлена графическая модель системы уравнений. Запишите ее аналитическое представление и ее решение.

Задача КФ 7. График функции $y = 3x^2 + 2x + 1$ получен путем преобразования графика функции $y = 3x^2$. Опишите последовательность геометрических преобразований и свойства полученных графиков.

Задача СФ 7. Используя график функции $y = x^3$, постройте график функции $y = x^3 + 3$, $y = (x - 3)^3$.

а) 

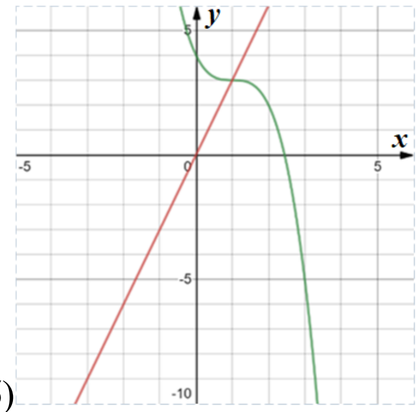
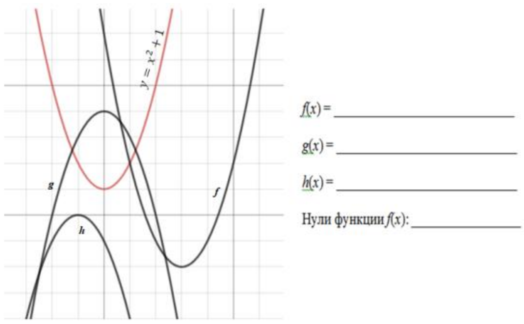
б) 

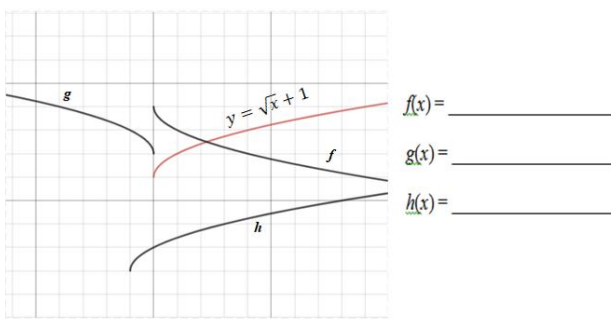
Рисунок 10 – Графическая модель к задачам КФ 6 и СФ 6

Задача КФ 8. «Проведите оси координат так, чтобы выделенный график (рисунок 11.а) был графиком функции $y = x^2 + 1$. Узнайте и запишите формулы для функций f, g и h, заполните пропуски» [73].

Задача СФ 8. График функции, обозначенный красным цветом, является графиком функции $y = \sqrt{x} + 1$. Необходимо провести оси координат так образом, чтобы данное условие соблюдалось (рисунок 11.б). Задайте функции f, g и h аналитически.



а)



б)

Рисунок 11 - К задачам КФ 8 и СФ 8

Вышеуказанные упражнения с элементом наглядности в рамках пропедевтической работы в основной школе и дальнейшее их укрупнение в старших классах направлены на формирование «формозадающего» образа [38, С.48], который подкрепляет восприятие свойств изучаемых видов функций.

Примеры заданий, направленные на формирование умений применять свойства функций:

Задача КФ 9. «Периметр основание лотка для перевозки хлеба составляет 260 см. Каковы должны быть его стороны, чтобы площадь основания была наибольшей?» [53]

Задача СФ 9. «Формула количества кислорода, поглощаемого белым аистом в единицу времени $f(x) = Ax^{\alpha}$, где x – вес животного, А и α - параметры, постоянные для данного класса живых существ. Вычислить зависимость интенсивности основного обмена от веса птицы? Птица – белый аист, вес = 3 кг, $А = 70,\ \alpha = 0{,}74$» [49].

При выполнении практико-ориентированных задач учащимися в процессе осуществления пропедевтической работы обеспечивается сохранение полученной информации в долговременной памяти и формируется навык применения усвоенных умений к решению и моделированию реальных процессов.

Таким образом, при осуществлении пропедевтической работы с применением типовых заданий на уровне изучения квадратичной функции, позволит «наложить» процесс изучения степенной функции на имеющиеся пропедевтические знания школьников, а наглядно-образное сопровождение заданий на этапе формирования функциональных знаний и навыков позволит учащимся в старших классах применять созданный ассоциативный ряд «аналитическое представление понятия $\Leftrightarrow$ геометрическая интерпретация» на уровне автоматизма, что продуктивно скажется на функционально-графической грамотности обучающихся в целом.

2.2 Методическая схема изучения степенной функции

Принимая когнитивно-визуальный подход как один из наиболее эффективных подходов в формировании функционально-графических знаний и умений и с учетом проделанной пропедевтической работы в 7-9-х классах, рассмотрим возможности интегрирования визуализированных задач в методическую схему изучения степенной функции в совокупности с традиционными методами обучения в курсе алгебры и начал математического анализа.

Учитывая, что знания, полученные учащимися в результате изучения степенной функции, выступают в качестве опорного материала для понимания трансцендентных функций в последующих разделах курса, учителю необходимо знать последовательность изучения отдельных функционально-графических понятий и свойств степенной функции и их применения к решению уравнений, неравенств и их систем, а также уметь организовать визуальную учебную среду как сочетание условий, при которых задействуется визуальное мышление, способствующее осмысленности изучаемых концепций.

С целью раскрытия понятия степенной функции мы будем придерживаться методических рекомендаций по формированию математических понятий, сформулированных Г.И. Саранцевым [61]. Любое математическое понятие формируется поэтапно: 1) на начальном этапе осуществляется *мотивация* к его изучению; далее 2) выделяются *существенные признаки*, которые и определяют новое понятие, при этом подразумевается, что учащиеся должны усвоить логическую структуру определения понятия, понимать каждое слово и символ в нем, 3) на этапе *усвоения понятия* необходимо осуществить тщательное изучение существенных свойств путем выполнения упражнений, формирующих навык распознавания данных свойств, а также выявления следствий их них; 4) этап *применения* понятия подразумевает организацию деятельности учащихся на применение изученного понятия к решению задач, отражающих понятие в различных ситуациях, и установлению связи с другими математическими понятиями.

Большинство авторов учебников по алгебре и началам математического анализа придерживается единой поэтапной методики изучения степенной функции, принятой отечественной школой, представленной в виде следующей блок-схемы (рисунок 12):

I этап:	Актуализация опорных знаний
II этап:	Введение определения степенной функции, выделение характерных признаков отличия от других видов функций
III этап:	Построение графиков степенной функции при различных фиксированных показателях, определение свойств, характерных для степенной функции
IV этап:	Применение изученных свойств степенной функции к решению уравнений, неравенств и их систем
V этап:	Закрепление основных понятий и теоретических фактов по степенной функции

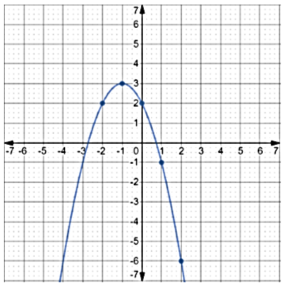
Рисунок 12 – Методическая схема изучения степенной функции
в старших классах

Детальное рассмотрение вышеприведенных этапов дает возможность отразить требования к построению структуры уроков, выделенных на изучение степенной функции, и ожидаемым результатам.

I этап: актуализация опорных знаний для изучения степенной функции общего вида

Основной учебной целью данного этапа является проверка готовности учащихся к усвоению нового материала по теме «Степенная функция». В качестве актуализации знаний и умений, необходимых для изучения формируемого понятия, ученикам можно предложить карточки (интерактивные презентации или на бумажном носителе) с алгоритмическими задачами с явной визуализацией в виде блиц-опроса или командной игры:

Задача 1. На рисунке представлены графики функций. Определите основные свойства данных функций и запишите формулы, задающие их (рисунок 13).



Область определения: ____________________________

Область значения функции:________________________

Промежутки возрастания: __________убывания: __________

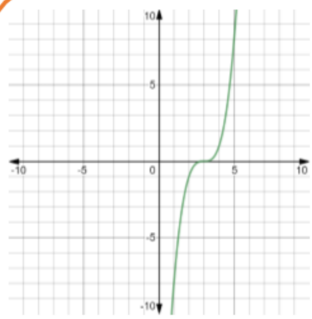
Наибольшее или наименьшее значение функции: __________

Четность функции: _____________________

Название графика функции:________________________

График заданной функции получен преобразованием функции, заданной формулой $f(x)=x^2$

Формула, задающая функцию:___________________________



Область определения: ____________________________

Область значения функции:________________________

Промежутки возрастания: __________убывания: __________

Наибольшее или наименьшее значение функции: __________

Четность функции: _____________________

Название графика функции:________________________

График заданной функции получен параллельного переноса функции, заданной формулой $f(x)=x^3$

Формула, задающая функцию:___________________________

Рисунок 13 – Карточка повторения свойств квадратичной и кубической функции

Репродуктивный характер задачи позволяет диагностировать знания и умения, необходимые для введения определения степенной функции и дальнейшего перехода к исследованию динамики поведения индуктивным методом при натуральном показателе p, где $p \neq 1$.

При повторении пройденного материала необходимо также включить задачи, решаемые аналитическим способом, внеся в задание наглядность в виде классификационных таблиц по принципу «Решите и сопоставьте» (таблица 7).

Задача 2. Распределите нижеприведенные функции по группам:

Таблица 7 – Вариант задания на классификацию вида «Решите и сопоставьте»

$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x}$, $\boldsymbol{f(x) = x^5 - 3x^2}$, $\boldsymbol{f(x) = 7x^2 + 5}$, $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2}$, $\boldsymbol{f(x) = -7x}$, $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 4x^2}$, $\boldsymbol{f(x) = -2x^2}$, $\boldsymbol{f(x) = 5x + 3}$		
Четные	**Нечетные**	**Общего вида**

С целью повышения учебной мотивации целесообразно также рассмотреть задачи продуктивного типа с неявной визуализацией для привязки абстрактных понятий к явлениям реального мира, применения теоретических знаний к моделированию реальных процессов, что одновременно позволяет проверить умение строить графики функций. Рассмотрим визуализированную задачу с неявным графическим образом, для решения которой можно использовать программу динамической математики, например, DESMOS, GeoGebra.

Задача 3. Траекторию мяча, по которому ударили клюшкой, можно смоделировать функцией, заданной формулой $f(x) = 30x - 5x^2$,где x – время, f(x) -–высота мяча от уровня земли.

1) Изобразите схематично график данной функции (*ответ*: рисунок 14).

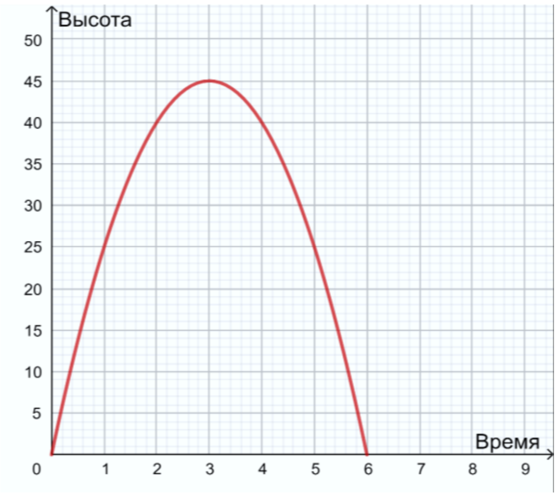


Рисунок 14 - График функции траектории мяча (выполнено в GeoGebra)

2) Какова максимальная высота мяча в полете? (в этой ситуации учащийся должен сопоставить понятие максимального значения с максимальной высотой мяча в полете) (*ответ*: 45).

3) Определите временной промежуток полета мяча? Является ли это областью определения функции или областью значений функции?

При ответе на подобные вопросы учащиеся осознают, что абстрактные математические понятия приобретают практический смысл.

После проведения подготовительной работы по актуализации опорных знаний необходимо перейти непосредственно к введению понятия «степенная функция» и определения характерных для нее отличительных признаков.

II этап: введение определения степенной функции, выделение характерных признаков отличия от других видов функций

В большинстве учебников по алгебре определение степенной функции вводится в 9-ом классе, в старших классах введение определения носит обобщающий характер.

Методика введения определения у разных авторов различна. В учебнике автора Ш.А. Алимова определение вводится сразу как обобщение функций вида $y = x,\ y = x^2,\ y = x^3$ [9, С. 39]. Этот же методический прием можно наблюдать в учебнике [26]. Авторы учебников [43, 46] не приводят общего определения степенной функции, рассматривая ее частные случаи с указанием определений, характеризующих только изучаемые группы степенных функций.

В.Г. Покровский [55] отмечает, что при введении определения степенной функции необходимо обратить внимание школьников на расположение переменной величины в формуле, задающей ее. Это обусловлено тем, что зачастую учащиеся путают степенную и показательную функции.

О.С. Титова [64] отмечает, что при введении понятия степенной функции целесообразно рассмотреть задачи прикладного характера, приводящие к понятию степенной функции, например, уравнение состояния идеального газа $V = \frac{RT}{p}$, где RT – постоянная, вычисление периода колебания математического маятника $T = a\sqrt{L}$.

В конспекте проекта урока-мастерской автора Л.В. Лопатина [32], размещенного на сайте для учителей «Копилка уроков», также акцентируется внимание на применение изучаемого понятия для решения задач из других межпредметных областей науки. Возможная тематика практико-ориентированных задач, приводящих к определению степенной функции показаны в таблице 9.

Рассматриваемый ниже пример включает знания из межпредметных областей науки, таких как геометрия, физика, а также география.

Задача 4. 1. Какова дальность d до линии горизонта для наблюдателя, стоящего на земле при допущении, что Земля имеет форму шара (радиус Земли $R \approx 6371$км) (рисунок 15)? 2. Существуют ли ограничения для области определения полученной функции [35, С. 60]?

Рисунок 15

Решение. Рост (h) стоящего вертикально человека – продолжение земного радиуса, а линия взгляда на горизонт – касательная к сфере (поверхности Земли). Касательная ⊥ R.

⇒ Треугольник центр Земли - точка касания - глаз наблюдателя – прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора: $d \approx \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$. Так как величина h^2 очень мала относительно величины $2Rh$, тогда приближенно $d \approx \sqrt{2Rh}$. Зная, что $R \approx 6371$км ⇒ получим $d \approx 3{,}8h^{\frac{1}{2}}$

2. Ограничения существуют, так как дальность обзора до линии горизонта ограничена ростом человека.

Задача 5. «На рисунке 16 изображен сектор круга, радиус которого равен 1, а центральный угол равен φ, при чем $\varphi \in (0; 2\pi)$. Выразите площадь S этого

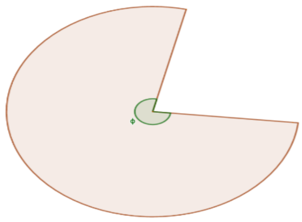


Рисунок 16

сектора как функцию угла φ: $S = S(\varphi)$. Постройте график полученной функции» [40, С. 39].

Задача 6. «Площадь треугольника со стороной a и высотой h, опущенной на эту сторону, равна 20. Выразите длину стороны a, как функцию длины высоты h и найдите область определения и множество значений этой функции» [40, С. 39].

В конспекте уроков по изучаемой теме, размещенного на сайте педагогического сообщества «Открытый урок, 1 сентября», учитель Е.В. Паравян [50] вводит определение степенной функции индуктивным методом, приводящим к формированию определения степенной функции через ее аналитическое задание непосредственно учащимися (таблица 8).

Таблица 8 - Индуктивный метод введения определения степенной функции

Вопрос	**Возможный ответ**
Какие функции были изучены нами ранее?	1) $y = x, y = x^2, y = x^3, y = \frac{1}{x}$; 2) линейная, квадратичная, кубическая, обратная пропорциональность; 3) линия, парабола, гипербола (название графиков, вместо функций).
По какому признаку можно объединить их аналитические формулы?	У всех есть показатель степени
Назовите чему равен показатель степени в каждой из следующих функций? 1) $y = x^2$ 2) $y = x^3$ 3) $y = x$ 4) $y = \frac{1}{x}$ 5) $y = 4$ 6) $y = x^{\frac{3}{4}}$	$1)\ 2;\ 2)\ 3;\ 3)\ 1;\ 4)\ -1;\ 5)\ 0;\ 6)\ \frac{3}{4}$
Как можно задать все эти функции одной аналитической формулой?	$f(x) = x^p$
Что представляет показатель p?	Степень числа
Как можно назвать все эти функции общим термином?	Степенные
Если функция имеет вид $f(x) = x^{\pi}$, можно ли назвать ее степенной?	да
Следовательно, область определения показателя p …	Все действительные числа
Сформулируйте определение степенной функции	Функция вида $f(x) = x^p$, где p-любое действительное число называется степенной функцией.

Таблица 9 – Возможная тематика прикладных задач при введении определения «степенная функция»

Область применения	Примеры применения степенной функции
Геометрия	Площадь квадрата, объем куба / цилиндра; площадь поверхности сферы, объем шара; задачи на оптимизацию
Физика	Период колебания математического маятника; закон Бойля-Мариотта; центростремительное ускорение; потенциальная энергия; равноускоренное движение; состояние идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона); закон Стефана-Больцмана
Экономика	Зависимость объема товара от производства Начисление сложных процентов (вклад с капитализацией)
Электродинамика	Закон Джоуля – Ленца
Физиология	Объем потребления кислорода

Данный подход к определению формируемого понятия позволяет продемонстрировать целесообразность изучения степенной функции для применения в практической деятельности (таблица 9), повысить учебную мотивацию учащихся и дает четкие представления о ее значимости приложения к реальным процессам.

На третьем этапе согласно методической схеме изучения степенной функции основной фокус направлен на построение графиков степенной функции при различных фиксированных показателях, а также вычленения свойств, как схожих с другими функциями, так и характерных только для степенной функции при определенном показателе степени.

III этап: построение графиков, изучение свойств степенной функции при различных фиксированных показателях

На этапе исследования основных свойств отдельных видов степенной функции в старших классах наблюдается строгая иерархичность рассмотрения поведения графика степенной функции в зависимости от ее показателя, схематично представленной ниже (рисунок 17).

При исследовании свойств при фиксированном показателе целесообразно использовать графический метод.

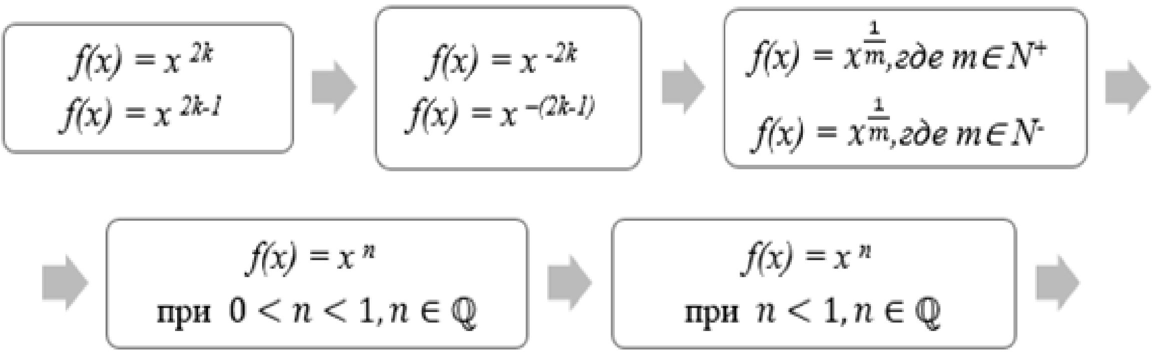
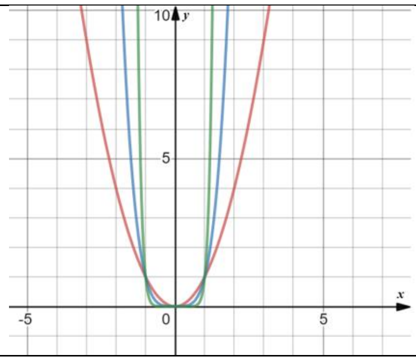
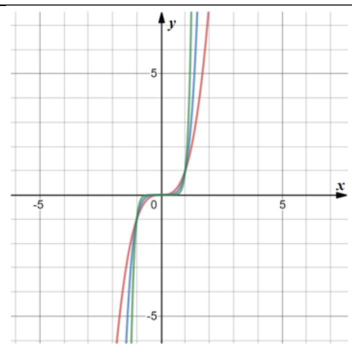


Рисунок 17 – Консеквентность изучения частных случаев степенной функции

Таким образом, следуя схеме, можно рассмотреть свойства степенной функции *при натуральном показателе* методом построения графиков при четном натуральном показателе, моделью для которой является квадратичная функция, и нечетном натуральном показателе, модель – кубическая функция, с дальнейшим определением основных свойств. Можно предложить учащимся после построения графиков (для построения графиков можно воспользоваться программами динамической математики) самостоятельно заполнить нижеприведенную таблицу с последующим обсуждением полученных результатов на примере таблицы 10 [42, С. 72]:

Таблица 10 – Таблица, заполняемая учащимися, по консолидации свойств степенной функции с натуральным показателем

Свойства функции	$\boldsymbol{y = x^n, n} \in \mathbb{N}$	
	$\boldsymbol{n}$ **– четное**	$\boldsymbol{n}$ **– нечетное**
Вид графика функции		
Область определения	$D(y): x \in (-\infty; +\infty)$	$D(y): x \in (-\infty; +\infty)$
Множество значений	$E(y): x \in [0; +\infty)$	$E(y): x \in (-\infty; +\infty)$
Симметрия графика	*Симметричен относительно оси ординат.*	*Симметричен относительно начала координат*

Продолжение Таблицы 10

Свойства функции	$y = x^n, n \in \mathbb{N}$	
	n – **четное**	n – **нечетное**
Возрастание убывание	*Функция убывает на промежутке* $(-\infty; 0]$, *возрастает на промежутке* $[0; +\infty)$, *ограничена снизу.*	*Функция монотонная, возрастает на промежутке* $(-\infty, +\infty)$.
Четность / нечетность	*Функция является четной: так как* $(x)^{2k}$=$(-x)^{2k}$	*Функция является нечетной: так как* $(x)^{2k-1} = -(-x)^{2k-1}$
Расположение графика и особые точки графика	*Расположен в I и II четвертях, проходит через точки* $(0;\ 0), (1;\ 1), (-1;\ 1)$	*Расположен в I и III четвертях, проходит через точки* $(0;\ 0), (1;\ 1), (-1;\ -1)$
Название графика	*Парабола - степени*	

По такому же принципу индуктивным методом вводятся графики и свойства степенной функции при *отрицательном целом показателе*, при этом необходимо отметить запись формулы в виде обратной пропорциональности, как более привычная для восприятия учащимися, тем самым подчеркнув их равносильность.

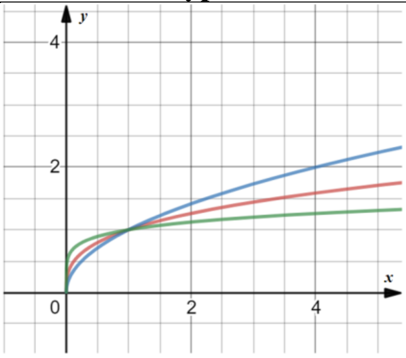
На данном этапе необходимо сформировать четкое понимание различий и сходства поведения графиков и свойств степенной функции при целом показателе.

Далее изучаются свойства *функции корня* n – *степени*. Однако, в школьном курсе алгебры, основываясь на определении степени с дробным показателем, функция рассматривается только при $x \geq 0$.

Через графическое представление функции *корня* n – *степени*, учащиеся под руководством учителя могут сформировать основные ее свойства, которые можно также оформить в виде таблицы (таблица 11).

С введением определения функции корня n-степени вводится также понятие *взаимообратные функции*. В методических пособиях [42, 72] авторами указывается необходимость обратить внимание учащихся на то, что взаимообратными функциями являются только те, у которых *устанавливается взаимно-однозначное соответствие между областью определения и множеством значений* [72].

Таблица 11 – Форма для заполнения учащимися по свойствам функции корня n – степени

Если n – натуральное число	Область определения	$D(y): x \in [0;+\infty)$
	Четность функции	*Не четная, не нечетная*
	Область значений	$E(y): x \in [0;+\infty)$
	Монотонность	*Функция возрастает на луче* $[0;+\infty)$
	Выпуклость / вогнутость	*Выпукла на промежутке* $[0;+\infty)$
	График функции:	*Одна ветвь параболы, ориентированная вправо*

На этапе закрепления понимания взаимно обратных функций можно воспользоваться информационными технологиями для построения графиков с целью наглядной демонстрации симметричности графиков таковых функций относительно прямой $y = x$, а также соблюдения условия монотонности функции (на примере квадратичной функции при естественной области определения (не является обратимой) и при заданной области определения $x \in [0;+\infty)$ (имеет обратную функцию $y = \sqrt{x}$). При изучении данной темы необходимо акцентировать внимание учащихся на том, что степенная функция при показателе $p > 0$, рассматриваемая на промежутке $(0;+\infty)$ монотонна, а значит обратима.

С целью консолидации полученных знаний эффективно построение модели Фрейер, скомбинированной с блок-схемой алгоритма нахождения обратной функции (рисунок 18). Для закрепления приведенного алгоритма учащимся можно предложить решение следующих стандартных заданий:

Задача 7. «Для функции $y = x^2 - 3$, где $x \geq 0$, найдите обратную функцию» [8, С. 37].

Решение. Применив алгоритм, получим: $x = y^2 - 3 \Rightarrow y^2 = x + 3 \Rightarrow y = \sqrt{x+3}$, где $x \geq -3$.

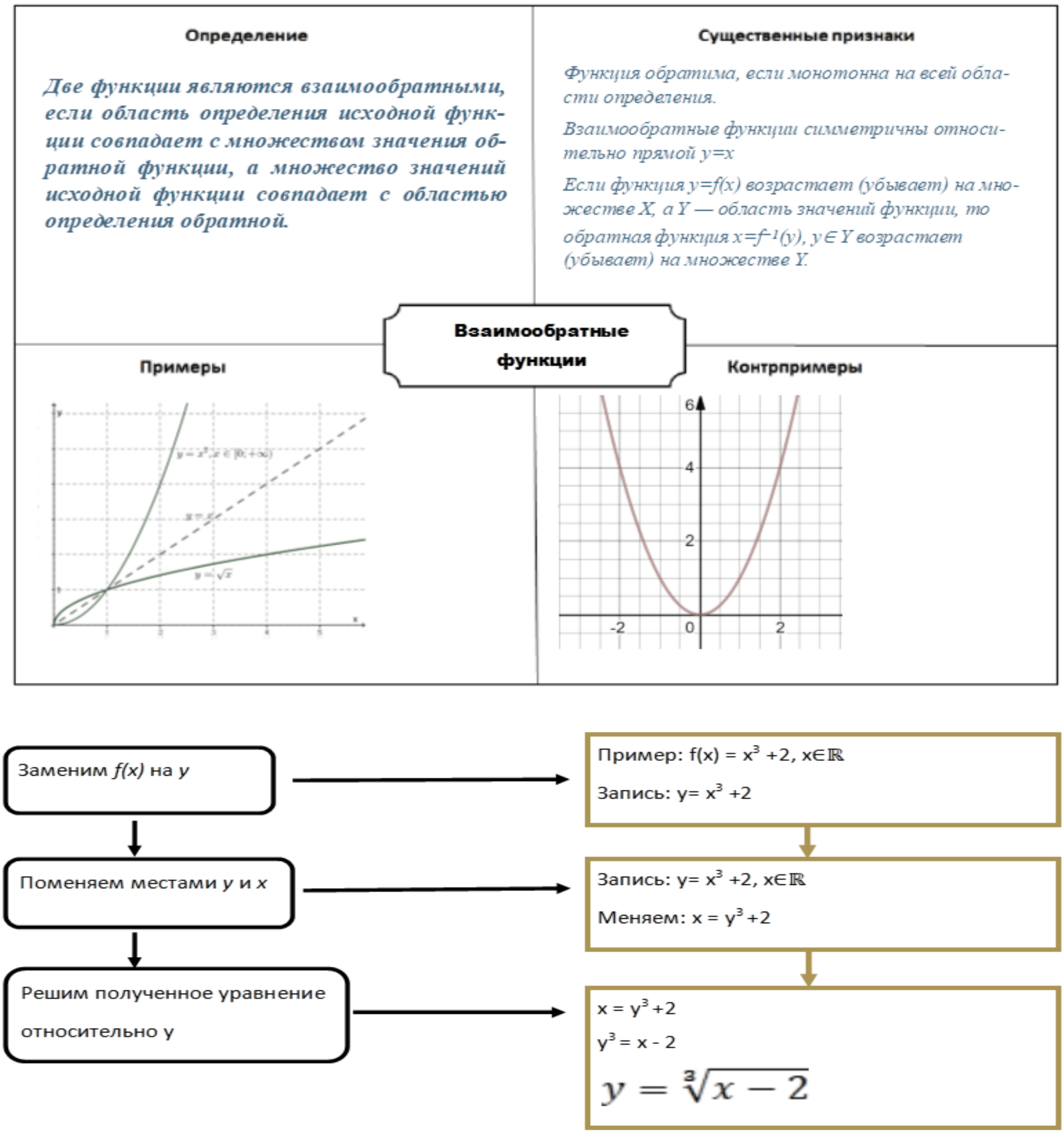


Рисунок 18 - Модель Фрейер «Взаимообратные функции» и фрейм алгоритма нахождения обратной функции

Задача 8. «Даны две взаимно обратные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причем $f(2) = -3, g(1) = -1$. Решите уравнение $f(x) = 1, \quad g(x) = 2$» [8, С. 37].

Решение. В силу взаимно-однозначности соответствия между областью определения и множеством значений получаем, что при $f(x) = 1, x = -1, g(x) = 2, x = -3$.

Далее рассматривается степенная функция *с рациональным дробным показателем*, которая вводится графически при показателе $p = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$. Основной фокус при объяснении свойств данных функций направлен на поведение графиков функций в зависимости от значения показателя: при $p = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}, m \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$, при $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} > 1$, график представляет собой ветвь параболы, направленную вверх, при $0 < \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} < 1$ – ветвь параболы, ориентированная вправо, при $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} < 0$ – одна ветвь гиперболы.

В углубленном курсе алгебры вид степенной функции расширяется до знакомства с функциями, где показатель иррациональное число, при этом область определения задается на промежутке $(0;\ \infty)$.

В качестве закрепления умений по построению графиков и пониманию свойств изученных видов степенной функции можно выделить 2 урока для реализации творческого проекта «DESMOS ART – степенная функция», как один из вариантов демонстрации динамической природы функций, что способствует развитию когнитивных структур личности в процессе учебной исследовательской деятельности учащегося [51].

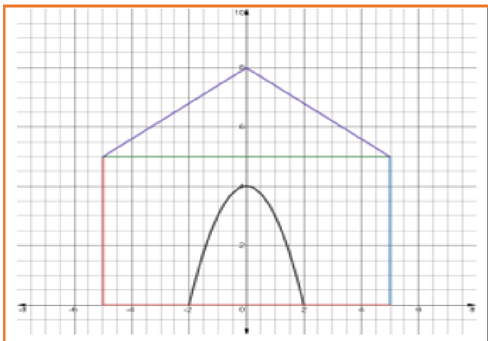
Так как слепое следование отработанным схемам решения приводит к ухудшению так называемого «творческого зрения», неспособности рассматривать поставленные задачи с разных сторон и с учетом психологического желания старшеклассников «*выглядеть знающим и умеющим*» [12], возникает противоречие между желанием разобраться в непонятых темах и боязнью быть признанным «неучем». Нарастание непонимания функциональных понятий и отношений приводит к снижению интереса к изучаемой теме, понижению самооценки, неуверенности в собственных силах и способностях.

Во избежание такого сценария интеграция подобных творческих заданий дивергентного типа согласно классификации В.А. Шелонцева и А.Н.

Ждан [29] повышает мотивацию к учению, тягу к новизне, открытию, формирует навыки самостоятельности, инициативности и креативности.

В данной среде наглядность выступает не только в качестве «стимульного материала, инициирующего активность учащихся» [74, С. 357], но выполняет роль образовательного поля для *накопления собственного математического опыта исследовательского характера*, а также охватывают несколько видов стандартных упражнений, в точности на нахождение и ограничение области определения и множества значений функции, геометрические преобразования функций, графическое отображение обратных функций, понимание основных свойств.

На стадии объяснения принципа работы динамической программы DESMOS целесообразно начать с рисунка, выполненного линейными и квадратичными функциями (рисунок 19). При работе с приложением необходимо ввести инструктаж по построению графиков функций и ограничению их областей определения и множеств значений.



1) На данном рисунке 4 линейных функции, две прямые и одна квадратичная. Найдите формулы, задающие функции и прямые. Укажите область определения и множество значений для функций и промежутки для прямых.

2) Воспользовавшись программой DESMOS, постройте графики полученных вами функций и прямые.

3) При помощи дополнительных 5 линейных функций, 2 квадратичных и 3 прямых внесите новый элемент в рисунок.

Рисунок 19 – Карточка «Амбар», дидактический материал по проекту «DESMOS ART – степенная функция»

По мере выполнения задания учащиеся начинают видеть поведение функций в динамике, как ограничение области определения или множества значений функции, параметрическое значение константы, старшего коэффициента влияет на ее вид, как, отталкиваясь от формул общего вида, задающих функции, получить нужный результат.

Третий вопрос, указанный в карточке «Амбар» (рис. 19), является заданием дивергентного типа [16]. Практика показывает, что при ответе на него, учащиеся демонстрируют повышенную активность и интерес к реализации как своей собственной творческой идеи, так и к работам своих одноклассников. В результате выполнения задания в работах десятиклассников, можно наблюдать такие дополнительные элементы, как антенна, окно со шторами, дверь, дождь, дерево, забор и т.д.

Учащимся, справившимся с заданием, можно предложить более сложный незаконченный рисунок велосипеда, включающий также полуокружности, который необходимо закончить построением графиков необходимых функций (рисунок 20) [82, С. 101].

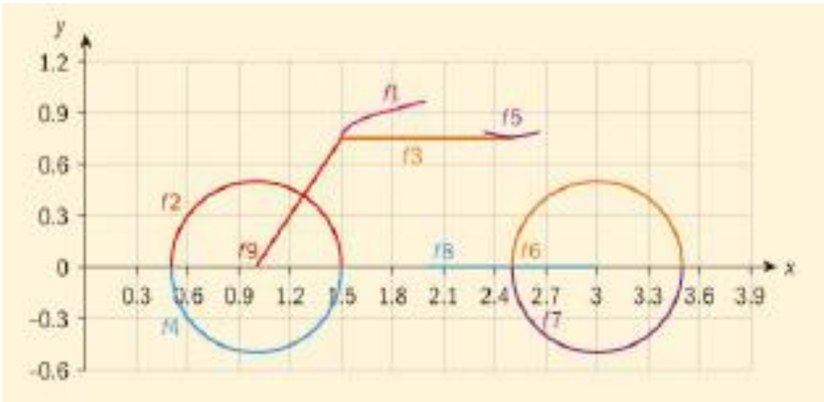


Рисунок 20 – Карточка «Велосипед», дидактический материал по проекту «DESMOS ART – степенная функция»

Так как данный вид задач на моделирование активизирует познавательную деятельность учащихся и повышает творческий интерес, работы старших школьников (рисунок 21) характеризуются уникальностью и, что более важно, высокой степенью усвоения изучаемого функционального материала.

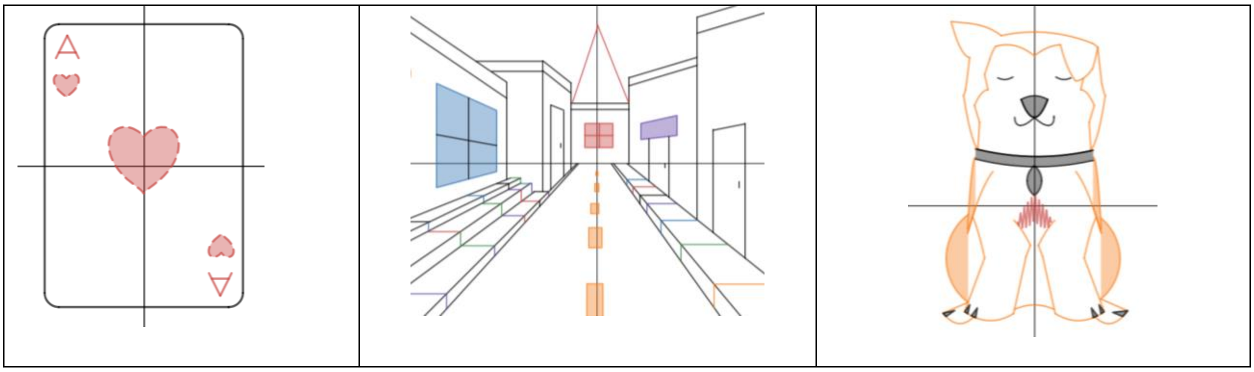


Рисунок 21 - Примеры работ учеников 10 класса школы Haileybury Astana

Так как учащиеся должны уметь также строить графики степенной функции при различных показателях путем геометрических преобразований на данном этапе, необходимо включить задачи, аналогичные нижеприведенной:

Задача 9. «Постройте график функции, укажите ее область определения и множество значений. Выясните, является ли функция возрастающей (убывающей), является ли функция ограниченной, принимает ли она наибольшее (наименьшее) значение: 1) $y = -(x-2)^3 - 1$; 2) $y = (x+3)^4 + 2$» [7, С. 46].

Решение. 1) в основе сложной функции лежит функция $y = x^3$, преобразованная в результате отражения относительно оси OY и параллельного переноса на вектор $\binom{2}{-1}$. Областью определения и областью значения функции является $(-\infty; +\infty)$, следовательно, функция не ограничена и не имеет наибольшего / наименьшего значения функции. Функция является убывающей, так как параметр растяжения равен -1.

2) функция $y = (x+3)^4 + 2$ получена путем преобразования функции вида $y = x^4$ посредством параллельного переноса на вектор $\binom{-3}{2}$. Область определения функции $(-\infty; +\infty)$, так как вершиной параболы 4-ой степени является точка (-3; 2), а ветви параболы направлены вверх, следовательно, данная точка является точкой минимума: область значения $[2; +\infty)$, функция

ограничена снизу, убывает на промежутке $(-\infty; -3)$, возрастает на промежутке $(-3; +\infty)$.

Далее осуществляется переход к применению приобретенных знаний и умений по свойствам степенной функции, построению и чтению ее графиков учащимися к решению уравнений, неравенств и их систем.

IV этап: применение изученных свойств степенной функции к решению уравнений, неравенств и их систем

ФГОС РФ в курсе алгебры и начал математического анализа предусматривает изучение стандартных приемов решения рациональных и иррациональных степенных уравнений и неравенств, их систем, в том числе посредством использования готовых компьютерных программ для решения графическим способом, а также иллюстрации решений [71].

В 10-ом классе на ряду с введением понятия иррациональных уравнений и неравенств, вводится понятие их равносильности. На данной этапе необходимо отметить, что при решении иррациональных уравнений, основной задачей является приведение исходного уравнения или неравенства к равносильному, не содержащему знака радикала.

Методика изучения стандартных приемов для решения рациональных и иррациональных степенных уравнений предполагает применение основных свойств степенной функции таких как, *область определения, область значений функции, монотонность, ограниченность, четность и нечетность*.

Свойство 1: *ограничение области определения и множества значений функции.*

При решении иррациональных уравнений, учащиеся должны понимать, что область определения функции и область значения функции имеют ограничения, а именно, подкоренное выражение согласно определению степени с дробным показателем должно быть ≥ 0. Таким образом, данное свойство влияет на область допустимых значений (ОДЗ) при формировании равносильных уравнений или неравенств и их систем. Такие уравнения эффективно решать с определения области допустимых значений, во избежание появления посторонних корней в результате упущения проверочного этапа учащимися, что происходит довольно часто в учебной практике. Рассмотрим на примере задач №10 и №11.

Задача 10. $\sqrt{2x-5} = \sqrt{4x-7}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 4x-7 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq 5 \\ 4x \geq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2.5 \\ x \geq 1.75 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2.5$

Возводим обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от знака радикала: получим, что $x = 1$, данное значение аргумента не входит в ОДЗ, следовательно, данное уравнение не имеет решения.

Ответ: решения нет.

Для подтверждения полученного результата и понимания геометрического значения указанного равенства, целесообразно продемонстрировать графический образ решения уравнения (рисунок 22).

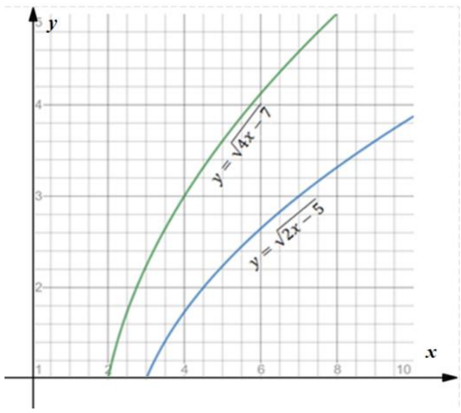


Рисунок 22

Задача 11. $\sqrt{x-13} - \sqrt{10-x} = 2$ [76, С. 5].

Решение. D(y): $\begin{cases} x-13 \geq 0 \\ 10-x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 13 \\ x \leq 10 \end{cases}; \Rightarrow D(y) \circeq \emptyset$

Ответ: решения нет.

Задача 12. $\sqrt{3-x} = x-3$ [76, С. 6].

Решение. D(y): $3 - x \geq 0 \ \Rightarrow x \leq 3; D(y) = (-\infty; 3]$.

Так как при решении необходимо рассматривать арифметический корень, то получим систему уравнений:

$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}; \ x = 3.$

Ответ: 3

Свойство 2*: монотонность функции.*

Рассмотрим решение уравнения, базирующегося на следующей теореме: «*уравнение* $f(x) = 0$, *где* $f(x)$ *— строго возрастающая или строго* *убывающая на некотором множестве функция, не может иметь на этом множестве более одного решения»* [59, С. 10].

Задача 13. $\sqrt{x} = 2 - x$

Решение. При аналитическом решении уравнения функция $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$ является строго возрастающей, следовательно, данное уравнение имеет один корень. Методом подбора очевидно, что $x = 1$. Таким образом, если учащиеся понимают причины отсутствия других корней, они могут записать ответ.

Ответ: 1

Второй способ решения вышеуказанного уравнения можно осуществить графически, что будет свидетельствовать о способности учащихся автоматически представить поведение функций и при дальнейшем построении графиков линейной функции и функции квадратного корня легко определить ответ.

Задача 14. $32(x - 2)^5 + (x + 1)^3 = 96$ [33, С. 77].

Решение. Принимая во внимание, что степенная функция вида $y = x^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$, является строго возрастающей функцией $\Rightarrow$ сумма данных функций в левой части является строго возрастающей, в правой части имеем $g(x) = 96$ – тождественную постоянную. Следовательно, уравнением имеет одно решение. Методом подбора определяем, что $x = 3$.

Ответ: 3.

Свойство 3: *четность функции.*

Свойство симметричности четной функции относительно оси ординат можно применить для ответа на следующий вопрос:

Задача 15. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $ax^8 - 5x^6 + 4x^4 - x^2 = 8$ иметь ровно пять корней? [43]

Решение. В левой части уравнения функция является четной, следовательно, если x_0 является корнем уравнения, значит и $-x_0$ – корень уравнения. Так как $x = 0$ не является решением данного уравнения, количество его корней четно.

Ответ: не может.

Несмотря на отсутствие явного визуального образа как в содержании, так и в решении задачи, данная задача все же включает неявный образ симметричности графика функции относительно оси ординат.

Таким образом, четкое понимание свойств степенной функции, а также представление ее графиков при различных фиксированных показателях, позволяет сформировать необходимый костяк знаний и навыков для применения к другим функциям и решению уравнений, неравенств и их систем.

На ***V этапе,*** направленного на закрепление изученного материала и проведения контрольно-проверочных мероприятий, можно воспользоваться разработанной системой упражнений, представленной в следующем параграфе, а также в Приложении А.

2.3 Система упражнений по теме «Степенная функция» для базового и профильного уровней

С учетом представленной методической схемы обучения теме «Степенная функция», а также требований к системе заданий, направленной на усвоение новых математических понятий, согласно Е.И. Лященко, в разрабатываемую систему упражнений должны быть включены задачи:

1) отображающие практическую значимость нового понятия;

2) на актуализацию опорных знаний и умений;

3) на выделение существенных признаков понятия;

4) на распознавание формируемого понятия;

5) на усвоение текста определения понятия;

6) на использование символики, связанной с понятием;

7) на установление свойств понятия;

8) на применение понятия» [34, С. 69].

Таким образом, с целью соблюдения вышеуказанных требований и дифференцирования по уровню сложности на базовый и профильный уровни был реализован подбор задач для системы упражнений по теме исследования с включением задач, характеризуемых наглядным элементом непосредственно в условии задачи или в ее решении, а также задач прикладной направленности, решение которых формирует метапредметные компетенции.

Приведенная система упражнений ориентирована на применение в качестве вспомогательной к основному задачному материалу, представленному в выбранном УМК, аккредитованному на территории РФ, как в урочное время, так и на элективных курсах.

Подробное решение к задачам приведено в Приложении А.

Система задач по теме «Степенная функция» для базового уровня

Задача Б.1. Количество теплоты, выделяемое в проводке в единицу времени при токе I=0,5А, равняется $Q = 10$Дж. Построить график зависимости $Q = f(I),$ с учетом закона Джоуля-Ленца $Q = RtI^2,$ и найти выделяемое в проводнике в единицу времени количество теплоты при токах $0{,}25;\ 0{,}4;\ 1$ А [66] .

Задача Б.2. Экран телевизора представлен в соотношении сторон 4:3; другими словами, ширина экрана $\frac{4}{3}$ его высоты. Размер телевизора обычно классифицируется длиною диагонали его экрана, заданной в дюймах. Постройте график функциональной зависимости длины диагонали экрана от площади экрана. Какова диагональ экрана при площади равной 180 квадратных дюймов [77]?

Задача Б.3. Дан провод, сечением S которого является площадь круга. Задайте сечение S как функцию длины диаметра d. Постройте график полученной функции.

Задача Б.4. Сопоставьте аналитическую форму нижеприведенных функций с их графиками (рисунок 23) [79].

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^{-5}$ $\qquad g(x) = 2x^{\frac{1}{4}}$ $\qquad h(x) = \frac{2}{3}x^{4}$.

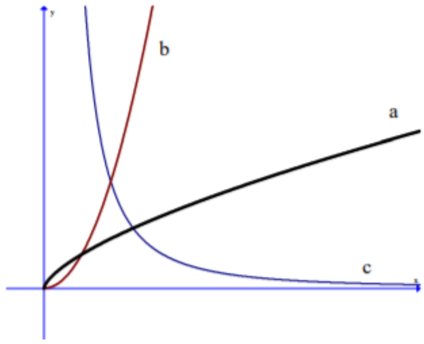


Рисунок 23 – Рисунок к задаче № Б.4

Задача Б.5. Найдите область определения и область значения функций, графики которых приведены на рисунке 24 [79].

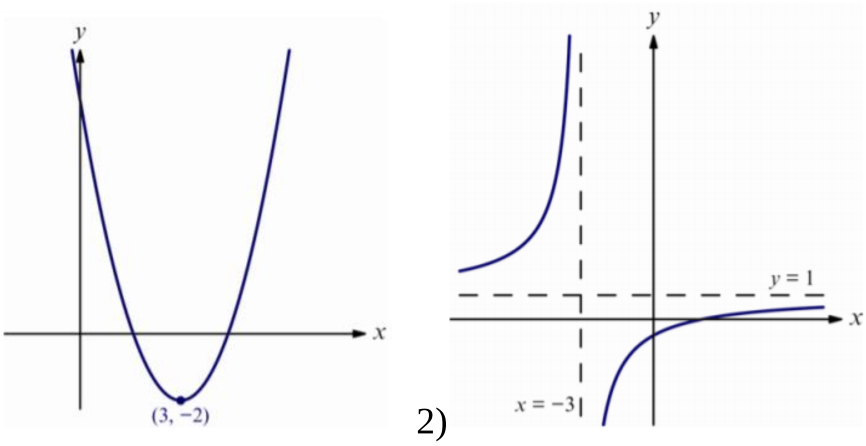
1) 

Рисунок 24 – Рисунок к задаче № Б.5

Задача Б.6. На рисунке 25 показан график функции $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ на промежутке $[1;\ 2]$. Дорисуйте график данной функции на промежутке $[-2;\ 1)$.

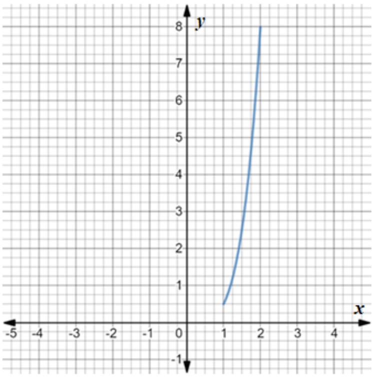


Рисунок 25 – График функции к задаче № Б.6

Задача Б.7. Дан график функции $f(x) = 2x^6 + 1$, где $x \geq 0$ (рисунок 26). Постройте график функции обратной данной.

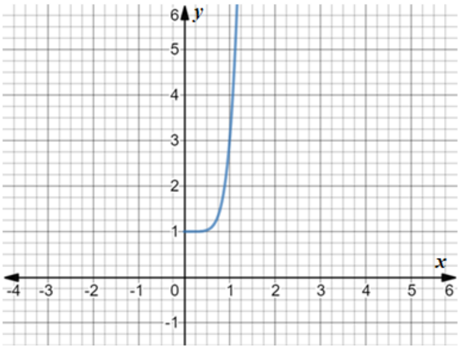


Рисунок 26 – График функции к задаче № Б.7

Задача Б.8. Даны функции $f(x) = 2x^2 - 10$ and $g(x) = x + 2$, решите уравнение графически $fg(x) \ = \ 8$.

Задача Б.9. На рисунке 27 изображена часть графика функции с областью определения [-3; 3]. Постройте график функции, если известно, что она а) чётная б) нечётная.

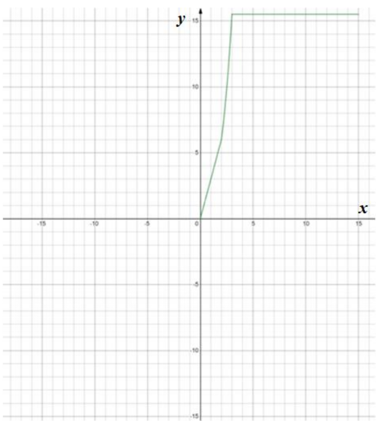


Рисунок 27 – рисунок к задаче № Б.9

Задача Б.10. Дана функция $f(x) = x^9$. Укажите координатные четверти, в которых расположен график данной функции.

Задача Б.11. Установите является ли функция $f(x) = x^p$ возрастающей / убывающей, если 1) $p = 7$, 2) $p = 4$, 3) $p = -3$.

Задача Б.12. Дана функция $f(x) = (x-4)^3 + 1$. Чему равно значение функции при $f(2), f(3), f(0)$.

Задача Б.13. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^3, \text{если } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2, \text{если } -2 \leq x < 0 \\ x+6, \text{если } -4 \leq x < -2 \end{cases}$$

Задача Б.14. «Найдите функцию обратную данной:

1) $y = x^{\frac{1}{2}}$ 2) $y = x^{\frac{3}{5}}$ 3) $y = -x^{\frac{1}{3}}$

Задача Б.15. «С помощью графика выясните сколько корней имеет уравнение 1) $\sqrt{x-6} = -x^2$; 2) $x^3 - 1 = \sqrt{x+1}$» [9, С. 63]

Задача Б.16. Решите неравенство $\sqrt{x} < 2 - x$ [59, С. 19].

Задача Б.17. График функции $f(x) = (x-3)^4 + 1$ получен путем преобразования графика функции $f(x) = x^4$. Опишите данные преобразования.

Задача Б.18. «Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (Н), масса автомобиля m (кг), время t (с) и пройденный путь S (м) связаны соотношением $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2000 Н, масса автомобиля — 1500 кг, путь — 600 м» [62].

Задача Б.19. «Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 32 километра? Ответ выразите в километрах» [62].

Система задач по теме «Степенная функция»

для профильного уровня

Задача П.1. «Из квадрата со стороной 10 см вырезаны квадратики со стороной x см, и из полученной фигуры сделана открытая коробка. Выразите объем V (см^3) этой коробки через x. Укажите область определения функции $y = V(x)$» [43, С. 14].

Задача П.2. «В прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вписан прямоугольник. Обозначив буквой x (см) длину его стороны, параллельной меньшему катету, выразите периметр Р (см) прямоугольника. Укажите область определения и область значений функции $y = P(x)$» [43, С. 14].

Задача П.3. Найдите область определения и область значения функции, график которой представлен на рисунке 28 [79].

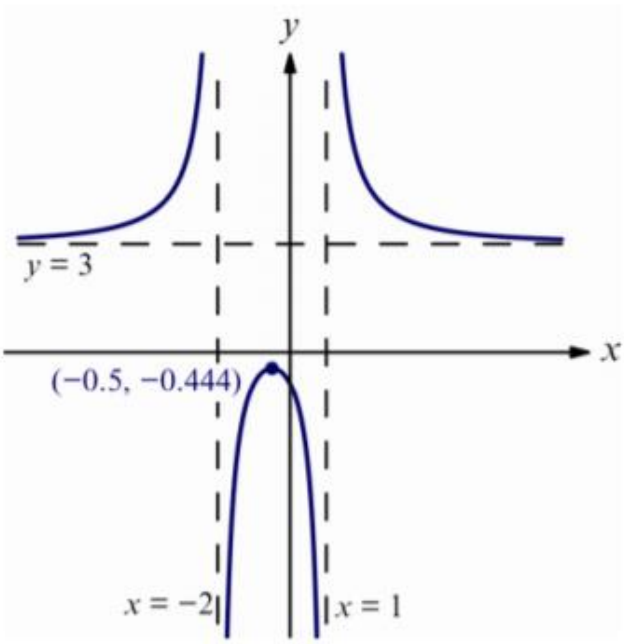


Рисунок 28 – Рисунок к задаче № П.3

Задача П.4. На координатной плоскости показан график функции $g(f(x))$ (рисунок 29), где $g(x) = ax^3$, $f(x)$ – линейная функция:

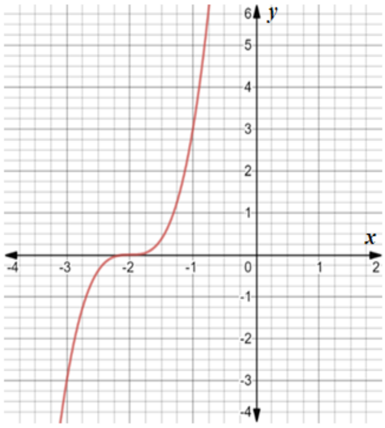


Рисунок 29 – График функции $g(f(x))$ к задаче № П.4

1) найдите значение a;   задайте формулой функцию $f(x)$;

2) дополнив построение, решите уравнение $g(f(x)) = -2x + 1$.

Задача П.5. На рисунке 30 показан многогранник объемом V, полученный путем удаления куба малого объема с длиной ребра $\frac{1}{a}$, из куба большего объема с длиной ребра a, при этом $a > 0$.

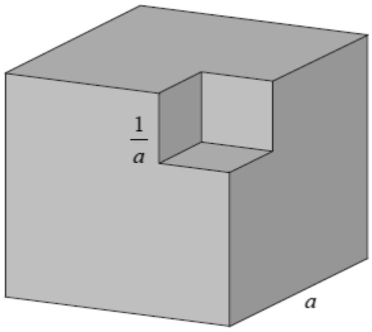


Рисунок 30

Допустим, что $x = a - \frac{1}{a}$. Выразите объем многогранника как функцию через переменную x. [79]

Задача П.6. Галилео установил, что период колебаний математического маятника пропорционален квадратному корню его длины $T = a\sqrt{L}$. Коэффициент пропорциональности a зависит от ускорения свободного падения $a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$. На поверхности Земли на уровне моря ускорение свободного падения приблизительно равно $g = 9.81 \,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Постройте график зависимости периода колебаний от длины маятника в часах, расположенных в доме на поверхности Земли на уровне моря. Какой должна быть длина маятника, чтобы период колебаний был равен 1 секунде? [77]

Задача П.7. Найти $E(y)$ функции $y = -\sqrt{-3x^2 + 12x - 3}$ [63].

Задача П.8. Решите неравенство $x^2 - 2x + 3 < \sqrt{4 - x^2}$? [63]

Задача П.9. Прямоугольник, одна из сторон которого равна x, вписан в круг радиусом R (рисунок 31). Выразите площадь прямоугольника как функцию от x. Найдите область определения этой функции [14].

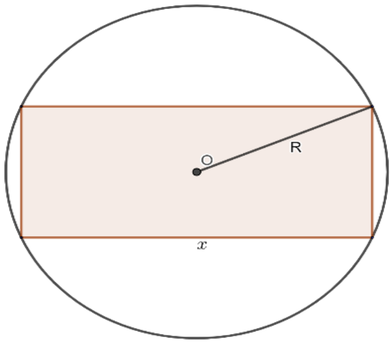


Рисунок 31

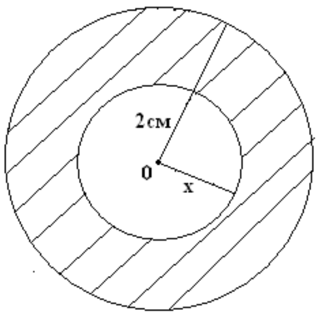


Рисунок 32

Задача П.10. На рисунке 32 изображено кольцо, радиус внешнего круга которого равен 2 см. Выполните задания: 1. Запишите формулу, выражающую зависимость площади a кольца от радиуса внутреннего круга x. 2. Постройте график зависимости a от x. 3. Какова область определения рассматриваемой функции? 4. Опишите, как меняется площадь a кольца с изменением x от 0 до 2; от 0 до 1; от 1 до 2 [14].

Задача П.11. «По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R=r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)» [62].

Задача П.12. При каких значениях a уравнение $-\sqrt{16-x^2} = a + x$ имеет одно единственное решение?

Задача П.13. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt[4]{x+3}$

Задача П.14. «На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A = \alpha\rho g r^3$, где $\alpha = 4.2$ — постоянная, r — радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а $g = 10\ H/\text{кг}$ — ускорение свободного падения. Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 2 491 398 Н? Ответ выразите в метрах» [62].

Задача П.15. «Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускорено наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 45°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 6°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 4050°. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах» [62].

В данной подборке по теме «Степенная функция» для базового уровня, представлены задачи на аналитическое задание степенной функции, на понимание формируемого понятия, на нахождение области определения и множества значений функции, на построение графика функции, включая методом простейших преобразований, на понимание функциональной символики, на применение свойств степенной функции к решению уравнений, неравенств и практико-ориентированных задач.

При решении указанных выше задач обучающиеся осуществляют визуальный анализ, при котором график, формула, рисунок или само содержание задачи выступает в качестве подсказки.

Основной целью учителя при развитии визуального мышления является научить видеть эти подсказки, извлекать их и применять к решению задач.

2.4 Результаты педагогического эксперимента

Целью опытно-экспериментального исследования констатирующего этапа является определение отношения учителей математики к эффективности применения наглядного материала к изучению функциональной содержательно-методической линии школьного курса математики, диагностирование уровня знаний учащихся 10-х классов по функциональным понятиям, изученным в основной школе, а также определение влияния визуализированных задач на результативность усвоения нового материала по теме «Степенная функция» и отношение учащихся к задачам продуктивного типа.

Педагогический эксперимент проводился на базе Международной школы «Haileybury Astana», г. Нур-Султан, Казахстан. В эксперименте приняли участие 40 учеников группы Y12 AA SL, Y12 AA HL возрастной категории 16-17 лет, что соответствует 10-му классу общеобразовательной школы, в I четверти 2020-2021 учебного года.

С целью определения отношения учителей математики к применению визуальных дидактических средств, в том числе интерактивных программ и апплетов, проводилось анкетирование посредством Google Forms, что позволило получить ответы в условиях дистанционного образования, запущенного в связи с коронавирусной пандемией. В анкетировании участвовало 15 человек из 7 общеобразовательных учреждений города Нур-Султан (анкетный лист приведен в Приложении Б). Стаж принявших участие в анкетировании учителей старшей школы варьируется от 2 до 30 лет. Все учителя в своей работе используют учебник «Алгебра и начала анализа» автора А.Е. Абылкасымовой [3, 4], а также образовательные платформы «Bilimland» и «Online Mektep».

Анализ результатов опроса показал:

– 80% (12) опрошенных согласны с тем, что применение визуальных дидактических средств положительно влияет на качество и скорость усвоения математических концепций, утверждений и фактов;

– процент удовлетворенных наглядностью учебных пособий, учебно-методических комплексов составил всего 13,3% (2);

– ранжирование применяемых видов задач согласно ответам респондентов, представленным на диаграмме (рисунок 33), демонстрирует, что все учителя в большей мере используют стандартные алгоритмические задачи, в то время как применение заданий, требующих творческой или исследовательской деятельности учащегося, задействованы в учебном процессе в среднем на 30%;

Рисунок 33 – Ранжирование типов задач по частоте их применения в учебном процессе

– все респонденты сообщили, что используют презентации Power Point (100%). Однако при этом необходимо учесть фактор проведения обучения в дистанционном режиме. Только 2 из 15 человек используют приложения динамической математики на занятиях. Облачные технологии используют 70% опрошенных, такой же процент приходится на готовые ресурсы образовательных платформ. Никто из учителей не ведет свой блог по математике в помощь учащимся.

В рамках диагностирования уровня усвоения функционального материала, изученного в 7-9-х классах, было проведена самостоятельная работа в одном варианте, в связи с проведением в режиме онлайн, отражающая минимальный объем базовых знаний, необходимых для дальнейшего изучения функциональной линии, в том числе степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа. Задачи самостоятельной работы были сформированы с учетом включения визуализированных задач и заданий, решаемых аналитическим методом, в том числе включена практико-ориентированная задача средней сложности с целью определения умения учащихся применять полученные функционально-графические знания. Приведенные в работе задания были направлены на контроль качества усвоения следующих понятий:

– понимание функциональной символики;
– нахождение области определения и области значения функции, в том числе при моделировании реальных процессов;
– нахождение наименьшего и наибольшего значения функции;
– построение и чтение графика функции;
– применение графика функции к решению уравнений, неравенств и их систем;
– решение уравнений, неравенств, и их систем аналитическим способом;
– преобразование графиков функции;
– определение четности и нечетности функции.

Время, выделенное на выполнение работы, составило 35 минут; общее количество баллов – 30.

Самостоятельная работа для учащихся 10-х классов

Задание 1. Найдите область определения и область значения функций, графики которых представлены ниже (рисунок 34):

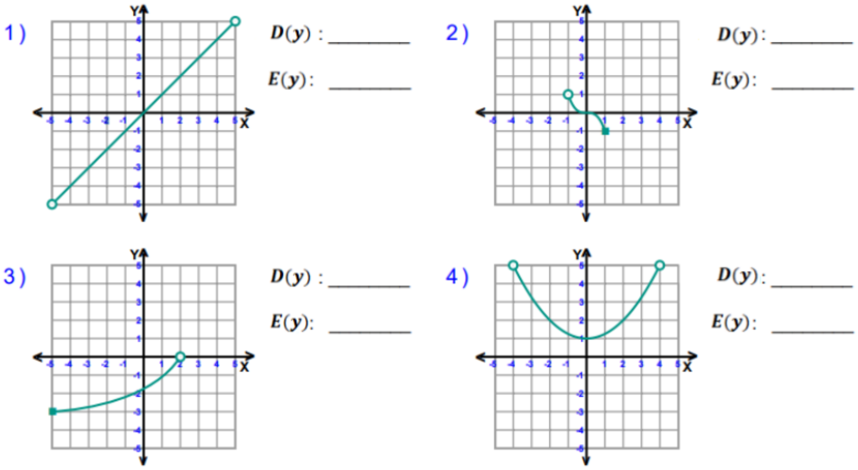


Рисунок 34 – Графики функций к заданию №1

Решение. 1) $D(y) = (-5; 5), E(y) = (-5; 5)$; 2) $D(y) = (-1; 1], E(y) = [-1; 1)$; 3) $D(y) = [-5; 2), E(y) = [-3; 0)$; 4) $D(y) = (-4; 4), E(y) = [1; 5)$

За данное задание предусматривалось 8 баллов – 1 балл за каждый верный ответ.

Задание 2. Найдите а) область определения функции $f(x) = \frac{15}{x-6}$ (1 балл), б) найдите $f(3)$ (1 балл), в) найдите $f(1+5x)$ (1 балл).

Решение. а) учитывая, что знаменатель дробно-рациональной функции не равен нулю, следовательно, $D(f) = (-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$;

б) подставим значение аргумента $x = 3$ в функцию $\Rightarrow f(3) = \frac{15}{3-6} = -5$;

в) $f(1+5x) = \frac{15}{1+5x-6} = \frac{15}{5(x-1)} = \frac{3}{x-1}$.

Задание 3. Даны функции $f(x) = 2^x$ и $h(x) = 14 - x^2$

а) Заполните таблицу 12 значений для функции $f(x)$ (1 балл):

Таблица 12 – Таблица к заданию №3 (а)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					16

б) Заполните таблицу 13 для функции $h(x)$ (1 балл):

Таблица 13 – Таблица к заданию №3 (б)

x	0	1	2	3	4
$h(x)$			10		

в) На координатной плоскости ниже (рисунок 35) постройте графики заданных функций на промежутке $0 \leq x \leq 4$ (2 балла).

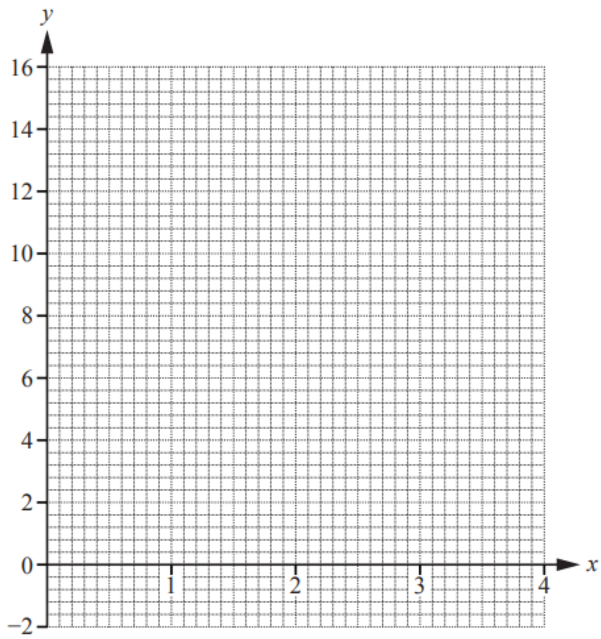


Рисунок 35 – Координатная плоскость к заданию №3 (в)

г) Функция $h(x) = 14 - x^2$_________________ на заданном промежутке, функция $f(x) = 2^x$ ________________ на заданном промежутке (2 балла).

д) Используя результат построения, найдите решение уравнения $14 - x^2 = 2^x$, ответ округлите до десятых: x ≈______, y ≈_______ (2 балла).

Решение. а) $1, 2, 4, 8$;

б) $14, 13, \dots, 5, -2$;

в) рисунок 36;

г) Функция $h(x) = 14 - x^2$ убывает на промежутке [0; 4], функция $f(x) = 2^x$ возрастает на промежутке [0; 4]; д) $x \approx 2.7(21), y \approx 6.5(95)$, согласно условию допустимо значение, округленное до десятых.

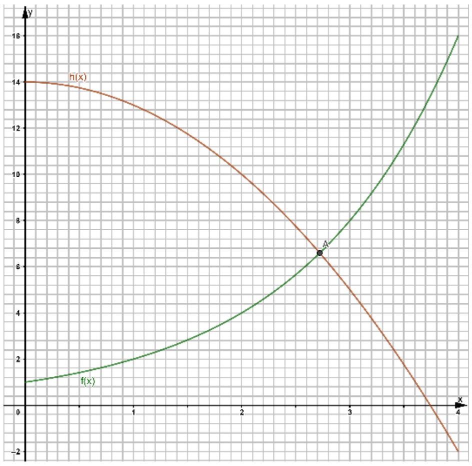


Рисунок 36 – Построение графиков функции к заданию №3 (в)

Несмотря на то, что показательная функция не изучается в основной школе, в данном задании проверяется понимание зависимости значения функции от аргумента функции, а также умение строить графики функции по точкам на основе ее табличного задания.

Задание 4. Четные функции подчеркните, нечетные функции обведите в круг (4 балла):

а) $3x^6 - 3x^2$+7 $\quad y = x^3 + x \quad y = x^2 + x$

$$y = \frac{x^6 + 8}{x^2} \qquad y = \frac{3}{x}$$

б) Какая функция из вышеперечисленных является функцией общего вида (1 балл)?

Решение. а) четные функции $3x^6 - 3x^2 + 7$ и $y = \frac{x^6+8}{x^2}$; нечетные - $y = x^3 + x$, $y = \frac{3}{x}$; б) $y = x^2 + x$.

Задание 5. Прямоугольник общей площадью 24 см^2 можно начертить несколькими способами. Длины сторон прямоугольника варьируются от 1 до 24 см:

а) напишите формулу, задающую данную функцию и укажите область определения функции (2 балла);

б) постройте график функциональной зависимости длин сторон прямоугольника (1 балл).

Решение. Возьмем ширину прямоугольника за x, длину – y, тогда $xy = 24$, следовательно, $y = \frac{24}{x}$, область определения $1 \leq x \leq 24$; исходя из ответа а) графиком функции является одна ветвь гиперболы (рисунок 37):

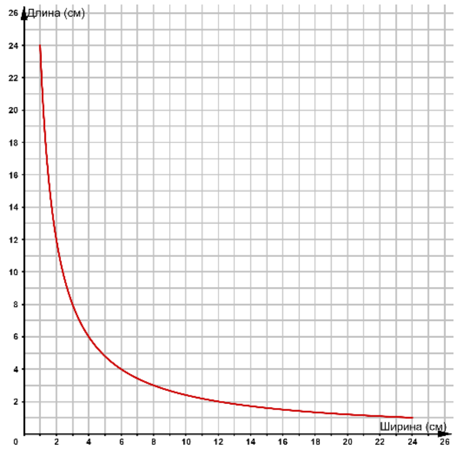


Рисунок 37 – График функции к задаче №5 (б)

Задание 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$.

Решение. Выразим x через y во втором уравнении, получим $x = 2y - 1$, тогда $\frac{1}{2y-1} + \frac{1}{y} - 2 = 0$, приводим к общему знаменателю $\frac{4y^2-5y+1}{y(2y-1)} = 0$. ОДЗ: $y \neq 0, \frac{1}{2}$. Найдем корни квадратного уравнения $4y^2 - 5y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{4}$. Найдем значения $x: x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$. Ответ: $(1;\ 1)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$.

В таблице 14 представлены результаты учащихся по решению самостоятельной работы.

Как видно ниже из таблицы 14, наибольшие затруднения вызывают практико-ориентированные задачи, с заданием №5 справилось только 15% опрошенных, что указывает на неспособность учащихся применять полученные умения и навыки к решению заданий прикладного характера. Сложными в решении для учащихся также оказались задачи №1 и №3, в которых явно или неявно заданы графики. С указанными заданиями справилось только 20% опрошенных, что свидетельствует о том, что большинство учащихся имеют неверные графические представления (отсутствует навык грамотного перевода графической информации в аналитическую или словесную).

Таблица 14 – Результаты самостоятельной работы в разрезе заданий

№ задания \ % верности выполнения задания (p)	$85 < p \leq 100$	$60 < p \leq 85$	$40 < p \leq 60$	$20 < p \leq 40$	$0 < p \leq 20$
1 - нахождение области определения и области значения функции графически	20%	30%	37,5%	5%	7,5%
2 – нахождение области определения функции аналитически, нахождение значения функции по значению аргумента, сложные функции	35%	37.5%	20%	7,5%	0
3 – построение графика функции, решение уравнения графически	20%	10%	32,5%	32,5%	5%
4 – определение четности / нечетности функции	55%	30%	10%	2,5%	2,5%
5 – практико-ориентированная задача на применение умений по теме «Функция обратной пропорциональности»	Только 6 учащихся справилось с заданием, остальные не преступили к выполнению				
6 – решение системы уравнений	25%	27,5%	30%	5%	12,5%

С заданием №2 на аналитическое нахождение области определения дробно-рациональной функции, значения функции при заданном аргументе справилось 72,5%. Задание №6 вызвало затруднения у 47,5%, из них 12,5% не преступили к его выполнению.

Основываясь на анализе результатов проведенного педагогического эксперимента констатирующего этапа, можно сделать следующие выводы: 1) несмотря на понимание учителями математики факта эффективности применения визуальных дидактических средств при изучении функциональной линии и неудовлетворенность наглядностью используемых учебных пособий и комплексов, большинство учителей имеют нечеткие представления о методике интеграции визуализированных (в том числе творческих) задач в процесс обучения; 2) анализ ответов по самостоятельной работе показывает, что верное применение учащимися алгоритмов решения задач по функциональному материалу, заданных аналитически, не является фактом понимания динамической сути понятия «функция» и ее свойств, а также указывает на отсутствие ассоциативного ряда «графический образ ⇔ аналитическое представление», что ведет к неспособности обучающихся применять полученные функционально-графические умения и навыки к моделированию реальных процессов.

В рамках поискового этапа эксперимента в первой половине 2020- 2021 учебного года на базе МШ «Haileybury Astana» города Нур-Султан, Казахстан, в старших звеньях KS4 и KS5 была осуществлена частичная апробация предлагаемых методических рекомендаций и системы упражнений на формирование функциональных знаний, умений и навыков по теме «Степенная функция» в курсе IB Mathematics AA SL.

Основные критерии оценки влияния предложенных методических рекомендаций на качество математической подготовки по теме исследования рассматривались в следующих аспектах:

– *мотивационно-ценностном,* при котором оценивались динамика познавательного интереса, повышение уровня мотивации, позитивное отношение к изучаемому материалу;

– *когнитивно-содержательном,* отражающим академическую успеваемость;

– *операционно-деятельностном,* при котором оценке подлежали навыки и умения ведения самостоятельной исследовательской и творческой работы учащихся.

С учетом дистанционного режима обучения оценка по данным критериям исходила из личного педагогического опыта в форме наблюдения. Интегрировав рассмотренные в диссертационном исследовании методические приемы визуализации в процесс обучения, как на объяснительном этапе новых функционально-графических понятий, так и на этапах их закрепления и применения, внеся визуализированные задачи к рассмотрению учащимися в урочное время и в качестве домашних заданий, были отмечены следующие результаты наблюдения:

– на уровне рефлексии изученного материала с применением визуальных дидактических средств, были получены комментарии следующего рода «О, теперь это имеет смысл…», «Почему я раньше этого не понимал? Это же так просто…», при этом наблюдался рост уровня уверенности учащихся в своей компетентности, которым усвоение математических понятий давалось непросто, в виде отсутствия страха задавать вопросы по неясным моментам изучаемых тем для них, повышения мотивации к осуществлению проектной деятельности. При проведении общего внутришкольного опроса учащихся по отношению к дистанционному обучению онлайн-уроки по математике вошли в топ лидирующих по критерию занимательности, наряду с уроками искусства и виртуальными научными лабораториями;

– на уровне академической успеваемости анализ результатов домашних работ и продуктов проектной деятельности показал сдвиг в сторону улучшения;

– на уровне проведения самостоятельной исследовательской или творческой работы наблюдалось добросовестное отношение к качеству выполняемых проектов и личного интереса в их признании и одобрении.

Вследствие этого можно сделать вывод, что представленные в диссертационной работе методические рекомендации обучения теме «Степенная функция» положительно влияют на качество математической подготовки по теме исследования.

Выводы по второй главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1) с целью повышения уровня сформированности умений по теме «Степенная функция» в старших классах следует обратить внимание на возможность реализации непрерывной пропедевтической работы в основной школе, направленной на формирование основных понятий и определений некоторых свойств функций через обобщенные представления (предпонятия) на интуитивном уровне, а также создание ассоциативных связей между ними. Основным средством выделяются стандартные задания с последующим укрупнением их содержания при переходе от пропедевтического элемента к пропедевтируемому, что показано на примере предметного компонента функционального содержания темы «Квадратичная функция». Данные пропедевтические меры позволят создать взаимосвязь между отдельными частными видами степенной функции с дальнейшим переносом полученных знаний и умений к другим видам функций, а также развитию метапредметных компетенций;

2) с соблюдением методических рекомендаций Г.И. Саранцева по формированию математических понятий раскрыта методическая схема обучения отдельным функционально-графическим понятиям и свойствам степенной функции и их применения к решению уравнений, неравенств, их систем с возможностью интегрирования когнитивно-визуального подхода в учебный процесс по теме исследования, в частности создания визуальной учебной среды, как совокупности условий для активизации визуального мышления, способствующего осмысленности изучаемого функционального содержания по степенной функции;

3) подобрана система задач для учащихся 10-х классов базового и профильного уровней, отражающая требования к задачному материалу, сформулированными Е.И. Лященко. Основная цель разработанной системы задач направлена на формирование умения читать графики степенной функции и интерпретировать свойства функции, заданной графически, а для развития метапредметных компетенций в подборку включены задачи

прикладной направленности, требующие активизации мыслительной деятельности учащихся «вне шаблона стереотипных задач» учебника;

4) проведен констатирующий и поисковый этап педагогического эксперимента. Результаты эксперимента показали, что большинство учителей согласны с эффективностью методики, основанной на когнитивно-визуальном подходе, при обучении алгебре и началам математического анализа, в частности при подаче функционального материала, однако, принимая во внимание малый объем визуализированных задач (включая прикладной направленности) в используемых ими учебно-методических пособиях и комплексах, затрудняются в его интеграции в учебный процесс. В то время как обучающиеся при выполнении самостоятельной работы продемонстрировали низкий уровень умения видеть связь между аналитическим представлением функции и ее графическим образом. Частичная апробация в рамках поискового этапа показала эффективность предлагаемых в работе методических рекомендаций.

Заключение

В результате проведенного исследования были получены следующие результаты и выводы:

1. Рассмотрены теоретические аспекты изучения функциональной содержательно-методической линии в курсе алгебры и начал математического анализа, а также история ее формирования в школьном курсе математики; выявлены различные трактовки определения «функции», включенные к изучению в школьной программе алгебры; определено примерное содержание функционального материала для 5-11 классов; определена существенная роль степенной функции при формировании знаний функционально-графической линии в целом.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа как:

– психологический фактор гармоничного развития аналитического и творческого мышления ребенка;

– фактор создания взаимосвязи курса алгебры с эмпирической реальностью учащегося;

– фактор формирования базовых функционально-графических знаний, необходимых для изучения трансцендентных функций и начал математического анализа;

– фактор взаимосвязи с межпредметными областями науки.

3. Изучены различные подходы к изучению степенной функции. Выявлено, что основными аспектами рассмотренных подходов, влияющими на качество усвоения знаний и умений по степенной функции, являются:

– ориентация на личность;

– гуманизация объекта изучения;

– максимальная наглядность, сбалансированная с традиционным методом изучения функций.

4. Как результат анализа, когнитивно-визуальный подход взят в виде основного с интеграцией дидактико-методических приемов других подходов, с целью соблюдения условия совмещения графического и аналитического методов, связи с межпредметными дисциплинами, прикладной направленности. Основным продуктивно-методическим средством выделена визуализированная задача.

5. Представлены методические рекомендации по реализации пропедевтической работы в основной школе, направленной на формирование основных понятий и определений некоторых свойств степенной функций на базе материала по квадратичной функции.

6. Представлена методическая схема обучения отдельным функционально-графическим понятиям и свойствам степенной функции и их применения к решению уравнений, неравенств, их систем, а также методические рекомендации по обучению теме исследования, в точности:

1) с целью соблюдения поэтапного формирования функционально-графических понятий, связанных с темой исследования, придерживаться предложенной методической схемы изучения степенной функции;

2) с целью повышения качества усвоения функционального материала по теме исследования применять методические приемы, основанные на когнитивно-визуальном подходе: заполнение и составление классификационных таблиц, моделей Фрейера, блок-схем структуризации алгоритмов определения и нахождения функциональных понятий, внесение графического дополнения в рисунки графиков степенной функции или выделение цветом;

3) с целью отображения динамической природы степенной функции планомерно использовать информационно-компьютерные технологии, в том числе программы динамической математики (DESMOS, GeoGebra и др.);

4) с целью развития когнитивных структур личности включать в учебный процесс творческие проекты, способствующие не только

закреплению изученного материала, но и наработке собственного исследовательского опыта учащегося;

5) с целью формирования навыков моделирования у учащихся, а также отображения практической значимости изучения степенной функции включать в процесс обучения решение визуализированных задач прикладной направленности.

7. Разработана и подобрана система упражнений для учащихся 10-х классов базового и профильного уровней, в которой были рассмотрены различные типы заданий, включая визуализированные задачи, ориентированные на формирование умения читать графики степенной функции и интерпретировать свойства функции, заданной графически, решать практико-ориентированные задачи с применением свойств степенной функции.

8. Проведен анализ констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента.

Список используемой литературы

1. Абильева, З.А. Непрерывная пропедевтика как фактор обеспечения преемственности функциональных знаний / З.А. Абильева, Н.Н. Кошелева // Совершенствование математического образования –2020: состояние и перспективы развития: Материалы XI Межд. науч. метод. конференции/ Под общ. ред. проф. Г.Х. Гайдаржи. – Тирасполь, 5–6 ноября 2020г. –Тирасполь: Изд-во Приднестр. ун-та, 2020.– С.280-284.

2. Абильева, З.А. Роль творческих заданий при обучении степенной функции / З.А. Абильева // Вестник магистратуры, - 2020, №8(107), С.83-86.

3. Абылкасымова А.Е. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса естественно-математического направления общеобразовательных школ. Часть 1 / А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.А. Жумагулова. – Алматы: Мектеп, 2019. – 240 с., ил.

4. Абылкасымова А.Е. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса естественно-математического направления общеобразовательных школ. Часть 2 / А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.А. Жумагулова. – Алматы: Мектеп, 2019. – 176 с., ил.

5. Алгебра 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю.Н. Макарычев [и др.]; под редакцией С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2014. – 256с.

6. Алгебра 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций с прил. на электрон. носителе / Ю.Н. Макарычев [и др.]; под редакцией С.А. Теляковского. - М.: Просвещение, 2013. – 287с.

7. Алгебра 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций; / Ю.Н. Макарычев [и др.]; под редакцией С.А. Теляковского. - М.: Просвещение, 2014. – 271с.

8. Александрова, Л.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Самостоятельные работы для учащихся общеобразовательных организаций

(базовый и углубленный уровни) / Л.А. Александрова; под редакцией А.Г. Мордковича. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2015. – 207с.: ил.

9. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений: базовый и углубленный уровни – 3-е издание / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева - М.: Просвещение, 2016 – 463 с.

10. Антонова, И. В. Дифференцированная работа учителя математики при формировании понятия функции в курсе алгебры основной школы: автореф. дис. канд. пед. наук: / И.В. Антонова. - Саранск, 2004 – 20с.

11. Васильева, Е. М. Графические работы в курсе алгебры VI—VII классов: автореф. дис. канд. пед. наук / Акад. пед. наук РСФСР. Науч.-исслед. ин-т методов обучения; науч. рук. В. Л. Гончаров. М., 1955. — 15 с.

12. Васильева, М.В. Формирование универсальных учебных действий ученика средствами открытого тематического зачета по математике в старших классах //Муниципальное образование: инновации и эксперимент №3 - 2011, С. 29-35.

13. Вендина, А.А. Пропедевтика в начальном курсе математики [Электронный ресурс] / А.А. Вендина // Мир педагогики и психологии №7, 2018. Режим доступа: https://scipress.ru/pedagogy/articles/propedevtika-funktsionalnoj-linii-v-nachalnom-kurse-matematiki.html. - Последнее обновление 17.12.2020 г.

14. Виленкин, Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 класс.: Учеб. Пособие [Текст] / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – 11-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2004. – 335 с.

15. Выготский, Л. С. Собрание сочинений в 6 т.: Т. 2: Проблемы общей психологии / Л.С. Выготский. – М.: Педагогика, 1982. – 1984. – 504 с.

16. Гашаров, Н.Г. Дивергентные задачи на движение в начальном курсе математики [Электронный ресурс] / Н.Г. Гашаров, Х.М. Махмудов // МНКО. 2017. №6 (67). Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/divergentnye-

zadachi-na-dvizhenie-v-nachalnom-kurse-matematiki – Последнее обновление 13.11.2020.

17. Гончаров, В. Л. Начальная алгебра / Акад. пед. наук РСФСР, Ин-т методов обучения; [под ред. и с предисл. И. Н. Шевченко]. — 2-е изд. — М.: изд-во АПН РСФСР, 1960. — 452 с.

18. Гуськов, Т.А. Функциональная пропедевтика и трактовка понятия функции в восьмилетней школе: автореф. дис. канд. пед. наук: / Т.А. Гуськов. - Москва – 1984. – 25 с.

19. Далингер, В. А. Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода [Электронный ресурс] / В.А. Далингер // Вестник БГУ. 2011. №1. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-matematike-na-osnove-kognitivno-vizualnogo-podhoda – Последнее обновление 19.09.2020.

20. Далингер, В.А. Когнитивно-визуальный подход к обучению математике как фактор успешности ученика в учебном процессе [Электронный ресурс] / В.А. Далингер // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 5-2. – С. 206-209; Режим доступа: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=9978 – Последнее обновление 17.12.2020.

21. Далингер, В.А. Методика обучения математике. Когнитивно-визуальный подход: учебник для академического бакалавриата / В.А. Далингер, С. Д. Симонженков. - М.: Издательство Юрайт, 2016. - 340 с.

22. Иванова, И.Ю. Реализация концепции развития математического образования в деятельности образовательных организаций: монография / И.Ю. Иванова, А.Д. Нахман. // «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2016. – 84 с.

23. Иванова, О.А. Обучение функциональной линии на уроках математики в 7-11 классах на основе метаметодического подхода: автореф дис. канд. пед. наук: / О.А. Иванова. – Санкт-Петербург, 2013. - 22 с.

24. Капкаева, Л.С. Теория и методика обучения математике: частная методика в 2 ч. [Текст]: учебное пособие для вузов / Л.С. Капкаева. Москва: Издательство Юрайт – 2017 – 265 с.

25. Князева, О.О. Реализация когнитивно-визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / О. О. Князева. - Омск, 2003. - 200 с.

26. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. Для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева [и др.]. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 336 с.: ил.

27. Кошелева, Н.Н. Роль визуализированных задач в процессе обучения учащихся понятию и свойствам степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа / Н.Н. Кошелева, З.А. Абильева // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2020. - №4(33). - С. 168-170.

28. Крылова, Т. В. Функциональная пропедевтика в пятом классе [Электронный ресурс] / Т.В. Крылова // Царскосельские чтения. 2013. №XVII. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/funktsionalnaya-propedevtika-v-pyatom-klasse. – Последнее обновление 17.12.2020.

29. Лапшова, О.В. Развитие творческого мышления. [Электронный ресурс] / О.В. Лапшова // Мультиурок - 2018. Режим доступа: https://multiurok.ru/files/priezientatsiia-razvitiie-tvorchieskogho-myshlieni.html - Последнее обновление 17.12.2020.

30. Лобанок, И. П. Пропедевтика в интегративном подходе к обучению математике / И. П. Лобанок // Веснік Магілеўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. – 2006. – № 4 (25). – С. 277–282.

31. Лобанок, И.П. Пропедевтика как средство интеграции в обучении математике; учеб.-метод. пособие / И.П. Лобанок. - Могилев; МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. – [] с.

32. Лопатина, Л.В. Урок –мастерская по теме «Степенная функция» / Л.В. Лопатина // Математика в школе. - 2004. №7. – С.43-45

33. Лукьянова, Г.С. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства: Учебное пособие / Г.С. Лукьянова, А.И. Новиков. [под. ред. А.И. Новикова]. - Рязань, 2004. – 202 с.

34. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова [и др.]. - М.: Просвещение, 1988. – 224 с.

35. Математическая составляющая. / Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин [и др.] - 2-е изд., расш. и доп. — М.: Фонд «Математические этюды», 2019. — 367 с.

36. Меранская программа [Электронный ресурс] // Математический справочник. Режим доступа: http://dict.scask.ru/

37. Михайлова, Т. А. Методика реализации пропедевтической работы учителя математики в контексте формирования "функциональных" умений школьников [Электронный ресурс] / Т.А. Михайлова // Вестник евразийской науки. 2014. №5 (24). Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-realizatsii-propedevticheskoy-raboty-uchitelya-matematiki-v-kontekste-formirovaniya-funktsionalnyh-umeniy-shkolnikov – Последнее обновление 17.12.2020.

38. Михайлова, Т.А. Пропедевтика как основа процесса обучения функциям на уроках математики в 7-11 классах: дис. канд. пед. наук: / Т.А. Михайлова - Биробиджан, 2015. - 180 с.

39. Мишенина, О.В. Теория и методика изучения функций в основной школе в контексте модульного обучения: автореф. дис. канд. пед. наук: / О.В. Мишенина. – Киров, 2004 – 20 с.

40. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд. стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.

41. Мордкович, А.Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // Математика в школе. - 2012. - №10.-С. 35-43.

42. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. Методическое пособие / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. - 2-е издание. — М.:Дрофа, 2014. - 269 с.

43. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа, углубленный уровень, 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. - 9-е изд., стереотип. - М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

44. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа, углубленный уровень, 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

45. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. - М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

46. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.: ил.

47. Никольский, С.М. Алгебра. 8 класс.: учеб. для общеобразовательных организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.: ил.

48. Никольский, С.М. Алгебра. 9 класс.: учеб. для общеобразовательных организаций / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.: ил.

49. Нюхлякова, Н.А. Методическая разработка по теме «Степенная функция, ее свойства и график» [Электронный ресурс]. / Н.А. Нюхлякова // Ведущий образовательный портал России «Инфоурок». – 2019. Режим доступа: https://infourok.ru/metodicheskaya-razrabotka-uroka-stepennaya-funkciya-i-eyo-svoystva-i-grafik-3817056.html – Последнее обновление 17.12.2020.

50. Паравян, Е.В. Конспект урока «Степенная функция с целым показателем, 9 класс» [Электронный ресурс] / Е.В. Паравян // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок-1 сентября». - 2009. Режим доступа: https://urok.1sept.ru/articles/549580 – Последнее обновление 17.12.2020

51. Пекшева, А.Г. Использование средств ИКТ для интерактивной когнитивной визуализации учебного материала [Электронный ресурс] / А.Г. Пекшева // Вестник Нижневаторского государственного университета. Народное образование. Педагогика. – № 1. – 2013. – С. 7–10.

52. Пермякова, М.Ю. Формирование функционально-графической грамотности учащихся в контексте федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования [Электронный ресурс] / М.Ю. Пермякова // Инновационная наука. 2015. №3. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-funktsionalno-graficheskoy-gramotnosti-uchaschihsya-v-kontekste-federalnogo-gosudarstvennogo-obrazovatelnogo - Последнее обновление 16.12.2020.

53. Плотникова, Т.В. Урок по теме «Применение свойств квадратичной функции при решении задач на оптимизацию» [Электронный ресурс]. / Т.В. Плотникова // Педагогическое сообщество «Урок.РФ.» – 2020. Режим доступа: https://урок.рф/library/urok_po_teme_primenenie_svojstv_kvadratichnoj_funk_195036.html - Последнее обновление 17.12.2020.

54. Подходова, Н.С. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 1: учебник для академического бакалавриата / Н.С. Подходова, В.И. Снегурова. — М.: Издательство Юрайт, 2017. — 274 с.

55. Покровский, В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб.-метод. пособие / В.П. Покровский; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. - Владимир: ВлГУ, 2014. - 143 с.

56. Попадьина, С.Ю. Реализация функционально-графической линии в персонализированном обучении общеобразовательному курсу математики с использованием компьютерной системы MATHCAD: автореф. дис. пед. канд. наук: / С.Ю. Попадьина. - Рязань – 2009 – 23 с.

57. Примерная основная общеобразовательная программа среднего общего образования (Одобрено решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию. Протокол от 28 июня 2016 г. №2/16-з).

58. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика (Одобрено Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 08.04.2015 г. № 1/15)

59. Рождественский, В.В. Иррациональные уравнения и неравенства: Методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ. / В.В. Рождественский. — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. — 20 с.

60. Ротенберг, В.С. Мозг. Обучение. Здоровье: книга для учителя / В.С. Ротенберг, С.М. Бондаренко. – Москва: Просвещение, 1989. – 289 с.

61. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе: [Текст] / Г.И. Саранцев. — М.: Просвещение, 2002. — 224 с.

62. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ // образовательный портал для подготовки к экзаменам. Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru

63. Соловченкова, Е.А. Задачи повышенной сложности по теме «Степенная функция». Методические рекомендации для учителей математики [Электронный ресурс] / Е.А. Соловченкова //. Образовательная социальная сеть nsportal.ru - 2015. Режим доступа: https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2015/08/17/metodicheskie-rekomendatsii-dlya-uchiteley-matematiki-zadachi - Последнее обновление 16. 12.2020.

64. Терновая, Н.А. История школьного математического образования в России и за рубежом: [Текст] / Н.А. Терновая – Саратов, 2012. – 76 с.

65. Титова, О. С. О прикладной ориентации школьного курса математики / О.С. Титова // Наука о человеке: гуманитарные исследования. 2017. №2 (28). Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/o-prikladnoy-orientatsii-shkolnogo-kursa-matematiki – Последнее обновление 12.11.2020.

66. Тихий, А. Применение степенной и показательной функций при решении задач с электротехническим содержанием [Электронный ресурс] / А. Тихий // Платформа для публикаций Pandia.ru. Режим доступа: https://pandia.ru/text/80/345/85051.php – Последнее обновление 06.11.2020.

67. Тихонова, Л.В. Методические особенности формирования функционально-графической линии курса алгебры в условиях личностно-ориентированного обучения: автореф. дис. канд. пед. наук: / Л.В. Тихонова - Чебоксары, 2002. - 25 с.

68. Токарева, Л.И. Формирование теоретических систем понятий у учащихся общеобразовательных школ / Л.И. Токарева // Наука и школа. - 2008. - № 4. - С. 21-23.

69. Ушинский, К.Д. Человек как предмет воспитания: Опыт педагогической антропологии / Ушинский К. Д. Собр. соч. Т. I, II. – М.: Издательство АПН РСФСР, 1950

70. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/. – Последнее обновление 17.12.2020.

71. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. № 413. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/2365 – Последнее обновление 17.12.2020.

72. Фёдорова, Н.Е. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10-11 классы: учебное пособие для образовательных организаций. / Н.Е. Фёдорова, М.В. Ткачева. - М.: Просвещение, 2017. — 172 с.

73. Фирер, А. В. Развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации: дис. пед. канд. наук: / А.В. Фирер. - Омск, 2018. - 225 с.

74. Фишман, Б.Е. Когнитивная динамичная компьютерная визуализация как условие, необходимое для субъектного освоения учащимися математических понятий / Б.Е. Фишман, Н.В. Эйрих // Современные наукоемкие технологии. - 2016.- № 9-2.- С. 355-359.

75. Хинчин, А.Я. Педагогические статьи. / А.Я. Хинчин, под. ред. Б.В. Гнеденко. – М.: АПН РСФСР, 1963. -204 с.

76. Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства / А.Х. Шахмейстер. - СПб.: «Петроглиф», 2011. – 216 с. ил.

77. Gloag, A. Application using Radicals. / Andrew Gloag, Eve Rawley, Anne Gloag // CK-12 Foundation. - 2017. URL: https://www.ck12.org/book/ck-12-algebra-i-concepts/section/11.5

78. Bukari, Hamidu I. Using Constructivist Approach to Enhance Students Understanding of Logarithmic Functions: A Case Study of Kalpohin Senior High School, Tamale-Ghana. / Hamidu I Bukari, Abdul-Rahaman Yakubu // International Journal of Engineering and Applied Sciences, 2018 - vol. 5, no. 3.

79. DP Mathematics SL question bank. // IB Questionbank. URL: https://www.ibdocuments.com/IB%20QUESTIONBANKS/4.%20Fourth%20Edition/questionbank.ibo.org/en/teachers/00000/questionbanks/40-dp-mathematics-sl/syllabus_sections.html

80. Glasersfeld, E. von. A constructivist approach to teaching. / E. von Glaserfeld // Steffe L. P. & Gale J. (eds.) Constructivism in education. Erlbaum, Hillsdale: 3–15. URL: http://vonglasersfeld.com/172

81. Natsheh, I. Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. / Intisar Natsheh, Ronnie Karsenty // ZDM Mathematics Education, 2014 - № 46. P. 109-122.

82. Wathall, J.C. Mathematics: Analysis and Approaches, Higher Level / J.C. Wathall, J. Harcet, R. Harrison, // Oxford IB Diploma Programme, - Oxford University Press, 2019 – 855 p.

Приложение А

Решения к системе задач по теме «Степенная функция» для базового и профильного уровней

Решения к системе задач базового уровня

Решение к Задача Б.1. Предположим, задана функция вида $y = kf(x)$. Тогда из закона $Q = RtI^2$ следует, что $k = Rt$ (сопротивление, умноженное на время, при этом $t = 1$). Найдем значение k:

$$k = Rt = \frac{Q}{I^2} = \frac{10}{0.25} = 40$$

Следовательно, функция имеет вид $Q = 40I^2$ – квадратичная функция, тогда графиком является парабола. Принимая во внимание то, что сила тока может быть как положительна, так и отрицательна, парабола лежит в 1 и 2-ой четверти координатной плоскости. Найдем количество теплоты при токах 0,25А → 2,5Дж, 0,4А→6,4Дж, 1А→40Дж.

Решение к задаче Б.2. Допустим d – диагональ экрана, ширина экрана – x, следовательно высота экрана = $\frac{3}{4}x$. Выполним чертеж (рисунок Б.2.а):

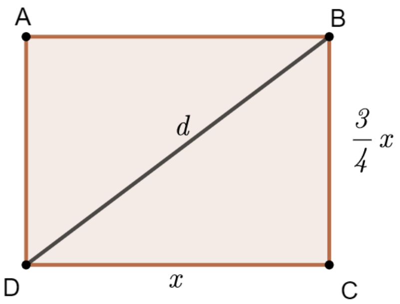


Рисунок Б.2.а

Тогда площадь экрана равна $S = \frac{3}{4}x^2$. Чтобы установить зависимость между площадью и диагональю экрана, выразим x через d.

По теореме Пифагора $x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = d^2$, откуда $x = \frac{4}{5}d$.

Следовательно, соотношение между площадью и диагональю экрана следующее: $S = \frac{12}{25}d^2$. Выразим $d = \frac{5\sqrt{3S}}{6}$.

Построим таблицу А.1 значений:

Таблица А.1 – Таблица значений

A	0	25	50	75	100	150	200
d	0	7.2	10.2	12.5	14.4	17.6	20.4

Построим график (рисунок Б.2.б):

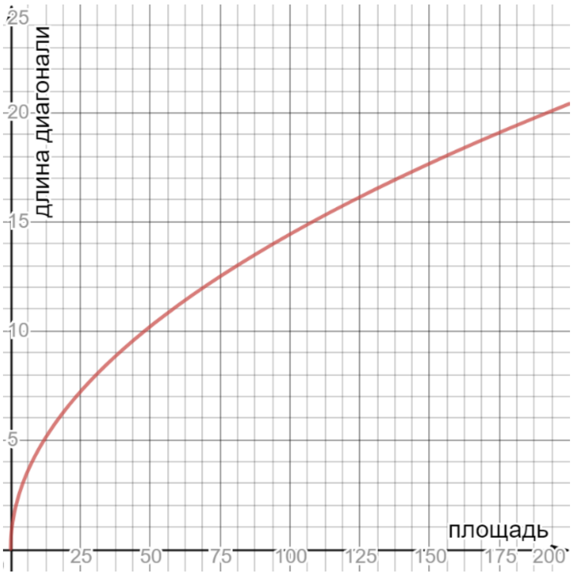


Рисунок Б.2.б

Решение к задаче Б.3. Так как сечением провода является площадь круга, следовательно, $S = \pi r^2 \Rightarrow S(d) = \frac{\pi d^2}{4}$.

Решение к задаче Б.4. $f(x) = c, g(x) = a, h(x) = b$

Решение к задаче Б.5. 1) $D(f) = \{x \to x \in \mathbb{R}\}$, $E(f) = [-2, +\infty)$; 2) $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, $E(f) = [-2, +\infty)$.

Решение к задаче Б.6. Так как степень аргумента функции является четным натуральным числом ⇒ график симметричен относительно оси OY, и проходит через центр координатной плоскости, при этом график прижимается к оси OX, тогда решение имеет вид (оранжевый цвет) рисунок Б.6.

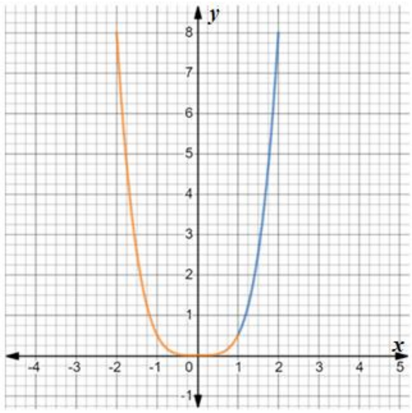


Рисунок Б.6

Решение к задаче Б.7. Рисунок Б.7

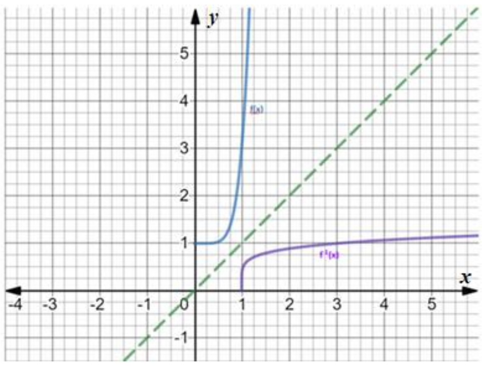


Рисунок Б.7

Решение к задаче Б.8. Формула сложной функции $f(g(x)) = 2(x+2)^2 - 10$, откуда видно, что квадратичная функция вида $y = x^2$ преобразована параллельным переносом на вектор $\binom{-2}{-10}$ и растяжением вдоль оси ординат на скалярную величину, равную 2. Построим в одной системе координат, график функции $f(g(x))$ и прямую $y = 8$ (рисунок Б.8). Определяем абсциссы точек пресечения графиков функций. **Ответ:** (-5,8), (1,8).

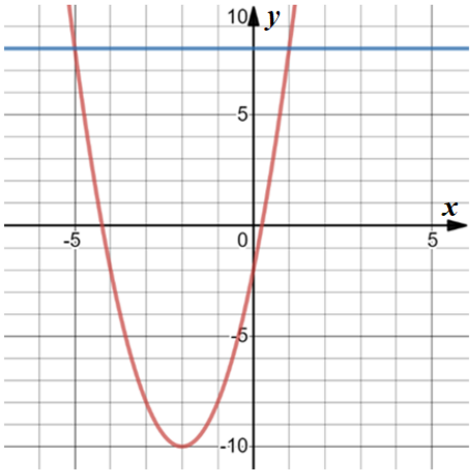


Рисунок Б.8

Решение к задаче Б.9. Рисунки Б.9.а, Б.9.б

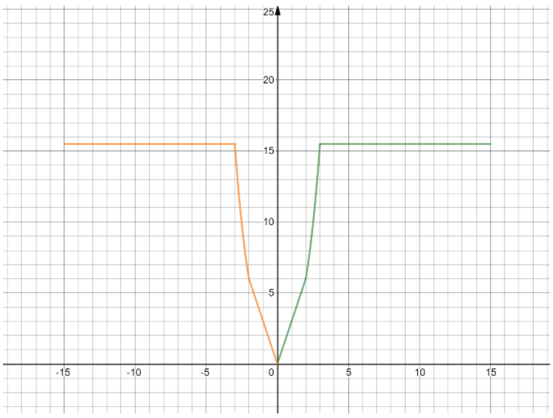


Рисунок Б.9.а

Рисунок Б.9.б

Решение к задаче Б.10. Степень показателя аргумента в функции $f(x) = x^9$ – нечетное натуральное число, функция проходит через начало координат. Следовательно, функция расположена в I и III координатных четвертях.

Решение к задаче Б.11. Функция $f(x) = x^p$ 1) при $p = 7$ монотонно возрастает, 2) при $p = 4$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; 0)$ 3) при $p = -3$ функция монотонно убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решение к задаче Б.12. $f(2) = -7, f(3) = 0, f(0) = -63$

Решение к задаче Б.13. Рисунок Б.13

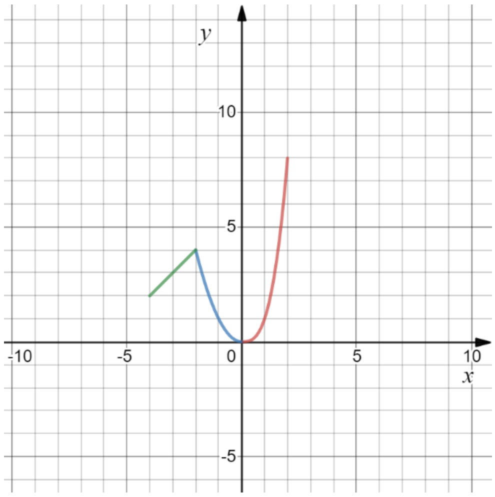


Рисунок Б.13

Решение к задаче Б.14. 1) $y = x^2, x \in [0; +\infty)$; 2) $y = x^{\frac{5}{3}}, x \in (0; +\infty)$; 3) $y = -x^3, x \leq 0$.

Решение к задаче Б.15. 1) график функции $y = \sqrt{x - 6}$ расположен в I координатной четверти и строго возрастает, график функции $y = -x^2$, получен путем отражения относительно оси абцисс, следовательно лежит в III и IV четвертях, откуда следует, что графики функций не пресекаются, корней нет. 2) один корень.

Решение к задаче Б.16. Так как $\sqrt{\mathrm{x}} + \mathrm{x} - 2 < 0$ строго возрастает при $x \geq 0$ и при $x = 1$ равна нулю, значит $0 \leq x < 1$.

Решение к задаче Б.17. Параллельный перенос на вектор $\binom{3}{1}$.

Решение к задаче Б.18. Выразим время из формулы $F = \frac{2mS}{t^2}$, получим $t = \sqrt{\frac{2mS}{F}}$, подставив имеющиеся значения параметров получим, что время $t = 30$ секунд.

Решение к задаче Б.19. Необходимо решить уравнение $l(h) = 32$.

$32 = \sqrt{2 \cdot 6400 \cdot h} \Rightarrow h = 0.08$

Решения к системе задач профильного уровня

Решение к задаче П.1. Функция объема полученной коробки имеет вид $V = x(10-2x)^2 = x(100-40x+4x^2) = 4x^3-40x^2+100x$ или

$V = 4x(5-x)^2$; $D(V) = (0;10)$.

Решение к задаче П.2. $\frac{x}{3} = \frac{4-y}{4}$, $y = 4-\frac{4}{3}x, P = 2(x+y) = 8-\frac{2}{3}x$, $D(P) = (0;3)$.

Решение к задаче П.3. $\mathrm{D(f)} = (-\infty,-2) \cup (-2{,}1) \cup (1,+\infty); \mathrm{E(f)} = (-\infty,-0.444) \cup (3,+\infty)$.

Решение к задаче П.4. 1) Так как основой сложной функции является кубическая и необходимо найти коэффициент растяжения, от стационарной точки $(-2;0)$ отступаем один шаг масштаба и устанавливаем, что $\boldsymbol{a = 3}$. 2) Кубическая функция перемещена влево на 2 единицы $\Rightarrow$ $\boldsymbol{f(x) = x+2}$. 3) Построив график функции $y = -2x+1$ (рисунок П.4), найдем координаты точки пересечения $\Rightarrow$ решением является $(\boldsymbol{-1};\ \boldsymbol{3})$.

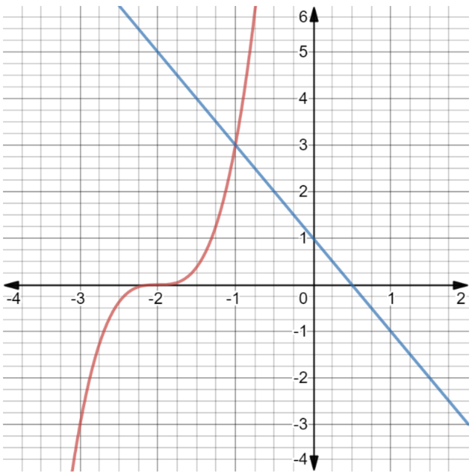


Рисунок П.4

Решение к задаче П.5. Данную задачу можно решить несколькими способами, приведенными ниже:

Первый способ (тип графический образ – аналитическое решение): выразим объем объекта $V = a^3 - \frac{1}{a^3}$, далее отмечаем, что имеем разность кубов. Разложим на множители

$V = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right) = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 3\right)$

Откуда следует, что $V = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$

Второй способ (аналитическое решение – метод рассуждения): принимая во внимание, что ребра кубов возведены в куб, возведем переменную x в куб, тогда получим: $x^3 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$. Откуда видим, что $x^3 = V - 3x \Rightarrow V = x^3 + 3x$.

Третий способ (графический образ – графический образ): видим, что данный многогранник можно представить в виде конгруэнтных параллелепипедов, каждый объемом $x \cdot \frac{1}{a} \cdot a$ и куба объемом x^3 (рисунок П.5):

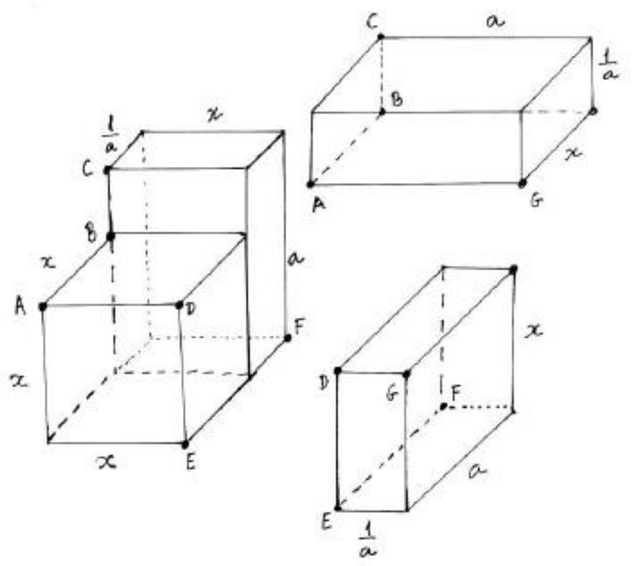


Рисунок П.5

Откуда следует, что объем многогранника равен сумме объемов данных пространственных фигур. **Ответ:** $V = x^3 + 3x$*, при* $x > 0$.

Решение к задаче П.6. Подставив значение ускорения в формулу, найдем коэффициент пропорциональности, $a \approx 2$, следовательно, функция периода колебаний $T = 2\sqrt{L}$. Видим, что графиком функции является график корня 2-степени с коэффициентом растяжения 2 (рисунок П.6).

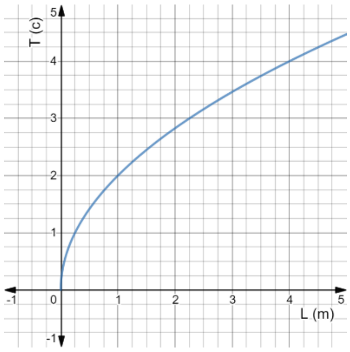


Рисунок П.6

Из графика видим, что период колебаний $\mathrm{T} = 1$ секунда при длине маятника равной $\frac{1}{4}$ метра. **Ответ:** 25 см.

Решение к задаче П.7. Областью значений квадратичной функции $f(x) = -3x^2 + 12x - 3 = -3(x-2)^2 + 9$ является промежуток $(-\infty; 9]$. Фиксируем произвольное $-y_0$ из промежутка $[-3; 0]$, откуда $y_0 \in [0; 3]$.

Уравнение $-\sqrt{f(x)} = -y_0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = y_0 \Leftrightarrow f(x) = y_0^2, 0 \leq y_0^2 \leq 9$. Принимая во внимание существование $x_0 \in \mathbb{R}$ такого, что $\sqrt{f(x)} = y_0 \Leftrightarrow f(x) = y_0^2$, следовательно, с учетом $0 \leq \sqrt{f(x)} \leq 3$ при тех x, когда $f(x) \geq 0$, то функция $y = -\sqrt{f(x)}$ может принимать значения внутри отрезка $[-3; 0]$.

Ответ: $E(y) = [-3; 0]$.

Решение к задаче П.8. ОДЗ: $-2 \leq x \leq 2$

Построим графики левой и правой частей неравенства:

1) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Область допустимых значений $-2 \leq x \leq 2$ – график симметричен относительно начала координат. Функция является четной, следовательно, график симметричен относительно оси OY. Тогда достаточно построить график для $[0;\ 2)$, затем отразить относительно оси OY.

$\sqrt{4 - x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$, точки пересечения с осью OX $(-2; 0)$ и $(2,0)$. График функции пересекается с осью ординат в точке $(0; 2)$.

2) $g(x) = x^2 - 2x + 3$ - квадратичная функция. Старший коэффициент больше нуля, следовательно, ветви параболы направлены вверх. Абсцисса вершины параболы $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$. Точка минимума $(1; 2)$.

Построение графиков (рисунок П.8):

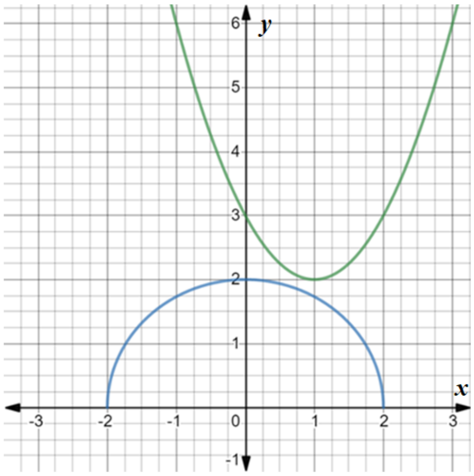


Рисунок П.8

Решением неравенства является $x = \emptyset$, в силу отсутствия значений аргумента, при которых участки графика функции $g(x) = x^2 - 2x + 3$ ниже графика функции $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. **Ответ:** $x = \emptyset$.

Решение к задаче П.9. Обозначим прямоугольник ABCD, продлим диагональ прямоугольника (рисунок П.9).

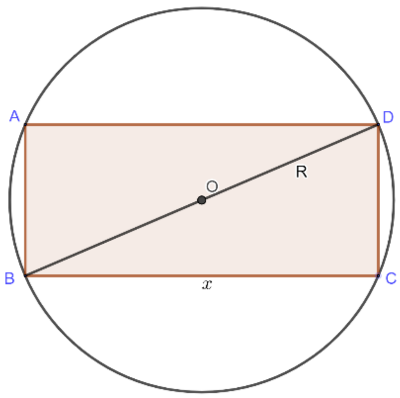


Рисунок П.9

Так как диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow BD = 2R$.

Рассмотрим треугольник BCD - прямоугольный: $BD = 2R, BC = x \Rightarrow CD = \sqrt{4R^2 - x^2}$ (теорема Пифагора). Тогда площадь прямоугольника ABCD равна: $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Найдем область определения функции $S(x)$:

Принимая во внимание существование области определения корня четной степени на множестве неотрицательных чисел и соблюдения положительности значения площади, то отыскание области определения функции $S(x)$ сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 4R^2 - x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 2R \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2R < x < 2R \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2R$$

Ответ: $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D(x) = (0;2R)$

Решение к задаче П.10. 1) Площадь большого круга = 4π, малого круга =πx^2; следовательно, площадь кольца А=$4\pi - \pi x^2$. Допустим $\pi = 3$, тогда функция площади кольца $A = 12 - 3x^2$.

2) Графиком функции $A = 12 - 3x^2$ является парабола ветви, которой направлены вниз. При этом, так как площадь не может быть отрицательной имеем следующий график функции (рисунок П.10).

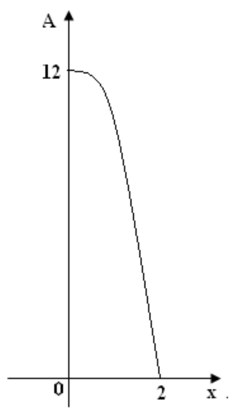


Рисунок П.10

3) Тогда $D(x) = [0, 2]$; 4) При $x = 0$ кольцо «расширяется» до большого круга, при $x = 2$ оно исчезает, «превращаясь» в окружность; при изменении x от 0 до 2 площадь A уменьшается от 12 до 0.

Решение к задаче П.11. Задача сводится к решению неравенства $I \leq 0.2I_{\text{кз}} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{R+1} \leq 0.2 = \frac{\varepsilon}{1} \Leftrightarrow R + 1 \geq 5 \Leftrightarrow R \geq 4$. **Ответ:** 4 Ома.

Решение к задаче П.12. Построим графики левой и правой части уравнения: $y = -\sqrt{16 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$ график функции представляет собой полуокружность с центром (0,0) радиусом 4, ниже оси Ох. Правая часть представляет собой прямую $y = x + a$, пересекающая ось Оу под углом 45 градусов (рисунок П.12)

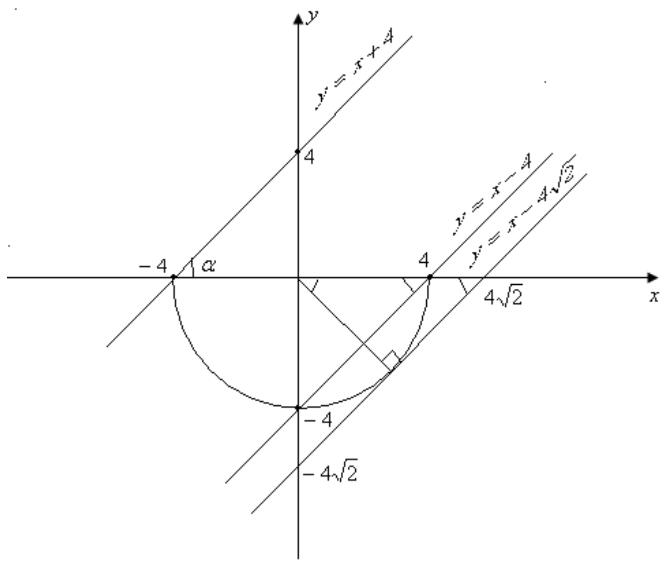


Рисунок П.12

Эти графики имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда прямая $y = x + a$ совпадает с прямой $y = x - 4\sqrt{2}$ или лежит между прямыми $y = x + 4$ и $y = x - 4$ (не включая последнюю), другими словами, при $a = -4\sqrt{2}$ или $-4 < a \leq 4$. **Ответ:** $a = -4\sqrt{2}\,, -4 < a \leq 4$.

Решение к задаче П.13. ОДЗ уравнения – все действительные числа, удовлетворяющие неравенству $x \geq -3$. Методом подбора легко найти, что $x = -2$ является корнем уравнения. Построим графики левой и правой частей уравнения. Из рисунка П.13 видно, что они пересекаются в точке $(-2; 1)$ и не существует прямой, проходящей через эту точку и лежащей между графиками частей.

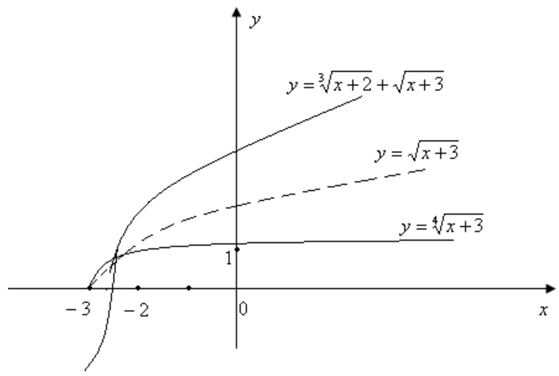


Рисунок П.13

Сравним части уравнения с этой функцией на промежутках$[-3;\ -2)$ и $(-2;+\infty)$.

Если $x>-2$, то $x+3>1$, следовательно, $\sqrt{x+3}>\sqrt[4]{x+3}$.

Если же $-3\le x<-2$, то $0\le x+3<1$, следовательно, $\sqrt{x+3}<\sqrt[4]{x+3}$.

Функция $h(x)=\sqrt[3]{x+2}$ является строго возрастающей и $h(-2)=0$, поэтому при $x>-2$ справедливо неравенство $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+3}>\sqrt[4]{x+3}$, а при $-3\le x<-2$ справедливо неравенство $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+3}<\sqrt[4]{x+3}$.

Сопоставим полученные неравенства, убеждаемся, что $x=-2$ является единственным корнем уравнения.

Решение к задаче П.14. Необходимо решить неравенство

$$F_A\le 2491398\ \Leftrightarrow 4.2\cdot 1000\cdot r^3\le 249/398 \Leftrightarrow r^3\le\frac{59319}{1000}\Leftrightarrow r\le\frac{39}{10}$$

Ответ: максимальный радиус равен 3,9 м.

Решение к задаче П.15. Задача сводится к решению неравенства $\varphi\le 4050°$.Откуда $3t^2+45t\le 4050\ \Leftrightarrow t^2+15t-1350\le 0\ \ \Leftrightarrow -45\le t\le 30$. Так как время всегда положительно, следовательно, $t\le 30$. **Ответ:** через 30 минут.

Приложение Б

Анкета для учителей математики

1. Наименование образовательного учреждения:

___

2. Укажите ваш стаж работы учителем математики:

___

3. Укажите классы, с которыми вы работаете (возможны несколько вариантов ответа):

□ 5-6 классы

□ 7-9 классы

□ 10-11 классы

4. Укажите, учебно-методический комплекс по алгебре и началам математического анализа, по которому вы работаете чаще всего (можно указать авторов учебников):

___

5. Согласны ли вы с тем, что запоминание и усвоение математических концепций, утверждений и фактов, представленных с помощью визуализированных форм (наглядных), проходит качественнее и быстрее, чем представленные аналитически или в словесной форме.

□ полностью соглас/ен(на)

□ скорее да, чем нет

□ скорее нет, чем да

□ полностью не соглас/ен(на)

6. Удовлетворены ли вы наглядностью содержания используемых вами пособий, учебников по алгебре:

☐ да

☐ скорее да, чем нет

☐ скорее нет, чем да

☐ нет

7. Ранжируйте нижеприведенные типы задач по доле их применения на ваших занятиях по алгебре**:**

- стандартные алгоритмические задачи

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- визуализированные задачи (задача, где наглядный образ присутствует в содержании или решении)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- практико-ориентированные задачи

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- творческие задания (задания, требующие креативной деятельности учащегося)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- мини-проекты исследовательского характера

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

8. Ранжируйте средства ИКТ, которые вы используете во время ваших занятий по алгебре:

- Презентации PPT

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- интерактивные презентации для интерактивной доски

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- приложения динамической математики (DESMOS, MATHCAD, GeoGebra и др.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- облачные технологии (Google формы, Google документы и др.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- личный блог или сайт

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

- готовые электронные ресурсы образовательных онлайн платформ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Не использую	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Использую всегда

9. Используете ли вы задания из других источников? Если да, то какого рода задания вы предпочитаете включать в процесс обучения?

---

10. Исходя из вашего опыта, какие средства, приемы и методы повышают интерес учащихся к изучению функциональной содержательно-методической линии и алгебры в целом? (2-3 примера)
