МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения первообразной в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы»

Студент Е.В. Шильдкравт
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, О.А. Кузнецова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. На современном этапе происходит процесс внедрения в общеобразовательную школу Федеральных государственных образовательных стандартов основного и среднего (полного) общего образования [49]. Их введение требует: разработки методики обучения математике, как на базовом, так и на углублённом уровнях, учитывающей потребности обучающихся и действительный уровень их подготовки; разработки учебных программ, оценочных и методических материалов, отвечающих требованиям промежуточной и государственной итоговой аттестации для разных групп учащихся; применения современных технологий образовательного процесса, направленных на получение каждым обучающимся системы математических знаний, необходимых для дальнейшей успешной жизни в обществе. Поэтому одной из задач, стоящей перед учителем является организация эффективных, универсальных способов и методов обучения для достижения учащимися личностных, предметных и метапредметных результатов на различных этапах процесса обучения математике.

Изучение базовых понятий о первообразной и элементарные действия с ней является пропедевтикой интегрального исчисления, предусмотренного программами практически по всем направлениям подготовки в вузах. Интеграл и его приложения принято считать одной из самых трудных тем курса математики старшей школы, так как имеет высокий уровень абстракции, сложную логическую структуру определения, при этом выступает как особый язык, описывающий явления и процессы окружающей действительности, и как инструмент, при помощи которого исследуются эти явления и процессы.

Изучение первообразной играет важную роль не только в школьном курсе алгебры и начал математического анализа. Данная тема имеет теоретическую (дифференциальное и интегральное исчисление) и прикладную (природа, техника, физика) направленность. Однако, первообразная изучается на завершающем этапе обучения математике в старшей школе. Задания по теме

«Первообразная» предлагаются в итоговой государственной аттестации - Едином Государственном Экзамене (ЕГЭ) в 11 классе, а также на вступительных экзаменах в вузы. А для того, чтобы знания ученика были на достаточно высоком уровне, необходимо активизировать его познавательную деятельность при изучении первообразной.

Таким образом, актуальность исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием между* требованиями к обязательным результатам освоения программы среднего (полного) общего образования по математике и традиционной методикой обучения теме «Первообразная» в общеобразовательной школе, не учитывающей современные технологии и средства обучения.

Данное противоречие позволило сформулировать **проблему исследования**: каковы методические основы эффективного обучения первообразной в углубленном курсе математики, которые позволили бы обеспечить необходимый уровень знаний каждому учащемуся.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре и начал анализа на старшей ступени общего образования.

Предмет исследования – методика обучения понятию «первообразная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей и разработке методических материалов эффективного обучения понятию «первообразная» в курсе алгебры и начал анализа старших классов.

Гипотеза исследования заключается в том, что повышение качества математической подготовки обучающихся при изучении темы «Первообразная» будет достигаться, если:

– выявить методические основы и разработать методическую схему по эффективному обучению первообразной в старших классах общеобразовательной школы на основе технологического подхода;

– разработать систему дифференцированных заданий по теме «Первообразная», отвечающая требованиям государственной итоговой аттестации.

В соответствии с проблемой, объектом, предметом и целью исследования были выдвинуты следующие **задачи:**

1. Выделить основные цели и задачи обучения понятию «первообразная» в школьном курсе алгебры и начал анализа.

2. Рассмотреть содержательный компонент обучения понятию «первообразная» на основе анализа учебников разных авторов курса алгебры и начал анализа.

3. Выявить необходимые методы, формы и средства обучения первообразной.

4. Разработать методическую схему обучения первообразной в курсе алгебры и начал анализа, направленную на достижение планируемых результатов освоения темы.

5. Разработать систему задач по теме «Первообразная» для подготовки к итоговой аттестации старшеклассников.

6. Провести экспериментальную проверку эффективности разработанных методических материалов.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Г.И. Саранцева [43], В.М. Монахова [27]

Базовыми для настоящего исследования составили труды Ш.А. Алимова [2], А.Г. Мордковича [32], С.М. Никольского [32], Г.К. Муравина [28], а так же диссертационные исследования Е.Н. Дроновой [13] и Е.В. Гераськиной [7].

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов исследования**: изучение научно-методической литературы; анализ ФГОС основного и среднего (полного) общего образования, основной образовательной программы, содержания действующих школьных учебников из Федерального перечня учебной литературы по теме «Первообразная»; беседы с учителями математики, анкетирование учащихся, проведение экспериментального опыта; обработка и интерпретация полученных данных.

Основные этапы исследования:

1 этап (2018/19 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ);

2 этап (2019/20 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации;

3 этап (2019/20 уч.г.): выявление методических основ и разработка методических материалов по введению понятия «первообразная» в углубленном курсе алгебры общеобразовательной школы; разработка системы задач по теме «Первообразная»;

4 этап (2020/21 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБОУ СОШ № 4 с УИОП им. Г.К. Жукова, Московская область, г. Краснознаменск.

Научная новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем спроектирована методическая схема обучения теме «Первообразная» в углубленном курсе алгебры с применением технологии В.М. Монахова.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические основы обучения теме «Первообразная» в углубленном курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы, приведены основные виды задач по исследуемой теме.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нём разработаны методические рекомендации по введению понятий «Первообразная», а также система дифференцированных задач, которые могут быть использованы учителями в процессе подготовки обучающихся к ЕГЭ.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, а также результатами прохождения педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических основ и разработке методических материалов по теме «Первообразная».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. в период производственной (научно-исследовательской работы) и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, в период работы учителем 10-11 классах. Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях [56,57].

Констатирующий и поисковой этапы эксперимента проведены на базе МБОУ СОШ № 4 с УИОП им. Г.К. Жукова г. Краснознаменска Московской области.

На защиту выносятся:

1. Методическая схема обучения теме «Первообразная» на основе технологии В.М. Монахова.

2. Система задач по теме «Первообразная» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Структура выпускной квалификационной работы состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 18 рисунков, 18 таблиц, список используемой литературы (63 источника). Основной текст работы изложен на 96 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения первообразной в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы

1.1 Основные цели и задачи обучения понятию «первообразная» в школьном курсе алгебры и начал анализа

В настоящее время осуществляется модернизация школьного образования, базирующаяся на законодательных документах, важнейшим из которых, наряду с Законом об образовании, является Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (Стандарт), представляющий собой совокупность требований, обязательных при реализации основной образовательной программы среднего (полного) общего образования образовательными учреждениями, имеющими государственную аккредитацию [49].

Стандарт устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы: личностным, включающим готовность и способность обучающихся к саморазвитию и личностному самоопределению; метапредметным, включающим освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные), способность их использования в познавательной и социальной практике, самостоятельность в планировании и осуществлении учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, способность к построению индивидуальной образовательной траектории, владение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности; предметным, включающим освоенные обучающимися в ходе изучения учебного предмета умения, специфические для данной предметной области, формирование научного типа мышления.

Предметные результаты освоения основной образовательной программы устанавливаются как на базовом, так и углублённом уровнях. Обучение математике по профильной программе призвано подготовить выпускников к последующему профессиональному образованию, а так же развить индивидуальные способности обучающихся посредством более глубокого, по сравнению с базовым уровнем, освоением знаний и способов действий, присущих математике [49].

Изучение первообразной играет большую роль в курсе алгебры и начал математического анализа старшей школы. Первообразная неразрывно связана с интегралом, который в свою очередь имеет широкое практическое применение в геометрии, физике, химии, экономике. Изучение данной темы выпадает в курсе в разделе «первообразная и интеграл» [60].

В примерной основной образовательной программе отмечается, что в процессе изучения темы «Первообразная и интеграл» учащиеся должны научиться:

– «владеть понятиями первообразная функция и определенный интеграл;

– применять теорему Ньютона–Лейбница и ее следствия для решения задач;

– решать прикладные задачи из геометрии, физики, экономики и других предметов» [49, с. 113].

В результате изучения темы выпускник получит возможность научиться:

– «оперировать понятием первообразной функции для решения задач;

– овладеть основными сведениями об интеграле Ньютона-Лейбница и его простейших применениях;

– уметь применять приложение определенного интеграла к решению задач естествознания» [49, с. 112-113].

Проанализируем УМК Ш.А. Алимова (и др.) «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» [2] и Л.Г. Мордковича, П.В. Семенова «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» [32] и С.М. Никольского, А.В. Шевкина, М.К. Потапова, «Математика. Алгебра и начала анализа», Г.К. Муравина «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень.11 класс» [28] из федерального перечня учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования [51].

В пособии для учителей к учебникам Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, Ю.В. Сидорова, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина говорится, что основными целями изучения первообразной являются:

– «формирование представлений о первообразной функции, о семействе первообразных, о таблице первообразных, о правилах отыскания первообразных;

– формирование умений находить для функции первообразную, график которой проходит через точку, заданную координатами» [53].

По окончанию изучения перообразной в школьном курсе математики старшей школы ученик должен:

– знать: «определение первообразной; основное свойство первообразной; таблицу первообразных;

– уметь: проверять, является ли данная функция F первообразной для другой заданной функции f на данном промежутке; находить первообразную, график которой проходит через данную точку; находить первообразные функций в случаях, непосредственно сводящихся к применению таблицы первообразных и правил интегрирования» [53].

В поурочных разработках к учебнику А.Г. Мордковича, П.В. Семенова [31] выделяют следующие цели изучения первообразной:

– «рассмотреть понятие первообразной функции и связь между первообразной и производными функциями;

– отработать практические навыки вычисления первообразной;

– знать основное свойство первообразной и её геометрический смысл» [31].

В результате обучения, учащиеся должны:

– «уметь находить общий вид первообразных для функции $f(x)$;

– знать: первообразные для основных функций (изучаемых в школе), правила интегрирования и их применение для нахождения первообразных функций» [42, с. 143].

В пособиях по теории и методике обучения математике выделены следующие цели изучения первообразной в школьном курсе математики:

образовательные цели:

– «познакомить учащихся с операцией, которая является обратной по отношению к операции дифференцирования функций» [15];

воспитательная и развивающая цели:

– «ввести новый метод решения ряда задач (в частности, нахождение площади фигуры);

– показать известную универсальность математических методов; продемонстрировать основные этапы решения прикладных задач средствами математики;

– развитие логического мышления, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности и последующего обучения в высшей школе;

– воспитание отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей математики, эволюцией математических идей» [15].

Таким образом, при изучении понятия первообразной в школьном курсе алгебры и начал математического анализа можно выделить ряд задач:

– «рассмотреть примеры взаимно обратных операций дифференцирования и интегрирования;

– изучить понятие первообразной как результата операции интегрирования;

– выполнить упражнение типа «является ли данная функция *F* первообразной для другой заданной функции *f* на данном промежутке;

– познакомить обучающихся с основным свойством первообразной, с правилами нахождения первообразной;

– составить с учащимися таблицу первообразных для основных функций, изучаемых в школе;

– прорешать задачи на применение первообразной функции» [31].

1.2 Содержательный компонент обучения понятию «первообразная»

Согласно примерной основной образовательной программе средней общеобразовательной школы [49]:

– выпускник научится в 10–11 классах (на углубленном уровне):

«владеть понятиями «первообразная функция», «определенный интеграл»; применять теорему Ньютона – Лейбница и ее следствия для решения задач. В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов: решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов; интерпретировать полученные результаты» [49, с. 112-113];

– учащийся приобретет возможность научиться в 10–11 классе согласно требованиям профильного уровня: «оперировать понятием первообразной функции для решения задач; овладеть основными сведениями об интеграле Ньютона – Лейбница и его простейших применениях; уметь выполнять приближенные вычисления (вычисления определенного интеграла); уметь применять приложение определенного интеграла к решению задач естествознания» [49, с. 112-113].

Впервые знакомство с первообразной начинается в курсе алгебры и начала математического анализа 11 класса. Проанализируем содержание школьных учебников по алгебре и началам математического анализа по теме «Первообразная и интеграл»: Для этого были выбраны УМК Ш.А. Алимова [2], А.Г. Мордковича [32], С.М. Никольского [34], Г.К. Муравина [28]

Последовательность изложения теоретического материала по теме «Первообразная и интеграл» в учебниках Ш.А. Алимова [2], А.Г. Мордковича [32] и С.М. Никольского [34] имеют схожую структуру. Содержание теоретического материала по теме представлены в таблицах 1, 2 ,3, 4 соответственно.

Таблица 1 – Содержание темы «Первообразная и интеграл» по учебнику базового и углубленного уровня Ш.А. Алимова [2]

Номер и наименование параграфа	**Содержание параграфа**
§ 54. Первообразная	«Задача о материальной точке. Определение первообразной: «функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$» [2, с. 291]. Задачи, имеющие целью доказать, что некоторая функция является первообразной для функции $f(x)$» [2].
§ 55. Правила нахождения первообразных	«Понятие интегрирование как операция нахождения первообразной для данной функции. Таблица первообразных Правила интегрирования: «Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда: 1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$; 2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$» [2, с. 295]. Задачи на вычисление по указанным правилам.
§ 56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл	«Формула площади криволинейной трапеции. Определение интеграла. Формула Ньютона–Лейбница. Задачи на отыскание площади криволинейной трапеции» [2].

Продолжение Таблицы 1

§ 57. Вычисление интегралов	«Примеры на вычисление интегралов по формуле Ньютона–Лейбница с помощью таблицы первообразных и правил интегрирования» [2].
§ 58. Вычисление площадей с помощью интегралов	«Задачи на вычисление площадей плоских фигур, ограниченные функциями» [2].
§ 59*. Применение производной и интеграла к решению практических задач	«Простейшие дифференциальные уравнения. (задача о радиоактивном распаде вещества). Гармонические колебания. Примеры применения первообразной и интеграла» [2].

В учебнике А.Г. Мордковича [33] на изучение первообразной и интеграла выделяется 2 параграфа, каждый из которых разделён на пункты.

Таблица 2 – Содержание темы «Первообразная и интеграл» по учебнику базового и углубленного уровня А.Г. Мордковича [33]

Номер и наименование параграфа	**Содержание параграфа**
§ 20. Первообразная и неопределённый интеграл	
1. Определение первообразной	«Задача «о восстановлении закона движения по известной скорости» [33, с. 155]. Далее вводится определение первообразной: «функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$» [33, с. 156]. Примеры первообразных функций. Таблица первообразных
2. Правила отыскания первообразных	«3 правила на отыскание первообразных: – первообразная для суммы функций; – первообразная для произведения числа и функции; – первообразная для функции, зависящей от аргумента $kx+m$ (k и m – некоторые числа). Примеры на вычисление по данным правилам» [33].
3. Неопределённый интеграл	«Теорема о наличии бесконечного числа первообразных для функции. Определение неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. 3 правила интегрирования по аналогии с правилами отыскания первообразных и примеры вычисления интегралов» [33].
§21. Определённый интеграл	
1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла	«3 задачи с решениями: – «о вычислении площади криволинейной трапеции; – о вычислении массы стержня; – о перемещении точки» [33, с. 166-167].

Продолжение Таблицы 2

2. Понятие определенного интеграла	«Определение понятия определенный интеграл. Историческая справка о происхождении обозначения и термина «интеграл». Геометрический и физический смысл определенного интеграла» [33].
3. Формула Ньютона-Лейбница	«Описывается связь между первообразной и интегралом. Теорема о формуле Ньютона-Лейбница. Примеры вычисления определенных интегралов. Свойства определенного интеграла: интеграл суммы, о вынесении постоянного множителя за знак интеграла, аддитивное свойство» [32].
4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла Исторические сведения	«Формула для вычисления площади плоских фигур и примеры на вычисление по данной формуле. Историческая справка об интегральном и дифференциальном исчислении» [33].

Таблица 3 – Содержание темы «Первообразная и интеграл» по учебнику базового и профильного уровня С.М. Никольского [32]

Номер и наименование параграфа	**Содержание параграфа**
6.1. Понятие первообразной	«Определение первообразной функции на интервале и на отрезке. Определение неопределенного интеграла. Примеры вычисления интегралов. Основной свойство (интеграл суммы нескольких функции) неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов» [32].
6.2*. Замена переменной. Интегрирование по частям	«Метод подстановки (замены переменной) и примеры на вычисление. Метод интегрирования по частям и примеры на вычисление» [32].
6.3. Площадь криволинейной трапеции	«Площадь криволинейной трапеции как предел интегральных сумм» [32].
6.4. Определенный интеграл	«Операция интегрирования функции. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Примеры на применение геометрического смысла интеграла» [32].
6.5*. Приближенное вычисление определенного интеграла	«Нижние и верхние интегральные суммы. Метод трапеций – метод приближенного вычисления интеграла. Примеры на приближенное вычисление интегралов» [32].
6.6. Формула Ньютона — Лейбница	«Теорема Ньютона – Лейбница с доказательством. Примеры на применение формулы Ньютона – Лейбница к вычислению площади фигуры» [32].

Продолжение Таблицы 3

6.7. Свойства определенного интеграла	«Три свойства определенного интеграла. Примеры на применение каждого свойства с подробными решениями» [32].
6.8*. Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах	«Примеры на выведение формулы площади круга, объёма тела вращения, работы, массы стержня переменной плотности, давления жидкости на стенку, центра тяжести» [31].
6.9*. Понятие дифференциального уравнения	«Определение дифференциального уравнения, дифференциального уравнения первого и второго порядка. Решение дифференциального уравнения Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Примеры с решениями» [32].
6.10*. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям	«Нахождение закона движения тела по его скорости. Нахождение закона движения тела по его ускорению. Охлаждение тела. Радиоактивный распад. Гармонические колебания» [31, с. 206-209].

Таблица 4 – Содержание темы «Первообразная и интеграл» по учебнику базового и профильного уровня Г.К. Муравина [28]

Номер и наименование параграфа	**Содержание параграфа**
12.Площадь криволинейной трапеции	«Криволинейная трапеция. Интегральная сумма. Интеграл. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Формула объема тела вращения. Геометрический и механический смысл интеграла» [28]
13.Первообразная.	«Первообразная. Приращение первообразной. Интегрирование. Основное свойство первообразных. Простейшие правила нахождения первообразных. Таблица первообразных основных функций» [28]

В учебно-методической литературе отмечается, что существует несколько способов изучения первообразной и интеграла: «либо сначала даётся определение определенного интеграла, а первообразная появляется позже, когда учащийся уже могут оценить преимущества, даваемые формулой Ньютона-Лейбница, либо сначала вводится понятие первообразной, а потом определенный интеграл» [15, с. 64]. При этом и введение определённого интеграла бывают разными: интеграл как приращение первообразной – один из способов, и другой способ – интеграл как предел интегральных сумм [2, 34, 33].

В учебниках Ш.А. Алимова [2], А.Г. Мордковича [33] и С.М. Никольского [32] сначала изучается понятие первообразной функции, которое в дальнейшем применяется для решения задач на нахождения площадей фигур.

В учебнике Г.К Муравина [28] сначала вводится понятия интеграла, с помощью которого находят площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, объем многогранника, а только затем знакомятся правилами интегрирования и формулами первообразных и вычисляют площади [58].

Остановимся подробнее на учебнике А.Г. Мордковича [33]. Перед введением понятия первообразной, автор описывает особенности применения производной и выделяет два типа задач: прямые и обратные. «Обратный тип иллюстрируется на примере задачи о движении материальной точки, в которой наглядно показывается принцип восстановления закона движения по известной скорости. Далее дается определение интегрирования как процесса нахождения функции по заданной производной» [33].

После рассмотрения задачи, автор даёт определение понятию «первообразная»: «функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$» [33, с. 156]. И отмечает, что на практике промежуток X обычно не указывают, но подразумевают как естественную область определения функции. Так же автор приводит примеры первообразных функции и таблицу для отыскания первообразных элементарных функций [33].

Затем акцентируется внимание на трёх правилах нахождения первообразных, причем с доказательством подтверждено только правило 3, в то время как оставшиеся два рассматриваются как очевидные):

– первообразная для суммы функций;

– первообразная для произведения числа и функции;

– первообразная для функции, зависящей от аргумента $kx+m$ (k и m – некоторые числа) [32].

Далее вводится понятие «неопределенный интеграл», которое в учебнике формулируется как «множество всех первообразных, составляется интегральная сумма данной функции на конкретном отрезке, а ее предел называется определенным интегралом данной функции на данном отрезке» [32].

Отметим, что существует несколько подходов определения понятия «определенный интеграл». С конца XVII в. и до начала XIX в определенный интеграл рассматривался как «сумма бесконечного числа бесконечно малых величин» [15, с. 69]. Ещё один подход – представление интеграла как предела интегральных сумм. Такой подход часто используется в вузовских учебниках. И третий подход, который рассматривается в современных школьных учебниках, это определение понятия определенный интеграл как разность значений первообразной функции на концах рассматриваемого отрезка. То есть задается на основе введённого понятия «первообразная функция» [15].

На следующем этапе, в учебнике А.Г. Мордковича, рассматривается формула Ньютона-Лейбница. Данная формула иллюстрирует взаимосвязь между понятиями «первообразная» и «определенный интеграл» [33].

Тема завершается примерами вычисления интегралов и площадей фигур, ограниченных графиками функций, и перечисляются свойства определенного интеграла:

– «интеграл от суммы функций эквивалентен сумме интегралов, приводится доказательство;

– постоянный множитель можно вынести за знак интеграла;

– аддитивное свойство интеграла, приводится доказательство» [31].

Анализа теоретического материала учебниках школьного курса показал, что в теме «Первообразная и интеграл» рассматриваются:

– «задачи, приводящие к понятиям первообразной, определенного интеграла;

– основные понятия и термины: «первообразная», «интегрирование», «неопределенный интеграл», «определенный интеграл»;

– свойства неопределенного и определенного интегралов;

– таблица первообразных и интегралов основных элементарных функций;

– правила нахождения первообразных функции и интегралов, формула Ньютона – Лейбница,

– геометрический и физический смысл определенного интеграла» [32].

В учебнике С.М. Никольского [32] для профильного уровня описаны методы интегрирования: «введение новой переменной, интегрирование по частям; приближенное вычисление определенного интеграла» [32].

Теперь обратимся к содержанию задачного материала по теме «Первообразная и интеграл».

Следует отметить, что учебный комплект А.Г. Мордковича [33] разделен на две части – учебник и задачник, причём задания идут в той же последовательности, что и теоретический материал. В учебниках Ш.А. Алимова [2] и С.М. Никольского [32] подборка задач располагается сразу после изложения теоретического материала в параграфах.

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры и начал математического анализа 11 класса можно выделить следующие основные типы задач (базового уровня) по теме «Первообразная и интеграл»:

1. Задачи на доказательство установление того, что некоторая функция $F(x)$ является перообразной для функции $f(x)$.

2. Нахождение первообразной функции.

3. Практическое применение первообразной.

4. Вычисление интегралов.

5. Вычисление площадей с помощью интеграла.

6. Решение дифференциальных уравнений.

7. Исследование функции по первообразной.

8. Задачи на интеграл параметром.

Приведём различные типы задач с решением по учебнику А.Г. Мордковича. Рассмотрим на примере задачников базового и профильного уровней А.Г. Мордковича [30].

1. Задачи на доказательство установления того, что некоторая функция $F(x)$ является перообразной для функции $f(x)$.

Задача 1. «Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = x^2 + x^3$, $f(x) = 2x + 3x^2$» [30, с. 162].

Решение:

Учитывая, что $F'(x) = f(x)$.

Так как $F(x) = x^2 + x^3$,

то $F'(x) = (x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2 = f(x)$.

Что и требовалось доказать.

2. Нахождение первообразной функции.

Задача 2. «Для функции $y = f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную: $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$» [30, с. 162].

Решение.

Используя свойство суммы первообразных и таблицу первообразных, получим: $F(x) = e^x + \ln|x| + C$, где C – произвольно число.

Задача 3. «Для данной функции $y = sinx$ найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку $M\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{4}\right)$» [30, с. 163].

Решение: применим определение первообразной и правило вычисления первообразных:

$$F(x) = -cosx + C$$

$$F(M) = -cos\frac{\pi}{3} + C = -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{4}$$

Откуда $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

А значит, $F(x) = -cosx + \frac{3}{4}$.

Ответ: $-cosx + \frac{3}{4}$.

3. Практическое применение первообразной.

Задача 4. «Точка движется по координатной прямой, ее скорость задана формулой $v = 1 + 2t$, t – время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени t = 2 координата точки равнялась числу 5» [30, с. 163].

Решение:

Задача сводится к нахождению первообразной функции для скорости.

$s(t) = v(t) = t + 2\frac{t^2}{2} + C = t + t^2 + C.$

При $t = 2,$ получим: $s(2) = 2 + 2^2 + C = 5$. *Откуда* $C = 5 - 6 = -1$.

Таким образом, $s(t) = t + t^2 - 1$.

Ответ: $s(t) = t + t^2 - 1$.

4. Вычисление интегралов.

Задача 5. «Вычислите $\int_0^4 e^{0,5x-1}dx$» [30, с. 165].

Решение:

$$\int_0^4 e^{0,5x-1}dx = \frac{1}{0,5}e^{0,5x-1}\Big|_0^4 = 2e^{0,5x-1}\rfloor_0^4 = 2e^{0,5\cdot 4-1} - 2e^{0,5\cdot 4-1} =$$

$$= 2e - 2e^{-1}.$$

Сначала находим первообразную функцию $F(x) = \frac{1}{0,5}e^{0,5x-1}$ (неопределенный интеграл).

Затем подставляем значение верхнего предела – числа 4 в первообразную функцию, далее значение нижнего предела – числа 0 в первообразную функцию, после чего необходимо выполнить вычисления.

Ответ: $2e - 2e^{-1}$.

5. Вычисление площадей с помощью интеграла.

Задача 6. «Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 4$» [44, с. 167].

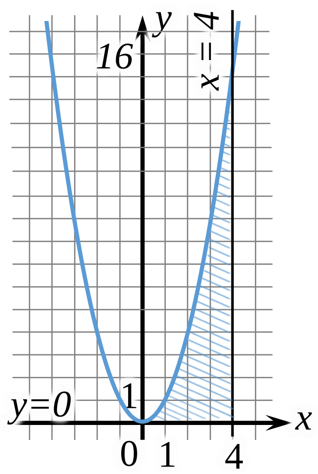


Рисунок 1 – Площадь криволинейной трапеции

Решение:

Изобразим графики функций y=x^2 и x=4 в одной системе координат, и отметим область, ограниченную данными линиями и y=0 (рисунок 1).

Вычислим площадь закрашенной части, воспользуемся определением определенного интеграла и формулой Ньютона – Лейбница, получим:

$$S = \int_0^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

Ответ: $21\frac{1}{3}$.

6. Решение дифференциальных уравнений.

Задача 7. «Найдите функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую заданному условию (дифференциальному уравнению) $y' = x^4 - 3x^2$» [32, с. 127].

Решение:

Требуется найти функцию первообразную, значит:

$$y = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + C.$$

Ответ: $y = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + C$.

В задачах такого типа рекомендуется делать проверку:

$$y' = \left(\frac{1}{5}x^5 - x^3 + \mathrm{C}\right)' = x^4 - 3x^2.$$

7. Исследование функции по первообразной.

Задача 8. «Исследуйте функцию $y = F(x)$ на монотонность и экстремумы, если известно, что она является первообразной для функции $y = f(x)$: $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$» [32, с. 131].

Решение:

Используя правило об отрицательной производной, которая свидетельствует об убывании функции. И наоборот, положительная производная на заданном отрезке говорит о возрастании функции на этом отрезке. Для исследования функции $F(x)$ на монотонность приравняем $f(x)$ к нулю и найдем области знакопостоянства:

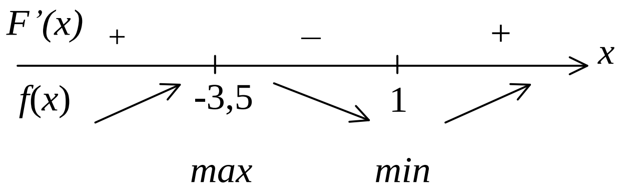
$F'(x) = f(x) = 0,$

$2x^2 + 5x - 7 = 0,$

$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 = 81,$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{4}; x_1 = 1; x_2 = -\frac{7}{2} = -3{,}5.$

Отметим нули производной на числовой оси. Исследуем знак производной на интервалах, на которые стационарные точки делят область определения функции.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3{,}5)$, $(1; +\infty)$, убывает на интервале $(-3{,}5; 1)$.

$x = -3{,}5$ – точка максимума, так как $\begin{cases} F'(x) > 0, & при\ x \in (-\infty; -3{,}5), \\ F'(x) < 0, & при\ x \in (-3{,}5; 1). \end{cases}$;

$x = 1$ – точка минимума, так как $\begin{cases} F'(x) < 0, \ \ при \ \ x \in (-3{,}5; 1), \\ F'(x) > 0, \ \ при \ \ x \in (1; \infty); \end{cases}$.

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3{,}5)$, $(1; +\infty)$, убывает на интервале $(-3{,}5;\ 1)$, $x = -3{,}5$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума.

8. Решение уравнений.

Задача 9. «Решите уравнение

$\int_3^t \left(\frac{1}{x-2} + 2x - 3\right) dx = ln(t-2) - t^3 + 6$, где $t > 3$» [44, с. 140].

Решение:

Вычислим интеграл, получим:

$$\int\limits_3^t \left(\frac{1}{x-2} + 2x - 3\right) dx = \int\limits_3^t \frac{1}{x-2} dx + 2\int\limits_3^t x\, dx - 3\int\limits_3^t dx =$$

$$= (\ln|x-2| + x^2 - 3x)|_3^t \overset{(t>3)}{\triangleq} \ln(\mathrm{t}-2) + t^2 - 3t - \Bigg(\underbrace{\ln 1}_{0} + \underbrace{3^2 - 3 \cdot 3}_{0}\Bigg) =$$

$$= \ln(t-2) + t^2 - 3t.$$

Приравняем левую часть уравнения к правой, получим:

$$\ln(t-2) + t^2 - 3t = \ln(t-2) - t^3 + 6.$$

Так как $t > 3,$ то данное уравнение равносильно уравнению

$$t^3 + t^2 - 3t - 6 = 0.$$

Подбором получаем, что $t = 2$ является корнем уравнения, так как

$2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 6 = 0.$

Разделим $t^3 + t^2 - 3t - 6$ на $\mathrm{t} = 2$, получим $t^2 + 3t + 3.$ Значит

$$\underbrace{(t^2 + 3t + 3)}_{\substack{\text{не имеет корней,} \\ \text{так как } D<0}} (t-2) = 0,$$

$t = 2$ – единственный корень, но он не удовлетворяет условию $t > 3$.

Таким образом, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

9. Задачи с параметром.

Задача 10. «При каком положительном значении параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = a,$ равна $\frac{7}{8}$?» [32, с. 147].

Решение:

Изобразим в системе координат фигуру, ограниченную линиями

$$y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = a.$$

При этом возможны два случая, при $a > 1$ и $0 < a < 1$ (рисунок 2).

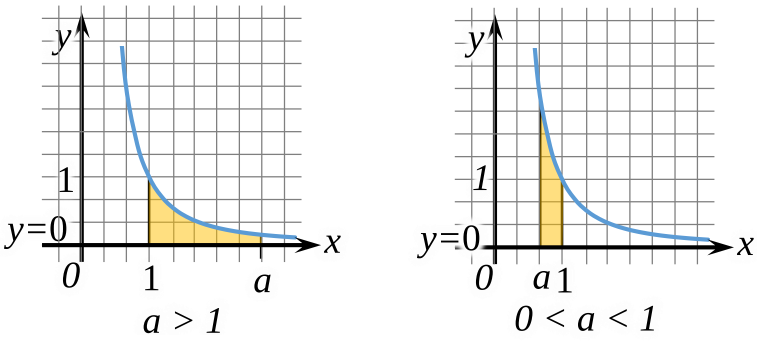


Рисунок 2 – Графики функций к решению задачи 10

При $a > 1$: $S = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \int_1^a x^{-2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^a = -\frac{1}{a} + 1.$

По условию, $-\frac{1}{a} + 1 = \frac{7}{8}$, откуда получаем, что $\frac{1}{a} = \frac{1}{8}$; $a = 8.$

При $0 < a < 1$: $S = \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_a^1 x^{-2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_a^1 = -1 + \frac{1}{a}.$

По условию, $-1 + \frac{1}{a} = \frac{7}{8}$, откуда получаем, что $\frac{1}{a} = \frac{15}{8}$; $a = \frac{8}{15}.$

Ответ: $a = 8, a = \frac{8}{15}.$

Тема «Первообразная и интеграл» включена так же и в кодификатор элементов содержания по математике для составления КИМов для проведения Единого государственного экзамена профильного уровня. Анализ спецификации и материалов открытого банка заданий ЕГЭ показал, что применение первообразной встречается в заданиях под номером 7 и 12. Можно выделить два типа задач на применение первообразной в заданиях ЕГЭ профильного уровня:

1) применение геометрического смысла первообразной (вычисление площади плоской фигуры);

2) исследование графика первообразной функции, использование свойств первообразной.

Приведём примеры задач с решением из отрытого банка задач ЕГЭ профильного уровня.

Пример 1. «На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + \frac{19}{2}x + 8$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры» (рисунок 3) [23].

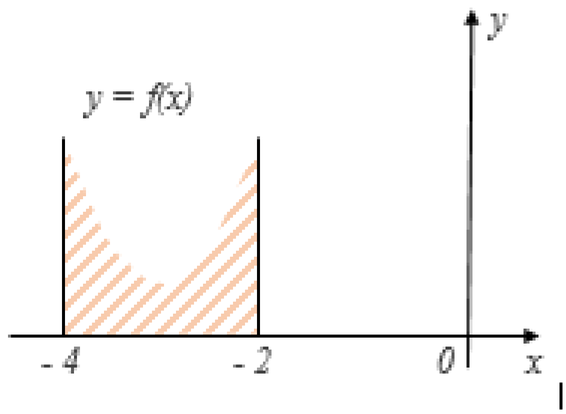


Рисунок 3 – Графическая часть примера 1

Решение: используем геометрический смысл первообразной – площадь заштрихованной фигуры равна разности значений первообразных в точках -2 и -4. Получим:

$$F(-2) - F(-4) = \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 + \frac{19}{2}\cdot(-2) + 8\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{3}(-4)^3 + 3\cdot(-4)^2 + \frac{19}{2}\cdot(-4) + 8\right) =$$

$$= -1\frac{2}{3} - \left(-3\frac{1}{3}\right) = 1\frac{2}{3}.$$

Ответ: $1\frac{2}{3}$.

Пример 2. «На рисунке 4 изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?» [23].

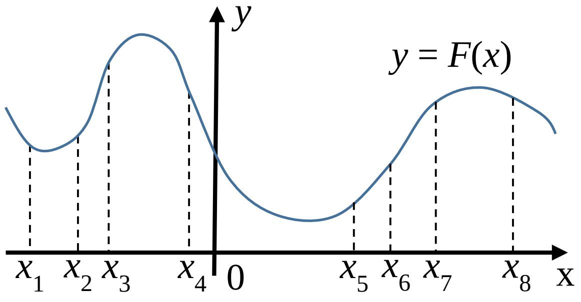


Рисунок 4 – Иллюстрация к примеру 2

Решение: задача сводится к тому, чтобы определить, в каких точках значение производной отрицательно. Производная отрицательна на тех промежутках, на которых функция убывает. На графике первообразная убывает в точках x_1, x_4, x_8. Значит функция $f(x)$ принимает отрицательные значения в трёх точках.

Ответ 3.

Пример 3. «На рисунке 5 изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале (-7; 5). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [-5; 2]» [44].

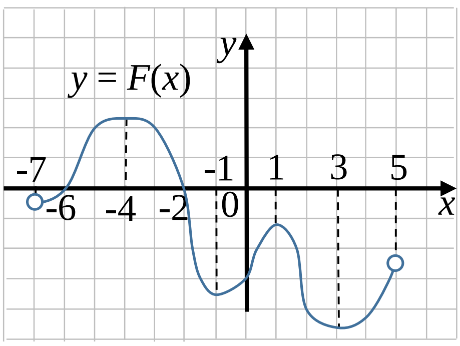


Рисунок 5 – Иллюстрация к примеру 3

Решение: воспользуемся тем, что производная от первообразной есть сама функция. А значит, задача сводится к нахождению точек, в которых производная равна нулю, то есть точки экстремумов первообразной функции. На отрезке [-5; 2] ровно 3 точки экстремума. А значит на отрезке [-5; 2] уравнение $f(x) = 0$ имеет 3 решения.

Ответ: 3.

1.3 Методы, формы и средства обучения понятию «первообразная»

Метод обучения, как известно, означает способ достижения определенных целей, в соответствии с которым строится деятельности обучающихся. В дидактике приводятся различные классификации методов обучения [41].

По *источнику знаний*, классифицируют такие методы, как словесные:

1. Беседа по сути представляет научный диалог между педагогом и учениками. Подразумевается, что ученики хотя бы частично знакомы с первообразной и могут поддержать диалог.

2. Лекция, предполагает систематизированное научное изложение темы, в котором больше внимание уделяется теоретическим аспектам. Учебная программа не предполагает использование лекции как метода обучения в средней школе в чистом виде. Традиционно после изложения теоретического материала для закрепления навыка даются практические задания.

3. Рассказ на уроках алгебры как метод обучения используется крайне редко, так как подразумевает развернутый сюжет. Педагог может включать в урок фрагменты рассказа об истории открытия первообразной, сведения об ученых, в сферу научных интересов которых входила первообразная и другие.

4. Работа с книгой применяется довольно часто при изучении первообразной, так как весь необходимый материал изложен в учебниках.

Наглядные (карточки, презентации, видео). В век цифровизации презентации и видеоуроки являются существенным подспорьем для педагога. Дидактическая выгода презентации заключается в том, что в ней информация подается тезисно и легко запоминается. Слайды, как правило, имеют красивое и яркое художественное оформление и нравятся учащимся. Карточки могут использоваться на самостоятельных работах.

«Практические:

1) лабораторная и исследовательская работа;

2) составление таблиц, схем, диаграмм и др.» [41].

Все эти методы могут применяться при отработке практического навыка извлечения первообразной в рамках авторского педагогического подхода. УМК не подразумевают обязательное их применение. Однако отработка практического навыка с помощью выполнения заданий, предусмотренных УМК, является обязательной.

По *характеру учебных задач*, выделяют методы:

1. «Приобретение учащимися новых знаний: а) подготовка к слушанию объяснения учителя; б) изложение учебного материала учителем; в) осмысление и закрепление учащимися материала после объяснения учителем; г) приобретение учащимися новых знаний без предварительного их изложения учителем.

2. Формирование у школьников умений и навыков.

3. Практика учащихся в применении знаний.

4. Практика учащихся в творческой деятельности.

5. Закрепление знаний путем повторения.

6. Проверка знаний, умений и навыков» [41].

Все эти методы применяются для логического и последовательного изучения первообразной, формирования у учащихся системных знаний, как теоретического, так и прикладного значения.

Классификация методов обучения по *характеру учебно-познавательной деятельности*: «объяснительно-иллюстративный метод, репродуктивный метод, метод проблемного изложения, частично-поисковый и исследовательский методы. Все эти методы выстроены последовательно в соответствии с уровнем самостоятельности учащихся, они опираются на переход от небольшой самостоятельности учащихся к их полной самостоятельности» [41]. Первообразная изучается в старшей школе, когда навыки самостоятельности и само регуляции уже сформированы. Однако, вышеперечисленные методы могут применяться с целью разнообразить учебный процесс, сделать его более творческим и интересным.

Остановимся на тех методах обучения, которые целесообразно использовать в процессе изучения понятия «первообразная».

Организационные методы: беседа; наглядный; индуктивный; дедуктивный.

Методы стимулирования и мотивации: игровой момент; наличие интересного познавательного материала; проблемная ситуация; учебная дискуссия.

Контролирующие методы: индивидуальный опрос; фронтальный опрос; зачет.

Рассмотрим представленные методы обучения более подробно. «Беседа предполагает диалог учителя с классом. Этот метод организуется при помощи системно выстроенных по содержанию устных задач, призванных подводить учащихся к пониманию определенного тематического материала. Для эффективного применения беседы необходимо, чтобы педагог владел приемами построения правильных выводов из диалога. Беседа призвана с помощью устных вопросов и упражнений, стимулировать деятельность учащихся, в ходе которой они применяют, обобщают, систематизируют, анализируют усвоенный ранее учебный материал, делают выводы, а также учатся понимать прикладное значение темы. Такие беседы носят объяснительный характер, но ориентированы на стимулирование мыслительной деятельности учащихся. Приведем пример беседы, которая в равной мере может относиться и к методам проблемного обучения, и иллюстрировать пример эвристической беседы» [41].

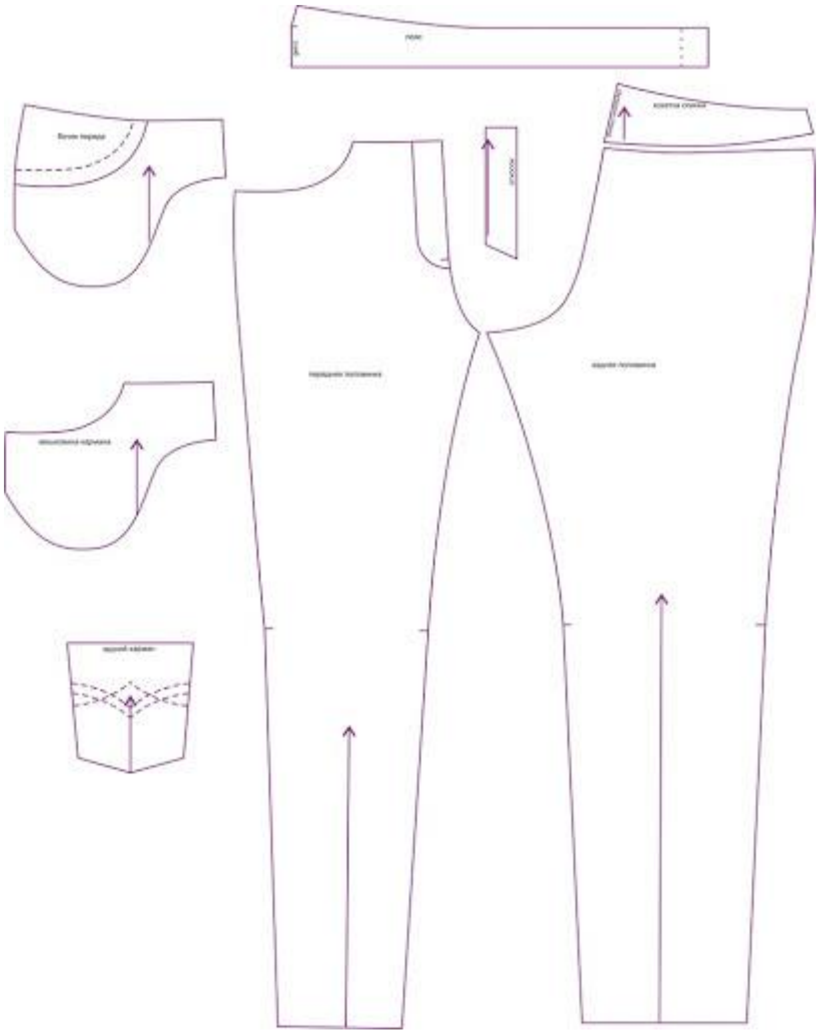


Рисунок 6 – Выкройка женских брюк как пример криволинейной фигуры

Учитель: Рассмотрим рисунок 6. Ребята, как выдумаете, что на нем изображено?

Дети выдвигают предположения…

Мы видим на рисунке выкройку женского платья.

Учитель: Для чего ее используют?

Дети: Ее используют для раскроя-накладывают бумажные макеты на ткань, а потом вырезают и сшивают.

Учитель: Совершенно верно. Имея такой макет, можно рассчитать сколько материала нужно, какого размера должен быть кусок ткани. Представьте, что мы шьем платье из очень дорогого материала. Соответственно, необходимо очень точно рассчитать площадь фигуры, которую вы видите на рисунке. Как это можно сделать?

Дети: Разделить сложную фигуру на более простые и найти их площадь.

Учитель: Правильно. Для расчета площади простых криволинейных фигур в науке используется первообразная.

Наглядным методам обучения в современной школе придается очень большое значение [41]. Они призваны объединять чувственное и теоретическое познание, и используются для тех случаев, когда визуальное восприятие учебного материала является базой мыслительного процесса учащихся. Современные цифровые средства обучения, образовательные порталы и платформы предлагают богатейший выбор видеоконтента по теме. Огромное количество роликов можно найти на youtube.com [32]. Удачный материал представлен на платформе videouroki.net [35], interneturok.ru [36].

«При организации обучения старшеклассников, конечно, нужно помнить о логическом характере учебного материала, который, в свою очередь, актуализирует соответствующие логические методы. Среди логических методов выделяют прежде всего, индуктивный и дедуктивный методы обучения. В ходе применения индуктивного метода педагог предлагает соответствующие задачи, которые могут носить и проблемный характер. В процессе решения, учащиеся поступательно приходят к некоторому обобщению» [59].

Т.С. Гришина своей статье «Логический прием сравнений в задачах математического анализа» [11] рассказывает о том, что, прибегая к приему сравнения можно сокращать количество ошибок обучающихся, а работу с первообразными сделать более увлекательной. Например, еще до знакомства с определением первообразной полезно дать учащимся задачи:

1. Найти производную функции:

а) $f(x)= 2\cdot x^3 - 0{,}3$; б) $f(x)= 5\cdot\sin\frac{x}{4} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

2. Найти такую функцию, чтобы ее производной была данная функция:

а) y(x)= 6·x^2 ;   б) y(x) =20cos$\frac{y}{4}$ +2.

Решение подобных задач позволит лучше освоить определение и свойства первообразной.

Говоря о правилах интегрирования, необходимо акцентировать внимание, на то что правила нахождения производной от суммы и первообразной от суммы – одинаковые, так же, как и правила умножения постоянной на производную, постоянной на первообразную.

В методическом пособии для учителя Г.К. Муравин [58] также прибегает к приему – логическому сравнению, школьники встречаются с построением графика производной по графику функции. Рисунок учебника перерисовывается в тетрадь, а требуемый график строится в той же системе координат другим цветом. Приведем возможные графики (рисунок 7).

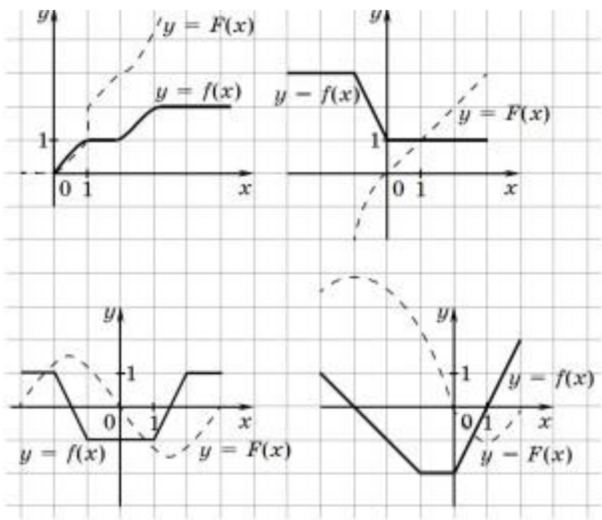


Рисунок 7 – Прием логического сравнения
при изучении первообразной

Таким образом, учащиеся сначала усваивают частные факты, а потом уже обобщают их, формируя целостную картину. В ходе применения индуктивного метода педагог сразу сообщает общую ситуацию, а учащиеся фрагментируют его и выделяют частные случаи.

Проблемная ситуация, в качестве метода обучения, применяется педагогом в тех случаях, когда необходим поиск новой информации или решения. Тогда педагог разбивает задачу на подзадачи, каждую из которых учащиеся решают самостоятельно, высказывают вслух предположения о путях решения возникшей проблемы, при этом выявляют причины ее возникновения, объясняют ее происхождение, ищут пути разрешения поставленной проблемы.

Например, в статье Л.И. Токарева «Первообразная и интеграл» [46] приводит конспекта урока, в котором предлагает школьникам учебную задачу (проблемную ситуация), решить которую они могут «угадыванием» первообразной для функции. Приведем пример: «Материальная точка движется ср скоростью v=$\frac{1}{3} \cdot t^4 - 12 \cdot t^3 + \frac{1}{25} \cdot t + 5$. Найти закон изменения пути». [46] После того как проблемная ситуация задана и учащиеся осознали проблему, возникает необходимость – найти о функцию по производной, для ответа на этот вопрос нужно операцию, обратную дифференцированию. Приемы «угадывания» первообразной описан в и статье В.А. Петрова «Выбор ответов в заданиях раздела А Единого Государственного Экзамена по математике без решения задач» [37].

Приведем пример еще проблемной ситуации.

Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 8.

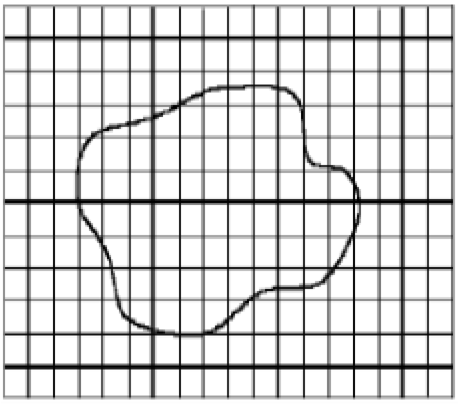


Рисунок 8 – Прием проблемной ситуации при изучении первообразной

В качестве стимулирующего и мотивирующего инструмента применяются учебные дискуссии, в которых проигрывается сюжет познавательного спора. «В процессе дискуссии школьники учатся правильно задавать вопросы, а также отвечать на них, выражать свое мнение, высказывать обоснованную точку зрения. Высказывая разные точки зрения по одной и той же проблеме, школьники невольно делятся на сторонников и противников того или иного объяснения. Роль учителя, в данном случае, важна тем, что он должен дать аргументированное заключение» [62].

Г.И. Саранцев в работе «Методика обучения математики в средней школе выделяет противоречие между трактовкой методов обучения и конкретными методами обучения. Для разрешения этого противоречия автор предлагает рассматривать метод обучения математике как «способ движения (развития) деятельностей учителя, ученика и математического содержания» [43].

Не стоит забывать о том, что тема «Первообразная и интеграл» носит практическую направленность и является пропедевтикой интегрального исчисления, которое находит применение в многих сферах науки: физики, астрономии, экономики и др. В своей статье «О прикладной и практической направленности обучения математики» Ю.М. Колягин [21] говорит о том, что важным средством, обеспечивающим достижение прикладной и практической направленности – применение межпредметных связей, интеграцию в другие учебные дисциплины. Так М. Кац [16] приводить целую систему задач с физическим содержанием, при решении которых требуются знания и навыки по вычислению первообразных.

Методы контроля являются важной частью всего учебного процесса в силу того, что обеспечивают обратную связь. Зачет является одним из самых распространенных методов контроля. «Теоретические зачеты при обучении в старших классах проводятся по каждой теме и содержать все обязательные вопросы. В первую часть входят вопросы базового уровня, в дополнительную часть – вопросы базового и углубленного уровней. Учащихся знакомят с вопросами в начале изучения каждой темы. Зачет проводится за один-два урока до запланированного календарным планом завершения изучения темы, при этом зачетной системой предполагается трехбалльная систему оценки: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» (оценка «неудовлетворительно» предусматривает пересдачу)» [59].

Одним из методов контроля за эффективностью учебно-познавательной деятельностью является фронтальный опрос, который обычно проводиться к началу урока на этапе актуализации знаний. Нередко фронтальный опрос принимает форму оживленной беседы, в котором активно участвуют все учащиеся класса, для создания психологической обстановке можно сочетать в виде дидактической игры «Верно-Неверно» или «Да-Нет» и т.д.

Приведем пример вопросов по фронтальному опросу учащихся.

Как называется процесс отыскания функции по заданному значению производной?

Дайте определение первообразной функции?

Как «по-житейски» можно назвать первообразную функции?

Верно ли, что первообразная суммы равна сумме первообразных?

Существует ли правило нахождения произведения и частного первообразных?

Что такое «поправочный множитель»?

В каких из табличных формул фигурирует модуль?

Верно ли, что задача о нахождении закона движения по заданной скорости – физический смысл первообразной?

Что такое неопределенный интеграл?

Верно ли, что постоянный множитель можно вынести за знак интеграла?

Аналогично фронтальному опросу для актуализации знаний и быстрого интегрирования в тему можно проводит математические диктанты [28].

Проведение зачетных уроков с применением разно уровневых задач дает учащимся равные возможности для достижения положительных результатов, позволяет полнее развивать и реализовывать свои способности, активизирует деятельность учащихся, формирует их учебные навыки. Отметки, полученные при такой системе контроля, более объективны, так как все учащиеся должны отчитаться по обязательным вопросам, заранее им известным. Итоговая оценка учащегося в зачете зависит от того, насколько продуктивно освоена им теоретическая часть темы. Известный заранее объем требований к зачету, а также равенство шансов и возможностей для получения более высокой оценки, активизирует мотивацию для достижения успеха в обучении.

После проведения зачета и анализа его результатов на следующем уроке разбираются вопросы, вызвавшие наибольшие затруднения, а через урок проводится соответствующая контрольная работа. При это, помимо зачёта в конце изучения темы, так же целесообразно проводить текущий контроль в виде самостоятельной работы. Её можно проводить как в начале, так и в конце урока, и как правило, она рассчитан на 10-15 минут. Рассмотрим пример самостоятельной работы, проводимой после изучения таблицы первообразных и правил нахождения первообразных (таблица 5).

Таблица 5 – Пример самостоятельной работы для текущего контроля при изучении первообразной

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Сформулируйте свойство первообразной функции.	1. Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.
2. Найдите общий вид первообразных для функций	
а) $f(\mathrm{x}) = x^4$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$; в) $f(x) = 8e^x$; г) $f(x) = \cos(5x + 3)$.	а) $f(\mathrm{x}) = x^7$; б) $f(x) = \cos x + e^x$; в) $f(x) = \frac{5}{\mathrm{x}}$; г) $f(x) = \sin(4\mathrm{x} - 7)$.

На основании вышесказанного, можно сделать вывод, что применять описанные методы нужно комплексно. Взаимодополняющее друг в друга, методы обучения освещают различные стороны взаимодействия педагога и учащихся.

Остановимся теперь на формах обучения. Формы обучения выражают организационный аспект учебной деятельности. В российской дидактике существуют следующие формы обучения:

– коллективную (иногда называют фронтальной);

– групповую; индивидуальную.

Они отличаются друг от друга количеством участников. «В ходе коллективного обучения педагог ведет диалог со всем классом, для всех учащихся поставлена общая цель, выделены одинаковые задачи. Учитель организует сотрудничество участников коллективной работы, распределяет роли и обязанности, задает темп и объем сотрудничества» [48].

В группе ученики получают возможность качественной взаимообогащающей коммуникации, и плюрализма. К групповой форме организации учебной деятельности относится также работа в парах. Ее удобно организовать для школьников, сидящих за одной партой.

В статье И.Ф. Шариповой и Ф.Я. Мардановой «Преимущества работы в малых группах при изучении темы первообразной функции» приведён опыт работы в малых группах. Авторы статьи приводят следующие преимущества такого метода обучения: «1) происходит улучшение усвоения содержания обучения, что приводит к улучшению коммуникативных навыков учащихся; 2) появляется возможность экономии времени, так как происходит работа с несколькими учащимися одновременно; 3) в группе наблюдается активное участие всех учащихся» [54].

Индивидуальная форма работы выражается в том, что каждый ученик выполняет свое задание самостоятельно и автономно от других, что предполагает высокий уровень произвольности. Этот вид работы применяется с целью развития способности к самообразованию, навыков самоконтроля, способности четко организовать свою деятельность.

«Средства обучения – это материальный или идеальный объект, который использован учителем и учащимися для усвоения, закрепления и повторения знаний» [43]. По составу объектов средства обучения разделяются на материальные (учебники и пособия, таблицы, модели, макеты, средства наглядности, учебно-технические средства) и идеальные (усвоенные ранее знания и умения, которые используется учащимися для усвоения новых знаний). Их использование позволяет активизировать самостоятельную работу учащихся. Для обучения понятию «первообразная» были отобраны следующие средства обучения, представленные в таблице 6.

Таблица 6 – Средства обучения понятию «первообразная»

Элементы содержания темы	Средства обучения
1. Понятие первообразной	1. Печатные таблицы. 2. Схема определения понятия «первообразная». 3. Информационные и классификационные схемы. 4. Видео уроки.
2. Площадь криволинейной трапеции	
3. Определенный интеграл	
4. Формула Ньютона — Лейбница	
5. Свойства определенного интеграла	

Печатными таблицами при изучении первообразной служат таблица первообразных функций и правила вычисления первообразной, которые выдаётся каждому ученику.

Схема определения понятия «первообразной» составляется учителем совместно с учениками. Средства обучения позволяют ученикам более успешно решать задачи и являются средством наглядности. Например, прикладное применение первообразной можно показать учащимся с помощью информационной таблицы (на мотивационном этапе) (рисунок 9).

Информационные таблицы и схемы могут использоваться в качестве готовых средств, а могут составляться учениками в процессе повторения. Развитие у учащихся способностей преобразовывать учебную информацию – составляющая развивающих целей обучения математике.

Перед изучением применения интеграла к вычислению площадей, необходимо создать у учащихся правильное представление о криволинейной трапеции как о фигуре, ограниченной графиком непрерывной функции, осью *Ox* и прямыми, параллельными оси *Oy*. При этом, наглядным примером могут служить карточки с рисунками (рисунок 10).

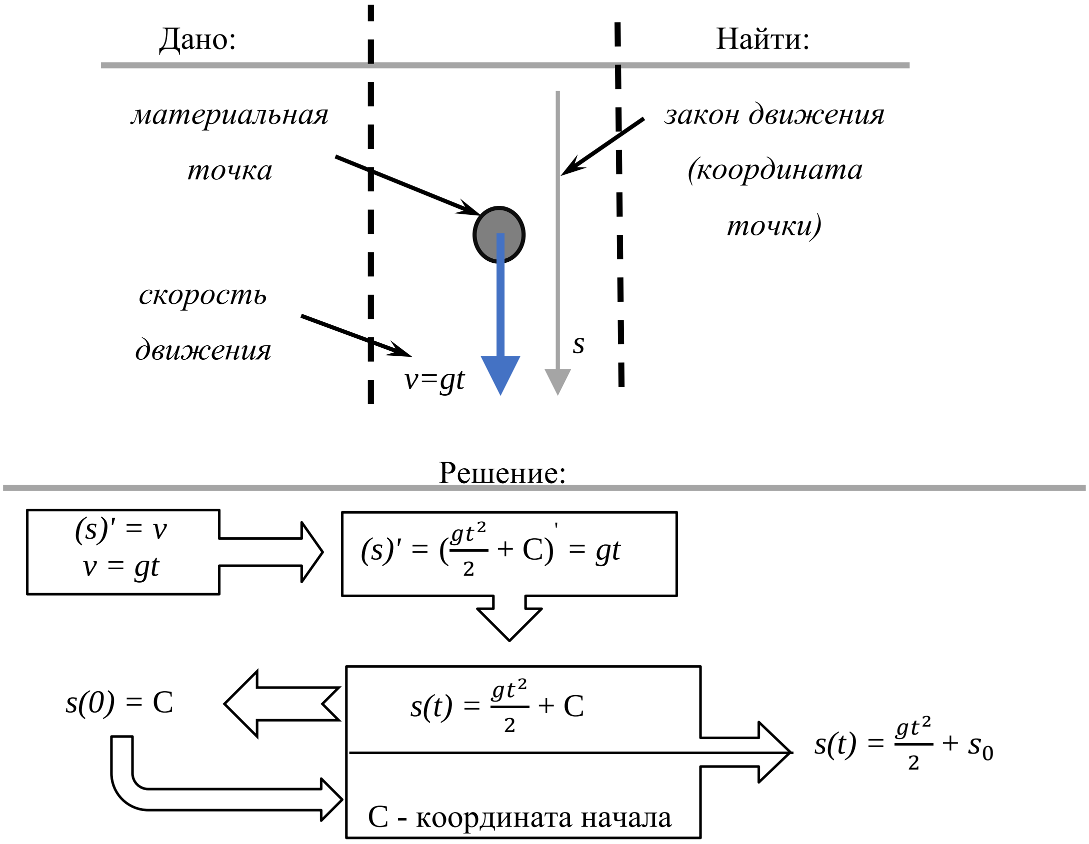


Рисунок 9 – Пример схемы использования первообразной

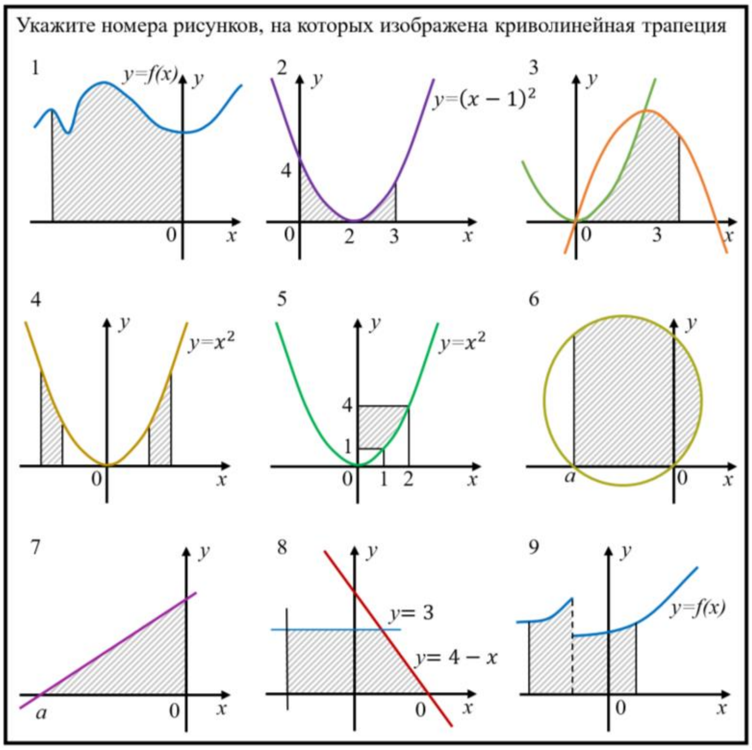


Рисунок 10 – Карточка для закрепления понятия криволинейной трапеции

Для экономии времени на уроке, можно использовать карточки с задачами на готовых чертежах. Пример карточки по теме «Площадь криволинейной трапеции» представлен на рисунке 11. Как показывает практика, такие заготовки не только экономят время на уроке, но и мотивирует учащихся. Решив одну карточку, можно решить другую и заработать дополнительную оценку, или исправить прежнюю.

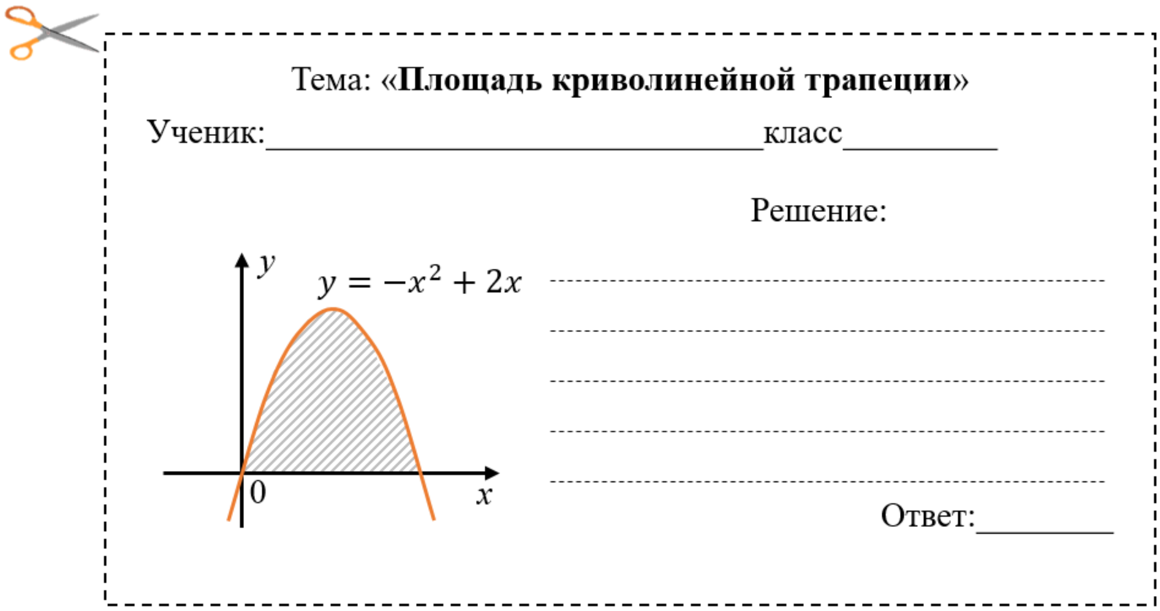


Рисунок 11 – Пример карточки по теме
«Площадь криволинейной трапеции»

Методические особенности преподавания темы «Первообразная» в средней школе рассмотрены в статье Н.И. Улендеевой «Изучение темы «Первообразная и интеграл» с учащимися 11 класса в курсе алгебры и начала математического анализа профильной школы» [47].

Автор выделяет «два основных направления в характере и порядке изложения учебного материала на профильном уровне: - понятие «определенный интеграл» вводится раньше понятия «неопределенного интеграла» (или как разность значений первообразной, или как предел интегральных сумм). - сначала вводится понятие «первообразной», а затем понятие «определенного интеграла». В современном школьном курсе алгебры и начал математического анализа находит реализацию второе направление, рассматривается только определенный интеграл, который и называется «интегралом» [47]. Автор так же отмечает, что «перед введением понятия первообразной целесообразно повторить с учащимися взаимообратные операции: сложение – вычитание; умножение – деление; возведение в степень – извлечение корня n-степени; потенцирование – логарифмирование. Учащимся также известна операция дифференцирования, поэтому уместно задать учащимся вопрос: существует ли операция, обратная дифференцированию» [47].

Н.А. Марчук с соавторами в статье «Методические особенности преподавания темы «Интеграл» [25] выделяет основные методически важным принципы подачи темы:

«1. Необходимо тщательно подбирать теоретический материал, сочетая принципы научности, преемственности и доступности его изложения. Реализовать в полном объеме принцип научности при изучении интеграла в школьном курсе математики не удается, ввиду отсутствия необходимого для вывода и доказательств формул, правил и теорем математического аппарата у учащихся. Но в процессе обучения у ребят должны сформироваться правильное понимание процесса интегрирования и его закономерностей.

2. Важно выбрать оптимальный способ представления учащимся теоретического материала. При изложении теории необходимо учесть общий уровень математической подготовленности класса и каждого учащегося в отдельности, психологические и возрастные особенности детей, их мышления. Преподавание должно быть максимально интересным, доступным, вестись систематично и последовательно.

3. Систему упражнений и задач нужно конструировать так, чтобы создать наилучшие условия для усвоения базовых понятий, формул и свойств, развивать у детей критическое мышление и способность анализировать. Этому в значительной степени способствуют практические задачи, задачи на исследование и доказательство.

4. Тема отличается высоким уровнем абстракции, поэтому необходимо подавать материал в доступной и наглядной форме. Для лучшего понимания и запоминания материала, для визуализации изучаемых понятий процессов необходимо использовать на уроках различные виды наглядности (модели, чертежи, схемы, графики, таблицы, построения с помощью программы Geogebra и др.)» [25]. Пример использования программы GeoGebra при реализации наглядного метода в рамках преподавания темы «Первообразная» изображен на рисунке 12.

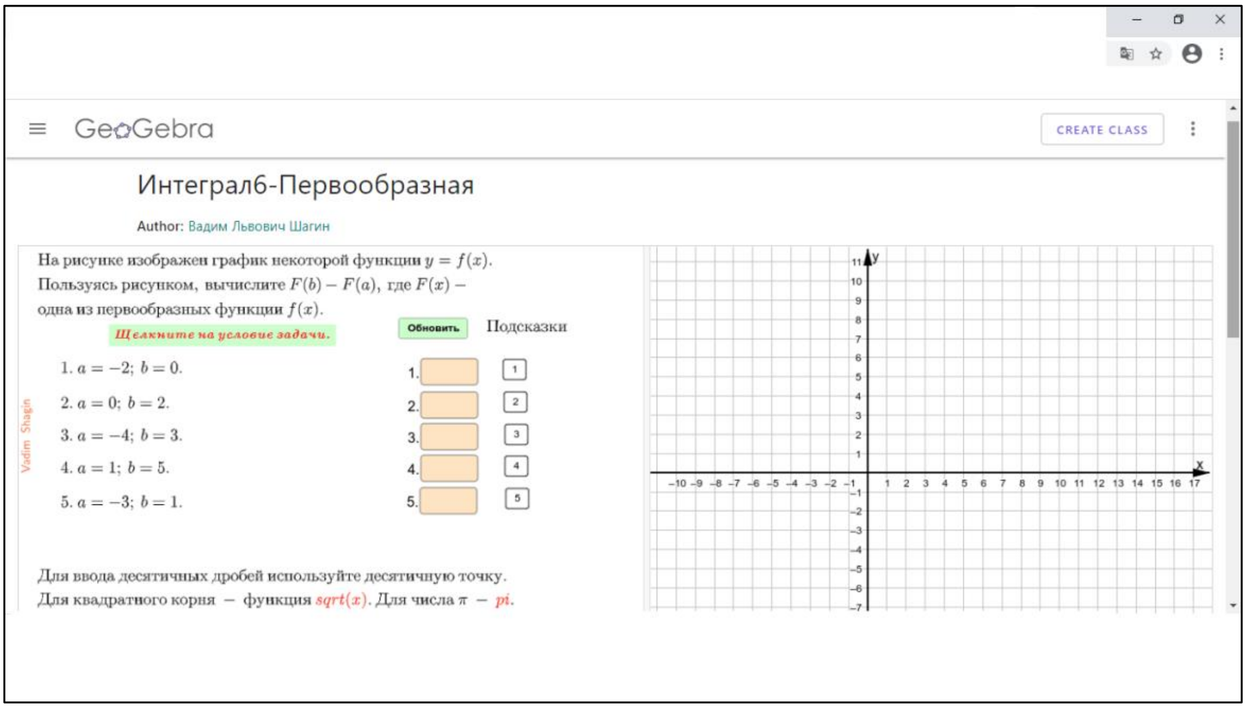


Рисунок 12 – Изображение графика первообразной в программе GeoGebra

В соответствии со ФГОС проектная деятельность является обязательной для учащихся средней и старшей школы. Для получения аттестата выпускник обязан написать и защитить проект. Таким образом, для учащихся 11 классов для изучения темы «Первообразная и Интеграл», подойдёт также метод проектов, суть которого заключается в достижении целей обучения путем самостоятельной работы учащегося или группы учащихся под руководством научного руководителя над темой исследования, учителю отводится роль координатора, эксперта, консультанта.

Метод проектов – объединение исследовательских, поисковых, проблемных методов, работа происходит в сотрудничестве, это способствует достижению целей, прописанных в основной образовательной программе.

Список тем, которые можно предложить учащимся для разработки проектов: «1. Из истории создания интегрального исчисления.

2. Применение интегралов в различных областях знаний: астрономии, географии, геодезии, медицине, экономике и др.

3. Вычисляем площади. Формула Пика, палетка, определенный интеграл.

4. Вычисление объемов и площадей поверхности тел вращения при помощи определенного интеграла.

5. Применение интегралов при решении простейших дифференциальных уравнений.

6. Задание натурального логарифма при помощи определенного интеграла» [32].

Выводы по первой главе

На основании вышеизложенного материала можно сделать следующие выводы:

– педагогические методы изучения первообразной в средней школе должны быть направлены на органичное слияние темы и теоретической структуры, сформированной у учеников в рамках освоение предшествующих тем;

– необходимо особое внимание уделять прикладному значению первообразной, чтобы преодолеть трудности, связанные с высоким уровнем абстракции данной темы;

– все методы, описанные в главе, несут существенный педагогически потенциал, поэтому применять их нужно комплексно.

Глава 2 Методические основы обучения первообразной в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы

2.1 Методическая схема обучения первообразной в курсе алгебры и начал анализа

Для достижения целей обучения понятия «первообразная» необходимо грамотно выстроить методическую схему обучения. Само понятие методической схемы обучения было предложено введено в 1975 году А. М. Пышкало. «Методическая схема являет собой структуру, компонентами которой являются цели обучения, содержание обучения, методы обучения, формы и средства обучения» [40, с. 6]. По мнению А.М. Пышкало в любую методическую схему входят пять основных элементов, тесно связанных между собой, а именно: цели, содержание, методы, организационные формы и средства обучения. По мнению Н.Л. Стефановной, в методическую систему помимо вышеперечисленных компонентов следует добавить планируемые результаты, Г.И. Саранцев считает, что методическую систему входит и структура личности обучающегося.

В этом параграфе рассмотрим методическую схему обучения понятия «Первообразная», при обучении в курсе алгебры и начал анализа на примере УМК А.Г. Мордковича [32].

Методическая схема изучения «Первообразной»

1. Рассмотрение примеров взаимно обратных операций.
2. Формирование у обучающихся представление о операции интегрировании – операции, обратной дифференцированию, а «первообразную» как результат операции интегрирования.
3. Выполнение упражнений на доказательство, что некоторая функция $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, решать задачи на отыскание первообразной.

4. Ознакомление учащихся с основным свойством первообразной.

5. Составление таблицу первообразных.

6. Ознакомление обучающихся с правилами нахождения первообразных.

7. Решение задач на геометрический и физический смысл первообразной.

Для достижения целей обучения математики в рамках предложенной методической схемы рассмотрим технологию гарантированного обучения В.М. Монахова [27]. В её основе лежит проектирование и осуществление учебного процесса, также она обеспечивает достижение целей ФГОС и создаёт комфортные условия обучения, не допускает перегрузку учащихся. А значит, применение данной технологии возможно при построении изучения целой темы «Первообразная и интеграл».

Содержание данной технологии представляет собой следующую схему:

– конструирование карты-проекта, в которой указываются темы изучения и микроцели;

– построение технологической карты изучения темы, в которую включены «целеполагание, диагностика, внеаудиторная самостоятельная работа (домашние задания), логическая структура проекта, коррекция» [22, С. 241].

Приведём схему проектирование учебной темы «Первообразная и интеграл» на основе технологии В.М. Монахова в соответствии с учебником А.Г. Мордковича и П.В. Семенова [32]. Для изучения этой темы автор методического пособия рекомендует выделять 13 часов для изучения на углублённом уровне обучения [30], поэтому схема составлена с учетом данной рекомендации.

На первом этапе происходит целеполагание темы. На основе анализа программы и методического опыта, в соответствии с целями изучения темы «Первообразная и интеграл», отражённые в первом параграфе данной работы, были выделены три микроцели темы:

В1: знать определение первообразной функции, правила нахождения первообразной, уметь находить первообразную функции.

В2: знать определение неопределенного интеграла, правила интегрирования, таблицу основных неопределенных интегралов, уметь выполнять вычисления определенного интеграла.

В3: знать определение определённого интеграла, формулу Ньютона – Лейбница, уметь применять определенный интеграл для нахождения площади плоских фигур с помощью определённого интеграла.

Факт достижения микроцели определяет следующий блок – диагностика. Блок включает четыре задания трёх уровней сложности. Первые два задания соответствуют минимальному уровню, третье задание – среднему, четвёртое – повышенному. При этом ученик имеет возможность самостоятельно выбирать уровень обучения исходя из своих умений и способностей. Если ученик выбирает отметку «удовлетворительно», он должен правильно решить задания 1 и 2, на отметку «хорошо», ученик должен решать помимо заданий 1 и 2 ещё и задание 3; на отметку «отлично» ученик должен уметь решать все четыре задачи из диагностики.

Выделяют следующие преимущества системы диагностик:

– «реально выполняется принцип гарантированности подготовки ученика, так как базового уровня при использовании технологии достигнут все учащиеся;

– равноправное положение учителя и ученика – заранее объявлены образцы самостоятельных работ;

– ученики знают требования к ним: все гласно и демократично, учитель не изменит в последний момент трудность заданий» [3, С. 118].

Содержание диагностики по теме в соответствии с микроцелями отражено в таблице 7.

Таблица 7 – Фрагмент технологической карты изучения первообразной

Целеполагание	**Диагностика**
В1: знать определение первообразной функции, правила нахождения первообразной, уметь находить первообразную функции;	Д1: 1) Докажите, что функция у $= F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = 0{,}3x^{10} + 2x^7 - x$, и $f(x) = 3x^9 + 14x^6 - 4$. 2) Найдите первообразную для функции: а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$; б) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - e^{3x}$. 3) Для функции $y = 2x^3 - 2x - 5$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку А$(2;\ -1)$. 4) Сравните числа $F(a)$ и $F(b)$, если известно, что функция $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$, где $f(x) = sinx - 1$, а $= 0, b = 1$.
В2: знать определение неопределенного интеграла, таблицу основных неопределенных интегралов, уметь вычислять неопределенные интегралы, используя правила интегрирования;	Д2: 1) Найдите неопределённый интеграл: а) $\int\left(9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; б) $\int \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$; в) $\int \frac{4x^2-9}{2x+3}dx$. 2) Скорость прямолинейного движения материальной точки задаётся формулой $v(t) = 3t^2 + 1$. Найдите закон движения, если $s(2) = 7$. 4) Известно, что функция $y = F(x)$ - первообразная для функции $y = (25x - x^3)\sqrt{x-3}$. Исследуйте функцию $y = F(x)$ на монотонность и экстремумы.
В3: знать определение определённого интеграла, формулу Ньютона – Лейбница, уметь вычислять площади плоских фигур с помощью определённого интеграла.	Д3: 1) Вычислите определённый интеграл: а) $\int_{-1}^{2}(3x^2 - 2x + 1)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 3x}dx$. 2) Вычислите определённый интеграл: а) $\int_0^8 \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$; б) $\int_1^{32} x^{-\frac{3}{5}}dx$. 3) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 6x + 5, y = 0, x = 0, x = 1$. 4) При каких значениях параметра a выполняется неравенство $\int_1^a (4x - a) \leq 5a - 6$?

Результаты, полученные в диагностическом блоке, являются рабочим материалом для блока «коррекция» рамках которого проводится работа над ошибками.

После блока «коррекция» отбирается соответствующие задания для домашней работы, которые отражены в блоке «Домашняя работа». Она рассчитана на внеаудиторную деятельность обучающихся в соответствии с микроцелями и делится на три уровня «стандарт», «хорошо», «отлично». Данный блок по теме «Первообразная и интеграл» отражены в технологической карте изучения темы (таблица 8), в ней указаны номера заданий для самостоятельного выполнения с применением дифференцированного подхода соответствующей УМК.

Стоит обратить внимание, при изучении первообразной, целесообразно предлагать учащимся задания, аналогичные тем, что встречаются и на государственной итоговой аттестации. Система задач при изучении темы рассмотрена в следующем параграфе.

Таблица 8 – Технологическая карта изучения темы «Первообразная и интеграл» по учебнику профильного уровня А.Г. Мордковича

Технологическая карта **Тема: Первообразная и интеграл (11-й класс)**		
Логическая структура учебного процесса		
Целеполагание	Диагностика	Коррекция
В1: знать определение первообразной функции, правила нахождения первообразной; уметь находить первообразную функции	Д1: 1) Докажите, что функция у $= F(x)$ является первообразной для функции у $= f(x)$, если $F(x) = 0{,}3x^{10} + 2x^7 - 4x$, а $f(x) = 3x^9 + 14x^6 - 4$. 2) Найдите первообразную для функции: а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}$; б) $y = -\sin\left(x + \frac{pi}{4}\right) - e^{3x}$. 3) Для функции у $= 2x^3 - 2x - 5$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку А$(2; -1)$. 4) Сравните числа $F(a)$ и $F(b)$, если известно, что функция у $= F(x)$ - первообразная для функции у $= f(x)$, где $f(x) = sinx - 1$, а $= 0, b = 1$.	К1 Возможные ошибки в нахождении производной, вычислении значений функции, вычислительные ошибки
В2: знать определение неопределенного интеграла, таблицу основных неопределенных интегралов уметь вычислять неопределенные интегралы, используя правила интегрирования	Д2: 1) Найдите неопределённый интеграл: а) $\int \left(9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$; б) $\int \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$; 2) Найдите неопределённый интеграл: $\int \frac{4x^2-9}{2x+3} dx$. 3) Скорость прямолинейного движения материальной точки задаётся формулой $v(t) = 3t^2 + 1$. Найдите закон движения, если $s(2) = 7$. 4) Известно, что функция у $= F(x)$ – первообразная для функции $y = (25x - x^3)\sqrt{x-3}$. Исследуйте функцию у $= F(x)$ на монотонность и экстремумы.	К2 Возможные ошибки в преобразовании формул, в вычислении неопределенных интегралов, вычислительная ошибка, вычислении производной.

Продолжение Таблицы 8

ВЗ: знать определение определённого интеграла, формулу Ньютона – Лейбница; *уметь* вычислять площади плоских фигур с помощью определённого интеграла	ДЗ: 1) Вычислите определённый интеграл: а) $\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 3x}dx$. 2) Вычислите определённый интеграл: а) $\int_0^8\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$; б) $\int_1^{32}x^{-\frac{3}{5}}dx$. 3) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 5, y=0, x=0, x=1$. 4) При каких значениях параметра a выполняется неравенство $\int_1^a(4x-a)\le 5a-6$?	КЗ Возможные ошибки в применении правил. Неправильное вычисление производных и интегралов, ошибка в применении формулы Ньютона - Лейбница

Дозирование домашних заданий			
	стандарт	хорошо	отлично
ДР 1	№ 20.4, 20.5, 20.7, 20.10-20.15	20.6, 20.8, 20.20-20.22	20.9, 20.30-20.32
ДР 2	20.42, 20.43	20.44, 20.45	20.38, 20.46, 20.47
ДР 3	21.1	21.2-21.4, 21.32	21.14, 21.23

Рассмотрим методическую схему обучения «Первообразной» на примере четырех последовательных уроков, проводимых по УМК А.Г. Мордковича, П.В. Семенова.

Конспект урока №1 «Определение первообразной и ее общий вид»

Структура урока № 1 представлена в таблице 9.

Основные этапы урока.

Организационный этап. (3 мин)

Подготовка к изучению нового материалов, актуализация знаний (5 мин)

Ознакомление с новым материалом (15 мин)

Первичное осмысление и применение изученного (15 мин)

Постановка домашнего задания (2 мин)

Подведение итогов урока. рефлексия (3 мин)

Ход урока.

1. Организационный этап.

Учитель настраивает учащихся на работу, рассказывает о работе с новой технологической картой, знакомит с планируемыми результатами.

2. Повторить правила нахождения производных.

Таблица 9 – Структура урока № 1

Глава по УМК	Производная и интеграл.	
Общее кол-во часов	13	
Номер урока в теме	1	
Тип урока	Открытия новых знаний.	
Методы обучения	Словесный, словесно – наглядный, проблемный, эвристический.	
Формы бучения	Индивидуальная, фронтальная , групповая.	
Средства обучения	Информационные, раздаточный материал, УМК.	
Формируемые результаты	Предметные	Формировать представление об интегрировании. Оперировать понятием первообразная, доказывать основное свойство первообразной. Вычислять первообразные.
	Личностные	Формировать целостное мировоззрение согласно современному уровню развития науки, Рефлексия собственной деятельности. Положительное отношение к учению, к познавательной деятельности, желание приобретать новые знания, умения, совершенствовать имеющиеся, осознавать свои трудности и стремиться к их преодолению, развивать навыки самооценки.
	Метапредметные	Формировать причинно-следственные связи , строить логические заключения (индуктивное, дедуктивное, аналогия).
Планируемые результаты	Обучающийся научится:	Оперировать понятием первообразная, находить первообразные, доказывать основное свойство первообразной, знать геометрический смысл первообразной.

3. Учитель в виде эвристической беседы говорит о взаимообратных операциях:

Учитель	*Ученики*
Сложение	Вычитание
Умножение	Деление
Возведение в квадрат	Извлечение квадратного корня
Нахождение синуса	Нахождение арксинуса
Дифференцирование	???

4. Учитель знакомит учеников с новым математическим действием – нахождение функции по ее производной – интегрирование.

Работа с книгой (парная работа), работа с презентацией (фронтальная работа) – рассматривают обратную задачу о прямолинейном движении материальной точки. Записывают определение первообразной в тетрадь (индивидуальная работа).

Учитель объясняет новый материал на примере 1.

Пример 1.

«Докажите, что функция $F(x)=x^5$ является первообразной для функции $f(x)= 5x^4$.

Функция $F(x)= x^5$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, так как $F'(x)= 5x^4$.

Заметим, что $F(x)=x^5 + \sqrt{7}$ тоже является первообразной для указанной функции .Очевидно, что вместо $\sqrt{7}$ может быть любое число. Значит задача на нахождение первообразной имеет бесконечно много решений, говорят, что первообразная вычислена с точностью до постоянной» [42, с.144].

Таким образом, учитель подводит обучающихся к основному свойству первообразных, которое заключается в том, что любая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ имеет вид $\Phi(x) = F(x)+ C$, где C – произвольная постоянная.

Обучающиеся рассматривают геометрический смысл первообразной на слайде (рисунок 13). Учитель обращает внимание, что параллельный перенос вдоль оси ординат – это результат прибавления некоторой константы(C) к правой части формулы, которой задана функция.

Учитель предлагает рассмотреть и решить типичные задачи для нахождения перообразной для различных видов функций: целых рациональных, дробно-рациональных, трибометрических, кусочно-заданных, на применение основного свойства первообразной.

Рисунок 13 – Пример слайда с геометрическим смыслом первообразной

Пример 2.

«Для данной функции $f(x) = 3x^2 \ -4x$, найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку $M(2; 19)$»[30].

Можно, догадаться, что одной из первообразных будет

$F(x) = - 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + C = x^3 - 2\,x^2 + C$.

Так как график первообразной проходит через точку $M(2; 19)$, то подставим значения абсциссы и ординаты вместо переменных x и $F(x)$ соответственно:

$2^3 - 2 \cdot 2^2 + C$ =19, получим C= 19.

Получили: $F(x) = x^3 - 2\,x^2 + 19$.

Ответ: $F(x) = x^3 - 2\,x^2 + 19$.

4. Этап закрепления.

Работа в парах – с последующей проверкой. Учитель консультирует обучающихся (на слайде – ответы). № 20.1(а, б), 20.2(а, б). 20.3(а, б), 20.6(а, б), П10 минут. 5 минут проверка ответов, разбор ошибок.

Учитель обращает внимание на то, что на дом заданы подобные задания, в соответствии с технологической картой – по уровням: «удовлетворительно». «хорошо», «отлично».

5. Подведение итогов.

Учитель в конце урока задает следующие контрольные вопросы (фронтальная работа):

– Где в механике применяется интегрирование?

– Дайте определение первообразной функции?

– Сколько первообразных функций можно для функции $f(x)$? Обоснуйте.

– В чем заключается геометрический смысл первообразной?

6. Выставление оценок, рефлексия.

Структура урока № 2 представлена в таблице 10.

Конспект урока №2. «Таблица первообразных. Правила нахождения первообразных»

Таблица 10 – Структура урока № 2

Глава по УМК	Производная и интеграл.	
Общее кол-во часов	13	
Номер урока в теме	2	
Тип урока	Комбинированный.	
Методы обучения	Словесный, словесно – наглядный.	
Формы обучения	Индивидуальная, фронтальная , групповая.	
Средства обучения	Раздаточный материал, УМК.	
Формируемые результаты	Предметные	Формировать умения доказывать, что функция является первообразно для некоторой, применять правила нахождения первообразной, применять геометрический смысл первообразной.
	Личностные	Формировать целостное мировоззрение согласно современному уровню развития науки, Рефлексия собственной деятельности. Положительное отношение к учению, к познавательной деятельности, желание приобретать новые знания, умения, совершенствовать имеющиеся, осознавать свои трудности и стремиться к их преодолению, развивать навыки самооценки, построение дальнейшей индивидуальной траектории.
	Метапредметные	Формировать умения ставить причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное, по аналогии), делать выводы
Планируемые результаты	Обучающийся научится	Обучающийся научится доказывать и применять правила нахождения первообразной.

Основные этапы урока:

1. Организационный этап (2 мин).

2. Проверка домашней работы (2 мин).

3. Подготовка к изучению нового материалов, актуализация знаний (5 мин).

4. Ознакомление с новым материалом (15 мин).

5. Первичное осмысление и применение изученного (17 мин).

6. Постановка домашнего задания (2 мин).

7. Подведение итогов урока, рефлексия, выставление оценок. (2 мин).

Ход урока.

1. Организационный этап – 2 минуты.

Учитель настраивает учащихся на работу, напоминает о работе с новой технологической картой.

2. Проверка домашней работы – 4 минуты (блок коррекция), учитель обращает внимание на возможные ошибки, рефлексия учащихся по итогам домашней работы, учащиеся определяют я себя в группы, согласно технологической карте (выполнено домашнее задание на «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

3. Актуализация знаний. Математический диктант «Выбери верное утверждение».

Цель математического диктанта – повторить определение первообразной.

Учащимся раздаются карточки, к которой они должны сопоставить функцию и верную ей первообразную.

Пример математического диктанта по теме «Определение первообразной» представлен в таблице 11.

Проверка: нет ошибок – оценка «5», 1-2 ошибки – оценка «4», 3-4 ошибки – оценка «3», 5 и более ошибок – оценка «2».

4. Изучение нового материала (15 минут). Работа с книгой и презентацией, учащиеся находят таблицу первообразных, учитель загружает слайд (рисунок 14)

Таблица 11 – Математический диктант по теме «Определение первообразной»

$F(x)$	$f(x)$	*верно*	*неверно*
x^2+x^3	$2x+3x^2$	+	
x^4-x^{11}	$4x^3-11x^{10}$		–
$3\sin x$	$3\cos x$	+	
$-4\cos x$	$-4\sin x$		–
$-9\sin x$	$9\cos x$		–
$5\cos x$	$-5\sin x$	+	
$3\operatorname{ctg} x-\sqrt{x}$	$-\dfrac{3}{(\sin x)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	+	
$\sin 5x$	$5\cos 5x$	+	

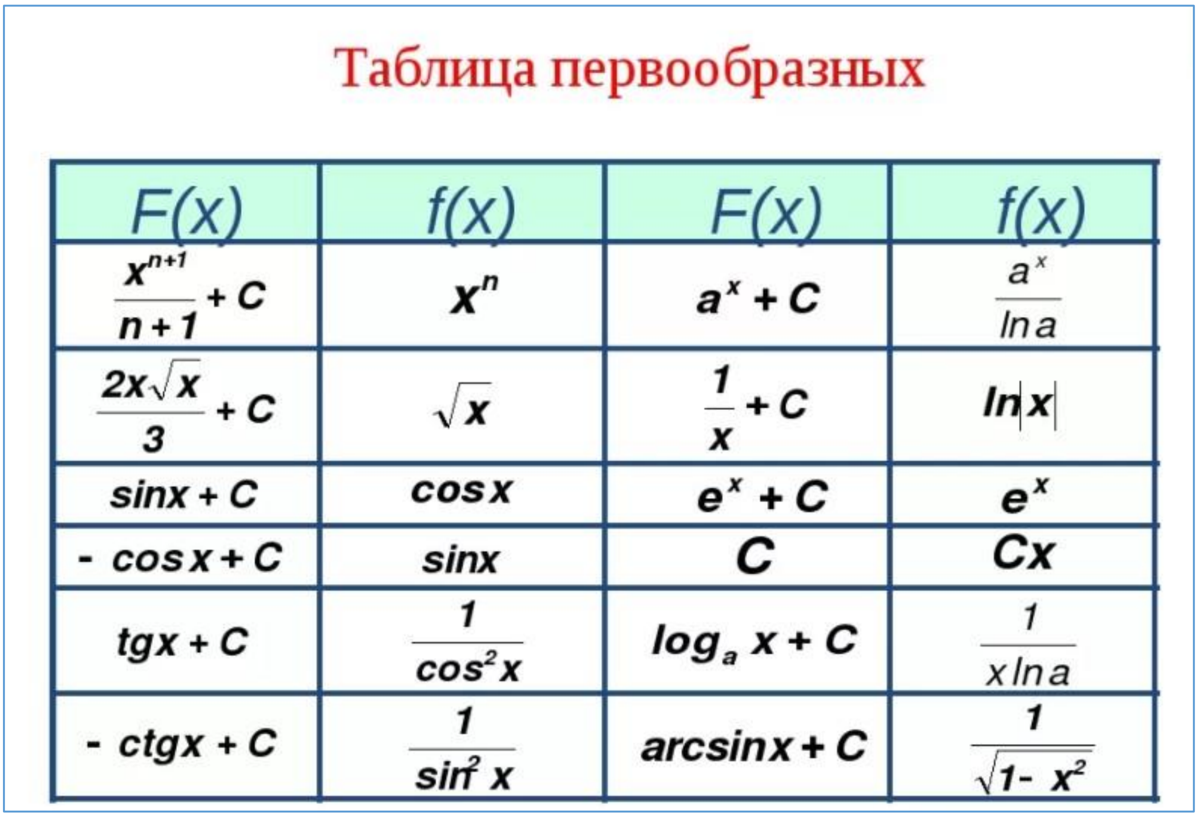


Таблица первообразных

F(x)	f(x)	F(x)	f(x)
$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n	a^x+C	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{x}+C$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x+C$	$\cos x$	e^x+C	e^x
$-\cos x+C$	$\sin x$	C	Cx
$\operatorname{tg} x+C$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x+C$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$-\operatorname{ctg} x+C$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x+C$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Рисунок 14 – Пример слайда с таблицей первообразных

Учитель спрашивает у обучающихся, каким образом можно проверить формулы в таблице первообразных. Обучающиеся отвечают, что проверить можно обратным действием дифференцированием, для этого нужно найти производную для $F(x)$.

5. Следующим шагом, в изучении темы в рамках урока – показать правила интегрирования.

Обучающиеся находят в учебнике правило №1: «Первообразная суммы равна сумме первообразных» [32]. Рассматривают примеры по учебнику, проводят аналогию с суммой производных. Далее учитель обращает внимание, что не существует общих формул, для нахождения первообразной произведения и частного. Решают задачу 1.

Задача 1.

Найдите первообразную для функции: $f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{(\sin x)^2}$.

Решение.

Учтем, что функция $f(x) = x^4 - x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{(\sin x)^2}$ представляет собой алгебраическую сумму трех функций. Используя таблицу первообразных и правило №1, имеем $F\,(x) = \frac{x^3}{5} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{5}x^3 - \operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + C$.

Ответ: $F(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + C$.

Обучающиеся находят в учебнике правило №2: «Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $k \cdot F(x)$ – первообразная для $k \cdot f(x)$ » [32].

Учитель обращает внимание другую формулировку, что первообразная для произведения числа и функции равна произведению числа на первообразную функции. Учитель комментирует решенные примеры из учебника.

Приглашает к доске ученика. Решают задачу 2.

Задача 2.

Найти первообразную для $f(x)=5\sqrt{2}\sin x$.

Решение.

Используя рассмотренное правило №2, таблицу первообразных, основное свойство первообразных, получаем $F(x)= -5\sqrt{2}\cos x + C$.

Ответ: $F(x)= -5\sqrt{2}\cos x + C$.

Аналогично, обучающиеся находят в учебнике правило №3: «Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то первообразной для $y = f(kx+m)$ служит функция первообразная $y=\frac{1}{k}F(kx+m)$» [32] .

При изучении этого правила, учитель напоминает о том, как находить производную сложной функции, в виде наводящих вопросов:

Как найти производную сложной функции?

Можно ли применить при доказательстве привила №3 дифференцирование сложной функции?

Как автор учебника называет множитель $\frac{1}{k}$? (Ответ: «поправочный»).

Далее учитель вызывает учеников к доске для решения задач 3, 4, 5.

Задача 3.

«Для функции $y = \cos(4x - 3) + 4$ найдите первообразную» [32].

Решение:

Воспользуемся правилами нахождения первообразной, получим

$\mathrm{F(x)} = \frac{1}{4}(\cos 3x - 3) + 4x + C$

Ответ: $\mathrm{F(x)} = \frac{1}{4}(\cos 3x - 3) + 4x + C$.

Учитель обращает внимание на поправочный коэффициент.

Задача 4.

« Найдите первообразную для функции $y = 2^{5-3x}$» [32].

Решение:

Воспользуемся правилами нахождения первообразной, получим

$F(x) = = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{5-3x}»}{\ln 2} + C$

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{5-3x}»}{\ln 2} + C$.

Задача 5.

«Для заданной функции $y = \frac{5}{\cos^2 5x}$ найдите ту первообразную график которой походит через указанную точку $M(\frac{\pi}{4}$; -1).

Решение:

Воспользуемся правилами нахождения первообразной, получим

$F(x)$ = $-\frac{1}{5}$ 5 tg $5x + C$, подставим значение абсциссы и ординаты точки М, получим: $-1 = \text{tg}\frac{5\pi}{4}$ + С, тогда С = -2, имеем $F(x)$ = $\text{tg}\,5x - 2$.

Ответ: $F(x)$ = $\text{tg}\,5x - 2$.

Закрепление. Учащиеся работают над заданиями по трем уровням дифференциации.

1 уровень соответствует уровню «удовлетворительно» + «хорошо», согласно технологической карте.

2 уровень соответствует уровню «хорошо» + «отлично» согласно технологической карте.

Учитель на данном этапе работы выступает в роли консультанта, оказывает помощь слабоуспевающим учениками.

6. Постанова домашнего задания. Учитель еще раз объясняет о разно уровневом домашнем задании.

7. Подведение итогов. Рефлексия.

Конспект урока №3. «Геометрический и физический смысл первообразной»

Структура урока № 3 представлена в таблице 12.

Основные этапы урока:

1. Организационный этап (2 мин).
2. Проверка домашней работы (5 мин).
3. Закрепление (20 мин).
4. Диагностика. Самостоятельная работа (15 мин).
5. Обсуждение домашней работы (2мин).

6. Подведение итогов урока, рефлексия, выставление оценок. (2 мин).

Таблица 12 – Структура урока № 3

Глава по УМК	Производная и интеграл	
Общее кол-во часов	13	
Номер урока в теме	3	
Тип урока	Комбинированный	
Методы обучения	Словесный, словесно – наглядный	
Формы обучения	Индивидуальная, фронтальная, групповая	
Средства обучения	Раздаточный материал, УМК	
Формируемые результаты	Предметные	Формировать умения доказывать, что функция является первообразно для некоторой, применять правила нахождения первообразной, применять геометрический смысл первообразной, физический смысл первообразной.
	Личностные	Формировать целостное мировоззрение согласно современному уровню развития науки, рефлексия собственной деятельности. Положительное отношение к учению, к познавательной деятельности, желание приобретать новые знания, умения, совершенствовать имеющиеся, осознавать свои трудности и стремиться к их преодолению, развивать навыки самооценки, построение дальнейшей индивидуальной траектории.
	Метапредметные	Формировать умения ставить причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное, по аналогии), делать выводы
Планируемые результаты	Обучающийся научится:	Применение геометрического и физического смысла первообразной, применение правил нахождения первообразных.

Ход урока.

1. Организационный этап – 2 минуты.

Учитель настраивает учащихся на работу, напоминает о работе с новой технологической картой.

2. Проверка домашней работы – 4 минуты (блок коррекция), учитель обращает внимание на возможные ошибки, рефлексия учащихся по итогам домашней работы, учащиеся соотносят себя группе, согласно технологической карте (выполнено домашнее задание на «удовлетворительно», «хорошо», «отлично»).

3. Закрепление. Цель – отработать навыки нахождения первообразных, применить их при решении задач.

Учащиеся, которые выполнили без ошибок домашнюю работу уровня «отлично», назначаются консультантами.

На этом этапе учитель ставит цель – применить полученный навык при решении физических задач.

Задача 1.

«Задан закон зависимости скорости от времени v(t)= $-5\sin 2t.$ Найти закон движения s=s(t), если известно, что в момент времени t=0 координата равнялась числу 1,5, т.е. s(0) =1,5» [32].

Решение:

Найдем первообразную для функции скорости, потому что скорость – производная для s(t), получаем s=$-5\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2t) + C.$ Подставим значения t=0 и s=1, 5, получим 2, 5$\cdot\cos 0$ +C=1, 5, C=-1.Теперь подставим найденное значение в закон движения и получим закон движения s(t)= 2, 5$\cdot\cos 2t$ -1.

Ответ: s(t)= 2, 5$\cdot\cos 2t$ -1.

Задача 2.

«Точка массой m=2 кг движется вдоль оси Ox под действием силы, направленной вдоль этой оси и равной $F(x) = 2t + 1 - 5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$ Найдите закон $x(t)$ движения точки, если при $t = \frac{2}{3}$ с скорость точки равна $\frac{23}{9}$ м/с, координата равна $\frac{40}{81}$ м. Здесь F – сила в ньютонах, t – время в секундах, x – путь в метрах» [42].

Решение:

По второму закону Ньютона $F = ma$ (где a – ускорение тела), откуда $a = \frac{F}{m}$. Для данной задачи имеем: $a(t) = t + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Скорость тела $v(t)$ есть первообразная для ее ускорения $a(t)$. Поэтому находим $v(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{5}{2\pi}sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + C_1$. Постоянную начальное ускорение C_1 определяем, используя $v\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{9}$. Получаем равенство

$\frac{23}{9} = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2\pi}\sin\pi + C_1$, откуда $C_1 = 2$.

Тогда скорость тела меняется по закону

$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{5}{2\pi}sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2.$

Аналогично координата $x(t)$ есть первообразная для скорости $v(t)$. Поэтому получаем:

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} - \frac{5}{2\pi}(-\frac{1}{\pi}cos(\pi t + \frac{\pi}{3})) + 2t + c_2 =$$
$$= \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + 2t + \frac{5}{2\pi^2}cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + c_2.$$

Для нахождения постоянной C_2 вновь используем начальное условие $x\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{81}$. Имеем равенство:

$\frac{40}{81} = \frac{1}{6}\frac{8}{27} + \frac{1}{4}\frac{4}{9} + 2\frac{2}{3} + \frac{5}{2\pi^2}\cos\pi + c_2$ или $\frac{40}{81} = \frac{121}{81} - \frac{5}{2\pi^2} + c_2$,

откуда $c_2 = \frac{5}{2\pi^2} - 1$.

Итак, закон движения точки

$x(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + 2t + \frac{5}{2\pi^2}cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{2\pi^2} - 1$» [42].

Задача 3.

«Найдите импульс тела массой , движущегося с ускорение a(t) = $t^2 - 2t + 2$ (м/с), через 3 с после начала движения , если его начальная скорость равна 1 м/с» [28].

Решение:

Для нахождения импульса тела нужно знать его скорость , так как скорость - это первообразная для функции ускорения, найдем первообразную для a(t), получаем $v(t)=\frac{t^3}{3}-2\frac{t^2}{2}+2\cdot t+C$. Так как в начальный момент скорость равна 1, $v(0)=\frac{0^3}{3}-2\frac{0^2}{2}+2\cdot 0+C$, значит C=1, рассчитаем $v(3)=\frac{3^3}{3}-2\frac{3^2}{2}+2\cdot 3+1=7$(м/с). Значит $P=m\cdot v=2\cdot 7=14(\frac{кг\cdot м}{с})$.

Ответ: 14 ($\frac{кг\cdot м}{с}$).

4. Диагностика по вариантам приведена в таблице 13.

Таблица 13 – диагностика Д1 к уроку № 3

1 вариант	2 вариант
«1) Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = 0{,}2x^5 - x^3 + 7$, а $f(x) = x^4 - 3x^2$. 2) Найдите первообразную для функции: а) $y=\frac{1}{x}+x^4$; б) $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})+e^{3x}$. 3) Для функции $y = 6x^2 - 4x + 1$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку $A(1;\ -3)$. 4) Сравните числа $F(a)$ и $F(b)$, если известно, что функция $y = F(x)$ - первообразная для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \cos x + 1, a = -1, b = 0$» [1].	«1) Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = 0{,}5x^6 - 2x^2 + 3x$, а $f(x) = 0{,}1x^5 - 4x + 3$. 2) Найдите первообразную для функции: а) $y=\frac{1}{x-2}+4x^3$; б) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{4})+e^{2x}$. 3) Для функции $y = 4x^3 + 3x^2 + 1$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку $A(1;\ -12)$. 4) Сравните числа $F(a)$ и $F(b)$, если известно, что функция $y = F(x)$ - первообразная для функции $y = f(x)$, где $f(x) = e^{2x+3}, a = -2, b = 1$» [1].

5. Обсуждение домашней работы.

6. Подведение итогов. Рефлексия.

Результаты, полученные в диагностическом блоке, являются рабочим материалом для блока «коррекция», в рамках которого проводится работа над ошибками.

Конспект урока №4 «Работа над ошибками. Решения задач по теме «Первообразная» в формате ЕГЭ

Структура урока № 4 приведена в таблице 14.

Основные этапы урока.

1.Организационный этап (2 мин).

2. Объявление результатов диагностики (2 мин).

3. Проверка домашней работы. Распределение учеников на группы (2 мин).

4. Актуализация знаний, работа с раздаточным материалом (8 мин).

5. Закрепление. Групповая работа (20 мин).

6.Диагностика (10 мин).

7.Подведение итогов урока, рефлексия, выставление оценок (2 мин).

Таблица 14 – Структура урока № 4

Глава по УМК	Производная и интеграл	
Общее кол-во часов	13	
Номер урока в теме	4	
Тип урока	Комбинированный	
Методы обучения	словесный, словесно – наглядный,	
Формы обучения	индивидуальная, фронтальная , групповая,	
Средства обучения	раздаточный материал, УМК, презентация	
Формируемые результаты	Предметные	Формировать умения доказывать, что функция является первообразно для некоторой, применять правила нахождения первообразной, применять геометрический смысл первообразной, физический смысл первообразной
	Личностные	Формировать целостное мировоззрение согласно современному уровню развития науки, рефлексия собственной деятельности. Положительное отношение к учению, к познавательной деятельности, желание приобретать новые знания, умения, совершенствовать имеющиеся, осознавать свои трудности и стремиться к их преодолению, развивать навыки самооценки, построение дальнейшей индивидуальной траектории.
	метапредметные	Формировать умения ставить причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное, по аналогии), делать выводы
Планируемые результаты	Обучающийся научится:	Применение геометрического и физического смысла первообразной, применение правил нахождения первообразных

Ход урока.

1. Учитель приветствует обучающихся, настраивает на урок.

2. Объявление результатов диагностики. Объявляет тему урока, и цель урока – корректировка знаний для учащихся, не прошедших диагностику, закрепление навыка решения задач по предложенной теме для всех остальных учащихся.

3. Проверка домашней работы (2 минуты), учитель обращает внимание на возможные ошибки, рефлексия учащихся по итогам домашней работы, учащиеся определяют себя в группы, согласно технологической карте (выполнено домашнее задание на «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Распределение детей на группы. Учитель формирует группы по результатам диагностики, а именно в каждой группе будут находиться ученики с разным уровнем подготовки, при этом учащиеся, написавшие диагностику на оценку «отлично» назначаются консультантами, их цель помочь – неуспевающим ученикам в ликвидации пробелов.

4. На этапе актуализации знаний учитель раздает обучающийся раздаточный материал «Первообразная на заданиях ЕГЭ», тест материала приведен на рисунке 15.

А. Первообразная в заданиях ЕГЭ.

Учитель рассказывает о структуре ЕГЭ, о типах заданий по теме «Первообразная», о критериях оценки.

Ученики самостоятельно заполняют колонки, знания, умения, …) – 2 минуты, докладчик из группы объявляет, что вписали ученики в графы знания и умения и какие необходимо вспомнить правила и свойства.

Б. Лист формулировок заданий из банка данных ЕГЭ.

Цель задания – обсудить разные формулировки задний, наметить план решения. Учащиеся заполняют номер, обсуждают знания – умения, выполняют решения.

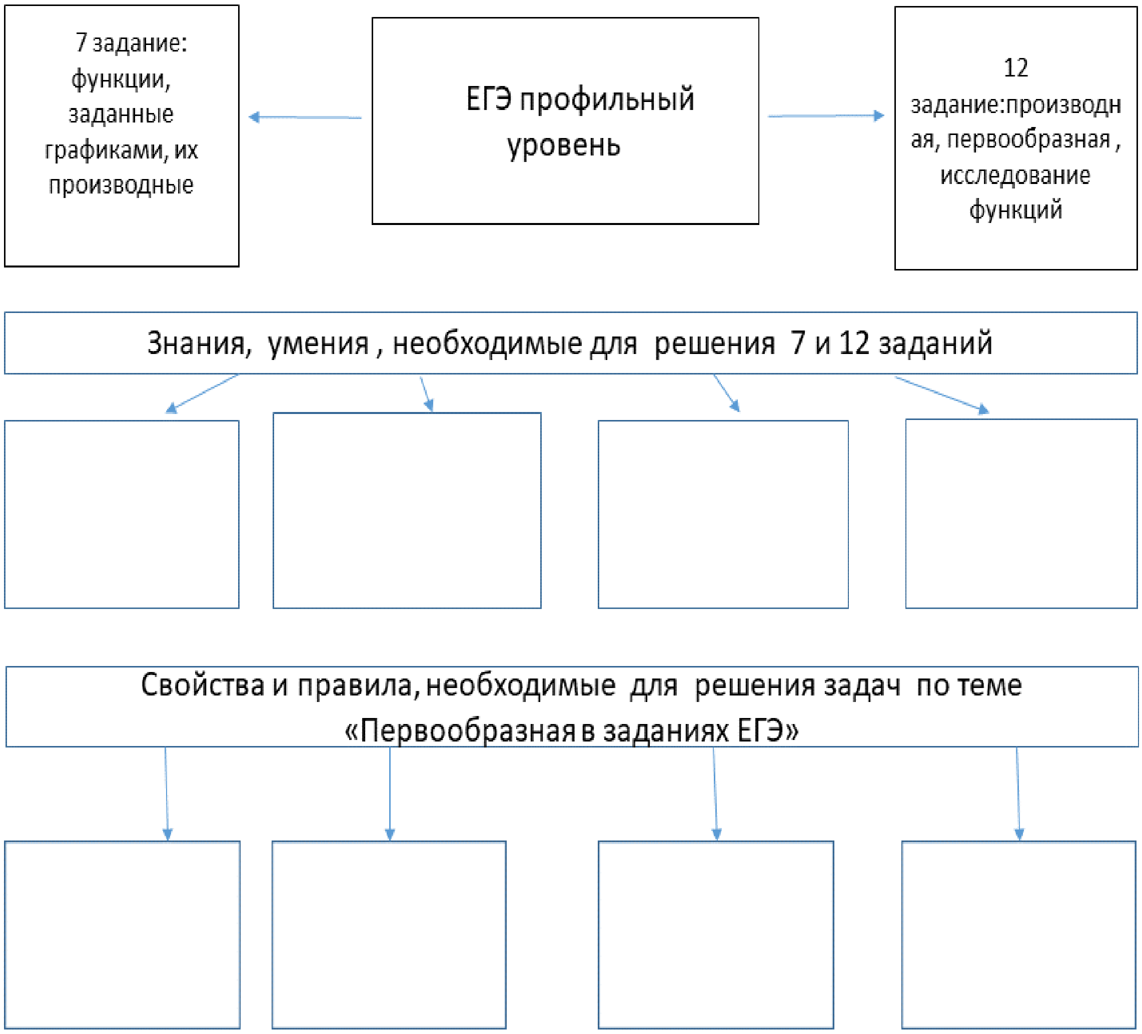


Рисунок 15 – Перообразная в заданиях ЕГЭ

В таблице 15 приведены задачи по теме «Первообразная» из банка данных ЕГЭ, ученики работают в группах.

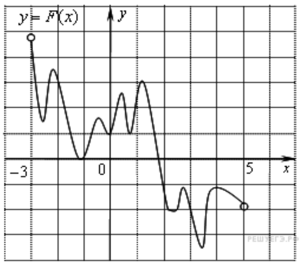
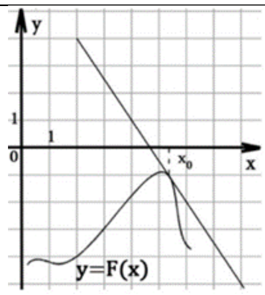
5. Этап закрепления. Индивидуальная работа. Закрепляют навык решения задач по теме «Первообразная» из банка данных ЕГЭ (10 минут).

Задания к этому этапу

6. Подведение итогов урока, рефлексия, выставление оценок (2 мин).

Результаты, полученные в диагностическом блоке, являются рабочим материалом для блока «коррекция» рамках которого проводится работа над ошибками.

Таблица 15 – Прототипы заданий 7 и 12 по теме «Первообразная» в ЕГЭ

<table>
<tr><th>№ п\п</th><th>Формулировка</th><th>Рисунок, решение</th><th>№ задания в ЕГЭ</th><th>Знания – умения</th></tr>
<tr><td>1</td><td>На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале (−3;5). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)$=0 на отрезке [−2;4].</td><td>
</td><td>7</td><td>График функции – производная для $F(x)$, для $f(x)$, найти количество точек перегиба</td></tr>
<tr><td colspan="5">Решение: По определению первообразной функции $F'(x) = f(x)$. Уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $F'(x) = 0$,значит нужно сосчитать количество точек на отрезке (-3; 5), в которых касательная к графику функции $F(x)$ горизонтальна. Таких точек 10. Ответ:10</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>На рисунке изображен график функции y = F (x) - одной из первообразных функции f (x) касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение функции f (x) в точке x_0.</td><td>
</td><td>7</td><td>График функции – производная для F(x), для f(x), найти тангенс угла наклона касательной</td></tr>
<tr><td colspan="5">Решение: По определению первообразной функции F'(x) = f(x). Для вычисления значения f(x0) нужно вычислить тангенс угла наклона касательной, выбираем целочисленные значения, получаем tg α=−6/4 = − 1, 5.
Ответ: − 1, 5</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Найдите первообразную $F(x)$ для $f(x)=\frac{3x+2}{5}$, если $F(4)$=5. В ответе укажите $F(1)$.</td><td></td><td>12</td><td>Найти первообразную, воспользовавшись таблицами и правилами, найти C, найти F (1).</td></tr>
<tr><td colspan="5">Решение: преобразуем f(x) к виду 0, 6·x+ 0,4. Найдем первообразную, используя правила нахождения первообразных, получаем F(x)= 0, $3x^2$ + 0, 4 x+ C. Так как F(4)= 5, значит 0, 3· 4^2 + 0, 4 ·4+ C=5, получаем C=−1,4, тогда F(1)= 0, 3· 1^2 + 0, 4 ·1− 1,4=−0,7.
Ответ: =−0,7</td></tr>
</table>

Продолжение Таблицы 15

<table>
<tr><td>4.</td><td>Наименьшее значение первообразной $F(x)$ для функции f(x)=x^2-2x-3 на отрезке [0;6] равно 9. Найдите наибольшее значение первообразной на этом отрезке.</td><td></td><td>12</td><td>$F'(x)=f(x)$, найти промежутки убывания и возрастания, найти точку минимума, найти С, найти наибольшее значение первообразной на концах промежутка.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Решение: из определения первообразной и условия задачи получаем F'(x) =f(x). Корнями квадратного трехчлена являются числа -1 и 3. Исследуем F(x) на данном отрезке с помощью производной  . Значит минимальное значение первообразной равно F (3) = -9, а наибольшее значение F(x) принимает на одном из концов отрезка [0;6]. Теперь найдем первообразную, получаем F(x)= $\frac{1}{3}\cdot x^3 - x^2 - 3x + C$. Значит F(3) = $\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 - 3\cdot 3 + C = -9$, получаем С=0, F(x)= $\frac{1}{3}\cdot x^3 - x^2 - 3x + C$. Найдем значение F(x) на концах отрезка , получаем F(0) = $\frac{1}{3}\cdot 0^3 - 0^2 - 3\cdot 0 = 0$, F(3) = $\frac{1}{3}\cdot 6^3 - 6^2 - 3\cdot 6 = 18$. Значит наибольшее значение F(x)=18.
Ответ: 18.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>График первообразной $F(x)$ для функции $f(x)-\frac{6}{x^2}$ на промежутке (-∞;0) проходит через точку (-2;-3). Решите уравнение $F(x)=f(x)$. Если уравнение имеет более одного корня в ответ укажите больший из корней.</td><td></td><td>12</td><td>Найти первообразную, составить и решить уравнение, сделать отбор корней.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Решение: перепишем данную функцию в виде f(x)=$-6x^{-2}$ и найдем ее первообразную, получаем F(x)= $6\cdot x^{-1}$ + С, так как F(-2)= −3, получаем С=0. Составим уравнение из условия задачи : $\frac{6}{x}=\frac{6}{x^2}$. Поскольку x не равно 0, домножим обе части уравнения на $\frac{6}{x^2}$, найдем $x=-1$.
Ответ : -1.</td></tr>
</table>

2.2 Система задач по теме «Первообразная» для подготовки к итоговой аттестации старшеклассников

Одним из методов работы для достижения целей обучения появляется теме «Первообразная» в рамках школьной программы курса алгебры и начал анализа – является задачный подход, суть которого заключается в обучении математике через решение задач.

Учебная задача – это мощное средство обучения, с помощью которого можно достигать образовательные и воспитательные цели.

В монографии «Задачный подход в обучении математике» Г.А. Клековин [18] подробно описывает классификации учебных задач, их функции, методы и способы и проектирования, обобщает опыт известных методистов Г. И. Саранцева, И. Ф. Шарыгина., Ю.М. Колягина и других. Авторы отмечают, что основными требованиями к системе задач и упражнений Г.И. Саранцева следующие:

– «система должна быть направлена на достижение цели (формирование понятий, систематизация, усвоение знаний, умений, навыков);

– предусматривать определенную последовательность задач, причем число однотипных упражнений недолжно превышать трех;

– предупреждать появление ложных ассоциаций;

– включать задания на прямые и обратные операции, применения принципа единственного различия в сходных упражнениях;

– содержать упражнения на систематизацию материала;

– отличаться разнообразием формулировок задач» [18, с.80].

В своей монографии Р.А. Утеева [48] рассматривает необходимость в дифференцированном подходе к обучению, как средстве для достижения высоких образовательных результатов, рассматривает различные типологические группы, применение разнообразных форм и методов обучения.

В данном параграфе приводится система задач по теме «Первообразная» в рамках школьной программы курса алгебры и начал анализа. Система выстроена в соответствии с требованиями Г.И. Саранцева и принципами дифференциации Р.А. Утеевой.

В приведенной системе задачи разделены на 5 типов:

1. Задачи на определение первообразной.
2. Задачи на отыскание первообразной.
3. Задачи на первообразную с физическим содержанием.
4. Задачи на первообразную с геометрическим содержанием.
5. Задачи на исследование графика первообразной.

Каждый тип имеет две подгруппы: базовый и продвинутый уровни. Задачи базового уровня рассчитаны на школьников, которые не планируют изучать математику в ВУЗах, задачи продвинутого уровня предполагают изучение математики на более высоком уровне, необходимом в дальнейшем при обучении в средних специальных и высших учебных заведениях.

Ниже приведены примеры задач каждого типа по двум уровням сложности.

1. Задачи на определение первообразной.

Базовый уровень

1.1. «Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = x^4 – x^{11}$, $f(x) = 4x^3$ -$11x^{10}$» [30, с. 192].

Решение.

Учитывая, что $F'(x) = f(x)$.

Так как $F(x) = x^4 - x^{10}$,

то $F'(x) = (x^4 - x^{11})' = (x^4)' - (x^{11})' = 4x^3 - 11x^{10} = f(x)$.

Что и требовалось доказать.

1.2. Задачи на доказательство установления того, что некоторая функция $F(x)$ является перообразной для функции $f(x)$.

«Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = -4\cos x$, $f(x) = 4\sin x$ » [30, с. 192].

Решение.

Учитывая, что $F'(x) = f(x)$.

Так как $F(x) = -4\cos x$,

то $F'(x) = (-4\cos x)' = -4(\cos x)' = -4(-\sin x) = 4\sin x = f(x)$.

Что и требовалось доказать.

1.3. «Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{11}}{11}$, $f(x) = (3x+7)^{10}$» [30, с. 170].

Решение.

Учитывая, что $F'(x) = f(x)$.

Применим правило дифференцирования сложной функции

Так как $F(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+7)^{11}}{11}$,

то $F'(x) = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+7)^{11}}{11}\right)' = \frac{1}{3}(3x+7)'\cdot\left(\frac{(3x+7)^{11}}{11}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 11\cdot \frac{(3x+7)^{10}}{11} = (3x+7)^{10}$.

Что и требовалось доказать.

Продвинутый уровень

1.4. «Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = e^{x^2-3x}$, $f(x) = (x^2-3x)\cdot e^{x^2-3x}$, » [32, с. 123].

Решение.

Учитывая, что $F'(x) = f(x)$.

Так как $F(x) = e^{x^2-3x}$,

то $F'(x) = (e^{x^2-3x})' = (x^4)' - (x^{11})' = 4x^3 - 11x^{10} = f(x)$.

Что и требовалось доказать.

1.5. «Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если $F(x) = \frac{5}{3}\sqrt[5]{sin^3x}$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[5]{sin^2x}}$» [32, с. 123].

Решение.

Учитывая, что $F'(x) = f(x)$.

Так как $F(x) = \frac{5}{3}\ \sqrt[5]{sin^3x}$, то применим правило вычисления сложной функции, $(\frac{5}{3}\ \sqrt[5]{sin^3x})' = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{sin^2x}} = \frac{\cos x}{\sqrt[5]{sin^2x}} = \mathrm{f}(x)$.

Что и требовалось доказать.

1.6. «Докажите, что функция y = F(x) является первообразной для функции y = f(x), если F(x) = $|x^2 - 1| - 3x$, $f(x) = 2x - 3$, x € (1, +∞)»

Решение.

Учитывая, что $F'(x) = f(x)$.

Так как $F(x) = |x^2 - 1| - 3x$ на заданном по определению раскрываем модуль , так как $x^2 - 1 > 0$, то $F(x) = x^2 - 1 - 3x$, находим $F'(x) = 2x - 3$.

Что и требовалось доказать.

2. Задачи на отыскание первообразной.

Базовый уровень

2.1. «Для функции *y* = *f*(*x*) найдите хотя бы одну первообразную:

f(x)= $\frac{7}{x^2}$ » [30, с.192].

Решение.

f(x)= $\frac{7}{x^2} = 7 \cdot x^{-2}$

воспользуемся табличной формулой для нахождения первообразной получаем F(x) =$7 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$ +C = $- 7 \cdot \frac{1}{x}$ + C = $- \frac{7}{x}$ + C, где C- любое число.

Ответ : $- \frac{7}{x} + 1$.

2.2. «Для функции *y* = *f*(*x*) найдите хотя бы одну первообразную:

$f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ » [30, с. 193].

Решение.

Преобразуем правую часть $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, получим

$f(x) = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = sinx$. Найдем $F(x) = -cosx + C$, так как С- любое число получаем ответ

Ответ: $-cosx + 2$

2.3. «Докажите, что функция $F(x) = \ln(2x-1) - \frac{1}{2x-1}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{4x}{(2x-1)^2}$» [30, с. 124].

Решение.

Действительно, получим

$$F'(x) = \left(\ln(2x-1) - \frac{1}{2x-1}\right)' = \frac{1}{2x-1} \cdot (2x-1)' - \frac{-2}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{2}{2x-1} + \frac{2}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x-1)+2}{(2x-1)^2} = \frac{4x-2+2}{(2x-1)^2} = \frac{4x}{(2x-1)^2} = f(x),$$

таким образом, функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Продвинутый уровень

2.4. «Для функции y = f(x) найдите хотя бы первообразную:

f (x) = sinx·cos6x+ sin6xcosx » [32, с 126]

Решение.

Преобразуем выражение sinx·cos6x+ sin6x cosx, получим

f (x)=sin 7x. Воспользуемся правилами для нахождения первообразной получаем F(x)= $-\frac{1}{7}$ cos 7x + C.

Ответ: F(x) = $-\frac{1}{7}$ cos 7x + C.

2.5. «Найдите первообразную для функции f(x) = $\frac{x^{-3} \cdot \sqrt{x}}{x^2}$» [32, 171]

Решение.

Преобразуем f(x) к виду f(x)= *f(x)*= $\frac{x^3 x^{-2,5}}{x^{-2}} = x^{-4,5}$, используя свойства корней и степеней, далее найдем первообразную F(x)=$\frac{x^{3,5}}{3,5} + C = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$.

Ответ : F(x)=$\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$.

2.6. Найти неопределенный интеграл, результат проверить дифференцированием:

$$\int \frac{1+cos^2\alpha}{1+cos^2\alpha}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{1+cos^2\alpha}{1+cos^2\alpha}dx$$

$$= \int \frac{1+cos^2 x}{1+2\,cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1+cos^2 x}{2\,cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{cos^2 x}{cos^2 x}dx = \frac{1}{2}tgx + \frac{1}{2}x + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}tgx + \frac{1}{2}x + C\right)' = \frac{1}{2\,cos^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{1+cos^2 x}{2\,cos^2 x} = \frac{1+cos^2 x}{1+cos\,2\,x}.$$

Ответ: неопределенный интеграл найден верно.

3. Задачи на первообразную с физическим содержанием.

Базовый уровень

3.1. «Точка движется по координатной прямой, ее скорость задана формулой $v = -4sin3t,\ t$ – время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени t = 0 координата точки равнялась числу 2» [30, с.163].

Решение.

Задача сводится к нахождению первообразной функции для скорости.

$S'(t) = v(t) = -4\cdot\frac{1}{3}(-cos3t) + C.$

При $t = 0,$ получим: $s(0) = -4\cdot\frac{1}{3}\ (-cos0\cdot 3) + C = 2.$ *Откуда* $C = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Таким образом, $s(t) = 4 \cdot \frac{1}{3} cos3t + \frac{2}{3}$.

Ответ: $s(t) = 4 \cdot \frac{1}{3} cos3t + \frac{2}{3}$.

3.2. «Скорость движения точки по координатной прямой задается формулой $v(t) = \frac{6}{\sqrt{2t+1}}$, где t- время движения Найдите закон движения S(t), если S(0)=1» [30, с. 163].

Решение.

Задача сводится к нахождению первообразной функции для скорости.

$S'(t) = v(t) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2t+1)^{-0,5+1}}{-0,5+1} + C = 6 \cdot \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2t+1}}{0,5} + C = 6 \cdot \sqrt{2t+1} + C$

При $t = 0,$ получим: $s(0) = 6 \cdot \sqrt{2 \cdot 0 + 1} + C = 1$. *Откуда* $C = -5$.

Таким образом, $s(t) = 6 \cdot \sqrt{2t+1} - 5$.

Ответ: $s(t) = 6 \cdot \sqrt{2t+1} - 5$.

3.3. «Ускорение движения точки по координатной прямой задано формулой a(t) = $2 \cdot (t+1)^2$, t – время движения. Найдите закон изменения скорости движения $v(t)$ и закон движения S(t), если $v(0) = 1$, S(0)=1» [30, с. 163].

Решение.

Задача сводится к нахождению первообразной функции для скорости и для ускорения.

В начале найдем первообразную для ускорения получим $a'(t) = v(t) = 2 \cdot \frac{(t+1)^3}{3} + C$. Выполним подстановку, получим $v(0) = 2 \cdot \frac{(0+1)^3}{3} + C = 1$, $C = \frac{1}{3}$.

Получаем $v(t) = 2 \cdot \frac{(t+1)^3}{3} + \frac{1}{3}$.

Теперь найдем первообразную функции для скорости

$S'(t) = v(t) = 2 \cdot \frac{(t+1)^3}{3} + \frac{1}{3}$.

Продвинутый уровень

3.4. Напишите закон движения пули, если известно, что скорость вылета пули из винтовки 800 м/с, известно ускорение земного притяжения равна 10 м/с^{2}. (сопротивлением воздуха пренебрегаем). [32, с.207]

Решение.

Так как S'(t)= v (t), $a'(t)$ = v(t) , имеет S(t)=$\int(at+b)dt = \frac{at^2}{2} + bt + C$, b и C – некоторые постоянные. Ось x - направлена вертикально вверх и отсчета совпадает с точкой вылета пули.

Ускорение и сила тяжести направлены вниз, поэтому ускорение силы тяжести равно - 10. Так как при t= 0, S(t)=0, найдём что C=0. Имеем S(t)=-5t^2 + bt , S'(t)= -5·2t+b, так как в условии скорость дана можно найти в , 800 = -10t+b, подставим t=0, получим b=800, таки образом S(t) = - 5t^2 + 800t.

Ответ: S(t) = - 5t^2 + 800t.

3.5. «Материальная точка движется по координатной прямой со с скоростью $v(t)$ = sin2tcos2t. Найдите уравнение движения точки, если при t = $\frac{\pi}{4}$ ее расстояние от начала координат равно 2.» [32, с.128]

Решение:

S (t) = sin2cos2A

Преобразуем, получаем:

S (t) = $\frac{1}{2}$sin4t;

S'(t) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$($-$cos4t) +C= -$\frac{1}{8}$cos4t+C;

Для определения C используем условие задачи, S ($\frac{\pi}{4}$)=2.

Получаем: $\frac{1}{8}$cos$\frac{\pi}{4}$ ·4+C=2, C=1$\frac{7}{8}$.

Ответ: S(t)= $-\frac{cos4t}{8}$+1$\frac{7}{8}$.

3.6. «Скорость прямолинейно движущегося тела задана формулой:

V (t) = 4·cos (3t $-\frac{\pi}{6}$).

Напишите формулы зависимости его ускорения *a* и координаты *x* от времени *t*, если при t=$\frac{\pi}{3}$ координата x=$\frac{5}{3}$. В этот момент времени найдите *a* и *V*» [42]. Так *x(t)* - первообразная для *V(t)*, найдём её общий вид используя правила нахождения первообразных, получаем: $x(t)$=4$\cdot\frac{1}{3}$ sin (3t–$\frac{\pi}{6}$)+C, так как в момент времени t=$\frac{\pi}{3}$, x=$\frac{5}{3}$ подставляем $\frac{4}{3}$ sin (3$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$)+C = $\frac{5}{3}$, C=1.

Значит $x(t)=\frac{4}{3}$ sin (3t–$\frac{\pi}{6}$)+1.Так как a(t)= V'(t)=–4·3 sin(3t–$\frac{\pi}{6}$)=–12 sin(3t–$\frac{\pi}{6}$).

$V(\frac{\pi}{3})$ =4cos (3·$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$) = 4·cos (π - $\frac{\pi}{6}$) = 4 cos ($\frac{5\pi}{6}$)=4 ·$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $2\sqrt{3}$ (м/с).

$a(\frac{\pi}{3})$= -12 sin (3· $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$)= -12 sin· $\frac{5\pi}{6}$= − 12$\frac{1}{2}$= −(6 м/c^2).

Ответ: a(t)= −12 sin(3t–$\frac{\pi}{6}$);

$x(t)=\frac{4}{3}$ sin (3t–$\frac{\pi}{6}$)+1; $2\sqrt{3}$ м/с; − 6 м/c^2.

4. Задачи на первообразную с геометрическим содержанием.

Базовый уровень

4.1. «Для данной функции $f(x) =$ f(x) $= \frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}$ найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку M ($\frac{3\pi}{4}$; 0)» [30]

Решение.

Воспользуемся правилом нахождения первообразной получим:

F(x) = - 3 ctg $\frac{x}{3}$ + C. Так как график первообразной проходит через точку M ($\frac{3\pi}{4}$; 0) , подставим значения абсциссы и ординаты :

-3·ctg$\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}$ + C= 0

-3 $\cdot 1 + C = 0$

C= 3

Получили: F(x) = - 3 ctg $\frac{x}{3}$ + 3.

Ответ: F(x) = - 3 ctg $\frac{x}{3}$ + 3.

4.2. «Значение первообразной $F(x)$ функции $f\{x) = -8e^x$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(\ln 7)$» [44, с. 84].

Решение.

Все первообразные функции для $f(x)$ имеют вид $F(x) = -8e^x + C$. Так как в точке 0 значение первообразной равно 3, значит нужно решить уравнение $F(0) = 3$, получим $F(0) = -8e^x + C = 3$, откуда $C = 11$.

Вычислим значение функции в точке $\ln 7$, получим

$$F(\ln 7) = -8e^{\ln 7} + 11 = -8 \cdot 7 + 11 = -56 + 11 = -45.$$

Ответ: -45.

4.3. «Найдите ту первообразную для заданной функции $f(x) = 2x + 3$ график которой касается оси x» [32, с. 138].

Решение.

Все первообразные функции для $f(x)$ имеют вид $F(x) = x^2 + 3x + C$, графиками которых являются параболы.

Парабола $F(x) = x^2 + 3x + C$, касается оси Ox в том случае, когда $y = 0$, а значит, когда уравнение $x^2 + 3x + C = 0$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант квадратного уравнения должен быть равен нулю.

Решая квадратное уравнение $x^2 + 3x + C = 0$. Получим дискриминант $D = 9 - 4C = 0$, откуда $C = \frac{9}{4}$. Следовательно, первообразная имеет вид $F(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$.

Ответ: $F(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$.

Продвинутый уровень

4.4. «Для функции y= *f(x) найдите первообразную y=* F(*x*), которая принимает данное значение в указанной точке». [32, с. 128]

Решение:

F(x) $= -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$F\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -15$

Преобразуем f(x), получим $\mathrm{f(x)} = -\mathrm{sinx}$

Найдем F(x) для f(x). Получаем F(x)=cosx + C

Так как $F(-\frac{2\pi}{3}) = -15$, выполним подстановку имеем,

$-15 = Cos(-\frac{2\pi}{3}) + c$

$-15 = -\frac{1}{2} + C$

$C = -14{,}5$

Тогда $F(x) = cost - 14{,}5$

Ответ : $F(x) = cost - 14{,}5$

4.5. «Найдите ту первообразную для заданной функции $f(x) = 2x + 3$ график которой касается оси x» [32, с. 138].

Решение.

Все первообразные функции для $f(x)$ имеют вид $F(x) = x^2 + 3x + C$, графиками которых являются параболы.

Парабола $F(x) = x^2 + 3x + C$, касается оси Ox в том случае, когда $y = 0$, а значит, когда уравнение $x^2 + 3x + C = 0$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант квадратного уравнения должен быть равен нулю.

Решая квадратное уравнение $x^2 + 3x + C = 0$. Получим дискриминант $D = 9 - 4C = 0$, откуда $C = \frac{9}{4}$. Следовательно, первообразная имеет вид $F(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$.

Ответ: $F(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$.

4.6. «Значение первообразной $F(x)$ функции $f\{x) = -8e^x$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(\ln 7)$» [44, с. 84].

Решение.

Все первообразные функции для $f(x)$ имеют вид $F(x) = -8e^x + C$. Так как в точке 0 значение первообразной равно 3, значит нужно решить уравнение $F(0) = 3$, получим $F(0) = -8e^x + C = 3$, откуда $C = 11$.

Вычислим значение функции в точке $\ln 7$, получим

$$F(\ln 7) = -8e^{\ln 7} + 11 = -8 \cdot 7 + 11 = -56 + 11 = -45.$$

Ответ: -45.

5. Задачи исследование графика первообразной.

Базовый уровень

5.1. «На рисунке 16 изображён график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f\ (x)\ = 0$ на отрезке $[-1; 4]$» [23, С. 151].

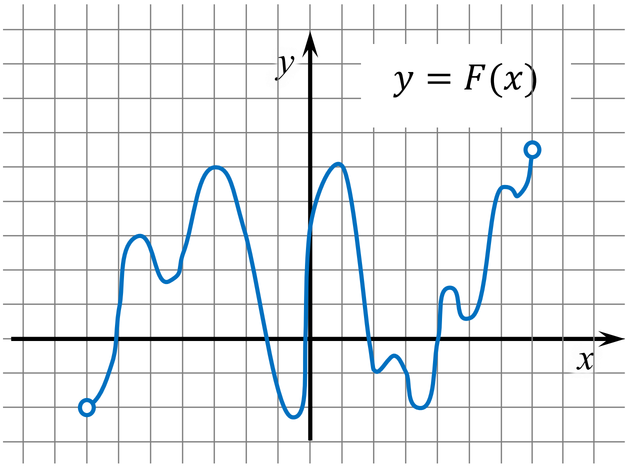


Рисунок 16 – Иллюстрация к заданию 5.1

Решение.

По определению первообразной функции $F'(x) = f(x)$. Уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $F'(x) = 0$. Следовательно, требуется сосчитать количество точек на отрезке [-1; 4], в которых касательная к графику функции $F(x)$ горизонтальна.

Таких точек 5 [23] (рисунок 17):

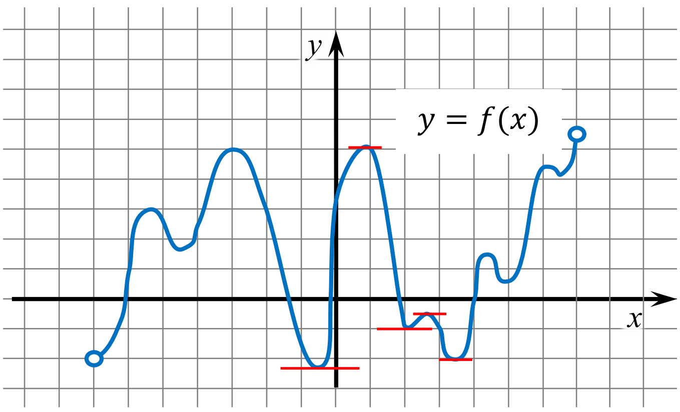


Рисунок 17 – Иллюстрация к решению задачи 5.1

Ответ: 5.

5.2. «Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$» [23, С. 174].

Решение.

По определению первообразной функции, $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$. При этом угловой коэффициент касательной к графику функции $\mathrm{y} = \mathrm{F}(\mathrm{x})$ в точке $x_0 = \pi$ соответственно равен $F'(\pi) = f(\pi) = \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 =$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = 0{,}75 + 1 = 1{,}75.$$

Ответ: 1,75.

5.3. «На рисунке 18 изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f\{x)$ и отмечены п точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?» [23, С. 156].

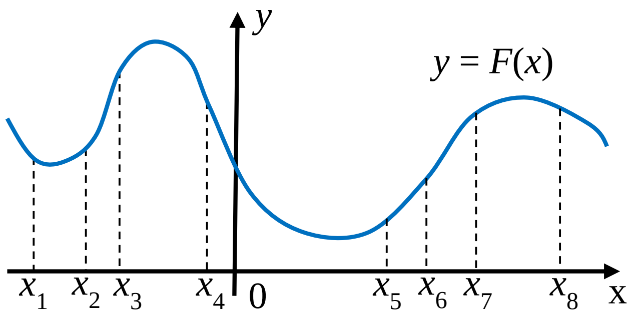


Рисунок 18 – Иллюстрация к заданию 5.3

Решение.

Задача сводится к тому, чтобы определить, в каких точках значение производной отрицательно. Производная отрицательна на тех промежутках, на которых функция убывает. На графике первообразная убывает в точках x_1, x_4, x_8. Значит функция $f(x)$ принимает отрицательные значения в трёх точках.

Ответ 3.

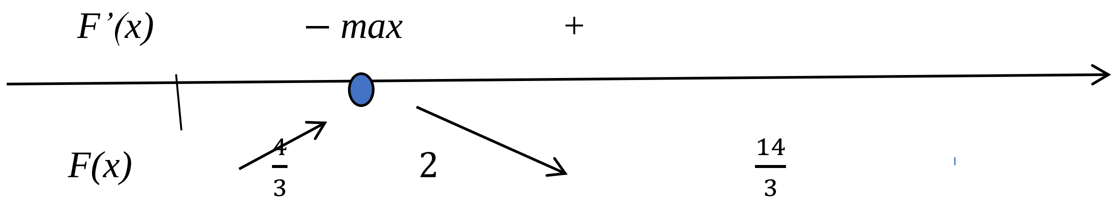
Продвинутый уровень

5.4. «В какой точке отрезка [$\frac{4}{3};\frac{14}{3}$] первообразная *F(x)* для функции *f(9)*= $(x-5)\ln(x-1)$ достигает своего наибольшего значения на этом отрезке?

Решение.

Из определения первообразной и условия получаем, что *F'(x)=f(x)*= $(x-5)\ln(x-1)$. При любом значении переменной $x \in [\frac{4}{3};\frac{14}{3}]$ число x−5 отрицательно. Далее ln(x−1)=0 при x=2; ln(x−1)>0 при

x>2; $ln(x-1) < 0$ при *x<2*. Исследуем *F(x)* на данном отрезке с помощью производной,



Следовательно, *max F(x)=F (2)* при $x \in [\frac{4}{3};\frac{14}{3}]$» [55, с.84].

Ответ: *2*.

5.5. «Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции y=f(x)» в точке x=a , если известно что y=F (x) – первообразна я для функции y= f(x) , f(x) = $\log_2 x + \log_3(x+1)$, $a = 8$» [32, с.130].

Решение.

По определению первообразной , y=f(x) – производная для F(x), поэтому угловой коэффициент касательной к графику функции F(x) в точке x=a равен F'(a) = f(a) == $\log_2 8 + \log_3(8+1)$= 3+2=5.

Ответ: 5.

5.6. *«*Известно, что функция *F(x)* – первообразная для функции $y = (25x - x^3) \cdot \sqrt{x-3}$. Исследуйте график функции на монотонность и экстремумы» [9, с. 34].

Решение.

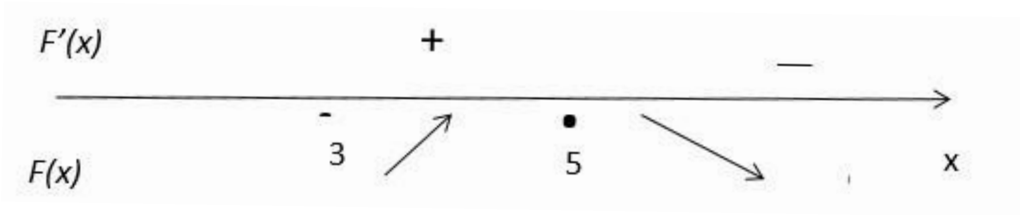
Так как $y = F'(x),\ y = (25x - x^3)\sqrt{x-3}$, исследуем на монотонность, найдем нули функции и решим систему, с учетом ОДЗ. Получаем:

$(25x - x^3)\sqrt{x-3} = 0$

$x(25 - x^2)\sqrt{x-3} = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} 25 - x^2 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$ $\quad x - 3 = 0 \quad x = 3$

$\begin{cases} x = \pm 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$ $\quad x = 5$



F(x) возрастает при x ∈ [3; 5];

F(x) убывает при x∈ [3; +∞);

x=5 – точка максимума.

Ответ: F(x) возрастает при x ∈ [3; 5], F(x) убывает при x∈ [3; +∞), x=5 – точка максимума.

2.3 Результаты педагогического эксперимента

В рамках данного исследования в СОШ №4 им. Г.К. Жукова г. о. Краснознаменск Московской области была проведена экспериментальная работа. В исследовании приняли участие обучающиеся 11 классов.

В рамках констатирующего этапа, была определена тема эксперимента, изучена и проанализирована научная, учебно-методическая и методическая литература по теме исследования: программы по алгебре и начал математического анализа для общеобразовательных классов, государственные стандарты общего среднего образования, учебные пособия и дидактические материалы по алгебре и началам математического анализа, КИМы ЕГЭ. Так же был обобщён опыт изучения первообразной с целью разработки такой методики обучения, благодаря которой достигались бы предметные и метапредметные результаты изучения темы. Были определены цели изучения темы «Первообразная и интеграл», отобраны задания, которые необходимо решить в процессе изучения данной темы. На основе выше перечисленного была разработана методическая схема обучения первообразной в курсе алгебры и начал математического анализа, в частности разработана технологическая карта изучения темы «Первообразная и интеграл».

На основании анализа первого этапа эксперимента была выдвинута **гипотеза***:* повышение качества математической подготовки обучающихся при изучении темы «Первообразная» будет достигаться, если выявить методические основы и разработать методическую схему по эффективному обучению первообразной в старших классах общеобразовательной школы на основе технологического подхода; разработать систему дифференцированных заданий по теме «Первообразная», отвечающая требованиям государственной итоговой аттестации.

Целью поискового этапа было проведение занятий по теме «Первообразная и интеграл» и проверка эффективности разработанной методики обучения первообразной, направленной на достижения предметных и метапредметных результатов изучения темы.

В проведении эксперимента приняли участи 11А класс (23 ученика) и 11 Б класс (25 учеников). В качестве экспериментальной группы, был выбран 11А класс. Здесь были проведены уроки в соответствии с методами, формами и средствами обучения, которые были отобраны в рамках данной диссертации. В 11Б классе – контрольной группе, занятия проводились с помощью традиционных форм, методов и средств обучения. Отметим, что уровень обучения в данных классах примерно одинаковый, так как преподавание ведется одним педагогом и нет разделения классов на профили.

По результатам эксперимента, обеим группам была предложена одинаковая контрольная работа из методического пособия для учителей, авторы А.Г. Мордкович и П.В. Семенов. Её работы – определение уровня подготовки учащихся к решению заданий на первообразную. Задания соответствуют умениям, проверяемых при решении задач КИМов ЕГЭ.

В таблице 16 приведены 2 варианта контрольной работы.

Таблица 16 – Образец итоговой контрольной работы по теме «Первообразная и интеграл»

№ варианта	Задания
Вариант 1	«1. Докажите, что $F(x) = x^4 - 3\sin x$ является первообразной для $f\ (x) = 4x^3\ - 3\cos x$. 2. Найдите неопределенный интеграл: $\int \left(\frac{4}{x^2} + 3\sin x\right) dx$. 3. Вычислите интегралы: $а)\ \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int_1^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$. 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 1 - x^3, y = 0, x = -1.$ 5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 2$, касательной к этому графику в точке с абсциссой $x = -2$, и прямой $x =\ 0$» [5].
Вариант 2	«1. Докажите, что $F(x) = x^5 + \cos x$ является первообразной для $f\ (x) = 5x^4\ - \sin x$. 2. Найдите неопределенный интеграл: $\int \left(\frac{1}{x^2} - 2\cos x\right) dx$. 3. Вычислите интегралы: $а)\ \int_0^1 x^2 dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\frac{x}{2} dx$. 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2 - x^2, y = 0, x = -1, x = 0.$ 5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 + 2$, касательной к этому графику в точке с абсциссой $x = 1$, и прямой $x\ =\ 0$; фигура расположена в правой координатной полуплоскости» [5].

Контрольная работа выстроена по следующей схеме: задания уровня стандарт (задачи 1-3), среднего уровня – «хорошо» (задача 4) и задание повышенного уровня сложности – «отлично» (задача 5). Критерии оценивания: за успешное выполнение заданий только базового уровня – отметка «3»; за успешное выполнение заданий двух уровней (базового и среднего или повышенного) – отметка «4»; за успешное выполнение всех пяти заданий – отметка «5». Каждое задание оценивалось в 1 балл, неверное – 0 баллов.

По результатам проведенной работы выли явлены следующие виды ошибок (таблица 17).

Таблица 17 – Виды ошибок обучающихся

11 А класс (эксперементальный)		11Б класс	
Виды ошибок	Количество ошибок	Виды ошибок	Количество ошибок
Вычислительные	7	Вычислительные	7
Неверно применено формула (таблица первообразных)	6	Неверно применено формула (таблица первообразных)	9
Неверно применено правило интегрирования	7	Неверно применено правило интегрирования	10
Неверно применена формула Ньютона-Лейбница	5	Неверно применена формула Ньютона-Лейбница	6

Помимо анализа ошибок, был применен расчет процент успеваемости и качества знаний по классам. Под успеваемостью подразумевается отношение удовлетворительных оценок («удовлетворительно», «хорошо» и «отлично» к общему количеству учеников выраженное в процентах, под качеством знаний отношение положительных оценок («хорошо» и «отлично») к общему количеству учеников выраженное в процентах. Результаты приведены в таблице 18.

Таблица 18 – Сравнительный анализ результатов контрольной работы по классам

11А класс (экспериментальный)			11Б класс		
Общее количество детей, %	23		Общее количество детей, %	25	
Неудовлетворительно	1	4%	Неудовлетворительно	4	16%
Удовлетворительно	5	22%	Удовлетворительно	8	32%
Хорошо	14	61%	Хорошо	12	48%
Отлично	3	13 %	Отлично	1	4%
Успеваемость (%)	96		Успеваемость (%)	84	
Качество знаний(%)	74		Качество знаний(%)	52	

Результаты опытной работы позволяют сделать вывод о том, что уровень знаний учащихся 11А класса, в котором проходили уроки по теме «Первообразная и интеграл» с использованием разработанных средств и методики, удалось значительно повысить, а именно – успеваемость на 12 %, качество знаний на 26 %. Отдельно стоит обратить внимание, что помимо количественных показателях, произошёл прорыв с точки зрения внутренней мотивации школьника к самоподготовке и осознанному обучению, что благотворно должно повлиять на обучение в высших учебных заведениях.

Выводы по второй главе

На основании выполненного в главе исследования можно сделать следующие выводы:

– в рамках исследования разработана методическая схема по эффективному обучению первообразной в старших классах общеобразовательной школы;

– спроектированы конспекты четырех последовательных уроков по теме «Первообразная» для обучающихся 11 классов на углубленном уровне по УМК А.Г. Мордковича;

– для достижения целей обучения первообразной применялся технологический подход, рассмотрена и применена технология гарантированного обучения В.М. Монахова;

– разработана дифференцированная система задач по теме первообразная для подготовки старшеклассников к итоговой;

– система задач по теме подразумевает дифференциацию два уровня сложности базовый и повышенный;

– проведенный педагогический эксперимент показал хорошие результаты, большая часть учащихся в полном объеме усвоили изученную тему, удалось повысить успеваемость и качество знаний.

Заключение

В данной работе были рассмотрены основные положения, связанные с методикой обучением первообразной в школьном курсе алгебры и начал математического анализа.

Первообразная и интеграл, как отмечалось выше, представляет собой огромный простор для исследования, так как имеет огромное практическое применение в различных отраслях науки: геометрии, физике, астрономии, химии, экономике.

Работа спланирована таким образом, чтобы подача материала велась интересно, с применением разнообразных форм, методов и средств преподавания, на доступном для понимания уровне и освобождена от излишних трудностей для обучающихся.

В исследовании выполнены следующие научные задачи:

– проведен полный анализ теоретической основы изучения первообразной;

– проведён анализ задачного материала различных УМК, входящих в федеральный перечень учебников и рекомендованных Министерством Просвещения РФ

– выделены методические особенности преподавания первообразной и интеграла в школьном курсе математики;

– подобрана дифференцированная система упражнений, обеспечивающее прочное усвоение учащихся основных приемов решения задач;

– проведен педагогический эксперимент, который подтвердил эффективность, предложенной методики;

Все вышесказанное, дает возможность можно говорить о том, что цели и задачи исследования – достигнуты.

Список используемой литературы

1. Александрова Л.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: самостоятельные работы для учащихся общеобразоват. организаций (базовый и углублённый уровни) / Л.А. Александрова; под ред. А. Г. Мордковича. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2015. – 134 с.

2. Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб, для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Ш. А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и др. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

3. Бахусова Е.В. Технология проектирования учебного процесса: подготовительный и проектировочный этапы / Е.В. Бахусова // Проблемы современного образования. – 2011. - № 2. - С. 111-122.

4. Бурмистрова Т.А. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2018. – 159 с.

5. Васильева Г.Н. Современные технологии обучения математике: учебное пособие. Часть 1 / Г.Н. Васильева, В.Л. Пестерева; Перм. гос. гум.-пед. ун-т. – Пермь, 2013. – 114 с.

6. Видеоурок "Первообразная функция и неопределенный интеграл". Определение первообразной и интеграла. - URL: https://www.uchportal.ru/video/vip/780/algebra_10_klass/pervoobraznaja_i_integral/videourok_pervoobraznaja_funkcija_i_neopredelennyj_integral_opredelenie_pervoobraznoj_i_integrala(дата обращения: 26.02.2021).

7. Гераськина Е.В. Содержание и методические особенности изучения темы "Определенный интеграл" в средней школе: автореф. дис. … канд. пед.

наук: 13.00.02 / Московский государственный гуманитарный университет им. М.А. Шолохова. – М., 2007. – 23 с. - URL: https://www.dissercat.com/content/soderzhanie-i-metodicheskie-osobennosti-izucheniya-temy-opredelennyi-integral-v-srednei-shko (дата обращения: 26.02.2021).

8. Глизбург В.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Контрольные работы для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / В.И. Глизбург; под ред. А. Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009. – 32 с.

9. Глизбург В.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Контрольные работы для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / В.И. Глизбург; под ред. А.Г. Мордковича. – 3-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 61 с.

10. Григорьева Г.И. Алгебра и начала анализа. 11 класс: поурочные планы по учебнику Ш. А. Алимова и др. – Ч. I/ Г.И. Григорьева. – Волгоград: Учитель, 2006. –159 с.

11. Гришина Т.С. Логический примем сравнений в задачах математического анализа // Математика в школе. - №6. – 1994. - С. 26-27.

12. Дукин М.М. Обобщающие уроки по алгебре в IX классе // Математика в школе. - №6. – 1996. - С. 25-26.

13. Дронова Е.Н. Организация учебно-познавательных ситуаций как средства понимающего усвоения математики учащимися школы: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Е.Н. Дронова [Место защиты: Ом. гос. пед. ун-т]. – Барнаул, 2007. - 225 с.

14. Иванова Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб, пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов/ Под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. - Н. Новгород: НГПУ, 2009. - 355 с.

15. Капкаева Л.С. Теория и методика обучения математике: частная методика. В 2 ч. Часть 2: учеб. пособие для вузов / Л. С. Капкаева . – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2017. – 191 с.

16. Кац М. Физический материал на уроках математики // Математика. - №5. - 2001.

17. Ким Н.А. Алгебра и начала математического анализа. 7-11 классы: развернутое тематическое планирование. Линия Ш.А. Алимова / авт.-сост. Н.А. Ким. - Волгоград: Учитель, 2010. – 179 с.

18. Клековин Г.А. Задачный подход в обучении математике: Монография / Г.А. Клековкин, А.А. Максютин – М. Самара: СФ ГОУ ВПО МГПУ, 2009. - 184 с.

19. Кларин М.В. Технология постановки целей / М.В. Кларин // Школьные технологии. – 2005. – №2. – С. 50.

20. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс учеб, для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – М. Мнемозина, 2010. – 264 с.

21. Колягин Ю.М., Пикан В.В. О прикладной и практической направленности обучения математики // Математика в школе. - 1985. - №6 – С. 26-29.

22. Крившенко Л.П. Педагогика: учебник / род ред. Л.П. Крившенко. – М.: ТК Велби, Проспект, 2010. – 432 с.

23. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2021. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2021 года: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2020. – 400 с.

24. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб, пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. – М. Просвещение, 1987. – 416 с.

25. Марчук Н.А., Гульманов Н.К., Асетов А.А. Методические особенности преподавания темы «Интеграл» // International scientific review. - 2016. - №3(13). - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-osobennosti-prepodavaniya-temy-integral (дата обращения: 26.02.2021).

26. Методика и технология обучения математике: курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. - 2-е изд, испр. - М.: Дрофа, 2008. - 415, [1] с.: ил.

27. Монахов В. М. Теория педагогических технологий: методологический аспект // Известия ВГПУ. - 2006. - №1. - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/teoriya-pedagogicheskih-tehnologiy-metodologicheskiy-aspekt (дата обращения: 24.03.2021).

28. Муравин Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень.11 класс.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 318 [2].

29. Муравин Г.К. Область определения первообразной // Математика в школе. - №21. - 2001.

30. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / под ред. А.Г. Мордковича. – 8-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2019. – 271 с.

31. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 91 с.

32. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). В 2 ч. Ч. 2. [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 9-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2020. – 264 с.

33. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

34. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб, для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.

35. Первообразная. Видеоурок 19. - URL: https://videouroki.net/video/19-piervoobraznaia.html(дата обращения: 26.02.2021).

36. Первообразная. Видеоурок. - URL: https://interneturok.ru/lesson/algebra/11-klass/integralb/pervoobraznaya(дата обращения: 26.02.2021).

37. Петров В.А. Выбор ответов в заданиях раздела А Единого Государственного Экзамена по математике без решения задач // Математика в школе. - №4. – 2006. – С. 10-17.

38. Пратусевич М.Я., Соломин В.Н., Столбов К.М., Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 11 класс. Углубленный уровень. - М.: Просвещение, 2013. – 158 с.

39. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования [Электронный ресурс] / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2016. – 569 с. – Режим доступа: https://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/07/Primernaya-osnovnaya-obrazovatelnaya-programma-srednego-obshhego-obrazovaniya.pdf (Дата обращения 01.11.2020)

40. Пышкало А.М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе: авторский доклад по монографии «Методика обучении элементам геометрии в начальных классах» , представленной на соиск. ….. д-ра пед.наук /А.М. Пышкало. - Москва: Академия пед. Наук СССР, 1975. - 60 с.

41. Репьев В.В. Общая методика преподавания математики. – М.: Учпедгиз, 1958. – 224 с. - URL: https://www.mathedu.ru/text/repjev_obshhaya_metodika_prepodavaniya_matematiki_1958/p144/ (дата обращения: 26.02.2021).

42. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 11 класс. / А.Н. Рурукин, И.А. Масленникова, Т.Г. Мишина – М.: ВАКО, 2011. – 304 с.

43. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. — М.: Просвещение, 2002. — 224 с.: ил.

44. Семенов А.В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] / под ред. И. В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: «Интеллект-Центр», 2021. – 224 с.

45. Стефанова Н.С. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – 2-е изд, испр. – М.: Дрофа, 2008. – 415 с.

46. Токарева Л.И. Первообразная и интеграл // Математика. - №47. – 2001.

47. Улендеева Н.И. Изучение темы «Первообразная и интеграл» с учащимися 11 класса в курсе алгебры и начала математического анализа профильной школы // СНВ. - 2013. - №2(3). - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/izuchenie-temy-pervoobraznaya-i-integral-s-uchaschimisya-11-klassa-v-kurse-algebry-i-nachala-matematicheskogo-analiza-profilnoy-shkoly (дата обращения: 26.02.2021).

48. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. - М.: Прометей, 1997. - 230 с.

49. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования // Федеральные государственные образовательные

стандарты [Электронный ресурс]. - URL: https://fgos.ru (дата обращения: 30.10.2020).

50. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fipi.ru/ (дата обращения 11.10.2020)

51. Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность: Приказ Мин. просвещения РФ от 20.05.2020. №254 (ред. от 14.09.2020 № 59808). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202009140015 (дата обращения 05.09.2020)

52. Что такое первообразная (интеграл) функции. - URL: https://www.youtube.com/watch?v=-H9sQFfHxcI (дата обращения: 26.02.2021).

53. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 360 с.

54. Шарипова И.Ф., Марданова Ф.Я. Преимущества работы в малых группах при изучении темы первообразной функции // Проблемы педагогики. - 2020. - №5(50). - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/preimuschestva-raboty-v-malyh-gruppah-pri-izuchenii-temy-pervoobraznoy-funktsii (дата обращения: 22.04.2021).

55. Шестаков С.А. ЕГЭ 2021. Математика. Производная первообразная. Исследование функций. Задача 12(профильный уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И.В. Ященко. - М.: МЦНМО, 2021. - 96 с.

56. Шильдкравт Е.В. О целях изучения первообразной и интеграла в курсе алгебры и начал математического анализа // Вестник магистратуры. -

2021. - №1-3. - С.55-59. - URL: http://www.magisterjournal.ru/docs/VM112_3.pdf (дата обращения: 26.03.2021).

57. Шильдкравт Е.В. Применение технологии В.М. Монахова при проектировании темы "Первообразная и интеграл" в школьном курсе алгебры и начала анализа //Вестник магистратуры. - 2021. - №4-1. - С.99-102. - URL: http://www.magisterjournal.ru/docs/VM115_1.pdf (дата обращения: 26.03.2021).

58. http://muravin2007.narod.ru/p105.htm

59. Bonsch, M. Unterrichtsmetoden kreativ und vielfaltig Текст. / M. Bonsch; unter Mitarbeit von A. Kaiser. - Baltmannsweiter: Schneider - Verl. Hohengehen, 2002. - 180 S.

60. Fuhr, Ch. Schulen und Hochschulen in der Bundesrepublik Deutschland Текст. / Ch. Fuhr. Koln: Inter Nationes Bonn, 1988. - 109 S.

61. Seminario Nacional a Dirigentes, Metodologos e Inspectores de las Direccciones Provinciales y Municipales de Educaci6n. (Doeumentos normativos y metodol6gicos) 1ra. parte. Ciudad de la Habana. Mined. Febrero 1982, 257 pag.

62. Tesis sobre polltica educacional. Tesis y resoluciones del I Congreso del Partido Comunista de Cuba. Habana. Impre?a de medios de propaganda, 1976, pag 367-424.

63. Tesis sobre politica cientifica nacional. Tesis y resolucio nes del I Congreso del Partido Comunista de Cuba. Habana. Imprenta de medios de propaganda, 1976. pag. 425-466.