МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе изучения алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

Студент	Е.В. Дудрина	
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Научный руководитель	канд. пед. наук, доцент, Н.Н. Кошелева	
	(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Важным элементом жизни в современном обществе является формирование математического мышления. Умение манипулировать математическими объектами, использовать правила их конструирования вскрывают механизм логических построений, вырабатывают умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление.

На сегодняшний день реформирование системы математического образования получило отражение в стандарте основного общего и полного общего образования по математике. Образование в нашей стране направлено на прогнозирование тенденций и потребностей будущего, в нем должны найти отражение современные достижения, и оно должно иметь связь с настоящим.

В настоящее время дифференциация обучения, появление классов различной профильной направленности, в том числе гуманитарных, технологических, экономических, естественно-математических, ставят новые цели, содержание, методы, формы и средства обучения математике в школе.

В Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования, принятой в 2002 году [28], говорится о том, что профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса и на создание условий для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения для школьников индивидуальных образовательных программ.

Начиная с середины шестидесятых годов, реформа школьного математического образования, получившая название «реформа А.Н. Колмогорова», определила задачи изучения тригонометрии в школе.

Большой вклад в развитие теории обратных тригонометрических функций внесли Т.А. Иванова [22], А.И. Новиков [42, 43], М.К. Потапов [51], А.Г. Мордкович, [41] С.И. Новоселов [44, 45], И.А. Родионова [52] и др.

Теоретические исследования и научные направления, и по технологии обучения математике и в области методологических подходов, принадлежат П.Я. Гальперину [12], М.Б. Воловичу [10], Р.Г. Хазанкину [69], А.Н. Марасанову [35], П.М. Эрдниеву [75], А.А. Темербековой [59].

Роль и значение тригонометрии в развитии межпредметных связей и формировании у учащихся умений практической деятельности рассматривалась в работах В.П. Супруна [58], А.Г. Мордковича [41] и др. Отдельные аспекты формирования учебной и познавательной деятельности у старшеклассников при изучении тригонометрии рассмотрены в работах, Г.В. Дорофеева [16]. Вопросам пропедевтики обучения уделено внимание в работах А.Р. Кулишера [30], И.П. Лобанка [32], Т.А. Михайловой [39].

Совершенствование методики преподавания темы «Обратные тригонометрические функции» стоит уже давно. Заданий этого типа в школьных учебниках недостаточно для формирования устойчивого и полного усвоения данной темы и в виду объективной сложности данного материала. Количества отведенных на эту тему учебных часов недостаточно для полноценного усвоения сложного материала. В силу этого учащиеся испытывают большие трудности и не всегда справляются даже с решением простых заданий, а задачи повышенной сложности становятся недоступными.

Теория обратных тригонометрических функций находится несколько в стороне от остальных разделов алгебры, но внимания ей уделяется мало, хотя сама по себе тема довольно существенна, Тригонометрические уравнения и неравенства решаются при помощи арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, а графики обратных тригонометрических функций представляют собой удобное и наглядное средство для изучения всех их свойств.

Актуальность исследования обусловлена тем, что сегодня при внедрении Федерального государственного образовательного стандарта (полного) общего образования (ФГОС), главная роль в системе образования отводится результатам обучения. Поэтому целями современного образования ставятся условия, в которых учащиеся в образовательном процессе смогут реализоваться наиболее эффективно. Исходя из этого, переход к новому ФГОС предполагает, внедрение качественно новой модели процесса обучения [65].

Актуальность и научная значимость исследования обусловлена:

– требованиями ФГОС основного общего образования к реализации деятельностного подхода в обучении математике;

– важностью обучения теме "Обратные тригонометрические функции и их свойства" в курсе изучения алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы;

– отсутствием в принятых на данный момент учебниках систематизированной общей и полной методики изучения темы "Обратные тригонометрические функции и их свойства" в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени **противоречием** между необходимостью научно-обоснованного изучения темы "Обратные тригонометрические функции и их свойства" в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы и недостаточной разработанностью методических основ изучения данного материала.

Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических особенностей обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре и началам математического анализа общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа в общеобразовательной школе.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что разработанные методические материалы, учитывающие методические особенности обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы, будут способствовать повышению качества усвоения данной темы.

Для реализации поставленной цели необходимо решить ряд **задач**, а именно:

1. Выявить основные цели и задачи обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в углубленном курсе алгебры.

2. Рассмотреть различные подходы к введению понятия «Обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе.

3. Описать формы и методы организации учебной деятельности, обучающихся при обучении теме «Обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе.

4. Представить методические рекомендации по проведению пропедевтической работы по теме «Обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе.

5. Разработать методические рекомендации по введению понятия «обратные тригонометрические функции».

6. Разработать систему упражнений по теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» и показать методику работы с ними.

7. Описать педагогический эксперимент и проанализировать его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы В.П. Беспалько [8], Т.А. Ивановой [22], А.Н. Марасанова [36], Г.И. Саранцева [53], А.А. Темербековой [59] и других исследователей.

Базовыми для настоящего исследования явились работы В.А. Далингера [14], В.Б. Дроздова [17], А.И. Маркушевича [36], И.А. Ященко [76].

Методы исследования: в рамках организации исследования при написании магистерской диссертации использовался теоретический анализ психолого-педагогической, учебно-методической и научной литературы; наблюдение и обобщение опыта работы педагогов, констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента; изучение опыта работы отечественной и зарубежной школ по исследуемой теме, наблюдение за учащимися во время проведения занятий, беседы, тестирования.

Опытно-экспериментальной базой исследования явилась кафедра «Высшая математика и математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет» и ГБОУ СПК г.о. Сызрани.

Основные этапы исследования:

1 этап 2018/2019 уч.г.: анализ проводимых ранее исследований, УМК по алгебре 10-11 классов, нормативных документов, учебных программ;

2 этап 2019/2019 уч.г.: выбор направлений теоретических, методических, собственных по теме исследования

3 этап 2019/2020 уч.г.: разработка рекомендаций по исследуемой теме, подборка материалов для составления занятия по теме;

4 этап 2020/2020 уч.г.: составление системы упражнений по исследуемой теме;

5 этап 2020/2021 уч.г.: оформление проведенного исследования, проведение эксперимента, выводы по результатам исследования

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика обучения обратным тригонометрическим функциям в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования определяется тем, что в диссертации:

- выявлены основные цели и задачи обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в углубленном курсе алгебры;
- рассмотрены различные подходы к введению понятия «обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе;
- разработаны методические рекомендации по введению понятия «обратные тригонометрические функции»;

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны: методические рекомендации обучения обратным тригонометрическим функциям, ориентированные на развитие логического и критического мышления и повышение уровня математической культуры учащихся»; система упражнений по теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства», содержащая визуализированные задачи (базовые, повышенной трудности, прикладной направленности).

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались: симбиозом теоретических и практических методов исследования, анализом практики в области педагогики, а также личным опытом проведения экспериментального исследования.

Личное участие автора в проведении исследования состоит в определении методических особенностей и методических рекомендаций по введению понятия «обратные тригонометрические функции», разработке системы упражнений по данной теме, в описании результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций проводилась в период прохождения производственной практики (практики по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности) и преддипломной практики на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения обратным тригонометрическим функциям, ориентированные на развитие логического и критического мышления, повышение уровня математической культуры учащихся.

2. Система задач по теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 35 рисунков, 17 таблиц, список используемой литературы (81 источник), 1 приложение. Основной текст работы изложен на 88 страницах.

Глава 1 Методические аспекты обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе

1.1 Основные цели и задачи обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в углубленном курсе алгебры

Возникшая в глубокой древности математика и по сей день остается наиболее значимым и глубоким школьным предметом. Математика – вносит особый вклад в решение общих задач образования и воспитания личности, изучение которой способствует развитию логического мышления учащихся, повышает их интерес к предмету. В наши дни проблема полноценной базовой математической подготовки приобрела большое значение. Использование современной техники без знания фундаментальных основ математически знаний невозможно, как и выполнение сложных расчётов, использование вычислительной техники.

Итоговое тестирование, содержащее задания темы «Обратные тригонометрические функции» представляется учащимся большой проблемой даже при решении элементарных заданий. В этом и заключается задача планомерно ставить задачи перед учащимися, позволяющие детям осознано владеть школьной программой, и продвигаться на пути формирования своей личности. Многие математики и методисты занимались разработкой методики изучения обратных тригонометрических функций (М.Я. Выгодский [11], Г.М. Карпенко [25], С.И. Новоселов [44, 45]).

Обратные тригонометрические функции – это новый вид трансцендентных функций, изучение которых способствует развитию логического мышления, так как при вычислении этих функций требуется умение производить громоздкие и сложные вычисления и преобразования, при этом не потеряться в большом количестве формул. Особенность обратных функций заложена в их название – они являются обратными по отношению к обычным функциям тригонометрии, отсюда и возникает обилие громоздких формул.

По словам Г.М. Карпенко [25] для успешного усвоения теории обратных тригонометрических функций необходимо знание учащимися ранее изученных тригонометрических функций, иметь понятие об обратных функциях. Таблицы же формул, приведенные С.И. Новоселовым [44, 45], являются ничем иным, как знакомыми тригонометрическими формулами, выраженными одна через другую.

Изучение обратных тригонометрических функций дает возможность не только разобраться в сущности самого понятия функции, но и понять зависимость между любыми множествами объектов. Работа с обратными тригонометрическими функциями носит исследовательский характер.

Образовательные программы и их реализация регламентируются Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС) [64], которая предполагает изучение математики как одной из важнейших в современном мире областей знаний.

Цели обучения теме «Обратные тригонометрические функции» в курсе алгебры средней школы направлены на повышение уровня математической культуры учащихся и формирование интеллектуальной способности мыслить не стереотипно; формирование умений решать задачи, дающих возможность поступать в вузы с профилирующим предметом математики; на воспитание способности принимать самостоятельные решения; на адаптацию в современном информационном обществе; на развитие интереса к математическому творчеству и математических способностей; на необходимость формирования навыков и мотивацию самостоятельного поиска решения; на преодоление трудностей психологического характера; на воспитание воли и настойчивости в достижении результата.

В метапредметном направлении своей целью тема «Обратные тригонометрические функции» ставит формирование представлений о значимости математики в общечеловеческой культуре, в развитии цивилизации и современного общества; формирование характерных для математики способов интеллектуальной деятельности; овладение математическими знаниями и умениями, позволяющими продолжение обучения на следующей ступени, изучение дисциплин, смежных с математикой, применение в повседневной жизни заложенного фундамента математического развития, формирование характерных для математической деятельности механизмов мышления.

В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования (ФГОС С(П)ОО) [65] перечислены требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики, в том числе темы обратных тригонометрических функций, по окончании которого учащиеся *должны:*

– *знать*: понятия обратных тригонометрических функций, области определения и множества значений обратных тригонометрических функций, свойства обратных тригонометрических функций;

– *уметь*: применять свойства обратных тригонометрических функций при решении задач, строить графики функций арксинуса, арккосинуса, арктангенса, применяя основные приемы преобразования графиков, решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств с арксинусом, арккосинусом, арктангенсом, вычислять значения выражений, содержащие обратные тригонометрические функции, выполнять тождественные преобразования выражений, содержащие аркфункции, доказывать теоремы, изученные в курсе, давать обоснования при решении задач, опираясь на теоретические сведения курса;

– *владеть:* методами исследования свойств обратных тригонометрических функций; различными методами решения уравнений и неравенств с аркфункциями.

Основная цель изучения обратных тригонометрических функций - формирование представлений об арккосинусе, арксинусе, арктангенсе и арккотангенсе, овладение умением решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Задачи изучения темы «Обратные тригонометрические функции»: развивать творческие, мыслительные, творческие способности учащихся; овладеть понятиями обратных тригонометрических функций; применять основные свойства обратных тригонометрических функций; формировать представления о способах решения уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями; применять формулы для вычисления; работать со справочной и научной литературой; развить исследовательские умения и навыки алгоритмического мышления учащихся; способствовать развитию у обучающихся умений анализировать, устанавливать связи, причины и следствия; способствовать развитию интереса к предмету «Математика»; вовлечь учащихся в самостоятельную работу; способствовать формированию нравственных качеств личности (уверенность в себе, целеустремленность). Изучение обратных тригонометрических функций предполагает дальнейшее развитие у школьников математической, исследовательской компетентностей и более глубокое понимание математических методов познания окружающего мира.

Теория аркфункций «зеркально» отражает теорию тригонометрических функций, поэтому для плодотворного изучения обратных тригонометрических функций необходимо изучить тригонометрические функции, составляющий целый раздел курса алгебры и начал анализа. Тригонометрические функции в курсе алгебры и начала математического анализа в 10 – 11 нужны для описания свойств различных углов, треугольников, периодических функций. Их изучение формирует универсальные учебные действия, создает метапредметные связи и личностные образовательные результаты. При введении темы «Обратные тригонометрические функции» нужно напомнить учащимся понятие «обратной функции» и применить эту аналогию к функциям, обратных к тригонометрическим, которые называются «обратными тригонометрическими функциями». Изучение обратных тригонометрических функций облегчает работа с числовой окружностью, на которой наглядно видно, как определять и тригонометрические функции и обратные к ним. А.Г. Мордкович [41] по этому поводу говорит о «трех китах тригонометрии» - это числовая окружность, простейшие тригонометрические уравнения и теорема сложения, которые необходимо заложить в основание раздела. По мнению автора, упор на правильную оценку важности изучения числовой окружности и для успешного овладения материалом необходимо разбираться в понятиях длина дуги единичной окружности, модель «числовая окружность» и модель «числовая окружность на координатной плоскости».

Тема «Обратные тригонометрические функции» изучается в 10 – 11 классе в течение небольшого количества часов обзорно, в ознакомительном плане, но по объему весьма насыщена. За это время изучаются определения обратных тригонометрических функций: y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx, их графики, область определения, множество значений, монотонность, непрерывность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения, приобретаются навыки тождественных преобразований, содержащих обратные тригонометрические функции, основные соотношения между ними.

Известные свойства аркфункций хорошо иллюстрируются построением графиков, а также выявляются некоторые дополнительные свойства и решаются простые тригонометрические уравнения и неравенства, особенно заданные на некотором промежутке.

Для того, чтобы овладеть достаточно сложным и весьма насыщенным материалом по обратным тригонометрическим функциям, необходимы навыки решения примеров и знания, полученные ранее, умение использовать графический материал. Обучение происходит в процессе решения задач, особенно задач исследовательского характера. Задачи с аркфункциями служат дополнением к тригонометрии, развивают гибкость математического мышления и позволяют посмотреть на изучение обратных тригонометрических функций шире, чем написано в учебнике.

Существуют основные типы заданий: нахождение области определения функции, решение простейших уравнений и неравенств, задачи на построение графиков функции.

На результаты обучения оказывает влияние подбора и систематизация упражнений. Этому посвящены пособия Г.З. Генкина [13], В.А. Далингера [14], В.Б. Дроздова [17], Л.И. Звавича, [21], А.И. Новикова [42, 43], В.М. Мирошина [46], С.Н. Олехника [47], Я.И. Перельмана [48], В.П. Супруна [58], Г.И. Фалина [63], С.А. Шестакова [73].

Углубленное изучение математики, в том числе темы «Обратные тригонометрические функции» предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, создание условий для реализации индивидуальных возможностей, удовлетворение интересов, склонностей и способностей учащихся, ориентацию на вязанные с математикой профессию, подготовку к обучению в ВУЗе.

1.2 Различные подходы к введению понятия «обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе

Подход к обучению – это определяющая стратегия обучения и выбор метода обучения.

Цель современного подхода к обучению - воспитание индивидуальной личности, добросовестного человека, гражданина, способного самостоятельно и быстро решать возникшие проблемы.

Выработка стратегии преподавания должна помочь овладеть школьной программой.

Главная задача, стоящая перед преподавателем - подготовка учеников к итоговому тестированию, при недостаточности часов выполняя задания высокого уровня сложности, хотя многие разделы имеют особое значение и при изучении других учебных дисциплин.

При введении обратных тригонометрических функций необходимо показать учащимся их применение при решении различных задач, показать необходимость введения нового вида функции.

Затем необходимо дать определения данных функций, их признаки; научиться строить графики.

Вместе с введение понятия обратных тригонометрических функций графически трактуются области определения, области значения, возрастания.

Введение понятия «обратные тригонометрические функции» должно иметь под собой определенную базу знаний. Х.Ш. Шихалиев в статье [74] считает, что «начинать знакомство учащихся с тригонометрическими функциями в качестве общего подхода нужно с самого понятия «функция» и так далее.

Дальнейшее преобразование тригонометрических выражений происходит через восприятие определения функции, протекая проще и осознанно».

А.А. Каюмова и Н.В. Тимербекова [26] считают, что «для плодотворного изучения тригонометрических функций предпочтение отдается определению их с помощью единичной числовой окружности, и знакомиться с которой следует, как можно раньше». По их мнению, после координатной прямой единичная окружность – вторая модель действительных чисел, которая незаменима при грамотной записи ответа при решении тригонометрических уравнений и неравенств.

Для изучения темы «Обратные тригонометрические функции» нужно вспомнить о существовании обратных функций. Такой подход подготавливает почву для изучения обратных тригонометрических функций.

В 10-м классе вводятся понятия «арксинус», «арккосинус», «арктангенс» и «арккотангенс числа *a*». Каждое из этих понятий представляется как корень уравнения на определенном интервале. существование и единственность корня решается на основе соответствующей теоремы, которая, как и другие теоремы, являются основным компонентом теоретических знаний в школьном курсе математики, поэтому результатом в данном случае должно быть не только умение их формулировать, но и знание сущности самого процесса и методов доказательства в математике.

Тот факт, что в успешном обучении школьников играет большую роль тот учебник, по которому он учится – ни у кого не вызывает сомнения. Каждый учебник «ведет» свою линию подачи информации, свои подходы в подаче материала. В Российской Федерации действует перечень учебников, утвержденный приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 28 декабря 2018 года № 345 [66]. Отметим некоторые общие подходы, присущие обучению теме «Обратные тригонометрические функции» авторов учебников с углубленным изучением математики из Перечня [1, 2, 3, 5, 34].

Как зависимость между двумя переменными функция у учащихся 10-го класса к моменту изучения темы тригонометрических функций в учебнике Алимова А.Ш., Колягина Ю.М. и др. (базовый и углубленный уровни) [1] вполне сформировано, так как они изучаются после изучения всех школьных функций (логарифмической, показательной, степенной). Поэтому теме «Обратные тригонометрические функции» посвящен параграф сразу после изучения функций cosx = a, sin x = a, tgx = a (с. 224 - 228).

Параграф начинается с определения функций y = arcsinx: для каждого числа x $\in$ [-1;1] определено одно число y = arcsinx и задается функция y = arcsinx, -1 $\leq$ x $\leq$ 1. Далее следует доказательство того, что y = arcsinx является обратной к функции y = sinx на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, так как в уравнении y = sinx на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, -1 $\leq$ y $\leq$ 1 – это уравнение имеет единственный корень x = arcsiny, следовательно, свойства функции y = arcsin x можно получить из свойств функции y = sin x. Здесь же рассматриваются область определения, область значений, четность, промежутки возрастания и убывания, непрерывность.

Симметрия относительно прямой y = x графика функции y = arcsinx и y = sin x очевидна из рисунка 1.

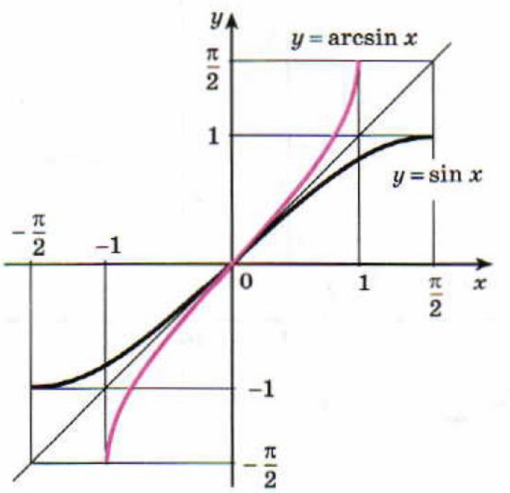


Рисунок 1 – Графики функций y = sinx и y = arcsinx

Для функции y = arccosx по определению арккосинуса числа каждому x ∈ [-1;1] определено одно и тоже число y = arccos x, т.е. функция y = arccos x определена на отрезке [-1;1], $-1 \leq x \leq 1$.

На отрезке [0; π] функция y = arcsinx является обратной к функции y = cosx. График y = arccosx симметричен графику функции y = cosx относительно прямой y = x (рисунок 2).

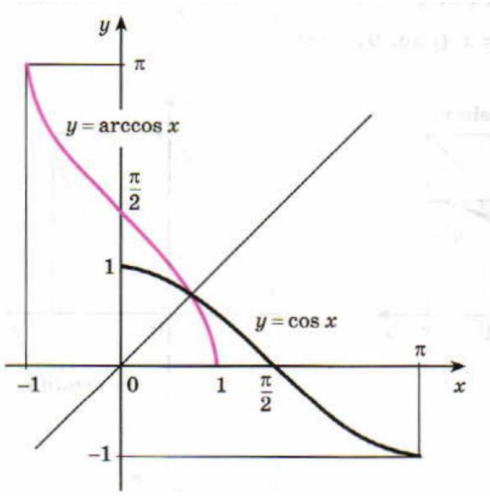


Рисунок 2 – Графики функций y = cosx и y = arccosx

Для каждого действительного x функции y = arctgx определено одно число y = arctgx, x∈R. Эта функция является на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ обратной к y = t gx, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ и ее график получается симметрией относительно прямой y = x. Ниже приведены свойства функции y = arctgx.

В качестве закрепляющего материала приводятся задания: сравнить арксинусы, арккосинусы и арктангенсы разных чисел (такие как arccos$\frac{1}{\sqrt{3}}$ и arcos $\frac{1}{\sqrt{5}}$), при этом используя изученные свойства монотонности функций (№750-752); предлагается решить несложные уравнения (например: arcsin (2- 3x)= $\frac{\pi}{6}$) (№753-755); найти область определения функции (например: y = arcsin$\frac{x-3}{2}$); доказать, что график функции y = arcosx симметричен относительно точки $(0; \frac{\pi}{2})$.

Изучение этой темы призвано сформировать понятия об обратных тригонометрических функциях, использовать основные свойства при решении задач. Авторы [1] в явной форме подходят к определению обратных тригонометрических функций, дают основные сведения, определения, рассматривают свойства, графики функций, уделяют существенное внимание задачам, размещенных в конце пунктов учебника, где математические задачи подобраны по группам для отработки определенного элемента теории и формирование практических и исследовательских умений.

Учебник Г.К. Муравина [34] входит в учебно-методический комплекс по математике для 10-11 классов, изучающих математику на углубленном уровне. Однако, обратные тригонометрические функции в отдельную главу не выделены, а лишь применяются при решении тригонометрических уравнений, разновидностей которых очень много. Свойств и графиков в данном учебном пособии не представлено.

Подход С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова [5] предусматривает введение арксинуса и арккосинуса в главе, посвященной синусу и косинусу. В этой же главе приведены примеры использования арксинуса и арккосинуса и формулы для их нахождения.

Определение арксинуса выводится при рассмотрении единичной окружности на плоскости xOy (рисунок 3). При |a| $\leq$ 1 y = a пересекает окружность в точке B. Вектор OB образует с вектором OA угол из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a. Этот угол обозначают arcsin a.

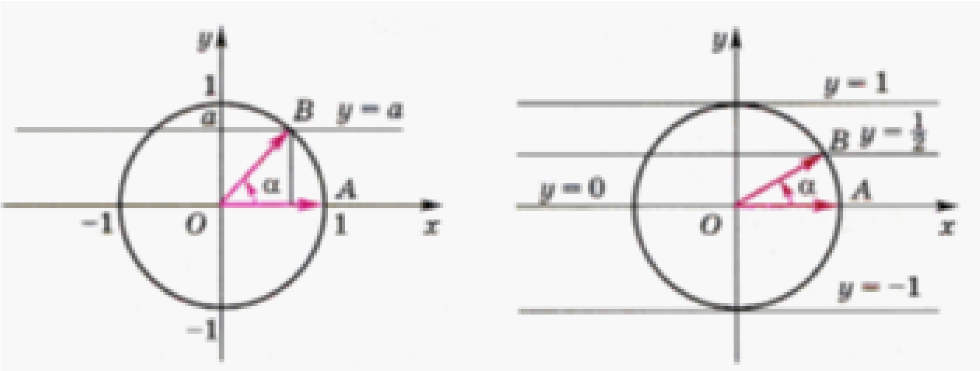


Рисунок 3 – Определение арксинуса

Определение арккосинуса выводится на единичной окружности на плоскости xOy (рисунок 4). При |a| ≤ 1 x=a пересекает единичную окружность в точке B. вектор OB образует с вектором OA угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a и обозначается arccos α.

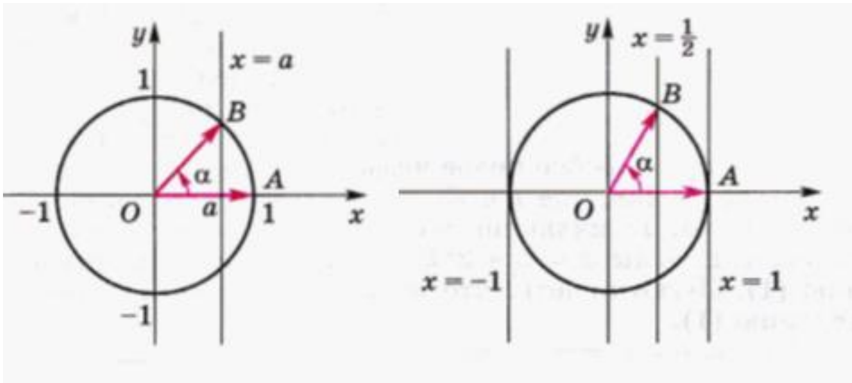


Рисунок 4 – Определение арккосинуса

Арктангенс и арккотангенс рассматриваются в главе, посвященной тангенсу и котангенсу. В этой главе приведены примеры использования арктангенса и арккотангенса и формулы для их нахождения.

Определение арктангенса выводится при рассмотрении единичной окружности на плоскости хОу и оси тангенсов (рисунок 5), где прямая $y = a$ пересекает ось тангенсов в единственной точке D. При этом вектор OB образует с вектором OA единственный угол α из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен а.

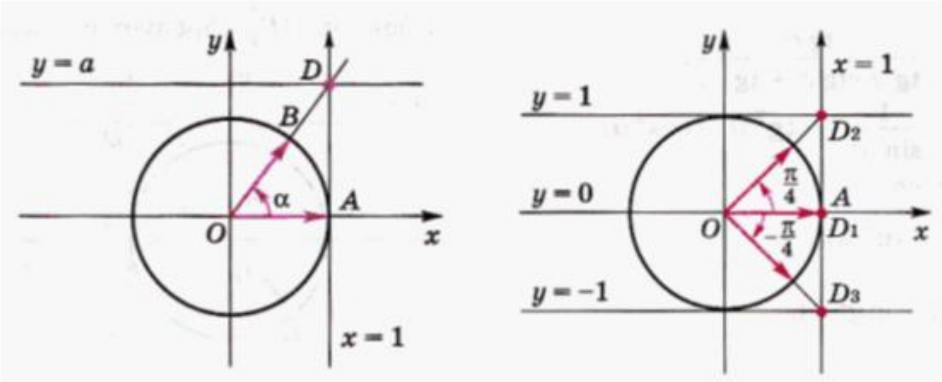


Рисунок 5 – Определение арктангенса

Арккотангенс выводится при рассмотрении единичной окружности на плоскости хОу оси котангенсов (рисунок 6). Прямая у = а пересекает ось котангенсов в единственной точке D. Прямая OD пересекается с верхней полуокружностью в точке B. При этом векторами OD и OA из $(0; \pi)$, образуется угол α, котангенс которого равен α. Обозначается этот угол arcctgа.

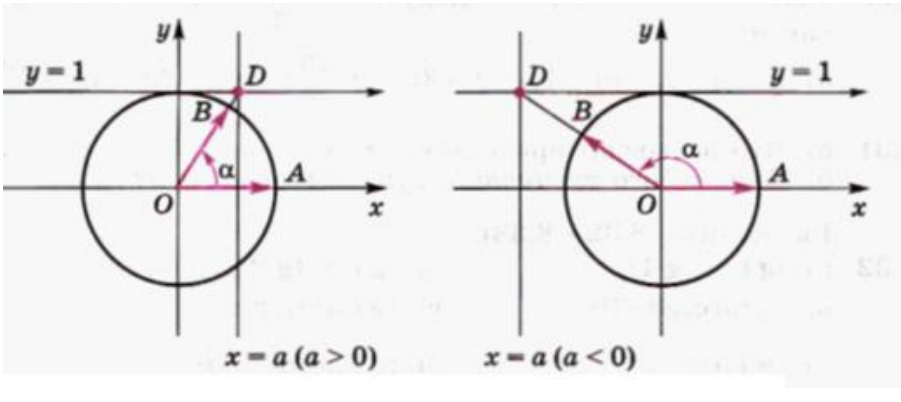


Рисунок 6 – Определение арккотангенса

Далее следует параграф с формулами с примерами применения арктангенса и арккотангенса и формулы для этих функций. После представления каждой из аркфункций предложены примеры для закрепления.

Материал, изложенный в данном учебном пособии, дает представление об обратных тригонометрических функциях, показывает, как определить их на единичной окружности, но не дает определений, свойств, графиков.

В учебнике авторов А.Г. Мордковича, П.В. Семенова [3] (с.165-184) обратным тригонометрическим функциям посвящена отдельная глава. Знакомство с ними начинается с определения функций y = arcsinx. Поскольку, y = sin x на каждом из участков $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$ монотонна и принимает значения от -1 до 1, то по теореме об обратной функции y = sinx, x $\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, тоже имеет обратную и обозначается x = arcsiny, т.е. как обычно меняя местами x и y, получаем: y = arcsinx. Арксинус определяется так: y = arcsinx – это функция, обратная к функции y = sinx, x $\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (рисунок 7).

Далее приводятся основные свойства арксинуса и графики y = sin x и y = arcsinx.

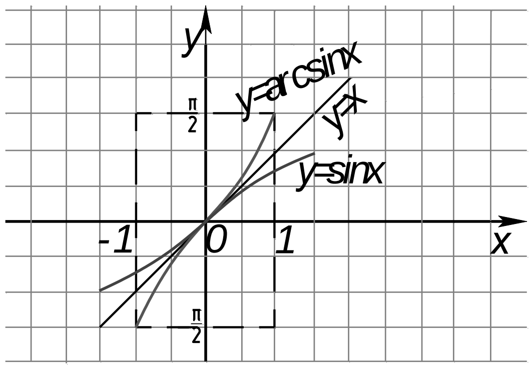


Рисунок 7 – Графики синуса и арксинуса

В данном учебнике рассматриваются область определения, область значений, четность, промежутки возрастания и убывания, непрерывность функции y = arcsinx. Если в равенство x = siny подставить arcsinx, то получим:

$$x= \sin(\arcsin x)$$

После геометрической интерпретации рассматриваются примеры вычисления арксинуса числа (вычислить: $\arcsin\frac{1}{2}$, с. 168). Авторы предлагают построить график функции y = 2 arcsinx.

Воспользовавшись определением синуса, предлагается вычислить значение выражения: $\sin(\arcsin\frac{3}{5})$ (с.170).

Рассмотрение функции y = arccosx начинается с описания свойств функции y = cosx, для которой характерна монотонность на отрезках [-π; 0], [0; π], [π; 2π] и т.д. Функция y = cosx по теореме об обратной функции на каждом из указанных промежутков имеет обратную. Она обозначается y = arccosx и симметрична графику y = cosx относительно прямой y = x (рисунок 8).

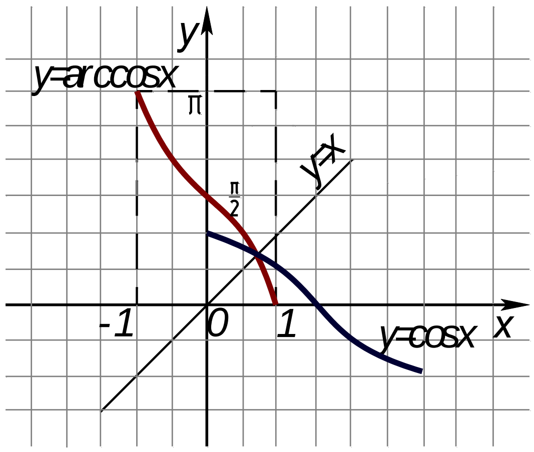


Рисунок 8 – Графики косинуса и арккосинуса

Основные свойства арксинуса: область определения, область значений, четность, промежутки возрастания и убывания, непрерывность.

Для любого x имеется: cos(arccosx)=x, $-\frac{\pi}{2} \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$.

Для закрепления материала предлагается решить примеры вида: вычислить: $\arccos\frac{1}{2}$ (с.173) и построить график функции $y = \arccos\frac{2}{5}x$.

Следующая из рассматриваемых функций – y = arctgx. Она монотонна на интервалах: $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$; $(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$; и т.д. и имеет обратную, т.е. график y = arctgx можно получить симметрией относительно оси y = x.

Для любого x∈(-1;1) имеется: tg(arctgx) = x, $-\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{arctg}\, x \leq \frac{\pi}{2}$.

В качестве закрепляющего материала предлагается решить примеры вида: вычислить: arctg(- $\frac{\sqrt{3}}{3}$).

Для определения функции у = arcctgx, исходя из монотонности на интервалах: [-π; 0], [0; π], [π; 2π] и т.д. функция у = ctgx имеет обратную, т.е. график у = arctgx можно получить симметрией относительно оси у = х. Для функции у = arcctgx рассматриваются свойства-область определения, область значений, четность, промежутки возрастания и убывания, непрерывность.

Для любого х имеется: ctg(arcctgx)=x, $0 \leq \text{arcctgx} \leq \pi$.

В качестве закрепляющего материала предлагается решить примеры вида: вычислить: arcctg(-1).

Авторами в данном учебном пособии понятие об обратных тригонометрических функциях вводится явно, приводятся основные сведения об обратных тригонометрических функциях (определения, свойства, графики). Задачи, помещенные в конце параграфа, направлены на формирование практических умений.

В учебнике Виленкина Н.Я. [2] знакомство обратным тригонометрическим функциям начинается в главе 6 (с. 294). К моменту изучения обратных тригонометрических функций, учащимся знакомы определения: «непрерывная функция», «обратная функция» и «монотонная функция» умеют работать с единичной окружностью.

Обратные тригонометрические функции даны в аспекте решения тригонометрических уравнений. Для решения уравнения вида sinx=t рассматривается координатная окружность, на которой необходимо найти точки с ординатой t, т.е. точки пересечения прямой у = m с окружностью. При |m| ≤ 1 таких точек 2, если |m| = 1 - одна, если |m| >1 - таких точек нет (рисунок 9).

После нахождения множества точек, которым оно соответствует, получаем решение уравнения sinx = t.

Определение: Если |m| $\leq$ 1, то арксинусом, m называют такое число t_0, что $\sin t_0 = m$ и $-\frac{\pi}{2} \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}$ (с. 296). Арксинус числа m обозначается arcsinm.

Далее приводятся примеры решения уравнений типа вычислить: $\arcsin\frac{1}{2}$; $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$;

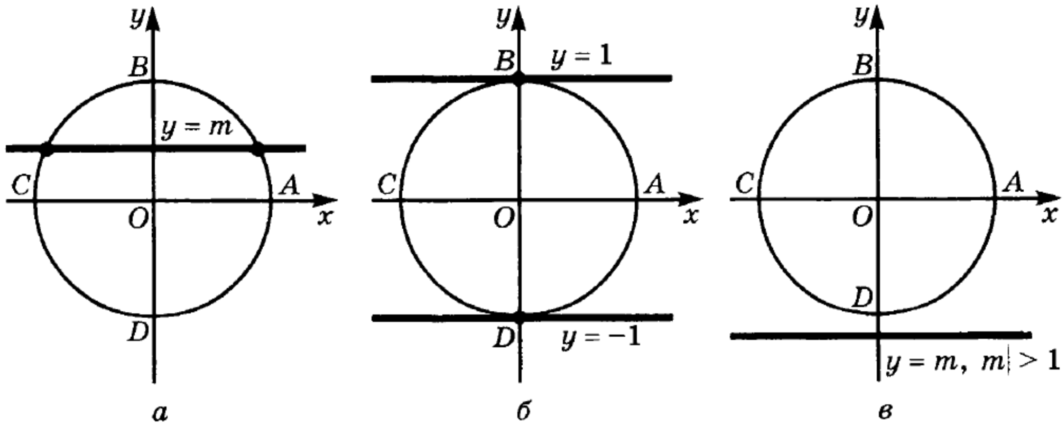


Рисунок 9 – Многозначность синуса

Решением уравнения вида cosx = t является множество точек координатной окружности с абсциссой t, т.е. точки пересечения этой прямой с окружностью, которой необходимо найти точки, имеющие ординату t, т.е. точки пересечения прямой y = m с окружностью. Если |m| ≤ 1 - таких точек 2, если |m| = 1 - одна, если |m| > 1 - таких точек нет (рисунок 10). После нахождения множества точек, которым оно соответствует и их объединения получаем решение уравнения cosx = t.

Определение: Если |m| $\leq$ 1, то арккосинус - такое число t_0, что $\sin t_0 = m$ и $0 \leq t_0 \leq \pi$ (с.300).

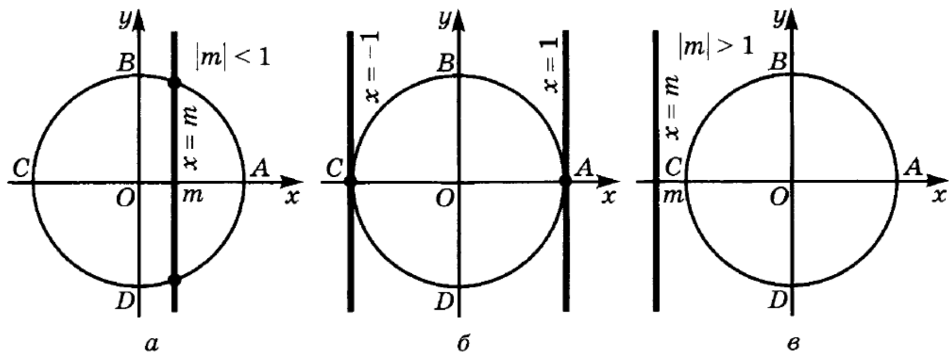


Рисунок 10 – Многозначность косинуса

Далее приводятся примеры: вычислить: arccos $\frac{1}{2}$; arccos (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Для решения уравнений вида tgt = m надо применить формулу tgx = $\frac{\text{sint}}{\text{cost}}$ и найти точки пересечения этой окружности с прямой $\frac{y}{x}$ = m. Координатная окружность пересекает окружность в двух диаметрально расположенных точках M и N (рисунок 11). Поэтому для любого m существует единственное число t_0 такое, что tgt_0 = m, причем - $\frac{\pi}{2} \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Второй точке N соответствует значение $t_0+\pi$, и решением уравнения tgt =m является объединение множеств $t_0+2\pi k$, $k\in Z$, и $t_0+\pi+2\pi k$, $k\in Z$, т.е. множества вида $t_0+\pi n$, $n\in Z$.

Определение: арктангенс - такое число t_0, что tgt_0 = m и $-\frac{\pi}{2} \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}$ (с. 302). Арктангенс числа m обозначается arctgm.

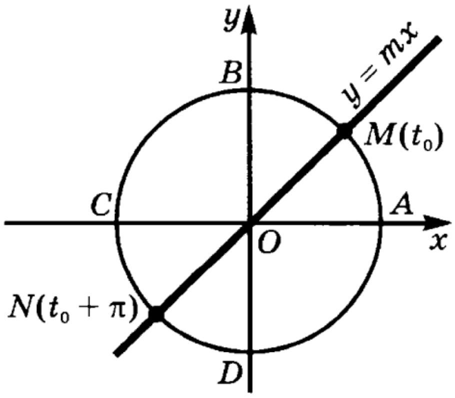


Рисунок 11 – Единичная окружность для определения тангенса

Обратным тригонометрическим функциям посвящен параграф 6 стр. 325-327. Так как y = arcsinx, $-1 \leq x \leq 1$ и x = siny, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, следуют одно из другого, то функция arcsinx обратна функции sin x, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Аналогично определяется функция y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx.

Во всех рассматриваемых учебных пособиях, кроме [34], даны определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса числа; в одних из них приводятся доказательства того, что они являются обратными соответственно синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу; рассматриваются область определения, область значений и интервалы монотонности. Одни ограничиваются определением обратных тригонометрических функций, другие знакомят со свойствами и графиками обратных тригонометрических функций. По окончании изучения каждого параграфа предлагаются примеры для закрепления полученных знаний. Изученная тема обязательно используется впоследствии и является логически выверенной последовательностью суждений, на основе ранее изученных тем.

1.3 Формы и методы организации учебной деятельности при обучении теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства»

Математическое образование является одним из основных элементов формирования личности.

В новых стандартах образования целью математического образования является овладение школьниками системой математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности.

ФГОС [64] нового поколения ставит развитие личности учащегося на основе деятельностного характера и указывает на различные виды деятельности.

По Ю.К. Бабанскому [6] методы обучения – это последовательно чередующиеся упорядоченные способы взаимосвязанной деятельности учителя и учащихся, направленные на достижение определенной дидактической цели.

Осуществление обучения базируется на умелом использовании форм организации педагогического процесса.

Многие известные авторы исследовали формы обучения (В.К. Дьяченко [20], Р.А. Утеева [61, 62], И.М. Чередов [71], Р.А. Хабиб [68] и др.).

Фридман Л.М [67] отмечает, что обучение учащихся всегда организовано в какой-либо форме учебной деятельности учащихся и должна рассматриваться как основная структура взаимосвязи форм учебной деятельности.

Формы обучения понимаются М.И. Махмутовым [37] как «коллективная, фронтальная и индивидуальная работа учащихся на уроке, при которой формы организации учебной деятельности могут варьироваться в различных сочетаниях и последовательностях». При обучении теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» применяются словесные, наглядные, практические, поисковые, исследовательские, эвристические, проблемные, репродуктивные, объяснительно-иллюстративные методы учебно-познавательной деятельности, которые вместе со средствами обучения (пособия, демонстрационные устройства и др.) способствуют успешному усвоению данной темы.

При обучении теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» приемлемы фронтальная, коллективная, групповая, индивидуальная, дифференцированная формы организации учебной деятельности, обучающихся.

Фронтальная форма организации деятельности учащихся является способом организации несамостоятельной деятельности учащихся под непосредственным наблюдением и руководством учителя, выстроенная связью: «деятельность учителя - деятельность ученика-деятельность учащихся класса».

При такой форме обучения по теме «Обратные тригонометрические функции» перед учащимися ставится одна или несколько общих задач и предполагается одновременное выполнение заданий всеми учениками класса. От учителя требуется умение держать под контролем весь класс, видеть работу каждого школьника, стимулировать активность учащихся.

Ниже приведен фрагмент урока с фронтальной формой деятельности учеников на уроке алгебры (10 класс).

Тема урока: «Обратные тригонометрические функции».

Тип урока: изучение и первичное закрепление новых знаний.

Форма деятельности: фронтальная.

Методы обучения: словесные методы (рассказ, объяснение); наглядные методы (демонстрация, доска, конспект лекций, задачник, методические указания).

Ход урока.

1. Приветствие.
2. Актуализация знаний по тригонометрическим функциям – 5 мин.
3. Изучение нового материала (см. таблицу 1) – 15 мин.

Таблица 1– Фрагмент урока фронтальной формы деятельности учащихся

3. Изучение нового материала –15 мин.		
Деятельность		*Записи на доске*
учителя	*ученика (учащихся)*	
Объясняет новый материала по теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства»	Слушают объяснение, делают записи в тетради, отвечают на сопутствующие вопросы	Записи по ходу объяснения с использованием доски
Задает вопрос: Дать определение обратных тригонометрических функций; назвать область определения и значений функции; схематично изобразить на доске графики. Какими свойствами они обладают?	Отвечают на вопросы	
Записывает на доске примеры вычисления обратных тригонометрических функций	Записывают за учителем, задают вопросы	Вычислить arcsin$\frac{1}{2}$; Так как sin $\frac{\pi}{6}$ =$\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6}\epsilon[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$, то arcsin$\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. б) arcsin(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Так как sin (-$\frac{\pi}{4}$) =- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\epsilon[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, то arcsin(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$) = - $\frac{\pi}{4}$

Групповая форма деятельности на уроках алгебры при изучении темы «Обратные тригонометрические функции» также применима в обучении и является способом организации самостоятельной коллективной деятельности учащихся под наблюдением учителя. Групповая форма деятельности может применяться как для изучения нового материала, так и для решения задач и упражнений на закрепление и повторение. Учащиеся при такой форме деятельности учащиеся по ходу занятия могут выражать свое мнение, предположения по поводу решения заданий, вести работу над исправлением допущенных ошибок, причем каждый будет услышан.

В.В. Котов [29] выделил составляющие групповой деятельности: подготовка учащихся к выполнению учебных задач; определение способов решения учебного задания, распределение обязанностей в группе; проверка за выполнением задания в группе; сообщение о полученных результатах, исправления и дополнительная информация учителя с формулировкой окончательных выводов; общая оценка работы группы и класса.

Приведем фрагмент урока с групповой формой деятельности учеников на уроке алгебры (10 класс).

Тема урока: «Обратные тригонометрические функции и их свойства».

Тип урока: актуализация и закрепление знаний.

Форма деятельности: групповая.

Методы обучения: словесные методы (рассказ, объяснение); наглядные методы (демонстрация, доска, конспект лекций, задачник, методические указания).

Ход урока.

1. Приветствие – 1 мин.

2. Актуализация знаний по тригонометрическим функциям -5 мин.

3. Работа в группах (см. таблицу 2).

На уроке учащиеся объединяются в четыре группы по 5-6 человек в группе. Учащиеся группы получают карточку с заданиями и распределяют между собой задания таким образом, что каждый учащийся выполняет только одно задание. Решая задания внутри группы, можно помогать друг другу, подсказывать, но оценка будет выставляться каждому учащемуся индивидуально.

Таблица 2 – Классные групповые задания

	Группа №1	Группа №2	Группа №3	Группа №4
Теоретический вопрос	Арктангенс. Свойства функции	Арккосинус. Свойства функции	Арксинус. Свойства функции	Арккотангенс Свойства функции
Найдите:				
Задание1	$\cos(arcctg(-\frac{1}{5}))$.	$tg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$	$\sin\left(arctg\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$
Задание2	1) $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$ +arcos1; 2) cos(arcos1)	1) $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2}))$; 2) $tg(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2})$	1) $\sin(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; 2) $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{4}))$	1) $\cos(\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3})$; 2) $tg(\arccos\frac{1}{2})$

Домашнее задание: каждый учащийся в группе решает только одно задание [6] (таблица 3):

Таблица 3 – Домашние групповые задания

Группа №1	*а*	№21.46, 21.47, 21.54, 21.58
Группа №2	*б*	
Группа №3	*в*	
Группа №4	*г*	

Коллективная форма деятельности - способ организации самостоятельной коллективной деятельности, осуществляемый под руководством учителя, связанное отношением: «деятельность учителя-деятельность класса-деятельность ученика».

При такой форме организации учебной деятельности, обучающихся при обучении теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» учащиеся оказывают друг другу поддержку, помощь в продвижении к цели. Задаваемые учителем в процессе обучения вопросы заставляют размышлять, рассуждать, высказывать свои соображения, вступать в спор.

Сторонник коллективного обучения В.К. Дьяченко [20], отмечает, что «при коллективном обучении воспитание и обучение каждого члена коллектива происходит всем коллективом и каждый член коллектива обучает весь коллектив».

Приведем фрагмент урока коллективной формы деятельности учащихся на уроке алгебры (10 класс).

Тема урока: «Обратные тригонометрические функции и их свойства».

Тип урока: повторительно – обобщающий урок – соревнование.

Форма деятельности: коллективная.

Методы обучения: словесный; устная и письменная групповая работа.

Средства обучения: учебник, карточки – задания.

Ход урока.

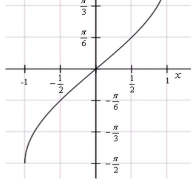
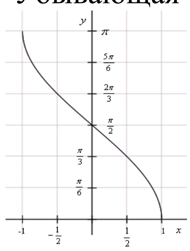
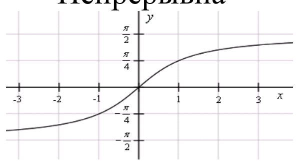
1. Приветствие -1 мин.

2. Актуализация знаний – 5 мин.

3. Математическое соревнование -20 мин.

Правила: Класс делится на 3 команды и в течение 20 мин команды выполняют различные задания, получая баллы за правильность и быстроту решения (таблица 4). По результатам соревнования определится победитель.

Таблица 4 – Фрагмент урока коллективной формы деятельности учащихся

3. Математическое соревнование–20 мин.			
	Iкоманда	II команда	III команда
Задание 1. Определить в какой четверти находится угол, если известно, что:			
	1) $\arcsin\frac{1}{2}$ 2) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) arcos 1 4) arcsin0	1) $\arccos\frac{1}{2}$ 2) arcsin(-1) 3) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) arcsin1	1) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ 2) arcos 0 3) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 4) arcos (-1)
Задание 2. Определить, какое из чисел больше?			
Учитель оценивает ответ	$\arccos\frac{\sqrt{5}}{4}$ и $\arccos\frac{\sqrt{7}}{7}$ $\mathrm{arctg}(-\frac{2}{\sqrt{3}})$ и $\mathrm{arctg}(-\sqrt{2})$	$\arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}})$ и $\arccos(-\frac{3}{7})$; $\mathrm{arctg}(-\frac{2}{\sqrt{3}})$ и $\mathrm{arctg}(-\sqrt{2})$	$\mathrm{arctg}\sqrt{5}$ и $\mathrm{arctg}\sqrt{7}$ $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{4})$и$\arccos\frac{\sqrt{6}}{5}$
Задание 3. Определите свойства какой аркфункции приведены ниже:			
Учитель оценивает правильность ответа	E(f) ∈ $-1 \le x \le 1$ D(f)∈ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ Нечётная Возрастающая 	E(f) ∈ $-1 \le x \le 1$ D(f) ∈ $0 \le y \le \pi$ Ни чётная, ни нечётная Убывающая 	E(f) ∈ R D(f) ∈ $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ Нечётная Возрастающая Непрерывна 

Работа в парах возможна при организации учебной деятельности при изучении темы «Обратные тригонометрические функции и их свойства». Общее задание в данном случае распределяется между партнерами и дает ученикам время обменяться идеями, а потом озвучивается перед классом. Работа в парах эффективна непродолжительное время (5-6 мин).

Приведем фрагмент урока с формой работы в парах учеников на уроке алгебры в 10 классе.

Тема урока: «Операции над обратными тригонометрическими функциями».

Тип урока: закрепление и проверка полученных знаний.

Форма деятельности: работа в паре.

Методы обучения: словесные (объяснение); практические методы.

Ход урока.

1. Приветствие -1 мин.
2. Актуализация знаний – 5 мин.
3. Работа в парах.

На каждую парту раздаются карточки с заданиями (см. таблицу 5). Учащиеся должны выбрать задания по силе и решить их совместно. Оценка по окончанию выполнения задания ставится одинаковая обоим участникам пары.

Таблица 5 – Варианты карточек заданий

I вариант	II вариант	III вариант
1. Сравните числа:		
а) arctg (-3) и arctg 2; б) arccos 0,8 и arccos 0,6; в) arcsin $(-0,8)$ и arcsin $(-0,7)$;	а) arctg (-5) и arctg 0; б) arccos 0,51 и arccos $(-0,3)$; в) arcsin 0,48 и arcsin $(-0,48)$;	а) arctg $\sqrt{3}$ и arctg $\sqrt{2}$ б) arccos $(-0,34)$ и arccos $(-0,72)$; в) arcsin $(-0,8)$ и arcsin $(-0,7)$;
2. Расположите в порядке возрастания числа:		
а) arctg 50; arctg (-5); arctg 0,5; б) arcsin0,5 arcsin0,25 arcsin$\frac{1}{3}$	а) arctg 1,2; arctg π; arctg (-3). б)arccos0,arccos(-0,35), arccos$\frac{1}{6}$	а) arctg 0,6; arctg $\pi/2$; arctg (-1) б) arcsin 0,85 arcsin (-0,5) arcsin$\frac{1}{8}$
3.Найдите область значений функции		
а) $y = \arcsin(3x-2)$; б) $y = \arccos\frac{1}{x^2+1}$; в) $y = \mathrm{arctg}(1-2\lvert x\rvert)$;	а) $y = \arccos(3-2x)$; б) $y = \mathrm{arcctg}(\sin x)$; в) $y = \mathrm{arctg}\frac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+1}$;	а) $y = \mathrm{arctg}(\cos x)$; б) $y = \arcsin\sqrt{x}$; в) $y = \arcsin\frac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+2}$.

Индивидуальная форма деятельности – способ организации самостоятельной индивидуальной деятельности учащихся под контролем учителя, предусматривающая самостоятельное выполнение учащимися одних и тех же задач в индивидуальном порядке, без контакта с другими учениками.

Приведем фрагмент урока по теме «Обратные тригонометрические функции» с индивидуальной формой деятельности учеников на уроке алгебры в 10 классе.

Тема урока: «Решение задач, содержащих аркфункции».

Тип урока: закрепление новых знаний.

Форма деятельности: индивидуальная.

Методы обучения: словесные, наглядные, практические методы.

Ход урока.

1. Приветствие -1 мин.
2. Актуализация знаний – 5 мин.
3. Математический диктант –15 мин.

После приветствия учащихся и актуализации знаний по обратным тригонометрическим функциям с целью проверки знаний учащихся и результатов обучения проводится математический диктант (см. таблицу 6). Оценивается математический диктант индивидуально.

Таблица 6 – Фрагмент урока индивидуальной формы деятельности учащихся

3. Математический диктант –15 мин.			
Деятельность		Записи на доске	
учителя	*ученика (учащихся)*	I вариант	II вариант
Распределяет варианты учащимся для выполнения математического диктанта	Выполняют задания по вариантам	1.Найдите значение выражения: arcsin(-1) – arcos($-\frac{1}{2}$). 2.Укажите область определения функции y= arccos(1-x^2). 3. Укажите область значений функции: y=π-2arccosx. 4.Найдите значение выражения: arcsin0,8+arccos0,8.	1.Найдите значение выражения: arcsin($-\frac{\sqrt{3}}{2}$) – arcos($-\frac{\sqrt{2}}{2}$). 2.Укажите область определения функции y= arcsin(2x-5). 3. Укажите область значений функции: y=$\frac{\pi}{3}$р-2arccosx. 4.Найдите значение выражения: arcsin0,3+arccos0,3.

Дифференцированная организации учебной деятельности на уроках алгебры при изучении обратных тригонометрических функций предусматривает организацию работы ученических групп с различными учебными возможностями, при которой ученик получает право выбора доступного для него пути обучения, повышая при этом учебную мотивацию и качество знаний, развивая интерес к предмету. При уровневой дифференциации учащиеся, обучаясь в одном классе по одному учебнику, имеют возможность изучать материал на разном уровне.

Р.А. Утеевой [62] разработана технология дифференцированного обучения математике, основанная на самостоятельной работе учащихся, по дифференцированным заданиям, составленным с учётом особенностей четырех типологических групп. По мнению Ю.К. Бабанского [6], дифференцированный подход предусматривает усиление текущей помощи для слабоуспевающих, а не снижение сложности объёма знаний и предупреждение неуспеваемости и предлагает формирование 3-х групп: группа слабоуспевающих, группа наиболее подготовленных учеников и группа остальных учеников класса.

Структура уроков содержит в себе проверку домашнего задания, объяснение нового материала, решение задач, задание домашней работы. Эффективность использования сочетания нескольких форм показали специальные исследования авторов Р.А. Утеевой [61] и Р.А. Хабиба [68]. Фронтальная и индивидуальная организационные формы в современной педагогической практике используются чаще всего, реже - групповая и парная формы обучения. М.Д. Виноградова [9] и И.Б. Первин обращают внимание на то, что ни фронтальная, ни групповая формы обучения не являются коллективными. По их словам, не всякая протекающая в коллективе класса работа, формально, является по сути коллективной. По характеру она может быть индивидуальной. Коллективная форма организации учебной работы, по словам Х.Й. Лийметса [31] возникает на базе дифференцированной групповой работы. Чаще всего урок математики имеет смешанный характер.

Приведем фрагмент с дифференцированной формой деятельности учеников на уроке алгебры (10 классе).

Тема урока: «Использование основных свойств обратных тригонометрических функций для решения задач».

Тип урока: закрепление полученных знаний.

Форма деятельности: дифференцированная.

Методы обучения: словесные, наглядные; практические методы.

Ход урока.

1. Приветствие -1 мин.

2. Актуализация знаний – 5 мин.

3. Закрепление полученных знаний -15 мин.

Решение разноуровневых упражнений (см. таблицу 7).

I уровень - типовая для учащихся;

II уровень - последовательное выполнение нескольких тождественных преобразований I уровня, известных учащимся;

III уровень разбор ранее не встречавшейся ситуации.

Таблица 7 – Фрагмент урока дифференцированной формы деятельности учащихся

3. Закрепление полученных знаний –15 мин.		
1.Дана функция: $y=\arccos x$: а) указать нули функции б) построить график заданной функции; в) указать область значений и промежуток возрастания функции, используя построенный график;	1.Дана функция: $y=\arcsin(x-\frac{1}{2})$: а) указать нули функции б) построить график заданной функции; в) указать область значений и промежуток возрастания функции, используя построенный график; г) при каких значениях график функции не пересекает ось абсцисс	1.Дана функция: $y=1+\arccos(x+\frac{1}{2})$: а) указать нули функции б) построить график заданной функции; в) указать промежутки монотонности функции, используя построенный график; г) при каких значениях график функции не пересекает ось абсцисс
Вычислить: $\arcsin\frac{1}{2}$	Вычислить: $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	Вычислить: $\cos(\arcsin\frac{3}{5})$
$\arcsin(\sin\frac{\pi}{3})+\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\mathrm{tg}^2(\arccos(-\frac{3}{4}))$	$\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$
Решить уравнение: $\arcsin(x-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$	$\arccos\frac{7x+5}{13}=\arcsin\frac{4x+5}{13}$	$\arcsin(3x^2-4x-1)=\arcsin(x+1)$

Выводы по первой главе

Тема «Обратные тригонометрические функции» является основой для решения тригонометрических уравнений и неравенств, упрочняет навыки работы с обратными функциями, закрепляет понятия взаимно однозначных отображений. Изучение обратных тригонометрических функций дает возможность разбираться в сущности самого понятия функции, понимать зависимость между любыми множествами объектов. Работа с обратными тригонометрическими функциями носит исследовательский характер.

Основная цель изучения обратных тригонометрических функций - формирование представлений об арккосинусе, арксинусе, арктангенсе и арккотангенсе, овладение умением решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

В результате обучения все учащиеся должны освоить основные свойства тригонометрических функций, уметь распознавать функции и строить их графики, решать различные задачи, применяя свойства и графики тригонометрических функций.

Введение понятия «обратные тригонометрические функции» должно базироваться на определенной платформе знаний. Для изучения темы «Обратные тригонометрические функции» нужно вспомнить о существовании обратных функций, единичной окружности. Такой подход подготавливает почву для изучения обратных тригонометрических функций.

Осуществление обучения требует знания и умелого использования форм организации педагогического процесса.

Глава 2 Реализация методики обучения теме «Обратные тригонометрические функции» в курсе алгебры и начал математического анализа

2.1 Пропедевтика изучения темы «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры основной школы

Математические знания являются одним из основных аспектов интеллектуальной базы каждого образованного человека. Здесь вырабатывается умение работать с определениями, логически рассуждать, анализировать, классифицировать, систематизировать. Всем известно, что задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями, вызывают значительные трудности у школьников старших классов в силу некоторых особенностей. Ранее школьниками изучались функции вида $y = f(x)$, где x и y - некоторые действительные числа. Теперь углу ставится в соответствие число, и приходит осознание того, что функция - зависимость между любыми множествами объектов различной природы. Введение понятия обратных тригонометрических функций - этап формирования правильных представлений об обратных тригонометрических функциях. Изложение всего функционального материала оказывает влияние на формирование этих понятий в школьном курсе математики. Большой частью этой работы является функциональная пропедевтика, начинающаяся с введения термина "обратные тригонометрические функции" и началу изучения их свойств. Пропедевтикой того или иного математического понятия занимались математики и методисты А.Р. Кулишер [30], М.Н. Скаткин [54]. В 70-е гг. XX в. после реформы математического образования существующие примерные программы и объём сведений функционального содержания значительно увеличился. Этому способствовали такие педагоги – математики как А.И. Маркушевич [36], А.Г. Мордкович [41], А.Я. Хинчин [70] и другие. В толковом словаре русского языка [60, с. 977] пропедевтика определяется как «введение в какую-нибудь науку, сообщение о предварительных знаниях о чем-либо». Пропедевтика вносит подготовительный, излагаемый в сжатой элементарной форме [30, 32], вводный курс в какую-либо науку, изложенное в систематизированной и сжатой форме сообщение и ведущее как к внутрипредметной, так и межпредметной интеграции школьного курса математики. Пропедевтика предшествует более основательному изучению соответствующей отрасли знаний. Функциональная пропедевтика должна проводиться планомерно, но при этом не должна сказываться на качестве усвоения других, не менее важных разделов. С пропедевтикой тесно связан процесс формирования и развития понятий о математических структурах. Так, предлагая ученикам готовые математические понятия в их законченной и развитой форме, то учащимся непонятно, для чего их изучают и зачем они нужны, т.е. чем раньше мы начинаем изучать то или иное понятие без углублений в теорию этого понятия, тем легче будет в дальнейшем изучение этого понятия с соответствующими теоретическими обоснованиями.

Функциональная база должна создаваться регулярно, систематически и подкрепляться системой всевозможных упражнений. Сообщение учащимся дополнительных сведений к изучаемому программному материалу подготовительный этап не предполагает, а лишь там, делает акцент на функциональный момент вопроса.

Пропедевтическое обучение выполняет обучающую функцию и способствует более качественному усвоению материала. Пропедевтика выполняет развивающую функцию. Сравнение, сопоставление, опережение общих и отличительных черт - все это не только способствует лучшему усвоению знаний, но и развивает различные познавательные способности школьников, заставляя мыслительную деятельность находится в состоянии напряжения. Пропедевтика обладает мотивационно-побудительной функцией, так как новый материал при сближении со старым побуждает к деятельности. Возникает познавательный интерес. При осуществлении пропедевтики того или иного математического материала большая роль должна придаваться наглядности.

Назначение непрерывной пропедевтики заключается в формировании основных понятий и определений свойств обратных тригонометрических функции. Для этого вырабатываются первоначальные предпонятия - обобщенные представления на интуитивном уровне с установлением ассоциативных связей между ними, приводящие к сформированности соответствующих умений школьников по линии обратных тригонометрических функций. Подготовительный этап пропедевтического обучения заключается в отборе и анализе теоретических знаний, определяется и сама возможность пропедевтики, в выработке системы упражнений, применяемую на этапе актуализации знаний. После этого разрабатывается технология реализации содержания.

За счет выполнения первоначальных заданий на знакомство и представление нового материала формируются предпонятия, а затем формируются сами понятия. Закрепление понятия осуществляется на этапе выполнения упражнений на закрепление, причем упражнения должны выстраиваться на материале за все классы, вплоть до выполнения заданий на материале «Обратные тригонометрические функции», постепенно увеличивая уровень сложности типов заданий.

До изучения темы «Обратные тригонометрические функции» нужно вспомнить о существовании обратных функций. Поэтому, прежде чем изучать обратные тригонометрические функции, необходимо хорошо изучить тему «Обратная функция и ее свойства»; объяснение темы следует сочетать с наблюдением за учащимися, проводить в форме беседы с наводящими вопросами. Перед тем как рассмотреть и исследовать графики обратных тригонометрических функций, учителю следует обсудить с учащимися такие вопросы как: «Всея ли функции имеют обратную?», «Каким условиям должна удовлетворять обратимая функция?», «Имеет ли тригонометрические функции, рассматриваемые в их естественной области определения, обратные?». Для этого требуется повторить тригонометрические функции и их свойства, графики.

Приведем вопросы, которые можно задать при рассмотрении функции «арксинус»:

1. Что называется областью определения функции?

2. Почему число x в arcsinx может принимать только определенные значения?

3. Что является областью определения функции y = arcsinx?

4. Что называется множеством значений функции?

5. Какие значения может принимать arcsinx? Почему?

Изучение обратных тригонометрических функций наиболее целесообразно после проведения пропедевтической работы с числовой окружностью.

Рассматривая геометрические задачи на нахождение трети, половины, четверти длины окружности определенного радиуса, и делая при этом упор учащихся на то, что радиус окружности должен быть именно единичным, создается модель числовой окружности.

Рассматривать числовую окружность следует на декартовой системе координат. Строить графики следует на основе анализа поведения функции на числовой окружности (рисунок 12) после исследования свойств обратных тригонометрических функций с четким обоснованием каждого свойства.

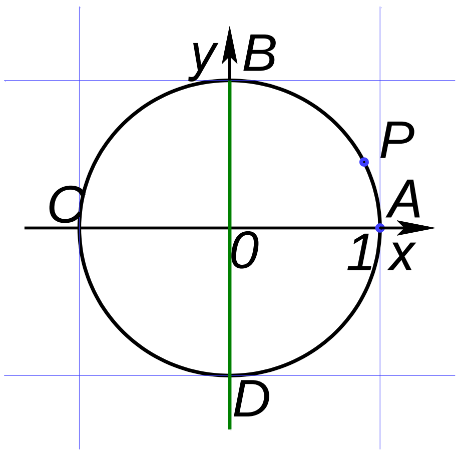


Рисунок 12 – Единичная окружность

Упражнения пропедевтической системы должны быть тесно связаны с упражнениями основной системы. Рассматривая какой-либо вопрос, где осуществляется пропедевтика, всю систему упражнений можно представить в следующей последовательности: подготавливающие упражнения из пропедевтической системы; упражнения, вводящие какое-либо понятие на пропедевтическом уровне; упражнения, показывающие целесообразность введения этого понятия. Эти упражнения позволяют выработать у учащихся понимание понятий аркфункций, формируют умения находить значения некоторых аркфункций в таблицах (например, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и т.д.), и выполняются после теоремы о корнях тригонометрических уравнений. Прочные графические навыки вырабатываются в процессе построения графиков, создают практическую основу свойств обратных тригонометрических функций.

Кроме того, на единичной окружности наглядно видно, что такое периодичность. Задачный же материал служит мотивировкой введения арксинуса, арккосинуса и арктангенса позволяет осваивать работу с числовой окружностью, необходимую при дальнейшем изучении конкретных функций.

Пример 1. Найти точку на числовой окружности, которая соответствует заданному числу: а) $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 4\pi, 6\pi$; б) $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}$.

Решение.

а) Соответствующие заданным числам точки можно найти на рисунке 13: числу 0 соответствует точка *A*, числу $\frac{\pi}{4}$ – точка M — середина первой четверти, числу $\frac{\pi}{2}$ - точка *B*, числу π -точка *C*, числу $\frac{7\pi}{6}$ – точка K, числам 4π и 6π соответствует точка *A*, поскольку 2π — это один полный обход окружности, 4π — это два полных обхода окружности, а 6π — это три полных обхода окружности, т.е. мы возвращаемся в начальную точку, => 4π и 6π соответствуют точке A.

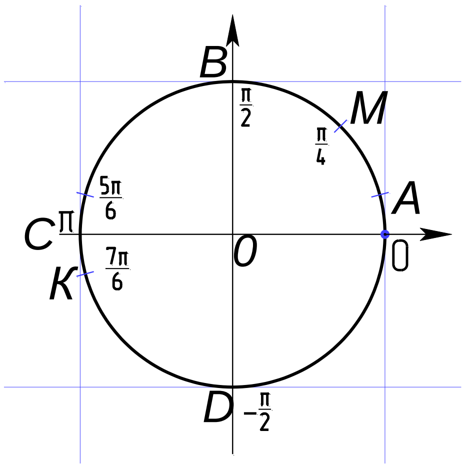


Рисунок 13 – Координаты точек A, M, B, C, D

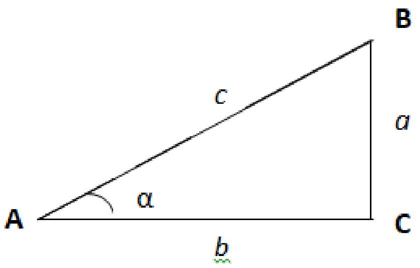
б) Все заданные числа — отрицательные, значит, двигаться по окружности, выходя из точки A, будем в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке.

Для нахождения числа $-\frac{\pi}{2}$ надо выйти из точки A и пройти по часовой стрелке путь длиной $\frac{\pi}{2}$. Но $\frac{\pi}{2}$ - длина четверти окружности, значит, попадаем в точку D.

Для нахождения числа $-\frac{5\pi}{6}$ надо выйти из точки A и пройти по часовой стрелке путь длиной $\frac{5\pi}{6}$. Но $-\frac{5\pi}{6}$ = - 2 π + $\frac{7\pi}{6}$; числу -2π соответствует точка A, значит, надо выйти из точки A и пройти против часовой стрелки путь длиной $\frac{7\pi}{6}$. Попадаем в точку K.

При работе с обратными тригонометрическими функциями с использованием числовой окружности, учащихся должны находить точки в долях числа π, определять принадлежность точки координатной четверти.

Необходимо четкое знание тригонометрических функций, так как рассматриваемые обратные тригонометрические функции являются обратными к ним и без знания синуса, косинуса, тангенса, котангенса и их свойств невозможно изучение обратных. Тригонометрические функции изначально определялись отношением сторон прямоугольного треугольника (рисунок 14), теперь же необходимо связать числовую окружность и прямоугольный треугольник.



sin a = $\frac{a}{c}$

cos a= $\frac{b}{c}$

tga=$\frac{a}{b}$

ctga=$\frac{b}{a}$

Рисунок 14 – Соотношение сторон в треугольнике

Для этого перенесем числовую единичную окружность на декартову прямоугольную систему координат xOy с центром O окружности в начале координат. Точка A – начальная точка окружности A (1;0), а точки пересечения осей координат обозначить B, C и D, то они имеют координаты: B(0;1), C (-1;0) и D (0;-1). Возьмем на окружности точку P (x, y), причем такую, что

$-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, OP=R=1 (рисунок 15).

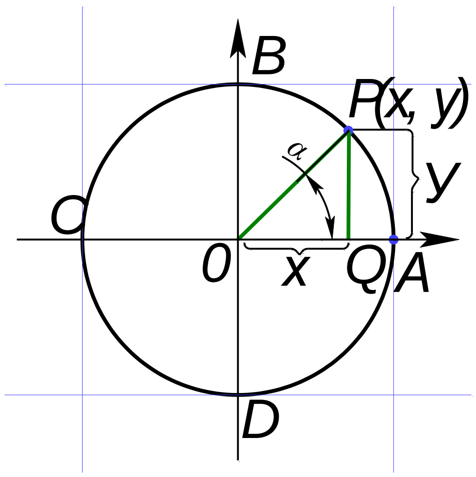


Рисунок 15 – Определение синуса и косинуса на единичной окружности

Опустим перпендикуляр PQ. От положительного направления оси *x* откладываем значения угла *a*. Используя определения для прямоугольного треугольника, получаем: $\sin \alpha = \frac{y}{OP}$; $\cos \alpha = \frac{x}{OP}$;

Координаты произвольной точки P (x; y) окружности единичного радиуса (рисунок 15) оказываются равными соответственно cos α и sin α, т.е. значение x = cos α, y = sin α.

Определение синуса и косинуса произвольного угла представлено на рисунке 16.

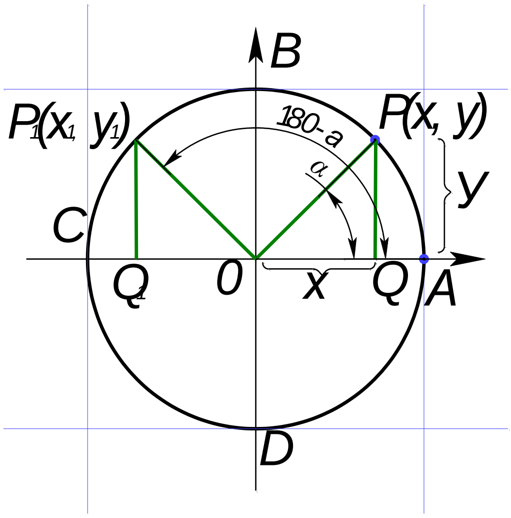


Рисунок 16 - Определение синуса и косинуса на единичной окружности произвольного угла

Для дальнейшего исследования обратных тригонометрических функций и построения графиков, учащиеся должны находить значения и определять знаки всех тригонометрических функций в «главных» точках, использовать основные тригонометрические тождества и формулы приведения, находить по заданному значению одной из тригонометрических функций значения всех остальных тригонометрических функций.

Задачный материал для мотивировки введения арксинуса, арккосинуса и арктангенса позволяет осваивать необходимые учебные действия по работе числовой окружностью.

Пример 2. Пусть необходимо найти угол x, если sin x = $\frac{1}{7}$.

Здесь воспользуемся функцией, обозначающей угол, синус которого равен данному числу $\frac{1}{7}$. Углов, синус которых равен $\frac{1}{7}$, бесконечно много. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ выбираем какой-то один из них. Принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ угол, синус которого равен $\frac{1}{7}$ — это $\arcsin\frac{1}{7}$. (рисунок 17)

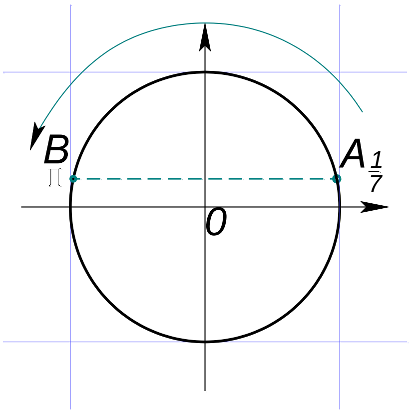


Рисунок 17 – Определение $\arcsin\frac{1}{7}$ на единичной окружности

Следует также заметить, что решение тригонометрических уравнений устанавливает связи с алгебраическими уравнениями, равносильностью уравнений, видами и способами решения уравнений и т.п.

Исключительное разнообразие тригонометрических уравнений вызывает определенные трудности и затруднения в выборе целесообразного приема для получения множества значений переменной.

Перед изучением новой темы «Обратные тригонометрические функции» необходимо актуализировать базовые знания и для отработки навыков решения заданий, связанных с обратными тригонометрическими функциями, необходимо достаточное количество упражнений, а также использовать геометрическую интерпретацию их как углов (дуг окружности).

По завершению пропедевтической работы встает вопрос об изучении свойств ограниченности тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Принимая во внимание имеющиеся объем учебного материала, рамки урока, необходимость постоянного повторения опорных знаний школьников, организация пропедевтической работы целесообразна не только в младших классах, но и на протяжении всего курса алгебры (с 7 по 11 классы).

2.2 Методические рекомендации по введению понятия «обратные тригонометрические функции»

Важнейшим условием успешного обучения является активная деятельность учащегося, а именно: учащийся должен владеть необходимыми теоретическими знаниями. Велика пропедевтическая роль тригонометрического материала - от освоения его в курсе зависит успешное изучение обратных тригонометрических функций. Тригонометрия в алгебре и геометрии - это единое целое, базирующееся на первоначальных сведениях о тригонометрии в курсе геометрии.

При введении новых понятий необходимо напомнить учащимся, что такое «обратимая функция», «обратная функция», вспомнить расположение графиков взаимно-обратных функций; как построить графики функций вида $y = f(x+a)$, $y = f(x)+a$, $y = f(kx)$, $y = kf(x)$.

Перед изучением тригонометрических функций на этапе усвоения учебного материала, рекомендуется использовать декартову прямоугольную систему координат x0y с числовой окружностью с центром в начале координат. Если взять точку A как начальную точку окружности A (1;0), а точки пересечения осей координат обозначить B, C и D, то они имеют координаты: B(0;1), C(-1;0) и D(0;-1). На окружности (рисунок 18) возьмем точку P (x, y), причем такое, что $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

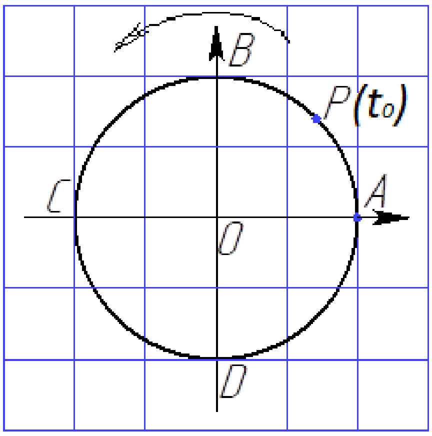


Рисунок 18 – Движение точки P по окружности

Из курса геометрии (Δ POQ, рисунок15) $\llcorner$ POQ = $\frac{OQ}{OP}$ = $\frac{x}{1}$ = x, sin$\llcorner$POQ = $\frac{PQ}{OP}$ = $\frac{y}{1}$ = y, поэтому лежащая на числовой окружности точка P соответствует числу t, тогда абсцисса точки P называется косинусом числа t и обозначается cos t, а ордината - синусом числа t и обозначают sin t.

Числа, соответствующие точкам при первом обходе числовой окружности в положительном направлении, находятся в промежутке $[0;2\pi]$. Логично задать учащимся вопрос: «А что будет, когда окружность сделает полный оборот?»

Ответ очевиден: пойдет второй круг! А когда и второй закончится, пойдет третий и так далее. Поэтому, если точка P соответствует числу *t*, то точка *P* соответствует и любому числу вида $t + 2\pi n$, $n \in Z$. В дальнейшем эта формула будет применяться при решении уравнений и неравенств. Для полного понимания того, что точек с данными координатами можно определить бесчисленное множество, поможет следующее суждение. Так как для любой точки P(x, y) числовой окружности выполняются неравенства:

$$-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1, \text{ то}$$

$$-1 \le \cos t \le 1,$$

$$-1 \le \sin t \le 1.$$

Из вышесказанного вытекает, что

$$\sin(t+2\pi k)= \sin t;$$

$$\cos(t+2\pi k)= \cos t.$$

Пример 3. Найти точки на числовой окружности с абсциссой $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать соответствующие им числа.

Решение: так как прямая $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рисунок 19) пересекает числовую окружность в двух точках, причем точка P соответствует числу $\frac{\pi}{4}$ и любому числу вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, а точка W соответствует $\frac{7\pi}{4}$ и всем числам $\frac{7\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

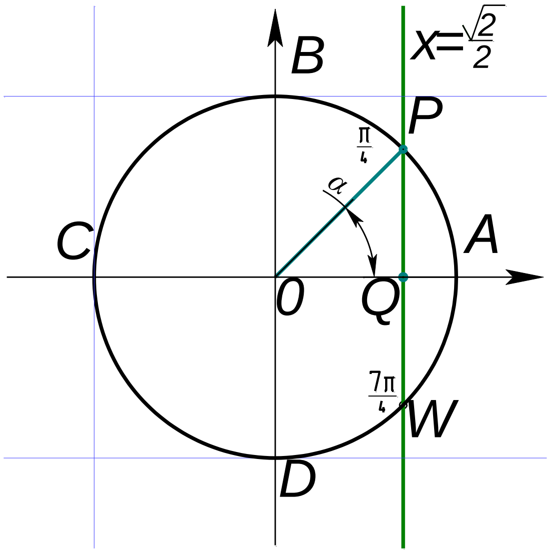


Рисунок 19 – Точки с абсциссой x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

При изучении алгебры часто возникает обратная задача: известно значение y и необходимо найти значение аргумента x, при котором оно достигается.

Для знакомства с понятием арксинуса нужно обратиться к графику функции y = sinx (рисунок 20) на интервале [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] и вспомнить определенные моменты, присущие синусу: соответствие единственного значения функции каждому значению аргумента; функция y = sinx при x ∈ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] непрерывна, возрастает, нечетна, значит, обратимая на [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] и для неё существует обратная функция, обозначаемая x = arcsiny. Если поменять местами y и x, получим y = arcsinx.

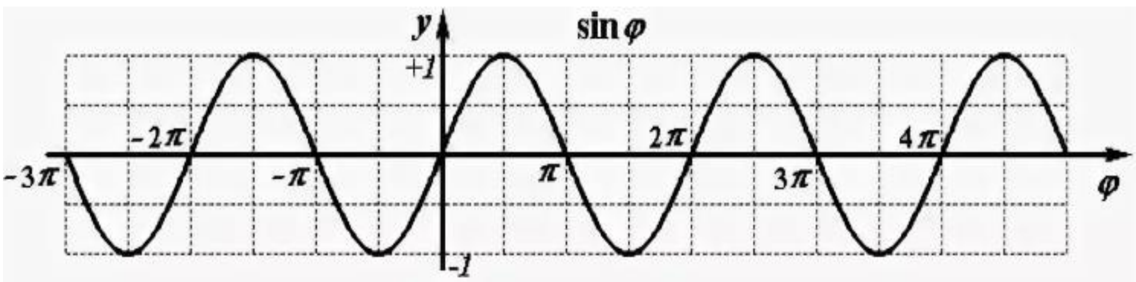


Рисунок 20 – График синуса

Поэтому, арксинусом числа называется такое число, синус которого равен a. Обозначается arcsina = x, если sinx = a, имеет область определения

$-1 \leq x \leq 1$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Теперь, когда дано определение арксинуса, нужно проиллюстрировать это на числовой единичной окружности (рисунок 21).

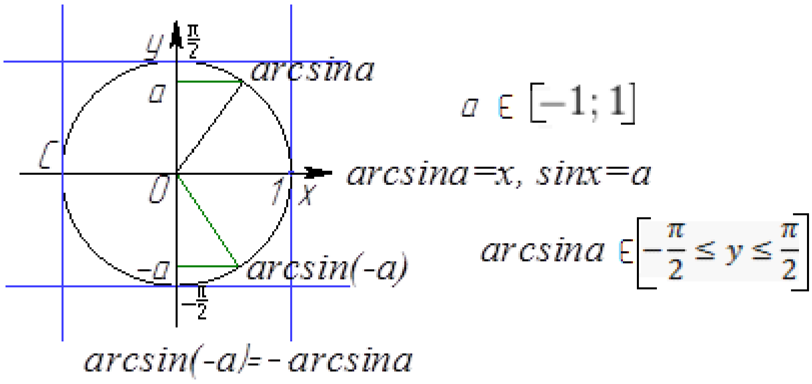


Рисунок 21 – Функции y = arcsinx на единичной окружности

Следующим этапом изучения арксинуса необходимо сформулировать свойства этой функции:

1) областью определения функции арксинус является отрезок [-1; 1],
2) областью значений функции арксинус является отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,
3) арксинус строго возрастающая функция,
4) арксинус является нечетной функцией,
5) график функции y = arcsinx помещается в области: $x = -1;\ x = 1,\ y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

Таблица 8 – Свойства y = arcsinx

Свойства	Функции y = arcsinx
E(f)	$-1 \leq x \leq 1$
D(f)	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
Чётность	Нечётная, т.к. arcsin(-x)= - arcsinx
Промежутки монотонности	Возрастающая

Повторяющихся участков графика функции нет, означает, в отличие от синуса арксинус не является периодической функцией.

Свойства y = arcsinx можно свести в таблицу (таблица 8).

Таблица 9 – Данные для построения графика y = arcsinx

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = arcsinx$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

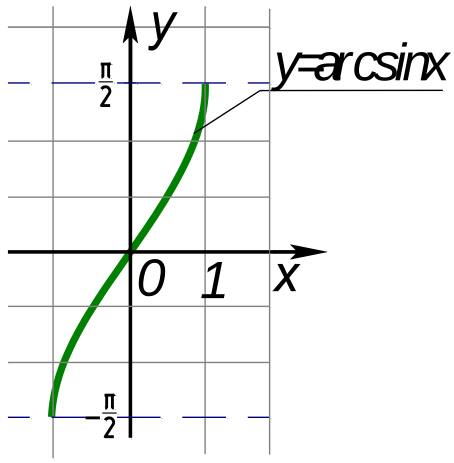


Рисунок 22 – График y = arcsinx

Построение графика нужно начать с таблицы (таблица 9) и по «главным» точкам построить график y = arcsinx (рисунок 22).

Графики функций y = sinx и y = arcsinx симметричны относительно прямой y = x (рисунок 23). Значения аргумента на этом промежутке для функции y = sinx соответствуют значениям функции для арксинуса.

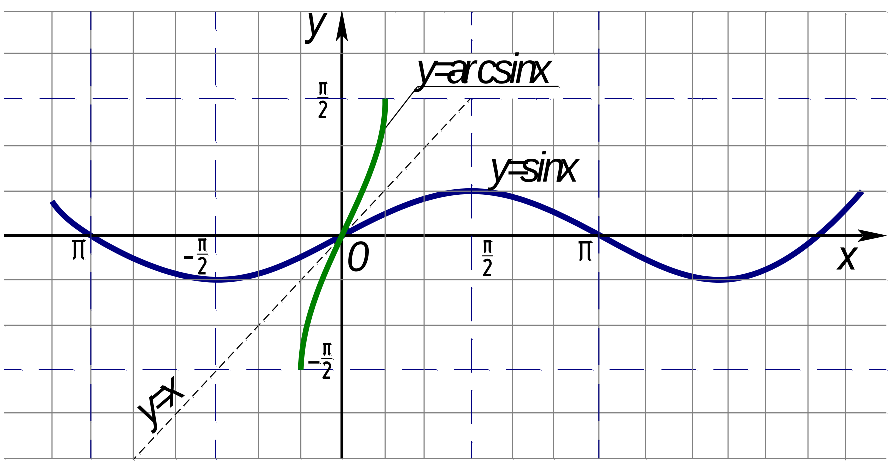


Рисунок 23 – Графики y = sinx и y = arcsinx

Следует акцентировать внимание учащихся на то, что тригонометрическая функция y = sinx периодична, то обратная к ней функция не однозначна и имеет множество значений. Можно проиллюстрировать это с помощью единичной окружности.

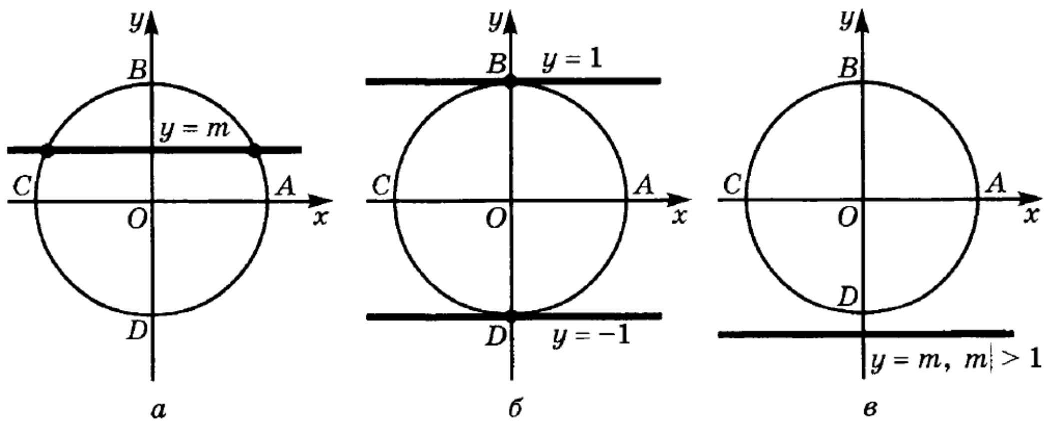


Рисунок 24 – Многозначность значений функции y = arcsinx

На координатной окружности найдем точки пересечения прямой y = m с окружностью. При |m| $\leq$ 1, то таких точек 2, если |m| =1, то одна, при |m| >1, то таких точек нет (рисунок 24). После нахождения множества точек, которым оно соответствует и их объединения получаем решение уравнения sinx, а ординаты этих точек y_0, y_1, y_2,… будут значениями функции y = arcsin x или arcsin$x$ = y_0, y_1, y_2.

Пусть AC = x радиан - кратчайшая из всех дуг, оканчивающихся в точке C, тогда дуга AC = (π – x) радиан. Прибавляя к числам x_0 и π – x по $2\pi k$, где $k \in Z$, получим все числа, соответствующие точкам A и C. Все эти числа можно записать одной формулой:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \text{ где } n \in Z.$$

Для возможности решать уравнения и неравенства задания на тему обратных тригонометрических функций необходимо знать, что arcsin(-x) = - arcsin(x).

$$\sin(\arcsin(-x)) = -x, \sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x \text{ .}$$

В качестве закрепляющего материала можно решить пример: вычислить: arcsin$\frac{1}{2}$.

Решение: пусть arcsin $\frac{1}{2}$=t. Тогда sin t = $\frac{1}{2}$ и t∈[-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]. Значит, t = $\frac{\pi}{6}$, так как sin t=$\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$ ∈ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]. Итак, arcsin $\frac{1}{2}$ = $\frac{\pi}{6}$.

Аналогично вводится понятие функции y = arccosx (рисунок 25). Здесь необходимо указать, что функция y = cosx монотонна и принимает значения от -1 до 1 на каждом из отрезков: [-π; 0], [0; π], [π; 2π] и т. д. Значит, функция y = cosx имеет обратную функцию на каждом из промежутков и x∈[0; π]. Так как она обратна функции cos x на отрезке [0; π], то y = arccosx, -1 ≤ x ≤ 1 и x = cosy, 0 ≤ y ≤ π следуют одно из другого, следовательно, арккосинусом числа называется такое число, косинус которого равен a.

Обозначается arccosa = x, если cosx = a, имеет область определения -1 ≤ x ≤ 1 и множество значений $0 \le y \le \pi$.

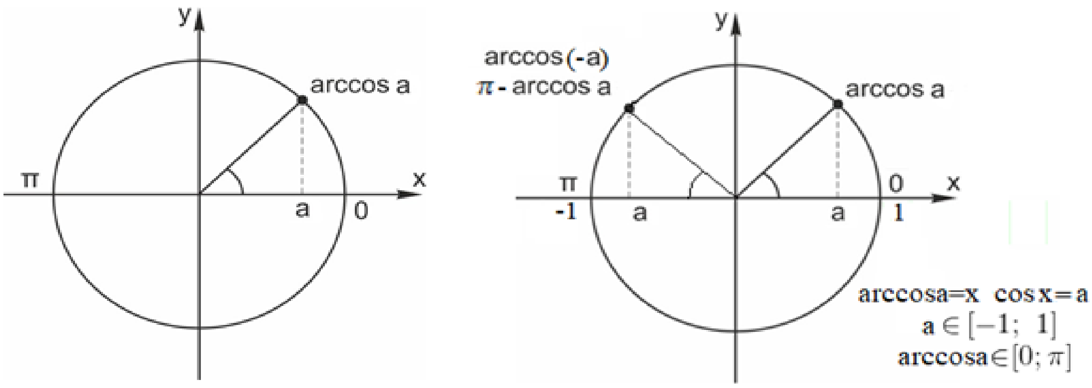


Рисунок 25 – Функция y = arccosx на единичной окружности

Свойства функции можно свести в таблицу 10.

Таблица 10 – Свойства функции y = arccosx

Свойства	Функции y = arccosx
E(f)	$-1 \le x \le 1$
D(f)	$0 \le y \le \pi$
Чётность	Ни чётная, ни нечётная
Промежутки монотонности	Убывающая
arccos(-x)=π - arccosx	
y = cosx и y = arccosx являются взаимно обратными.	

Таблица 11 – Данные для построения графика y = arccosx

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
arccosx	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$

График функции y = arccosx (рисунок 26) строится после составления таблицы 11.

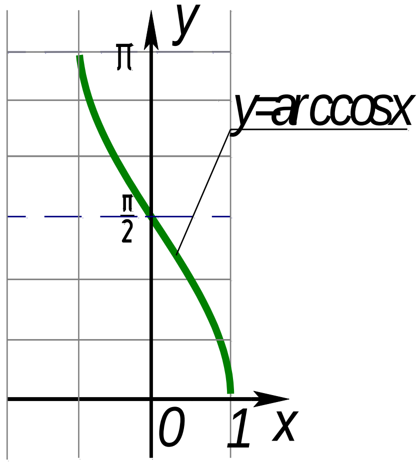


Рисунок 26 – График функции y = arccosx

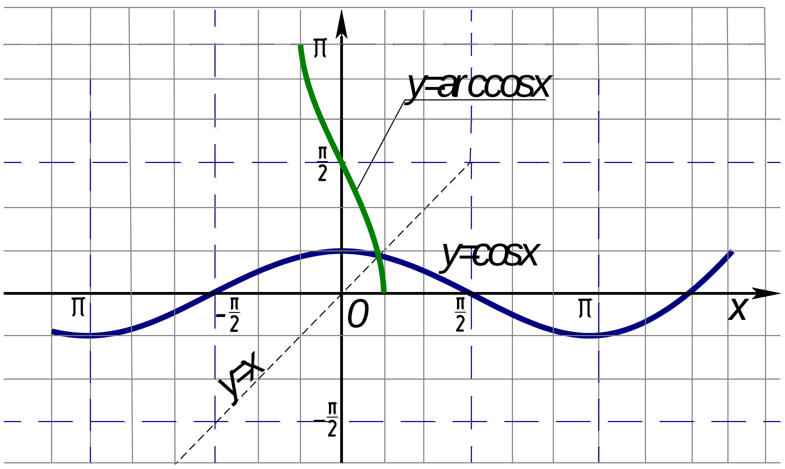


Рисунок 27 – График y = cosx и y = arccosx

Графики функций y = cosx и y = arccosx симметричны относительно прямой y = x (рисунок 27). Значения аргумента на этом промежутке для функции y = cosx соответствуют значениям функции для арккосинуса, Функция y = cosx периодична, но обратная к ней функция не однозначна и имеет множество значений.

Решить примеры для закрепления изученного материала:

а) Вычислить: $\arccos\frac{1}{2}$.

Пусть $\arccos\frac{1}{2}$ = t. Тогда cos t = $\frac{1}{2}$ и t$\in[0;\pi]$. Значит, t = $\frac{\pi}{3}$, так как cos t = $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$ $\in[0;\pi]$. Итак, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Для введения понятия арктангенс необходимо вспомнить, что tgx = $\frac{\sin x}{\cos x}$, для которой областью определения функции y = tgx будут все действительные числа, за исключением нулей функции y = cosx. Поэтому целесообразно воспользоваться единичной окружностью, пересечённой прямой $\frac{y}{x}$ = m. Координатная окружность пересекает окружность в двух диаметрально расположенных точках M и N (рисунок 28). Поэтому для любого m существует единственное число t_0 такое, что $tgt_0=m$, причем $-\frac{\pi}{2} \le t_0 \le \frac{\pi}{2}$. Второй точке N соответствует значение $t_0+\pi$, следовательно, решением уравнения tgt = m является объединение множеств

$t_0+2\pi k$, $k\in Z$, и $t_0+\pi+2\pi k$, $k\in Z$, т.е. множества вида $t_0+\pi n$, $n\in Z$.

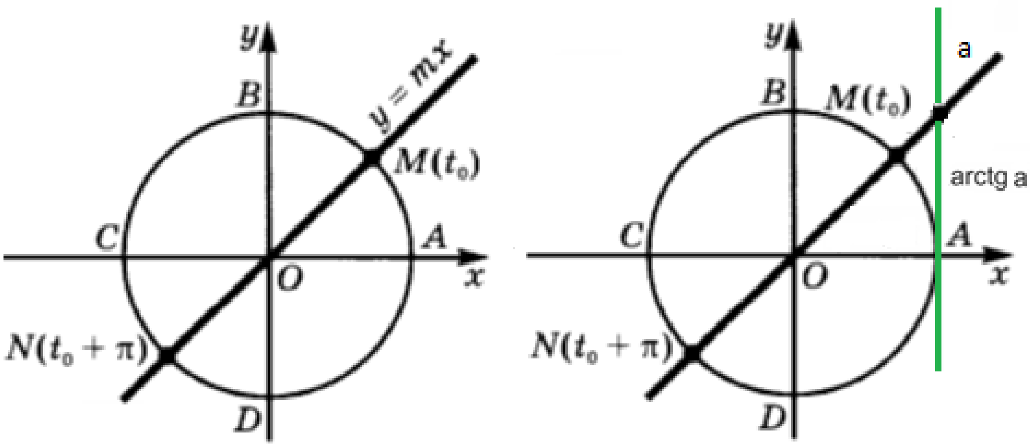


Рисунок 28 – Определение арктангенса на единичной окружности

Из рисунка 28 видно, что функция y = arctgx многозначна и имеет бесконечное множество решений. Функция y = arctgx монотонна на интервалах: $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$; $(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$; и т.д. График y = arctgx получается симметрией относительно оси y = x функции y = tgx.

Теперь можно ввести определение: арктангенсом числа называется такое число, тангенс которого равен a. Обозначается arctga = x, если tgx = a и имеет область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Таблица 12 – Свойства y = arctgx

Свойства	y = arctgx
E(f)	R
D(f)	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
Чётность	Нечётная
Промежутки монотонности	Возрастающая
Непрерывность	Непрерывна

Для построения графика функции y = arctgx (рисунок 29) воспользуемся таблицей 12.

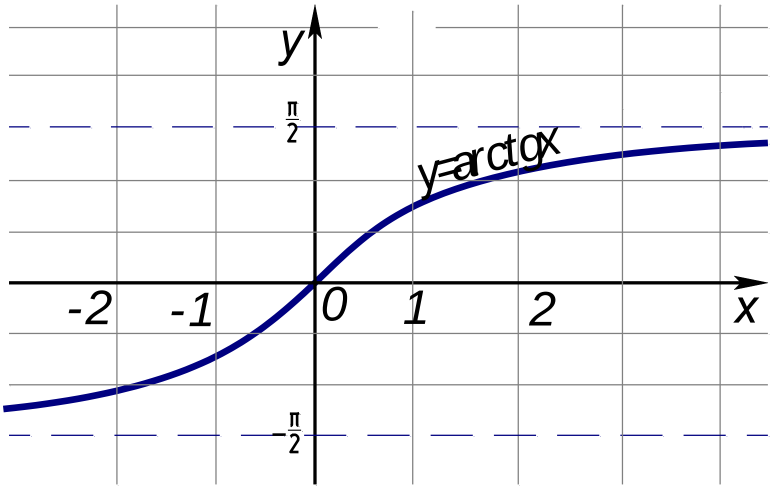


Рисунок 29 – График функции y = arctgx

Нужно иметь ввиду, что tgx может принимать любое действительное значение. Поэтому уравнение y = tgα имеет корни при любом a. В определении арктангенса нет концов промежутка точки $\pm\frac{\pi}{2}$, потому, что в этих точках тангенс не определён.

Выбираем участок графика функции y = tgx, где соответствие между x и y взаимно однозначное. Здесь функция y = tgx принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Областью определения функции y = arctgx является вся числовая прямая, от $-\infty$ до $+\infty$, а областью значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

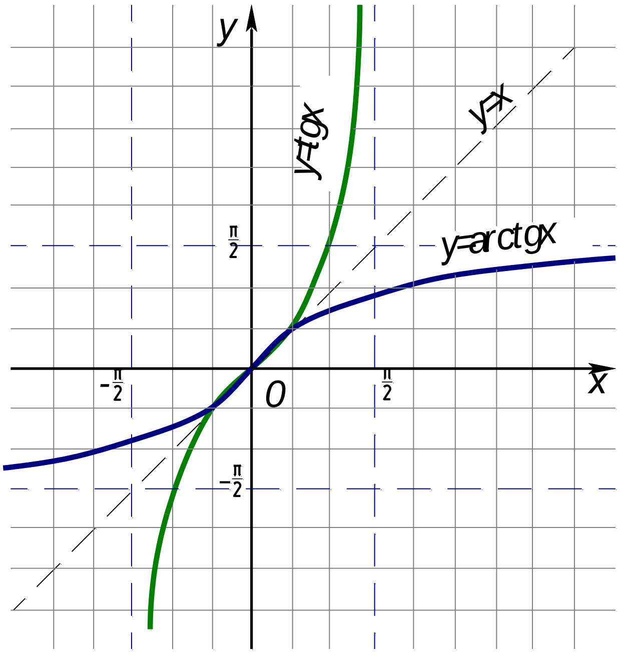


Рисунок 30 – Графики функций y = tgx и y = arctgx

На рисунке 30 представлены графики функций y = tgx и y = arctgx, являющиеся взаимно обратными на и симметричными относительно прямой y = x на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Акцентируя внимание на том, что y = arctgx и x = tgy, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ эквивалентны, получаем важную формулу, которая в дальнейшем поможет при решении задач tg(arctgx) = x, $-\frac{\pi}{2} \leq$ arctgx $\leq \frac{\pi}{2}$.

Вычислить: arctg($-\frac{\sqrt{3}}{3}$).

Решение: пусть arctg($-\frac{\sqrt{3}}{3}$)=t. Тогда tgt= $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и t∈($-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$). Значит, t = $-\frac{\pi}{6}$, поскольку tg($-\frac{\pi}{6}$) = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{6}$ ∈($-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$). Итак, arctg($-\frac{\sqrt{3}}{3}$) =$-\frac{\pi}{6}$.

При рассмотрении функции y = arcctgx необходимо учесть, что ctgx = $\frac{\cos x}{\sin x}$. Область определения функции y = tgx - все действительные числа, кроме нулей функции y = sinx.

Точками пересечения единичной окружности с прямой $\frac{y}{x}$ = m будут диаметрально расположенные точки M и N (рисунок 31).

Поэтому для любого m существует единственное число t_0 такое, что $tgt_0 = m$, причем $0 \leq \ t_0 \ \leq \pi$.

Второй точке N соответствует значение $t_0+\pi$, следовательно, решением уравнения ctgt =m является объединение множеств $t_0+2\pi k$, $k\in Z$, и $t_0+\pi+2\pi k$, $k\in Z$, т.е. множества вида $t_0+\pi n$, $n\in Z$.

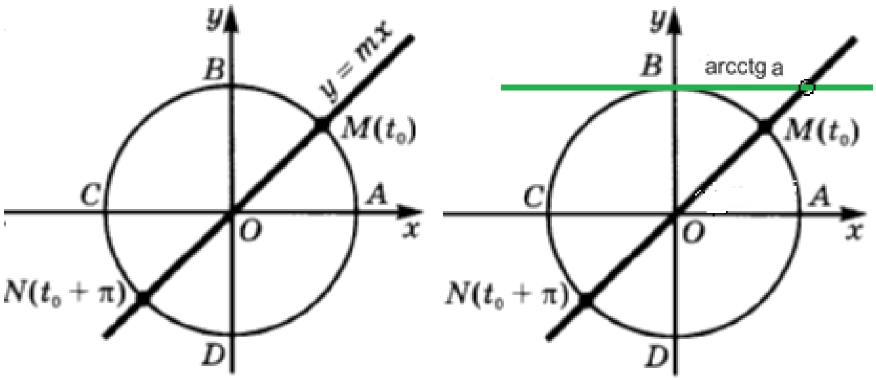


Рисунок 31 – Определение арктангенса на единичной окружности

Арккотангенсом числа называется такое число, котангенс которого равен *a*. Обозначается arcctga = x, если ctgx = a и имеет область определения $\infty < x < +\infty$ и множество значений $0 < y < \pi$.

Для построения графика функции y = arcctgx (рисунок 32) используем свойства y = arcctgx, приведенные в таблице 13.

Таблица 13 – Свойства y = arcctgx

Свойства	y = arcctgx
E(f)	R
D(f)	$(0; \pi)$
Чётность	Ни четная, ни нечетная
Промежутки монотонности	Убывающая
Непрерывность	Непрерывна

Функция y = arcctg*x* монотонна на интервалах: [-π; 0], [0; π], [π; 2π] и т.д. Значит, функция y = ctg*x* имеет обратную, т.е. график y = arctg*x* можно получить симметрией относительно оси y = x. Из рисунка 32 видно, что функция y = arcctg*x* имеет бесконечное множество решений.

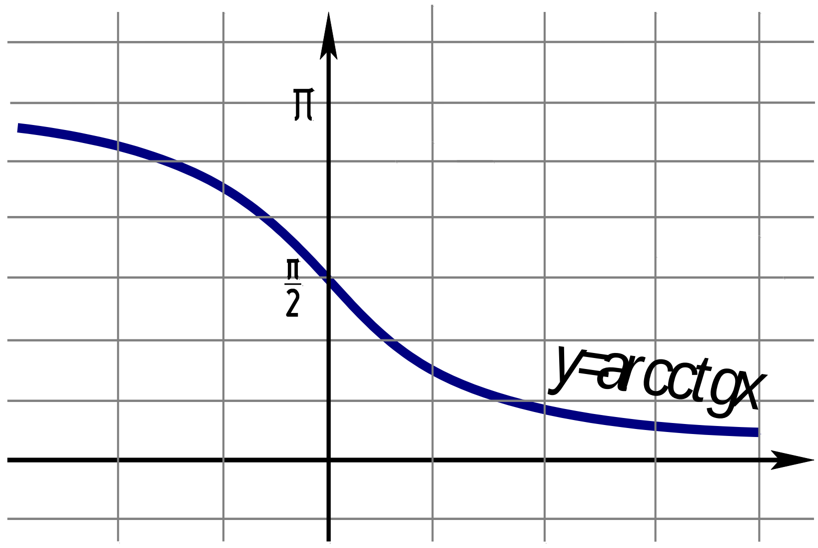


Рисунок 32 – График функции y = arcctgx

Прямые y = 0 и y = π являются горизонтальными асимптотами данной функции. Функции y = ctgx и y = arcctgx являются взаимно обратными, если рассматривать y = ctgx на промежутке (0; π) (рисунок 33).

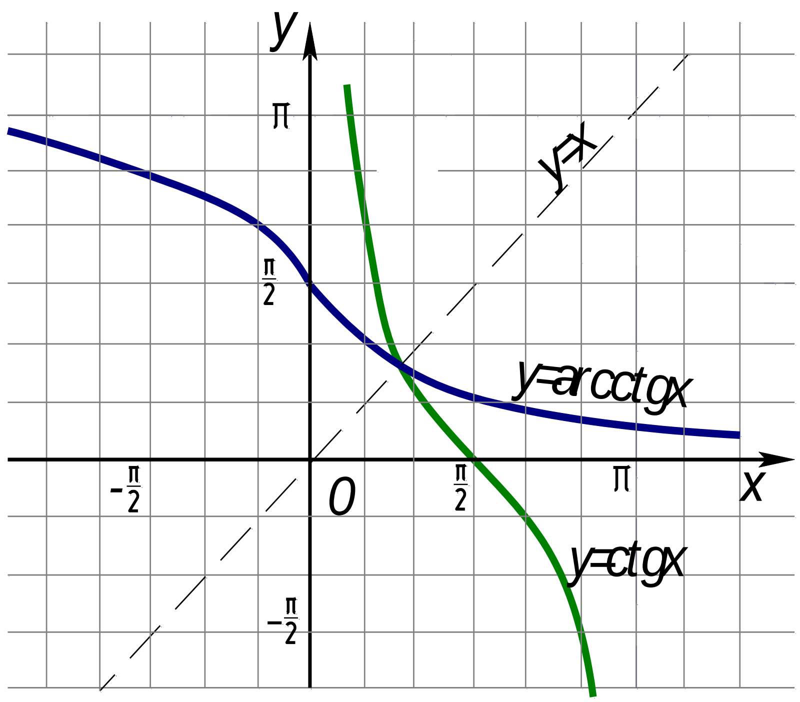


Рисунок 33 – Графики котангенса и арккотангенса

Нужно запомнить эквивалентность записей y = arcctgx и x = ctgy, $0 \leq y \leq \pi$ эквивалентны, следовательно, для любого x имеем:

$$ctg(arcctgx)=x,\ 0 \leq arcctgx \leq \pi.$$

Вычислить: а) arcctg1; б) arcctg(-1);

Решение:

а) пусть arcctg1 = t. Тогда ctgt =1 и t∈(0; π). Значит, t = $\frac{\pi}{4}$, так как ctg$\frac{\pi}{4}$ = 1 и $\frac{\pi}{4}$ ∈(0; π). Итак, arcctg1 = $\frac{\pi}{4}$.

б) arctg(-1)= π- arcctg1=π- $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{3\pi}{4}$.

Важное правило: как и любые периодические функции, тригонометрические не являются обратимыми (обратные соответствия для них не являются однозначными). Если же ограничить область определения до одного из промежутков монотонности, то полученные функции будут обратимыми.

Очень часто на практике бывают полезными формулы, устанавливающие соотношения между тригонометрическими функциями и аркфункциями. Полезно запомнить некоторые из них (таблица 14).

Таблица 14 – Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$-1 \leq a \leq 1$, $\sin(\arcsin a) = a$	$-1 \leq a \leq 1$, $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$	$-\infty \leq a \leq +\infty$, $\sin(arctga) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$-\infty \leq a \leq +\infty$, $\sin(arcctga) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
$-1 \leq a \leq 1$, $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}$.	$-1 \leq a \leq 1$, $\cos(\arccos a) = a$	$-\infty \leq a \leq +\infty$, $\cos(arctga) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$-\infty \leq a \leq +\infty$, $\cos(arcctga) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
$-1 < a < 1$, $tg(\arcsin a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $tg(\arccos a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$-\infty \leq a \leq +\infty$, $tg(arctga) = a$	$a \neq 0$, $tg(arcctga) = \frac{1}{a}$
$a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, $ctg(\arcsin a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$-1 < a < 1$, $ctg(\arccos a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$a \neq 0$, $ctg(arctga) = \frac{1}{a}$	$-\infty \leq a \leq +\infty$, $ctg(arcctga) = a$

2.3 Система упражнений по теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства»

Упражнения с обратными тригонометрическими функциями, относятся к задачам исследовательского характера.

Теория аркфункций, содержащая множество интересных и разнообразных задач, развивает гибкость математического мышления, зеркально отражая теорию тригонометрических функций.

Анализ современных учебников показал недостаточность материала по данной теме.

Ознакомительный характер предложенного материала не позволяет ученикам отработать умения и навыки в решении заданий.

Но с другой стороны без формирования у учащихся представления об обратных тригонометрических функциях, нельзя считать, что они научились решать даже простейшие тригонометрические уравнения.

По определению Е.И. Лященко [33] «задачи с дидактическими функциями имеют следующее назначение:

1) формировать свойства изучаемых понятий и элементарных связей между ними;

2) формировать алгоритмы выполняемых действий и методы решения задач;

3) формировать мыслительные действия, необходимые при изучении предмета и решении предлагаемых упражнений».

Согласно Е.И. Лященко, в разрабатываемой системе упражнений должны быть включены задачи:

1) с раскрытием отдельных аспектов формируемого понятия;
2) с раскрытием связей между отдельными аспектами формируемого понятия;
3) с содержанием элементов переноса знаний;
4) с содержанием познавательных функций;

5) с комбинацией математических фактов и способов решения задач;

6) с установлением свойств понятия и умением изменять ранее известные приемы решения на основе использования конкретных условий задачи;

7) с отчетливым представлением структуры задачи.

Далее предлагается система упражнений для отработки навыков решения упражнений по теме «Обратные тригонометрические функции», которая может быть использована в качестве вспомогательного материала, представленного в выбранном УМК, как в урочное время, так и на элективных курсах.

1-й блок упражнений.

1) с раскрытием отдельных аспектов формируемого понятия;

2) с раскрытием связей между отдельными аспектами формируемого понятия;

3) с использованием символики к данному понятию.

Упражнение 1. Найти область определения функции y = arcsin(x-2) [20].

Т.к. D(arcsinx) = [-1;1], поэтому $-1 \le x-2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3.$

Ответ. D(y) = [1; 3].

Упражнение 2. Найти область определения функции y = $\arcsin\frac{x-1}{3}$ [20].

Решение: т.к. D(arcsinx) = [-1;1], поэтому $-1<\frac{x-1}{3}<1$, =>

-3<x-1<3, => -2< x<4. Ответ: -2< x<4.

Упражнение 3. Найти область значения функции y = arccos(x – 2) [20].

Решение: т.к. $E(\arccos x) = [0;\pi]$, то

$$0 \le \arccos x \le \pi \Leftrightarrow -2 \le \arccos x - 2 \le \pi - 2.$$

Ответ: $E(\arccos(x-2)) = [-2;\pi-2]$.

Упражнение 4. Упростите выражение cos(arcsinx), где $-1 \le x \le 1$.

Решение: пусть y=arcsin x. Тогда $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ и sin y=x. Для нахождения cos y, используем соотношение: $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Получим $\cos^2 y = 1 - x^2$. Но $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Косинус больше нуля на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, т.е. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, где $-1 \le x \le 1$.

Упражнение 5. Доказать arcsinx + arccosx = $\frac{\pi}{2}$. [20].

Решение: пусть $\arcsin x = a, \frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}$, $\arcsin x = a$, $-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}$ и $\arccos x = b, 0 \le b \le \pi$, получим $x = \sin a$ и $x = \cos b = \sin(\frac{\pi}{2} - b)$, т.е. $\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$, $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - b \le \frac{\pi}{2}$. Значит, $a = \frac{\pi}{2} - b$, так как углы a и $a = \frac{\pi}{2} - b$ заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ синусы этих углов равны. Таким образом, получим: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Предложенные упражнения направлены на формирование понятий обратных тригонометрических функций, на отработку навыков использования свойств функции, на использование областей существования функций, на умение доказывать тождества, содержащие обратные тригонометрические функции.

2-й блок упражнений, содержащий задачи:

1) с элементами переноса знаний;
2) с познавательными функциями.

Упражнение 6. Сравнить числа: $\frac{2\pi}{5}$ и $\arccos\frac{3}{10}$. [20]

Решение: поскольку как $\frac{2\pi}{5}$, так и $\arccos\frac{3}{10}$ лежат в интервале (0; $\frac{\pi}{2}$) можно сравнить числа $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72° = \sin 18°$ и $\frac{3}{10}$. При этом в силу монотонного убывания функции y = cosx на интервале(0; $\frac{\pi}{2}$) число $\frac{2\pi}{5}$ больше (меньше) числа $\arccos\frac{3}{10}$ когда число sin18° больше (меньше) числа $\frac{3}{10}$.

$\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ или $\sin 18° = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Поскольку $\sin 18°>0$, можно утверждать, что $\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Таким образом, $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > \frac{3}{10}$, тогда $\frac{2\pi}{5} < \arccos\frac{3}{10}$.

Упражнение 7. Вычислите cos(arcsin(-0,6)). [20]

Решение: обозначим arcsin0,6 = a, $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тогда sin a = 0,6, $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a}$, $\cos a = \sqrt{1-0{,}6^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

Упражнение 8. Вычислить $2\arcsin\frac{15}{17}$ [20] .

Решение: учитывая, что $\frac{15}{17} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, имеем

$2\arcsin\frac{15}{17} = \pi - \arcsin(2\cdot\frac{15}{17}\sqrt{\frac{1-225}{289}}) = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{240}{289}}$.

Ответ: $\pi - \arcsin\sqrt{\frac{240}{289}}$.

Предложенные упражнения дают возможность отработать навыки нахождения большего и меньшего числа, используя свойства убывания и возрастания и монотонности обратных тригонометрических функций, применяя формулы, устанавливающие соотношения между обратными тригонометрическими функциями одного итого же аргумента, формул кратных аргументов.

3-й блок упражнений, содержащий задачи:

1) с комбинацией математических фактов и способов решения задач;

2) с установлением свойств понятия и умением изменять ранее известные приемы решения на основе использования конкретных условий задачи.

Упражнение 9. Найдите значение выражения [20]:

$$\frac{\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})-\arccos(-\frac{1}{2})}{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Решение: $\frac{\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})-\arccos(-\frac{1}{2})}{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-(\pi-\arccos\frac{1}{2})}{\frac{\pi}{6}}=\frac{-\frac{\pi}{4}-\pi+\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=-5{,}5$

Ответ. -5,5.

Упражнение 10. Упростить выражение $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение:

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=-\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Пусть $\operatorname{arctg}x=a, a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}x=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}>0$ значит, $a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Найдем cosa, используя тождество

$\frac{1}{\cos^2 a}=1+\operatorname{tg}^2 a; \cos a=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}}$. Значит, $-\cos a=-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Упражнение 11. Упростить выражение $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$. [20].

Решение: применяя формулу двойного аргумента, имеем:

$$\arcsin\frac{12}{13}=a, a\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; \sin a=\frac{12}{13}>0, a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right); \cos a=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13};$$

$$\sin 2a=2\sin a\cos a=2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13}=\frac{120}{169}.$$

Ответ: $\frac{120}{169}$.

Упражнение 12. Упростить выражение $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}\right)$ [20].

Обозначим:

$$\arcsin\frac{5}{13}=a,\sin a=\frac{5}{13}>0,a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right);\cos a=\frac{12}{13};$$
$$\arcsin\frac{12}{13}=b,\sin b=\frac{12}{13}>0,b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right);\cos b=\frac{5}{13}.$$

Значит,

$$\sin(a+b)\sin a\cos b+\cos a\sin b=\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13}=\frac{169}{169}=1.$$

Ответ. 1

Упражнение 13. Найти сумму $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ [20].

Решение:

Так как arctgx + arctgy = $\operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}$,

находим:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arcctg}\frac{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\operatorname{arcctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Предложенные упражнения направлены на формирование умений находить числовые значения аркфункций, используя основные свойства этих функций, находить область определения и область значений, применения формулы соотношения между тригонометрическими функциями и аркфункциями одного итого же аргумента.

4-й блок упражнений, содержащий задачи:

1) с комбинацией математических фактов и способов решения задач;

2) с установлением свойств понятия и умением изменять ранее известные приемы решения на основе использования конкретных условий задачи;

Упражнение 14. $3\arcsin^2 x-10\arcsin x+3=0.$

Решение: обозначим $\arcsin x=t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, получим

$$\begin{cases} |t| \le \frac{\pi}{2}, \\ 3t^2 - 10t + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |t| \le \frac{\pi}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3}, \\ t = 3; \end{array} \right. \end{cases} \quad t = \frac{1}{3}.$$

Вернемся к переменной x.

$\arcsin x = \frac{1}{3}, x = \sin\frac{1}{3}.$

Ответ. $\sin\frac{1}{3}$.

Упражнение 15. Решить уравнение $\arcsin(3x^2 - 4x - 1) = \arcsin(x+1)$.

Решение: уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 1 = x + 1, \\ |x+1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0, \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\frac{1}{3}, \end{array} \right. \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ. $-\frac{1}{3}$.

Упражнение 16. Решить уравнение $\arccos\frac{7x+5}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13}$**.**

Решение:

$$\arccos\frac{7x+5}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13} \Rightarrow \left(\frac{7x+5}{13}\right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 65x^2 + 78x - 143 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\frac{143}{65}. \end{array} \right.$$

Корень $x = -\frac{143}{65}$ является посторонним.

Ответ: 1.

Предложенные упражнения направлены на формирование умений решать уравнения, используя свойства обратных тригонометрических функций, а также уравнений, сводящихся к квадратным.

5-й блок упражнений, содержащий задачи:

1) с элементами переноса знаний;

2) с комбинацией математических фактов и способов решения задач;

3) с умением изменять ранее известные приемы решения на основе использования конкретных условий задачи;

Упражнение 17. Решить неравенство:

$$\mathrm{arcctg}\left(8x^2-6x-1\right)\le \mathrm{arcctg}\left(4x^2-x+8\right).$$

Решение:

Неравенство равносильно

$$8x^2-6x-1\ge 4x^2-x+8 \Leftrightarrow 4x^2-5x-9\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ x\ge \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(-\infty;-1\right]\cup\left[\dfrac{9}{4};+\infty\right)$.

Упражнение 18. Решить неравенство $3\arcsin 2x<1$.

Решение:

$$3\arcsin 2x<1 \Leftrightarrow \arcsin 2x<\frac{1}{3} \Leftrightarrow \arcsin 2x<\arcsin\left(\sin\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow -1\le 2x<\sin\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}.$$

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{2};-\sin\dfrac{1}{3}\right)$.

Упражнение 19. Решить неравенство $\arccos\left(x^2-3\right)\le\arccos\left(x+3\right)$.

Решение.

$$\arccos\left(x^2-3\right)\le\arccos\left(x+3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3\ge x+3, \\ x+3\ge -1, \\ x^2-3\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 3, \\ x\le -2, \end{array}\right. \\ x\ge -4, \\ -2\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ. -2.

Предложенные упражнения направлены на формирование умений решать неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, используя свойства монотонности обратных тригонометрических функций.

6-й блок упражнений, содержащий задачи:

1) с комбинацией математических фактов и способов решения задач;

2) с установлением свойств понятия и умением изменять ранее известные приемы решения на основе использования конкретных условий задачи;

3) с отчетливым представлением структуры задачи.

Упражнение 20. Решите уравнение arcsinx = 2arcsina..

Ответ: при $a\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $x=2a\sqrt{1-a^2}$, при $a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ нет решений.

Упражнение 21. Решите уравнение arccosx = arcsin2a.

Ответ: при $a\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $x=\sqrt{1-4a^2}$; при $a\in(-\infty;0)\cup(\frac{1}{2};\infty)$ решений нет.

Упражнение 22. Решить уравнение $\arcsin(ax^2-ax-1)+\arcsin x=0.$

Решение:

$$\arcsin(ax^2-ax-1)+\arcsin x=0\Leftrightarrow\arcsin(ax^2-ax-1)=-\arcsin x\Leftrightarrow\begin{cases}ax^2-ax-1=-x,\\|-x|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}ax^2-(a-1)x-1=0,\\|x|\le 1.\end{cases}$$

Рассмотрим случаи, когда:

1) a=0. Тогда:

$$\begin{cases}x-1=0,\\|x|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

2) $a\ne 0$. В этом случае его корни x=1 и x=-$\frac{1}{a}$. Так как $|x|\le 1$, то $\left|-\frac{1}{a}\right|\le 1\Leftrightarrow|a|\ge 1.$

Если $a=-1$, то $x_2=x_1=1$.

Если $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то уравнение имеет два корня.

Ответ: при $a\in(-\infty;-1)\cup[1;\infty)$ x=1, $x=-\frac{1}{a}$; при a=1 и a=0 x=1 при прочих a решений нет.

Упражнение 23. Решите уравнение $2\arccos x = a + \dfrac{a^2}{\arccos x}$.

Ответ: при $a \in [-2\pi;0)$ $x = \cos\frac{1}{2}a$;

при $a \in (0;\pi]$ $x = \cos a$;

при $a \in (-\infty;-2\pi) \cup \{0\} \cup (\pi;+\infty)$ решений нет.

Упражнение 24. Построить график функции y = arcsin(sinx).

Решение: так как равенство синусов углов на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ влечет равенство самих углов, то из тождества sin(π-x) = sinx и $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$ получаем, что y = π-x.

Пусть $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (n∈Z). Тогда $-\frac{\pi}{2} \le x - 2\pi n \le \frac{\pi}{2}$ и sin(x-2πn) = sinx. Поэтому y = x-2πn. Пусть $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ (n∈Z). Тогда $-\frac{\pi}{2} \le x - 2\pi n \le \frac{\pi}{2}$ и sin(x- 2πn) = sinx. Тогда $-\frac{\pi}{2} \le \pi - (x - 2\pi n) \le \frac{\pi}{2}$ и sin(π –x+2πn) = sinx.

Поэтому y = π –x+2πn. Таким образом, имеем:

$$y = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \pi - x + 2\pi n, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z) \end{cases}$$ (рисунок 34).

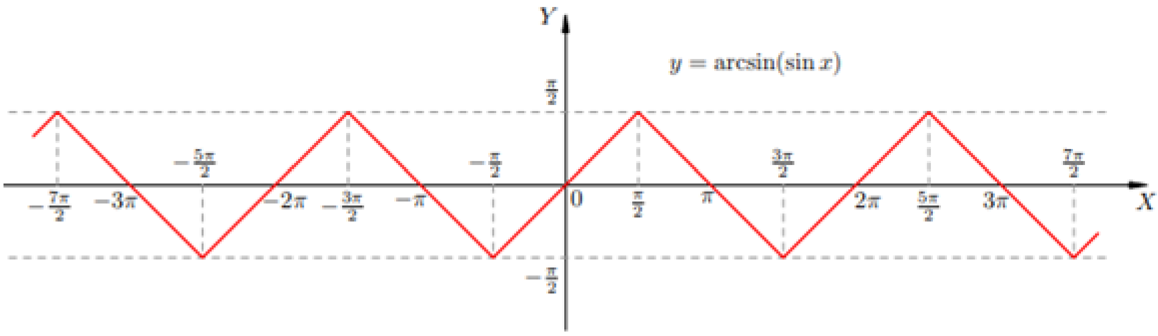


Рисунок 34 – График функции y = arcsin(sinx).

Упражнение 25. Построить график функции y = arccos(x - 1).

Чтобы построить график функции y = arccos(x - 1) + 1, построим график y = arccos(x - 1), сместив его на оси Ох на одну единицу вправо, а затем перенести график на единицу вверх (рисунок 35).

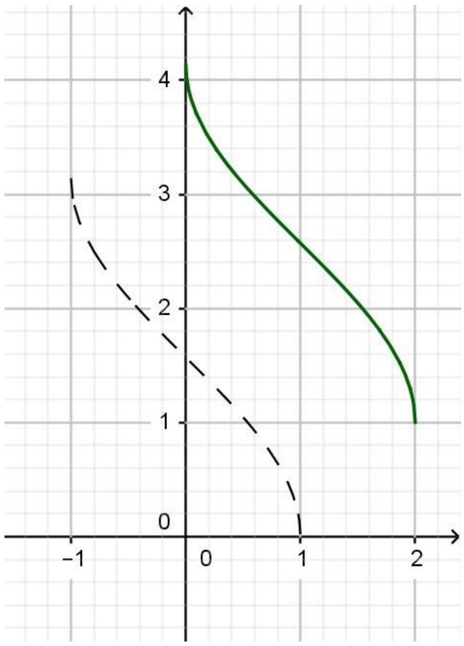


Рисунок 35 – График функции y = arccos(x - 1) + 1

Предложенные упражнения с параметрами дают возможность отработать иной качественный подход к решению задач, требующий четкое понимание теории. Здесь необходимо применить все известные свойства обратных тригонометрических функций, знать промежутки монотонности, формулы, устанавливающие соотношения между обратными тригонометрическими функциями одного итого же аргумента, а также формулы кратных аргументов, уметь строить графиков сложных функций.

В представленной системе упражнений по теме «Обратные тригонометрические функции» для углубленного уровня предложены задания на понимание формируемого понятия обратных тригонометрических функций с использованием символики к данным понятиям; на умение находить область определения функции, строить графики предлагаемых функций, решать уравнения и неравенства с комбинацией известных математических фактов и способов решения задач.

В процессе решения упражнений, содержащих формулы графики, рисунки само задание наводит обучающиеся на поиск нужного решения и в своем содержании подсказывает ход решения задания.

2.4 Описание педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе ГБОУ СПК г.о. Сызрани. В эксперименте участвовало 16 учеников, которые учатся по программе для общеобразовательных классов по учебному пособию А.Ш. Алимова [1]. Тема изучалась впервые и после проведения нескольких уроков были выполнены самостоятельная работа и контрольная работа.

Цель данного эксперимента - проанализировать разработанную методику обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства», выявить у учащихся умение решать задачи по теме и применять различные методы и приемы решения, основанные на свойствах обратных тригонометрических функций. Основанием для эксперимента являлись разработанные методические рекомендации по введению понятия «обратные тригонометрические функции», система упражнений по данной теме.

Методы исследования экспериментальной работы содержали:

1) наблюдение за работой учащихся в процессе изучения обратных тригонометрических функций и их свойств с целью выявления умения находить область определения данных функций; значения выражения с использованием основных свойств обратных тригонометрических функций; решать простейшие уравнения с обратными тригонометрическими функциями; решать простейшие уравнения, содержащих обратные тригонометрические функции;

2) проведение контрольной работы в форме тестовых заданий для учащихся 10 класса с целью установления уровня обученности решения задач по теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства».

Педагогический эксперимент содержит ряд этапов: констатирующий и поисковый этапы, а также формирующий (творческий) этап, на котором строится теоретическая модель и осуществляется ее эмпирическая проверка. Первый этап заключался в сборе данных, полученных тестированием, для выявления уровня знаний и умений учащихся, необходимых для усвоения темы «Обратные тригонометрические свойства и их свойства».

Целью первого этапа было выявление уровня сформированности основных знаний умений, которые необходимы для решения тригонометрических уравнений, нахождения области определения функций, построения графиков обратных тригонометрических функций; вычисления значений обратных тригонометрических функций положительных и отрицательных углов; преобразования выражений с аркфункциями; решения уравнений и неравенств с аркфункциями.

На втором этапе осуществлялась разработка экспериментальных материалов.

Третий этап работы состоял в проверке гипотезы исследования: выяснить, действительно ли разработанная методика преподавания темы «Обратные тригонометрические свойства и их свойства» и ее реализация способствуют повышению качества знаний и интенсивности деятельности учащихся.

Учащиеся решали контрольную работу из 6 заданий. Задания контрольной работы были выбраны в соответствии с умениями, необходимыми для успешного усвоения темы обратных тригонометрических функций.

В – 1

№1. Вычислить:

а) $\arccos 1 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

№2. Найти область определения функции:

а) $y = 2\arccos\frac{x}{3} + \arcsin\left(x^2 - 5\right)$;

б) $y = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x-5}$;

в) $y = 2 - \arcsin(x+1) - \arccos\left(x^2 - 2\right)$;

г) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3-x}} + \frac{\pi}{2}$.

№3. Решить уравнение:

1) 2arcctgx $(\frac{x-1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3}$;

2) arctg(1-3x)= $\frac{\pi}{6}$;

3) arcsin($\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x-1))=- $\frac{\pi}{6}$;

4) arcsin(2x)=-$\frac{\pi}{4}$.

№4. Решить неравенство:

1) $\arcsin 3x \le -\frac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin\left(2x^2 - x\right) < \arcsin x$;

3) $2\arccos(1-x) \ge 1$;

4) $\arccos(4x^2 - 3x) > \arccos(x-1)$.

№ 5. Найти область значений функции:

а) y = 0,5 arcctgx;

б) y = π + arccosx;

в) y = 0,5π - arctgx;

г) y = arcsin$\sqrt{x}$.

№6. Решить уравнение:

arcos^{2}x - 2arcccosx+3=0.

В – 2

№1. Вычислить:

а) $\arccos 0 + 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arcsin 1-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$;

г) $\sin(\operatorname{arcctg}(-1))$.

№2. Найти область определения функции:

а) $y=\arccos(3-x^2)+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{4}$;

б) $y=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5-x}}{3x}+\operatorname{arcctg}(x^2-16)$.

в) $y=\arccos(3-x)+5\arcsin(x^2-8)$;

г). $y=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{5+x}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{6-x}}$.

№3 Решить уравнение:

1) $\cos 2x=\frac{\pi}{3}$;

2) $\arcsin(1-3x)=\frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}(x+1))=-\frac{\pi}{6}$;

4) $\operatorname{arcctg}x-\operatorname{arctg}(-x)=-\frac{\pi}{2}$.

№ 4. Решить неравенство:

1) $\arccos(2x^2-2x-1)\le\arcsin(2x-4)$;

2) $\arcsin(2x^2-2x-3)\le\arcsin(x^2-x-3)$;

3) $\arccos(16x^2+10x+1)\le\frac{2}{3}\pi$;

4) $\arccos(2x^2+3x+1)\le\arccos(6x^2+x-1)$;

№ 5. Найти область значений функции:

а) $y = 2\arcsin x$;

б) $y = \pi + \operatorname{arcctg}x$;

в) $y = 0{,}5\pi - \arccos x$;

г) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

№6. Решить уравнение:

1)2arcsin^{2}x - 3arcsinx+4=0.

Результаты контрольной работы отображены в таблице 15.

Таблица 15 – Результаты выполнения контрольной работы

Раздел	Выполнили верно		Выполнили неверно		Не приступали к выполнению	
	Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%
№1. Задачи на вычисление	10	62,5	6	37,5	0	0
№2. Упражнения на нахождение области определения функции	9	56,25	5	31,25	2	12,5
№3. Упражнения на решение уравнений	12	75	4	25	0	0
№4. Упражнения на решение неравенств	9	56,25	7	43,75	2	12,5
№ 5. Упражнения на нахождение области значений функции	8	50	6	37,5	2	12,5
№6. Задача на решение уравнения	13	81,25	2	12,5	1	6,25

Количественный анализ контрольной работы приведен в таблице 16.

Таблица 16 – Количественный анализ контрольной работы

Оценка	Количество учеников, получивших данную отметку	
	Ко-во	%
«5»	3	18,75
«4»	7	43,75
«3»	5	31,25
«2»	1	6,25

Анализ допущенных ошибок показал, что наиболее распространенной ошибкой при написании контрольной работы является неправильное нахождение области определения функций, неверное применение нужной формулы, использование преобразований, нарушающие равносильность, приводящих к потере или появлению посторонних коней, потеря знака при переносе слагаемых из одной части равенства в другую, кроме того учащиеся допускают вычислительные ошибки, приводящие к неправильному ответу даже при правильном алгоритме решения.

Виды ошибок, допущенных учащимися при выполнении контрольной работы по каждому из шести предложенных заданий, представлены в таблице 17.

Таблица 17 – Виды ошибок учащихся

<table>
<tr><td colspan="5">№1. Упражнения на вычисление</td></tr>
<tr><td>Неверно записано условие</td><td>Допущена ошибка в вычислениях</td><td>Неверно применена формула (правило)</td><td colspan="2">Не доведено до ответа</td></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td colspan="5">№2. Упражнения на нахождение области определения функции</td></tr>
<tr><td>Неверно записано условие</td><td>Допущена ошибка в вычислениях</td><td>Неверно применена формула (правило)</td><td>Неправильно найдена область определения или вообще не найдена</td><td>Не доведено до ответа</td></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="5">№3. Упражнения на решение уравнений:</td></tr>
<tr><td>Неверно записано условие</td><td>Допущена ошибка в вычислениях</td><td>Неверно применена формула (правило)</td><td>Неправильно найдена область определения или вообще не найдена</td><td>Использование преобразований, нарушающих равносильность, что приводит к потере или появлению посторонних коней.</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="5">№4. Упражнения на решение неравенств</td></tr>
<tr><td>Неравенство не преобразовано к более простому виду</td><td>Допущена ошибка в вычислениях</td><td>Неверно применена формула (правило)</td><td colspan="2">Использование преобразований, нарушающих равносильность, что приводит к потере или появлению посторонних коней.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="5">№ 5. Упражнения на нахождение области значений функции:</td></tr>
<tr><td>Неверно записано условие</td><td>Допущена ошибка в вычислениях</td><td>Неверно применена формула (правило)</td><td>Неправильно найдена область определения или вообще не найдена</td><td>Не доведено до ответа</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="5">№6. Задача на решение уравнения</td></tr>
<tr><td>Не произведена замена переменной</td><td>Допущена ошибка в вычислениях</td><td>Неверно применена формула (правило)</td><td>Появление посторонних коней, не входящих в ОДЗ</td><td>Не доведено до ответа</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

По результатам проведенной контрольной работы стало ясно, что для того чтобы тема «Обратные тригонометрические свойства и их свойства» была освоена школьниками необходимо проводить пропедевтическую работу, которая позволит «подтянуть» уровень знаний учащихся и подготовить их к дальнейшему обучению.

Результаты проделанной работы по материалам КИМ позволили диагностировать, что 62,5% учащихся справились с заданиями, остальные 37,5% обучающихся выполняли задания частично, в том числе делая ошибки при вычислениях, что повлияло на уровень оценки. Помимо этого, сложность в решении уравнений и неравенств заключалась в незнании необходимой формулы или ее неправильного применения. С заданиями этого вида не справились два человека при решении уравнений и два человека – при решении неравенств. В целом, по результатам проведённого эксперимента можно сказать что, изучение элементов математического анализа необходимо предварять пропедевтической работой. Изучение собственно материала по теме «Обратные тригонометрические свойства и их свойства» необходимо продолжать и вне пройденной темы, то есть оттачивать навыки и умения для использования знаний по математическому анализу в дальнейшем. Третий, завершающий этап работы, показал, что разработанная методика преподавания темы «Обратные тригонометрические свойства и их свойства» и ее реализация способствуют повышению качества знаний и интенсивности деятельности учащихся.

Выводы по второй главе

В результате проведения опытно-экспериментальной работы по разработке и апробации методики обучения теме «Обратные тригонометрические функции» сделаны следующие выводы:

1) перед введением понятия «обратные тригонометрические функции» необходимо проведение пропедевтической работы, так как введение определения аркфункции – первоначальный этап по формированию правильных представлений об аркфункциях, завершение которого осуществляется в старших классах. Функциональная база должна создаваться

регулярной и систематической подготовительной работой через систему всевозможных упражнений, основанных на идее функциональной зависимости;

2) предложенные методические рекомендации по введению понятия «обратные тригонометрические функции» помогают учащимся усвоить данную тему продуктивнее, о чем свидетельствует проведенный эксперимент;

3) при подборе системы упражнений на тему «обратные тригонометрические функции» ориентир был сделан на задания профильного курса по математике и тригонометрии для 10-11 классов;

4) на контрольном этапе исследования была проанализирована методика обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства», выявление у учащихся умения решать упражнения по теме, а также умения применять различные методы и приемы решения данных, основанных на свойствах обратных тригонометрических функций. Основанием для эксперимента являлись разработанные методические рекомендации по введению понятия «обратные тригонометрические функции» и система упражнений поданной теме.

Заключение

Основная цель написания данной работы - заключается в выявлении методических особенностей обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Для реализации поставленной цели были:

- выявлены основные цели и задачи обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в углубленном курсе алгебры;

- рассмотрены различные подходы к введению понятия «Обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе;

- описаны формы и методы организации учебной деятельности, обучающихся при обучении теме «Обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе;

- представлены методические рекомендации по проведению пропедевтической работы по теме «Обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе;

- разработаны методические рекомендации по введению понятия «обратные тригонометрические функции»;

- разработана система упражнений по теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» и показана методика работы с ними;

- проанализированы результаты проведенного педагогического эксперимента.

Отметим, что после апробации рекомендаций по методике обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» отмечается повышение уровня усвоения материала.

Следовательно, поставленные цели исследования достигнуты, задачи решены.

Список используемой литературы

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. (базовый и углубленный уровни) / Алимов А.Ш., Колягин Ю.М. и др. – М.: Просвещение, 2016 – 464 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. / Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. – М.: Мнемозина, 2019 – 313 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень) / А. Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2018. – 311 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень) / А. Г. Мордкович и др. – М.: Мнемозина, 2019. – 264 с.

5. Алгебра и начала анализа 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. - 8-е изд. – М.: Просвещение, 2019. – 430 с.

6. Бабанский, Ю.К., Сластенин, В.А., Сорокин Н.А. Учебное пособие для педагогических институтов – М.: Просвещение, 1988.

7. Бескин, Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания. - М.- 1950

8. Беспалько, В.П. Слагаемые педагогической технологии. М.: Педагогика, 1989.

9. Виноградова, М.Д. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников / Виноградова М.Д, И.Б. Первин. - Москва: Просвещение, 1977. -159с.

10. Волович, М.Б. Наука обучать. / Технология преподавания математики. - М.: LINKA-PRESS, 1995. -290 с.: ил.

11. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике. М.: - 509 с.

12. Гальперин, П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Психология как объективная наука / П. Я. Гальперин. — М.: Издательство Институт практической психологии, Воронеж: НПО Модек, 1998.

13. Генкин, Г.З. Тригонометрические упражнения в основной школе/ Г. З. Генкин –Математика в школе. – 2004 – №7. – С. 33-38.

14. Далингер, В.А. Математика: обратные тригонометрические функции, Решение задач: учеб. пособие для СПО / В.А. Далингер. 2-е изд., испр. И доп. М.: Издательство Юрайт, 2017. -147 с.- Серия: Профессиональное образование.

15. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики / Под ред. М.А. Данилова и М.Н. Скаткина. -М.: Просвещение, 1975. -303 с.

16. Дорофеев, Г.В. Алгебра и начала анализа, 8-11 кл. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики / Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник, М В. Чинкина. - М.: Дрофа, 2002. - 352 с.

17. Дроздов, В.Б. Аркфункции в задачах / В.Б. Дроздов // Математика в школе. – 2010. –№ 4. – С. 31–35.

18. Дудрина, Е.В. Методические аспекты обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в общеобразовательной школе // Кошелева Н.Н., Дудрина Е.В. - Вестник магистратуры. – 2021. – № 4-3 (115). – С. 53–54.

19. Дудрина, Е.В. Различные подходы к введению понятия «Обратные тригонометрические функции» в общеобразовательной школе // Кошелева Н.Н., Дудрина Е.В. - Вестник магистратуры. – 2021. – № 4-3 (115). – С. 55–56.

20. Дьяченко, В.К. Организационная структура учебного процесса и ее развитие /В.К. Дьяченко. – М.: Просвещение, 1989. – 156 с.

21. Звавич, Л. И. Алгебра и начала анализа, 8-11 кл. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики / Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник, М В. Чинкина. - М.: Дрофа, 2002. - 352 с.

22. Иванова, Т. А. Обратные тригонометрические функции // Математика. - 2004. - № 35. - С.24-32.

23. Камаева, С. Ц. Обратные тригонометрические функции в школьном курсе алгебры и начал анализа. Пособие для учащихся и учителей математики. Махачкала, 2012.

24. Капкаева, JI.C. Лекции по теории и методике обучения математике: Частная методика: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов. В 2 ч. 4.1 / Л.С. Капкаева / Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2009. – 262 с.

25. Карпенко, Г.М. Изучение обратных тригонометрических функций в школе. https://www.mathedu.ru/text/msh_1952_5/p17/.

26. Каюмова, А.А., Тимербекова, Н.В. Обратные тригонометрические функции в школьном курсе математики //Н.И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы международного форума по математическому образованию, 18-22 октября 2017 г. (XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов на тему «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России». VII Международная научно-практическая конференция «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2017) »/отв. Ред. Л.Р. Шакирова. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – Т.2. – С. 96-101.

27. Колягин, Ю.М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю.М. Колягин // Математика в школе. – 1990. – №4. – С. 21–27.

28. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования // Официальные документы в образовании. – 2002. – №27. – С. 3–12.

29. Котов, В.В. Организация на уроках коллективной деятельности учащихся. – РязаньЮ, 2012 – 100 с.

30. Кулишер, А.Р. Начальный (пропедевтический) курс геометрии в начальной школе. Его цели и осуществление. // В сб.: Труды 1 Всероссийского съезда преподавателей математики. т.1, СПб.1911–1912, с. 376–411.

31. Лийметс, Х.Й. Понятие коллективной работы в советской дидактике //Актуальные проблемы индивидуализации обучения. -Тарту, 1970. – С. 18-21.

32. Лобанок, И.П. Пропедевтика как средство интеграции в обучении математике; учеб. -метод. пособие / И.П, Лобанок. - Могилев; МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. – 68 с.

33. Лященко, Е.И., Мазаник А.А. Методика обучения математики в IV-V классах. – Минск.: Народная асвета, 1976. – 222 с.: ил.

34. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник/ Г. К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.: ил.

35. Марасанов, А.Н. О методологическом подходе в обучении тригонометрии/ Н.И. Попов, А.Н. Марасанов // Знание и понимание. Умение. -2008. - №4. - 139-141 с.

36. Маркушевич, А.И. Об очередных задачах преподавания математики в школе. На путях обновления школьного курса математики. М.: Просвещение, 1978. - С. 29–48.

37. Махмутов, М.И. Теория и практика проблемного обучения. М.: Просвещение, 1975. - 368 с.

38. Минсадырова, Д.И. Решение уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции / Д.И. Минсадырова // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. всероссийской. науч.- практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: И.В. Косолапова; А.Ю. Скорнякова, под общ. ред. А.Ю. Скорняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2017. – Вып. 10. – С. 48.

39. Михайлова, Т.А. Пропедевтика как основа процесса обучения функциям на уроках математики в 7-11 классах: дис. канд. пед. наук: / Т.А. Михайлова - Биробиджан, 2015. - 180 с.

40. Монахов, В.М. Введение в теорию педагогических технологий / В.М. Монахов. - Волгоград: Перемена, 2006.

41. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. - № 6. - С. 32 -38.

42. Новиков, А.И. Обратные отображения – основа изучения обратных тригонометрических функций [Текст] / А. И. Новиков // Математика в школе. – 2006 – №8 – С. 27–35.

43. Новиков, А.И. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями / А. И. Новиков // Математика в школе. – 2007 – №1. – С.31–34.

44. Новоселов, С.И. Обратные тригонометрические функции. Пособие для учителей. — 4-е изд. — М.: Учпедгиз, 1956. — 125 с.

45. Новоселов, С.И. Специальный курс тригонометрии. Издательство «Высшая школа». М: -1967. –536с.

46. Обратные тригонометрические функции / В. Мирошин – М.: Чистые пруды, 2007. – 32с. – (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 4(16)).

47. Олехник, С.Н. Задачи по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям / Олехник, С.Н. и. - М.: Высшая школа, 2016. – 134 с.

48. Перельман, Я.И. Занимательная геометрия: научные статьи/ Я.И. Перельман. – Екатеринбург.: Тезис, 1994. – 288 с.

49. Покровский, В. П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб. -метод. пособие / В. П. Покровский; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.

50. Попов, Н.И., Марасанов, А. Н. О выявлении внутрипредметных связей при изучении тригонометрии // Наука и школа.2009. № 5. С. 37–39.

51. Потапов, М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции / М.К. Потапов. - М.: Высшая школа, 2014. - 586 с.

52. Родионова, И.А. Совершенствование методики преподавания обратных тригонометрических функций в старшей школе // Научный альманах. 2016. № 6. С. 381-384.

53. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

54. Скаткин, М.Н. Совершенствование процесса обучения (Проблемы и суждения). - М.: Педагогика, 1971. -205 с.

55. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. - М.: Народное образование, 1998. - 256 с.

56. Стандарт основного общего образования по математике // Математика в школе. 2004. - № 4. - С. 4 - 9.

57. Стандарт среднего (полного) общего образования по математике // Математика в школе. 2004. - № 4. - С. 9 - 16.

58. Супрун, В.П. Математика для старшеклассников: дополнительные разделы школьной программы: 275 задач для эффективной подготовки к вступительным испытаниям и олимпиадам / В. П. Супрун. - Москва: URSS, 2014. – 208 с.: ил.

59. Темербекова, А. А., Чугунова, И. В., Байгонакова, Г. А. Методика обучения математике: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 512 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

60. Толковый словарь русского языка / Под ред. Д.Н. Ушакова. — М.: Гос. ин-т "Сов. энцикл."; ОГИЗ; Гос. изд-во инос. и нац. слов., 1935-1940. (4 т.).

61. Утеева, Р.А. Групповая работа как одна из форм деятельности учащихся на уроке / Р.А. Утеева //Математика в школе. – 1985. - № 2. С. 33-35.

62. Утеева, Р.А. Формы учебной деятельности учащихся на уроке / Р.А. Утеева //Математика в школе. – 1995. - № 2. С. 57-61.

63. Фалин, Г.И. Обратные тригонометрические функции. 10-11 классы / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. - М.: Издательство» Экзамен», 2012. -221 с. (Серия «Предпрофильная и профильная подготовка»)

64. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – Новосибирск: Норматика, 2016. – 144 с. – (Кодексы. Законы. Нормы).

65. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – 6-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2017. – 61 с. – (Стандарты второго поколения).

66. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» [Электронный ресурс] / Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. – 164 с. Режим доступа: http://god2015.com/files/Prikaz_253.pdf. – Последнее обновление 15.05.2019.

67. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математики: Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений - Москва: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998 г. – 224 с.

68. Хабиб, Р.А. Организация учебно-познавательной деятельности учащихся (на примере математики): Аспект сочетания и взаимодействия коллективной и индивидуальной форм обучения / Р.А. Хабиб. – М.: Педагогика. – 1979. – 176 с.

69. Хазанкин, Р.Г. Десять заповедей учителя математики // Народное образование. - 1991. - №1.

70. Хинчин, А.Я. О воспитательном эффекте уроков математики// Педагогические статьи. М.: АПН РСФСР, 1963. -204 с.

71. Чередов, И.М. Формы учебной работы в средней школе: книга для учителя/ И.М. Чередов, - М.: Просвещение, 1988. – 160 с.

72. Черняк, А. А. Математика в решениях задач из сборника М. И. Сканави. Справ. Пособие / Черняк, Ж. А. – Изд-е 7-е, стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 400 с.

73. Шестаков, С.А. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции / С.А. Шестаков, М.Л. Галицкий // Первое сентября: еженед. учеб. -метод. приложение к газете «Математика». - 2000. - №14. - С. 19–23.

74. Шихалиев, Х.Ш. К методике введения понятия «тригонометрическая функция» в школе / Х.Ш. Шихалиев // Математика в школе. - 2012. - №9. – С. 47–51.

75. Эрдниев, П.М., Эрдниев Б.П. «Укрупнение дидактических единиц как технология обучения» (1-2 часть), М., 1992.

76. Ященко, И.В. Математика: 30 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, А. С. Трепалин. - Москва: АСТ: Астрель, 2014.

77. Denbel, D.G. Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum/ D.G. Denbel // Journal of Education and Practice, 2015. - № 1. – P. 77 – 81.

78. Baron, Lois M. Do the math! Decorate with Geometry // Math Horizons. 2018. V. 26. P. 14 – 15.

79. Lisa L. Clement. What do students really know about functions [Электронный ресурс]. 2001. PP. 745 – 748. URL:

80. Kleiner, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey / I. Kleiner// The College Mathematics Journal, 1989. - № 4. – P. 282 – 300.

81. Russel B., Problem Solving in Mathematics. [Электронный ресурс] // ThoughtCo. -2018.

Приложение А

План – конспект урока по алгебре, 10 класс

Тема урока: “Обратные тригонометрические функции”.

Тип урока: получение новых знаний с элементами практической работы с использованием ИКТ.

Форма обучения: классно-урочная.

Форма деятельности: фронтальная и индивидуальная.

Цель урока: знакомство с понятиями арксинус, арккосинус, арктангенс, обеспечить их применение при решении вариантов ЕГЭ; формирование знаний и умений в нахождении обратных тригонометрических функций; формирование навыков использования ИКТ.

Оборудование урока: компьютер, проектор, компьютер, презентация

а) мультимедийный проектор, компьютер, Презентация темы «**Обратные тригонометрические функции”** с планом урока, заданиями для устной работы;

б) Дидактические материалы;

в) Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. (базовый и углубленный уровни) / Алимов А.Ш., Колягин Ю.М. и др. – М.: Просвещение, 2016 – 464 с.

Структура урока:

1. Оргмомент – 1 мин. Фронтальная работа.
2. Повторение теоретического материала - 5 мин. Фронтальный опрос.
3. Изучение нового материала – 15 мин. Групповая форма.
4. Закрепление материала – 18 мин.
5. Постановка домашнего задания – 2 мин.
6. Подведение итогов урока – 5 мин.

Продолжение Приложения А

Х О Д У Р О К А:

1. Организационный момент 1 мин.

Тема урока. Цели урока. Что понадобиться для урока.

Учитель называет тему урока, цели, что необходимо иметь для успешной работы на уроке.

2. Повторение теоретического материала в устной форме в виде беседы с учащимися – 5 мин.

вопрос: что такое функция?

Ответ: Функция - это соответствие между элементами двух множеств, такое что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Вопрос: какая функция называется обратимой?

Ответ: Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют обратимой, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества X (значения аргумента соответствуют разные значения функции)

Вопрос: Что такое обратная функция?

Ответ: если обратимая функция $y = f(x)$, задана на множестве X и $E(f)=Y$ и ставится в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x)=y$ и полученная функция определена на Y, а X – область значений этой функции, то такую функцию называют обратной.

Для какой функции существует обратная? - Для монотонной.

3. Изучение нового материала – 15 мин. Групповая форма.

График какой функции изображен на рисунке А.1?

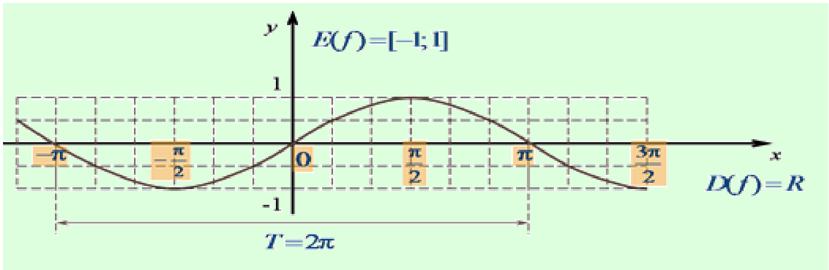


Рисунок А.1 – График синуса

Продолжение Приложения А

Изображенный график функций y = sinx.

Вспомним основные свойства этой функции:

1) Область определения D(x) = R;

2) Область значений E(y) = [-1;1];

3) Функция нечетная sinx = sin(-x).

4) Функция не является монотонной на своей области определения;

5) Функция периодична с периодом T = 2π.

Так как y = sinx – монотонна на всей числовой оси, то она имеет обратную.

Тригонометрические уравнения имеют бесконечное множество решений, так как область определения прямой и синусоиды вся числовая прямая. Для того чтоб записать все решения тригонометрического уравнения рассматривают обратную тригонометрическую функцию и вводят понятие арксинуса для одного из решений этого уравнения.

Обратный переход от значения функции к соответствующему значению аргумента позволяет по исходной функции y = f(x) построить некоторую новую функцию, называемую обратной к исходной функции. Для функции y = sinx на интервале $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, то на этом отрезке существует обратная функция y = arcsinx, график которой симметричен графику y = sin x на отрезке [-1;1] относительно прямой y = x.

Определение 1. Арксинусом числа называется такое число, синус которого равен a. Обозначается arcsina = x, если sinx = a, имеет область определения -1 $\leq$ x $\leq$ 1 и множество значений $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Арксинус на единичной окружности можно увидеть на рисунке А.2.

Рассмотрим свойства функции y = arcsinx и построим ее график (рисунок А.3).

Записи y = arcsinx и x = sin y, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ эквивалентны. Подставив в равенство x = siny вместо y выражения arcsinx, получим: x = sin (arcsinx). Следовательно, для любого x∈ [-1;1] имеем: sin (arcsinx) = x, $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsinx} \leq \frac{\pi}{2}$.

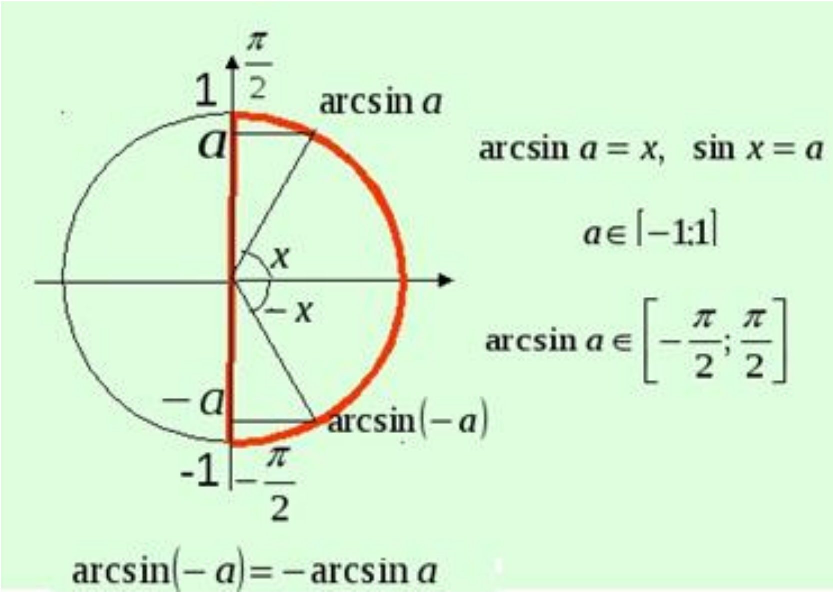


Рисунок А.2 – Арксинус на единичной окружности

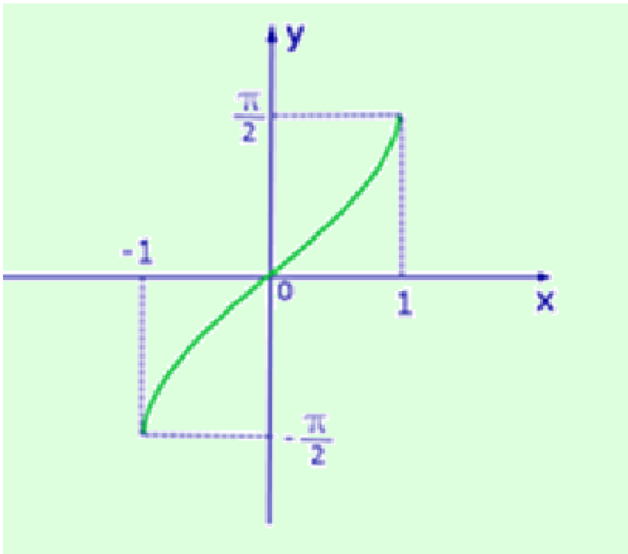


Рисунок А.3 - График функции y = arcsinx

Основные свойства функции y = arcsinx приведены в таблице А.1.

Продолжение Приложения А

Таблица А.1 – Свойства функции y = arcsinx

Свойства	Функции y = arcsinx
E(f)	$-1 \le x \le 1$
D(f)	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
Чётность	Нечётная, т.к. arcsin(-x)= - arcsinx
Промежутки монотонности	Возрастающая

Решим пример: arcsin 1.

Пусть arcsin1=t. Тогда sin t = 1 и t$\in[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Значит, t $=\frac{\pi}{2}$, так как sin $\frac{\pi}{2}$ = 1 и $\frac{\pi}{2} \in[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Итак, arcsin1 $= \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим свойства функции y = arccosx и построим ее график.

Функция y = cosx (рисунок А.4) монотонна и принимает значения от -1 до 1 на каждом из отрезков: [-π; 0], [0; π], [π; 2π] и т. д. Значит, на каждом из указанных промежутков функция y = cosx имеет обратную функцию, и x∈[0; π].

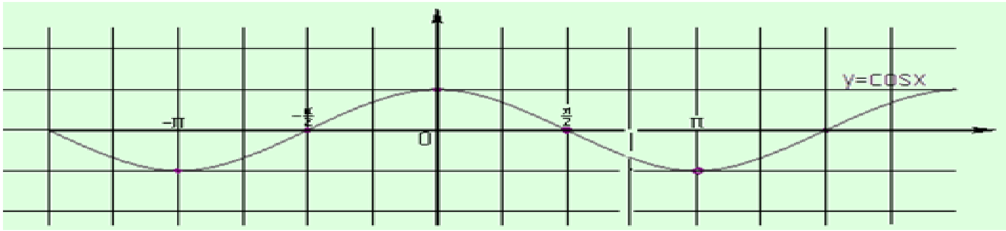


Рисунок А.4 – График функции y = cosx

Определение 2. Арккосинусом числа называется такое число, косинус которого равен a. Обозначается arccosa = x, если cosx = a, имеет область определения $-1 \le x \le 1$ и множество значений $0 \le y \le \pi$. (таблица А.2).

Таблица А.2 – Свойства функции y = arccosx

Свойства	Функции y = arccosx
E(f)	-1≤ x≤ 1
D(f)	$0 \le y \le \pi$
Чётность	Ни чётная, ни нечётная
Промежутки монотонности	Убывающая

Рассмотрим функцию y = arccos x на единичной окружности на рисунке А.5 и посмотрим, какие значения может принимать функция на единичной окружности. Построим график функцию y = arccos x (рисунок А.6).

Записи y = arccosx и x = cos y, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ эквивалентны. Подставив в равенство x = cos y вместо y выражения arccosx, получим: x = cos (arccosx). Следовательно, для любого x∈ [-1;1] имеем:

$$\cos(\arccos x)=x,\ -\frac{\pi}{2} \le \arccos x \le \frac{\pi}{2}.$$

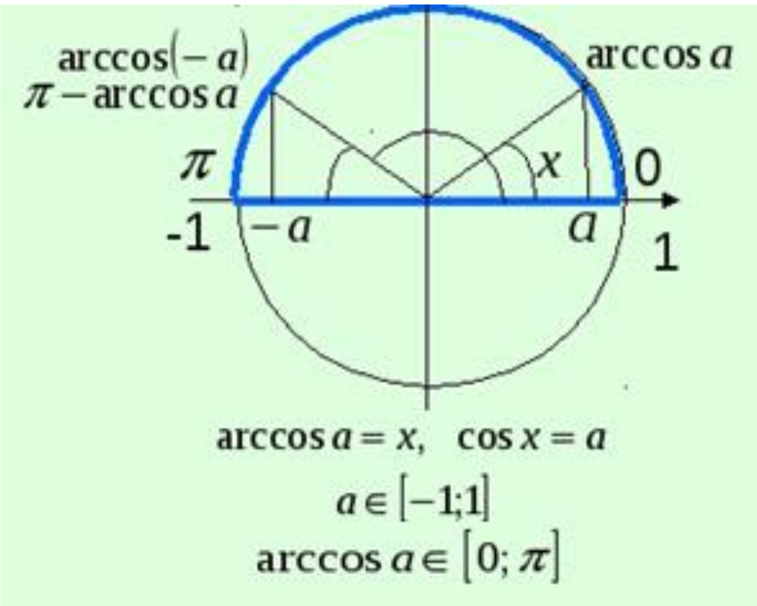


Рисунок А.5 - Арккосинус на единичной окружности

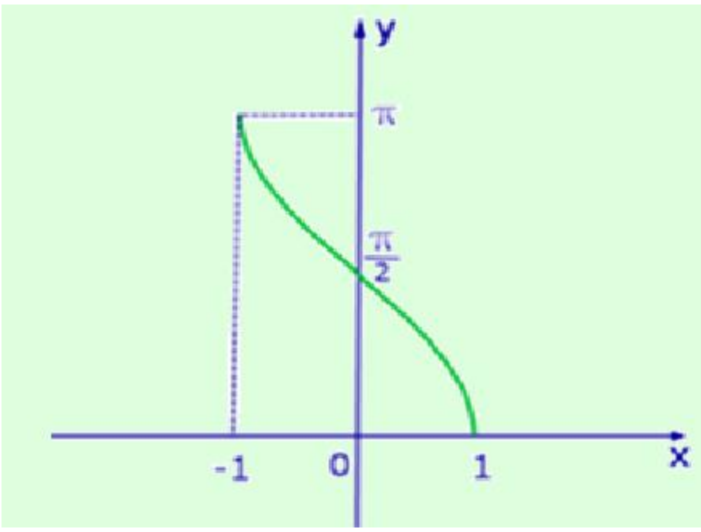


Рисунок А.6 - График функции y = arccosx

Пусть arccos1=t. Тогда cos t = 1 и t∈[0;π]. Значит, t =0, так как cos0 = 1 и 0 ∈[0;π]. Итак, arccos1=0.

Рассмотрим функцию y = arctgx и представим ее на единичной окружности (рисунок А.7).

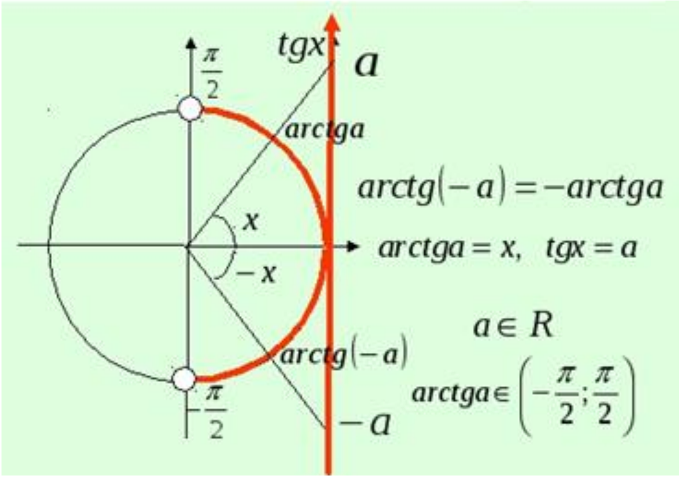


Рисунок А.7 – Линия арктангенса

Определение 3. Арктангенсом числа называется такое число, тангенс которого равен a. Обозначается arctga = x, если tgx = a и имеет область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. (рисунок А.8).

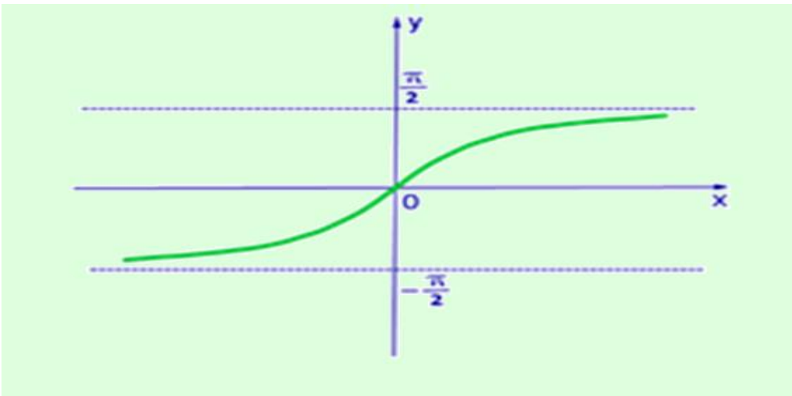


Рисунок А.8 - График функции y = arctgx

Функция y = arctgx монотонна на интервалах: $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$; $(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$; и т.д. Значит, функция y = tgx имеет обратную, т.е. график y = arctgx можно получить симметрией относительно оси y = x (рисунок А.9)

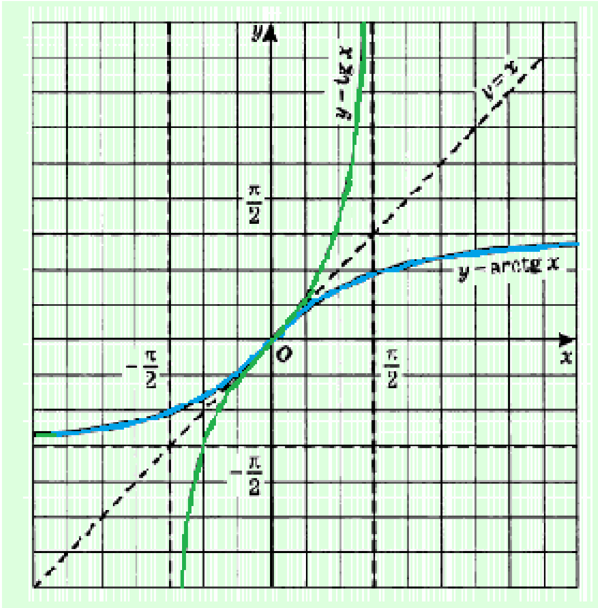


Рисунок А.9 – Графики тангенса и арктангенса

Свойства функции y = arctgx приведены в таблице А.3.

Таблица А.3 – Свойства функции y = arctgx

Свойства	Y = arctgx
E(f)	R
D(f)	$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$
Чётность	Нечётная
Промежутки монотонности	Возрастающая
Непрерывность	Непрерывна

Записи y = arctgx и x = tgy, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ эквивалентны. Подставив в равенство x = tgy вместо y выражения arctgx, получим: x = tg(arctgx). Следовательно, для любого x (-1;1) имеем:

$$tg(arctgx) = x, -\frac{\pi}{2} \le arctgx \le \frac{\pi}{2}.$$

Решим пример: arctg1.

Пусть arctg 1=t. Тогда tg t = $\frac{1}{2}$ и t$\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Значит, t = $\frac{\pi}{4}$, так как tg $\frac{\pi}{4}$ =1 и $\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Итак, arctg 1 = $\frac{\pi}{4}$.

Определение 4. Арккотангенсом числа называется такое число, котангенс которого равен a. Обозначается arcctga = x, если ctgx = a и имеет область определения $\infty < x < +\infty$ и множество значений $0 < y < \pi$. График функции y = arcctgx приведен на рисунке А.10, а свойства – в таблице А.4.

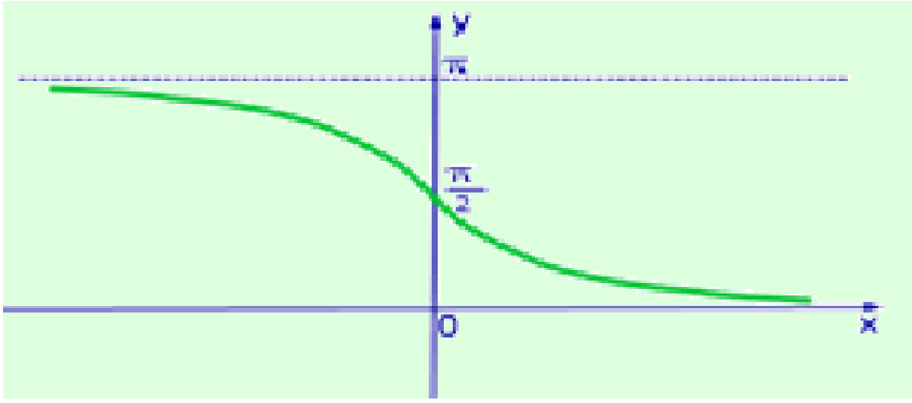


Рисунок А.10 - График функции y = arcctgx

Таблица А.4 – Свойства функции y = arcctgx

Свойства	y = arcctgx
E(f)	R
D(f)	$(0; \pi)$
Чётность	Нечётная
Промежутки монотонности	Убывающая
Непрерывность	Непрерывна

Записи y = arcctgx и x = ctgy, $0 \leq y \leq \pi$ эквивалентны. Подставив в равенство x = ctgy вместо y выражения arcctgx, получим: x= ctg(arcctgx). Следовательно, для любого x имеем:

$$\text{ctg(arcctgx)=x},\ 0 \leq \text{arcctgx} \leq \pi.$$

Пример: найти arcctg1.

Пусть arcctg0 = t. Тогда ctgt = 0 и t∈(0; π). Значит, t = $\frac{\pi}{2}$, так как ctg$\frac{\pi}{2}$ = 0 и 0 ∈(0; π)). Итак, arcctg0 = $\frac{\pi}{2}$.

Функции y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx называются обратными тригонометрическими функциями.

4.Закрепление материала – 18 мин.

С помощью таблицы (рисунок А.11) вычислить: а) arcsin$\frac{1}{2}$; б) arcsin$(-\frac{\sqrt{2}}{2})$:

α^{0}	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.*
$ctg\alpha$	не сущ.*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не сущ.*	0

Рисунок А.11 – Таблица значений тригонометрических функций

Решение:

а) так как $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) так как $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$.

Пусть дано задание: найти arcsin 0,1.

В этом задании перед учащимися возникает проблема, как найти значения обратных тригонометрических функций, используя подручные средства (не табличных).

В науке и технике не всегда значения углов можно записать табличными величинами. мы знаем чему равен $\arcsin\frac{1}{2}$; arccos 1 и т.д. А если нам даны выражения такие как arcsin 0,1. Можно вычислить эти значения, не прибегая к сложным вычислениям? тем более, что многие формулы нам могут быть неизвестны? На помощь нам приходит современная техника. Самым распространенным устройством для вычислений и расчетов является калькулятор. Многие из вас имеют его дома. калькулятор есть почти во всех мобильных телефонах. А мы попробуем использовать калькулятор в компьютере. Если на компьютере по какой-либо причине нет калькулятора, то его всегда можно скачать из Интернета. Самый распространённый и удобный калькулятор – Инженерный – рисунок А.12.

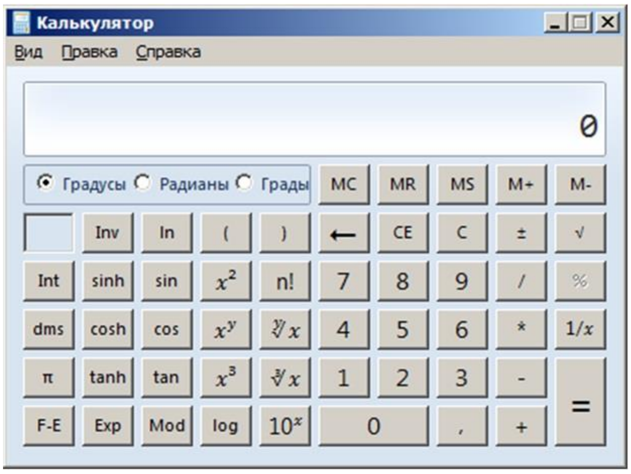


Рисунок А.12 – Инженерный калькулятор

Найдем значение sin 30°. При этом смотрим, чтобы было включено поле «Градусы». Для этого вводим в поле значений число 30 и нажимаем клавишу sin (рисунок А.13).

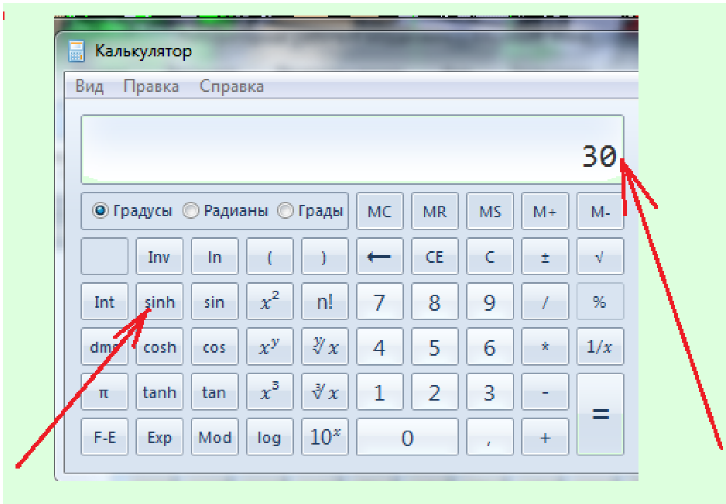


Рисунок А.13 – Нахождение на калькуляторе sin 30°

sin 30° = 0,5. Получили знакомое нам значение.

Попробуем найти sin 45°.

Для значения sin 45° калькулятор выдал значение 0,70710678118654752440084436210485, т.е. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,7071 (рисунок А.14).

cos 30°=0,86602540378443864676372317075294, т.е. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,866.

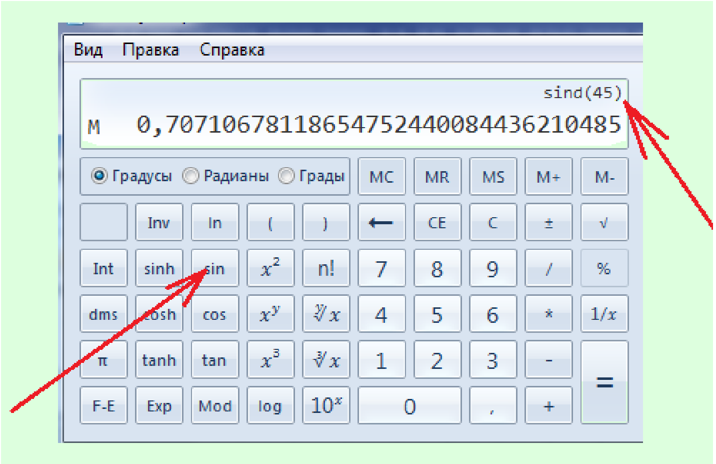


Рисунок А.14 – Значение sin45°

Для нахождения выражения arccos 0,5 на калькуляторе нужно нажать дополнительно кнопку Inv (рисунок А.15): ввести в поле 0,5, нажать кнопку Inv и кнопку $\cos^{-1}$ и получаем значение 60, что соответствует $\frac{\pi}{3} = 60°$.

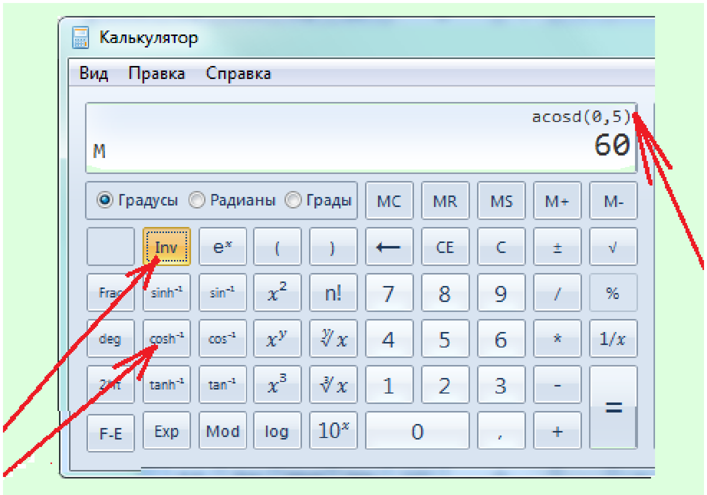


Рисунок А.15 – Нахождение на калькуляторе arccos 0,5

Кнопка $\cos^{-1}$ показывает нам, что мы находим функцию, обратную cos, т. е. арккосинус.

Находим значение arcsin 0,1≈ 84,26083=84°15´39´´.

Чтобы перевести получившееся число 84,26083 в привычную градусную меру, необходимо дробную часть умножить на 60:

Продолжение Приложения А

$$0{,}26083 \cdot 60 = 15{,}6478.$$

Проделываем эту операцию еще раз

$0{,}6478 \cdot 60 = 39$ и получаем окончательно

$$\arcsin 0{,}1 \approx 84{,}26083 = 84°15'39''.$$

(на столах дидактический материал)

Вычислить с помощью МК:

а) arcsin(0,7825);	51°29`14``
б) arccos 0,1524;	8°45`58``
в) cos (5 arccos 0,7321);	-0,8222
г) sin (4 arcsin0,0237 + arccos 0,67)	0,758

Функция y = arccosx.

5.Постановка домашнего задания – 2 мин.

1) Выполнить №750, 753 (3, 4) учебника (с. 226);

2) Найти значение выражения:

1) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) + \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2) $10\cos(\mathrm{arctg}(\sqrt{3}))$.

6. Подведение итогов урока – 5 мин.

Организация рефлексии.

Сегодня мы использовали компьютер для вычисления не табличных значений арксинуса, арккосинуса, арктангенса.

Выполните задание: закончите предложенные ниже предложения. По желанию выбрать себе фразу (несколько фраз), закончить ее (их) самостоятельно, озвучить:

Сегодня я узнал…..

Было интересно…..

Было трудно….

Продолжение Приложения А

Я выполнил задания….

Я понял…..

Теперь я могу….

Я приобрел….

У меня получилось…

Мне захотелось….

Рефлексия **по содержанию учебного материала** - возвращение к вопросам по теме, которые ставили в начале урока:

Над какой темой мы сегодня работали?

Какую цель перед собой поставили?

Каким способом ее достигли?

Повторите этапы исследования обратных тригонометрических функций.

Урок окончен! Спасибо за работу!