МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Задачи на приложения производной как средство реализации межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

Студент Е.А. Блаженских
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, Н.Н. Кошелева
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2021

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования обусловлена тем, что процесс активной модернизации, который происходит на сегодняшний день в рамках апробации и внедрения Федерального государственного образовательного стандарта (полного) общего образования (ФГОС), привел к тому, что на первое место были выдвинуты требования к результатам обучения, которые являются в системе образования наиболее значимыми. Исходя из этого, в качестве цели современного образования в общеобразовательной школе выступает создание таких педагогических условий, в которых обучающийся сможет наиболее эффективно реализоваться в образовательном процессе, и которые подготовят его к тому, чтобы он смог стать субъектом осуществления продуктивной самостоятельной деятельности во все жизненные периоды своего пути. Осуществление перехода к новому ФГОС предполагает, что должна быть внедрена качественно новая модель процесса обучения [60].

В образовательном процессе при изучении математики в качестве одной из основных содержательно-методических линий школьного курса выступает изучение математических задач на приложения производной. Основная цель при изучении данного материала состоит в том, что должна проводиться работа по развитию формальнооперативных умений учащихся до такого уровня, чтобы они могли использовать данные знания в процессе решения задач по математике, а также по смежным предметам. Однако, основной курс математики в школе не всегда справляется с данной задачей, и в этом случае повысить уровень эффективности обучения по конкретному предмету или теме позволяет внедрение элективных курсов.

Одним из основных направлений в курсе математики в школе является изучения производной.

На данный момент можно выделить несколько групп научных работ, посвященных проблеме методики обучения решению задач по рассматриваемой теме: изучение производной в средней школе как одного из методов решения широкого круга практических задач в алгебре и смежных дисциплинах рассмотрено в учебном пособии Л.М. Фридмана [61]; исследование способностей к усвоению материала в условиях профильной дифференциации (Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, 1998) [15]; обучение началам анализа в старших классах школы с использованием различных компьютерных программ (В.Н. Литвиненко, 1991) [33]; изучение проблематики подготовки уровня старшеклассников к знакомству и усваиванию тем, рассматриваемых в началах анализа (А. Хинчин, 1977) [62].

Ожидаемый результат деятельности может быть достигнут только при планировании и выполнении правильной последовательности совершаемых манипуляций. Именно поэтому формирование задач на приложения производной на этапе школьного обучения является актуальным, т.к. в процессе выявления и построения алгоритма деятельности происходит формирование таких личностных качеств человека, которые определяют точность и последовательность его деятельности.

Актуальность и научная значимость исследования обусловлена:

– требованиями ФГОС основного общего образования к реализации деятельностного подхода в обучении математике;

– важностью формирования системы задач на приложения производной на базе школьного образования;

– отсутствием в существующих на данный момент учебниках систематизированной системы задач, включающей в себя профильные задачи, а также задачи олимпиадного уровня;

– недостаточной разработанностью методик по использованию задач на приложения производной как средства реализации метапредметных и межпредметных связей математики с другими смежными учебными предметами общеобразовательной школы.

Следовательно, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между необходимостью научно-обоснованного изучения использования задач на приложения производной как средства реализации межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы и недостаточной разработанностью методических основ использования данного типа задач; изучением большого объёма теоретического материала, связанного с обучением задач на приложения производной на углубленном уровне и недостаточной разработанностью системы задач по данной теме и оценки эффективности этих задач для реализации межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования**: выявление методических особенностей использования задач на приложения производной как средства реализации межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: задачи на приложения производной как средство реализации межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования: заключается в выявлении методических особенностей обучения решению задач на приложения производной в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования состоит в том, что разработанная система упражнений, учитывающая методические особенности обучения решению задач на приложения производной в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы, будет способствовать повышению качества усвоения данной темы и реализации межпредметных связей.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования**:

1. Проанализировать основные цели и задачи обучения решению задач на приложения производной в школьном курсе математики.

2. Исследовать реализацию межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы на основе задач на приложения производной.

3. Описать методическую схему обучения решению задач на приложения производной.

4. Проанализировать пропедевтику изучения приложений производной в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

5. Определить основные формы, методы и средства обучения решению задач на приложения производной.

6. Разработать систему задач на приложения производной.

7. Провести педагогический эксперимент.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Ю.М. Колягина [28], Г.И. Саранцева [56], Т.А. Ивановой [25] и других исследователей.

Базовыми для настоящего исследования явились также работы О.Б. Епишевой [23], А.М. Маскаевой [39], А.Г. Мордковича [41].

Методы исследования: в рамках организации исследования при написании магистерской диссертации использовался теоретический анализ психолого-педагогической, учебно-методической и научной литературы; эмпирические методы: наблюдение и обобщение опыта работы педагогов, констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента. Опытно-экспериментальной базой исследования явилась кафедра «Высшая математика и математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет».

Основные этапы исследования:

1 этап (2018/2019 уч.г.): анализ основных теоретических исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативно-правовой документации (стандартов, образовательных программ, рабочих программ), анализ опыта работы в школе по проблеме диссертационного исследования.

2 этап (2018/2019 уч.г.): определение методических основ исследования по теме диссертации; выделение схемы обучения решению задач на приложения производной.

3 этап (2019/2020 уч.г.): изучение приложений производной в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

4 этап (2019/2020 уч.г.): оформление диссертации; корректировка ранее представленного материала; уточнение аппарата диссертационного исследования; формулировка выводов по результатам диссертационного исследования.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГАПОУ ТО "Ишимский многопрофильный техникум" отделение с. Казанское.

Научная новизна исследования: заключается в том, что в нём разработана методическая схема обучения решению задач на приложения производной, а также система задач на приложения производной в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования определяется тем, что в диссертации:

– выявлены основные цели и задачи обучения решению задач на приложения производной;

– представлена реализация межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы на основе задач на приложения производной;

– изучены приложения производной в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования заключается в разработке методической схемы обучения решению задач на приложения производной и системы задач на приложения производной.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, адекватных его целям, предмету и задачам; комплексным анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в разработке методической схемы обучения решению задач на приложения производной, системы задач на приложения производной и в описании педагогического эксперимента.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования в процессе личного участия автора в организации экспериментальной работы.

По теме диссертационной работы были опубликованы 2 статьи [12, 13].

На защиту выносятся:

1. Методическая схема обучения решению задач на приложения производной.

2. Система задач на приложения производной.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 13 рисунков, 5 таблиц, список используемой литературы (68 источников). Основной текст работы изложен на 70 страницах.

Глава 1 Методические основы обучения решению задач на приложения производной

1.1 Основные цели и задачи обучения решению задач на приложения производной в школьном курсе математики

В Федеральном государственном стандарте среднего общего образования в требованиях к предметным результатам отмечается, что математика на старшей ступени обучения должна способствовать формированию «представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, с помощью которых можно описывать и изучать разные процессы и явления» [60], а также «представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использования полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей» [52].

В сборнике рабочих программ по алгебре и началам математического анализа Бурмистровой Т.А. [2, с. 13] указывается на то, что элементы математического анализа выступают в качестве моделей реальных ситуаций и позволяют продемонстрировать роль математического анализа в изучении других предметов.

Среди изучаемых учащимися элементов одним из центральным является производная и в дальнейшем ее приложение.

В результате изучения элементов математического анализа учащийся на базовом уровне *научится*:

– «оперировать понятиями: производная функции в точке, касательная к графику функции, производная функции;

– определять значение производной функции в точке по изображению касательной к графику, проведённой в этой точке;

– вычислять производные одночлена, многочлена, квадратного корня, производную суммы функций, элементарных функций и их комбинаций, используя справочные материалы;

– решать несложные задачи на применение связи между промежутками монотонности и точками экстремума функции, с одной стороны, и промежутками знакопостоянства и нулями производной этой функции – с другой;

– исследовать функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простых рациональных функций с использованием аппарата математического анализа» [52];

получит возможность:

– «сравнивать скорости возрастания (роста, повышения, увеличения и т. п.) или скорости убывания (падения, снижения, уменьшения и т. п.) величин в реальных процессах, пользуясь графиками;

– соотносить графики реальных процессов и зависимостей с их описаниями, включающими характеристики скорости изменения (быстрый рост, плавное понижение и т. п.);

– использовать графики реальных процессов для решения несложных прикладных задач, в том числе определяя по графику скорость хода процесса;

– решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик реальных процессов, нахождением наибольших и наименьших значений, скорости и ускорения и т. п., в дальнейшем интерпретировать полученные результаты» [52].

В результате изучения элементов математического анализа учащийся на углубленном уровне *научится:*

– «владеть понятиями: бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, бесконечно большие числовые последовательности и бесконечно малые числовые последовательности, производная функции в точке, производная функции, касательная к графику функции, первообразная, определённый интеграл;

– применять для решения задач теорию пределов;

– сравнивать бесконечно большие и бесконечно малые последовательности;

– вычислять производные элементарных функций и их комбинаций;

– исследовать функции на монотонность и экстремумы;

– строить графики и применять их к решению задач, в том числе с параметром;

– использовать понятие касательной к графику функции при решении задач;

– применять теорему Ньютона-Лейбница и её следствия для решения задач» [43];

– «свободно владеть стандартным аппаратом математического анализа для вычисления производных функции одной переменной;

– свободно применять аппарат математического анализа для исследования функций и построения графиков, в том числе исследования на выпуклость;

– оперировать понятием первообразной для решения задач;

– оперировать сведениями об интеграле Ньютона-Лейбница и его простейших применениях;

– оперировать в стандартных ситуациях производными высших порядков;

– применять при решении задач свойства непрерывных функций;

– применять при решении задач теоремы Вейерштрасса;

– выполнять приближённые вычисления (методы решения уравнений, вычисления определённого интеграла);

– применять приложение производной и определённого интеграла к решению задач естествознания;

– владеть понятиями: вторая производная, выпуклость графика функции; уметь исследовать функцию на выпуклость» [43];

получит возможность:

– «решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов, интерпретировать полученные результаты» [2, с. 13-21].

В методических рекомендациях по алгебре и началам математического анализа Фёдоровой Н.Е., Ткачёвой М.В. отмечается, что главной целью изучения начал математического анализа является демонстрация учащимся «целесообразности изучения производной, так как это необходимо при решении практических задач, связанных с исследованием физических процессов, свойств функций и построении их графиков» [59, с. 29].

В методических рекомендациях к учебному пособию «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс» под редакцией Никольского С.М., Потопова М.К., Решетникова Н.Н., Шевкина А.В. указываются, что цели изучения темы «Применение производной» сводятся к знакомству учащихся с аппаратом исследования функций, приближенных вычислений [4].

В статье Маскаевой А.М. обосновывается изучение учащимися применение производной, в частности, одной из задач является необходимость формирования у них учебно-познавательных и социальных компетенций, способствующих в дальнейшем развитию профессиональных компетенций [39].

В статье Кузнецова С.А. «отмечается что развитие математики связано с огромным расширением поля ее приложений и использования математических методов.

Поэтому, целью изучения приложения производной является исследование движения, непрерывно изменяющихся состояний и процессов через модели – функции» [30].

Попов Н.И., Шустова Е.Н. отмечают необходимость изучения применения производной, так как изучение функций, их свойств и различных приложений для решения прикладных задач являются важной составляющей не только математического образования школьников в целом, но и личностного развития обучаемых [50].

Таким образом, целями обучения учащихся решению задач на приложения производной являются:

– расширение области приложений школьной математики;

– демонстрация прикладной направленности учебного материала, с указанием наиболее эффективных методов приложения производной;

– личностное развитие учащихся;

– расширение функциональной содержательной линии.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

– сформировать у учащихся шаблоны решений стандартных задач на применение производной, а также предоставление учащимся возможности трансформировать шаблоны в не стандартную ситуацию;

– сориентировать учащихся на развитие общего умения решать задачи на применение производной;

– научить учащихся переводить реальные предметные ситуации в математические модели, использующие понятие «производная».

Под обучением решению задач на применение производной будем рассматривать процедуры взаимодействия учителя и учащихся через проектирование содержания и выбор соответствующего методического инструментария, обеспечивающих овладение учащимися компонентами умения решать задачи определенного вида.

1.2 Реализация межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы на основе задач на приложения производной

Для некоторых школьников присуща фрагментарность мировоззрения. Они считают, что школьные предметы не имеют общей системы, разобщены на первый взгляд. Одной из причин такого мнения является абстрактность многих математический понятий. Таким образом, современный школьник сталкивается не только с проблемой «что это», но и «зачем это». Для разрешения таких проблем исследователи рассматривают возможность установления и дальнейшую реализацию межпредметных связей.

В исследовании Ардрюхиной М.И. акцентируется внимание на тот факт, что «математика дает учащимся не только систему предметных знаний и умений, но и является средством необходимым в повседневной жизни и трудовой деятельности, а также важным для изучения смежных дисциплин» [7, с. 50-56].

Начиная с 60-70-х годов в исследованиях ученых Коменского Я.А., Андреевой В.И., Гурьевой А.И., Петровой А.В., Максимовой В.Н., Черкес-Заде Н.М., Зверева И.Д., Федоровой В.Н., Усовой А.В., Грачевой А.П., Федорец Г.Ф., Вершинина В.И., Макаровой Л.Л., Темербековой А.А., Максимовой В.Н., Бутовой В.Н. и других, исследуются различные аспекты межпредметных связей в области педагогических наук [54].

Проведенный анализ исследований показал, что не существует общепринятого определения межпредметных связей (МПС). Действительно, межпредметные связи это:

– объединение различных систем знаний, их обобщение при изучении явления или процесса;

– способ осуществления принципов обучения;

– установление и усвоение связей между структурными элементами учебного материала различных предметов;

– «способ раскрытия в содержании обучения современных тенденций развития науки, возникающих под влиянием процессов интеграции» [29];

– фактор формирования содержания и структуры учебного предмета;

– условия и средства комплексного подхода к воспитанию и обучению, в частности при совершенствовании методики обучения отдельным предметам;

– фактор-регулятор для установления и постоянного укрепления связей между предметами и науками [36].

Таким образом, межпредметные связи можно рассматривать с педагогической, дидактической или методической стороны.

Этот факт даёт возможность выделить классификации данного вида связей по различным основаниям. Некоторые из них представлены на рисунке 1.

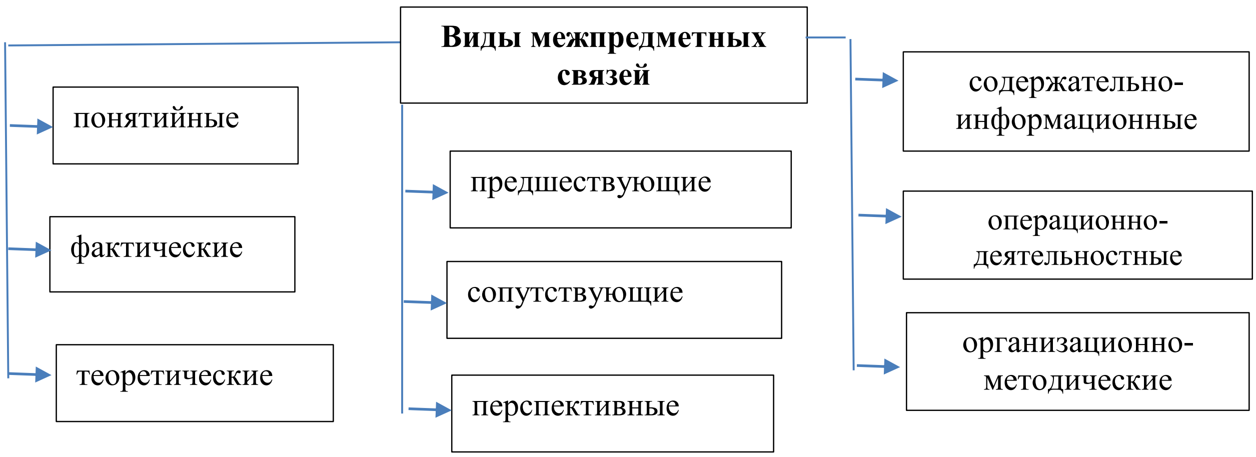

Рисунок 1 – Виды межпредметных связей

Отметим, что в рамках данного исследования мы не будем придерживаться конкретной классификации межпредметных связей, но будем учитывать тот факт, что они выступают как фактор формирования содержания и структуры учебной дисциплины «Алгебра и начала анализа».

«Алгебра и начала анализа» является частью математического анализа, которая отличается от данной науки как объемом и методами изложения, так и конкретной прикладной направленностью изучаемых вопросов. Поэтому есть определенная сложность в адаптации учебного материала, в сторону «упрощения», без потери научной строгости, а также демонстрацией применения изученных понятий в практической деятельности человека, доступных для понимания учащихся.

Для выявления межпредметных связей, которые возникают между математикой и другой смежной дисциплиной, необходимо назвать основные компоненты:

– «знания и умения, которые школьник получает в процессе изучения математики, в частности темы «Приложения производной»;

– знания и умения, которые школьник получает при освоении другой (смежной) дисциплины;

– умение применять полученные знания в процессе обучения» [37].

При выявлении «знаний и умений, получаемых школьником в процессе изучения темы «Применение производной» проведём сравнительный анализ учебных пособий (таблица 1) [31].

Таблица 1 – Сравнительный анализ рассмотрения темы «Применение производной» в учебных пособиях

	Авторские коллективы учебных пособий для школы	
	С.М. Никольский, МК. Потопов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин[4].	А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Н.Я. Виленкин[5].
Место в программе.	Первое полугодие 11 класса.	Второе полугодие 10 класса.

Продолжение таблицы 1

Математические понятия, используемые для введения понятия производной[4].	Предел функции, односторонние пределы, приращение функции и приращение аргумента, непрерывность.	Числовая последовательность, предел последовательности, геометрическая прогрессия, предел функции; приращение функции и приращение аргумента; касательная к произвольной плоской кривой.
Математические правила и алгоритмы используемые для введения понятия производной.	Свойства пределов функции. Алгоритмы вычисления пределов не сформулированы в явном виде.	«Способы задания и свойства числовой последовательности; свойства сходящихся последовательностей. Правила для вычисления пределов числовой последовательности, функции» [64].
Методические особенности определения «производной» функции.	«Представляются решения трех различных задач (о скорости движения, касательной к графику функции, средней силе тока)» [64]. Тем самым обращается внимание школьников на явное проявление межпредметных связей (внутрипредметная с геометрией и межпредметная с механикой, теорией электричества). Кроме того, учащийся подводится к мысли, о существовании общего метода решения таких задач.	Представляются решения двух различных задач (о скорости движения и касательной к графику функции). Тем самым обращается внимание школьников на явное проявление межпредметных связей геометрией и межпредметная связь с механикой). Кроме того, учащиеся подводятся к идее о существовании общей математической модели таких задач.
Математические понятия, полученные после введения понятия производной.	Дифференциал; максимум и минимум функции; локальный экстремум.	Дифференцируемая функция; стационарные и критические точки; точки перегиба.
Математическое приложение производной, полученные после введения понятия производной.	«Производная суммы, произведения, разности и частного; производные элементарных функций и сложной функции» [64].	«Алгоритм нахождения производной (даётся в явном виде); формулы и правила дифференцирования» [64].
Методические особенности геометрического смысла производной[38].	После определения производной сообщается её геометрический смысл. Далее рассматривается «применение производной для составления уравнения касательной. Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции в явном виде не сформулирован,	«Именно с геометрического смысла и начинается эта тема. Представлены графики и полное описание. Сформулирован алгоритм составления уравнения касательной к графику функции в форме задач с решениями [64].

Продолжение таблицы 1

	но предъявляется школьнику в форме трех задач с решениями [64].	
«Методические особенности изучения применения производной при исследовании функции».	Показано в решениях задач и формулировках теорем применение производной к нахождению возрастания и убывания функции. Вопрос применения производной к исследованию функции на выпуклость и вогнутость представлен как дополнительный материал».	В учебнике описан алгоритм исследования функций. 1. Найти производную функции. 2. Найти стационарные и критические точки. 3. Определить знаки производной на получившихся промежутках. 4. Опираясь на теоремы сделать соответствующие выводы о монотонности функции и экстремумах».
«Методические особенности изучения применения производной при решении прикладных задач».	Приближенные вычисления; точки максимума и минимума (с применением в алгебре); построение графиков.	Применение для приближенного значения числового выражения; для доказательства тождеств и неравенств; на отыскание наибольших и наименьших значений величин.

Проведенный анализ позволил выделить основные знания и умения по применению производной, которые обязательно должен был усвоить учащийся перед тем, как приступить к решению задач:

1. Учащиеся обязаны знать, определение «приращение функции и приращение аргумента. Пусть некоторая произвольная точка x лежит в окрестности точки x_0. Приращение аргумента в точке x_0 называется разностью» [22]:

$$\Delta x = x - x_0. \qquad (1)$$

«Данное значение обозначается символом Δ. Но, если изменить аргумент функции, то, аналогично, и значение функции в этой точке x тоже изменится» [22]:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(\text{x0}) = f(x + \Delta x) - f(x_0). \qquad (2)$$

Таким образом, «разность значений функции в точках x и x_0 соответствующих приращению Δx называется приращением функции и обозначается» $\Delta f(x)$» [22].

2. «В задаче о секущей дается геометрическая интерпретация приращения функции» [57].

Аргументу дается приращение Δx и рассматривается точка Р с абсциссой $(a + \Delta x)$. Тогда ордината этой точки $f(a + \Delta x)$. Тогда угловой коэффициент секущей МР, т.е. тангенс угла наклона секущей и осью х, равен отношению двух приращений $\Delta f(x)$ и Δx. Тогда угловой коэффициент касательной равен:

$$к_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

3. Физическая интерпретация приращения функции дается в задаче о скорости движения.

Аргументу t (время) даётся приращение $t + \Delta t$. Тогда путь, пройденный точкой за время Δt, выражается приращением s: $\Delta s = s(t + +\Delta t) - s(t)$. А средняя скорость за указанный промежуток есть отношение двух приращений Δs и Δt. Также мгновенная скорость это:

$$v(t) \quad = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (4)$$

4. Школьники обязательно должны овладеть правильным пониманием математической операции дифференцирования, понятием производная и правилами дифференцирования.

«Производная функции есть предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента в этой точке при стремлении приращения аргумента Δx к нулю» [9]:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \quad (5)$$

5. Школьники должны знать производные элементарных функций и уметь находить производные от их комбинаций, а также уметь находить производные от сложных функций.

Например,

$y = 3x + 4\sqrt{x} + x^4$; $y = \frac{x+1}{(2x-3)^3}$; $y = \ln(2 + \cos x)$; $y = \frac{2+3^x}{e^x+2}$.

Итак, мы «изучили основные умения, которыми должны владеть учащиеся, прежде чем приступить к решению задач на приложения производной» [22].

Отметим, что проведённый анализ содержания темы показал, что учащиеся уже на первых уроках по введению понятия подводятся к мысли о широком её применении. Выделенные знания и умения позволяют искать точки соприкосновения с другими предметами.

Так, например, знания учащихся по теме «Производная и касательная» широко используются в естествознании. При этом на наглядно-геометрических представлениях об этих понятиях возможен переход от теории к ее приложениям. Бахтина В.А. отмечает, что «приложение этой темы можно разглядеть в изучении методов качественного (графического) анализа простейших математических моделей (например, экологических моделей динамики развития популяций)» [11] .

Проведем сравнительный анализ наличия задачного материала, направленного на реализацию межпредметных связей в выбранных выше учебных пособиях (таблица 2).

Таким образом, в учебном пособии первого авторского коллектива содержится 51% заданий, которые в той или иной степени раскрывают межпредметные связи данной темы, при этом в большей степени внутрипредметную связь решения задач на приложения производной раскрывают (92%). Во втором пособии межпредметных задач 67%, при этом значительную часть составляют задачи на применение геометрического смысла производной.

Таблица 2 – Сравнительный анализ реализации межпредметных связей в учебных пособиях

Смежная дисциплина (тема)	Авторские коллективы учебных пособий для школы	
	С.М. Никольский, МК. Потопов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин[4].	А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Н.Я. Виленкин[5].
Алгебра (уравнения, неравенства).	№№ 2.37*, 2.38*,	№ 45.13-45.15, 46.39, 46.40
Алгебра (последовательность, прогрессии).	№ 5.15	№№37.1-37.60, 46.50
Механика (равноускоренное, прямолинейное, равномерное движение).	№№ 4.1, 4.2, 4.3, 4.10, 5.63-5.65*,5.98	№№ 40.1-40.4, 40.15, 40.16, 46.57
Геометрия (касательная и секущая).	№№ 4.4, 4.5, 4.11, 5.19-5.36	№№ 41.37-41.47, 41.70, 42.19-42.21, 42.36, 43.3-43.66
Алгебра (исследование функции).	№№ 4.69, 5.2-5.16, 5.18, 5.48-5.61, 5.72-5.90, 5.113-5.122,	№№ 37.13-37.17, 44.1-44.76, 45.1-45.12
Алгебра (приближенные вычисления значения выражения).	№№ 5.39 – 5.43*	
Алгебра (теория чисел).	№№5.91, 5.92, 5.124	№№ 46.41-46.44
Геометрия (периметр, площадь фигур).	№№ 5.93-5.97,5.99-5.101	№ 43.67, 43.69, 46.45,46.47, 46.49, 46.53-46.55, 46.58-46.64
Строительство.		№ 41.69, 46.46, 46.48,

Далее перед учителем возникает проблема в создании условий для реализации межпредметных связей. Для этого учитель имеет возможность выбрать один из следующих путей:

– информационно-рецептивный (когда учитель обращается к субъективному опыту учащегося, т.е. напоминает им формулы, законы, правила или сообщает необходимый материал из смежной дисциплины);

– репродуктивный (когда учитель в совместной деятельности с учащимися повторяет, сравнивает и обобщает необходимый теоретический материал из курса математики, а из смежной дисциплины такую теорию сообщает или повторяет);

– исследовательский (когда учащийся самостоятельно находит способы решения творческих задач при изучении теоретического материала);

– проблемный (когда перед учащимися ставится такое практическое или теоретическое задание, при выполнении которого он должен открыть подлежащие усвоению новые знания или действия).

В исследовании Ардрюхиной М.И. акцентируется внимание на такой факт, что математика предоставляет учащимся не только систему предметных «знаний и умений, но и рассматривается как средство необходимое в повседневной жизни и трудовой деятельности, а так же важным для изучения смежных дисциплин» [7].

Марко И.Г. отмечает, что «при целенаправленной актуализации межпредметных связей на этапе раскрытия содержания тех или иных математических понятий и зависимостей предпочтение необходимо отдать скорее возможностям обеспечения наглядности, характерным для физики, чем строгим формальным выкладкам. В качестве примера, Марко И.Г. рассматривает вывод формулы производной функции, основанном на заимствовании метода неполной индукции. При этом, как отмечается в исследовании, необходимо обратиться к уже имеющимся знаниям и умениям учащихся по физике и аргументировать вывод соответствующими примерами из этой дисциплины, а может и исходя из жизненного опыта» [38].

Также, «понятие предельного перехода успешно складывается на базе физического эксперимента, во время которого учащиеся определяют значения средних скоростей движения тела за уменьшающиеся промежутки времени, тем самым демонстрируется реализация исследовательского пути установления межпредметных связей» [6].

В своем исследовании Клименкова О.А. [26] исследует возможность реализации межпредметных связей через создание факультативного курса. Автор ищет решение проблемы реализации двусторонних связей экономики и математики на основе общего понятия производной в межпредметном факультативном курсе. Например, в экономическом среднем образовании термин производная имеет огромное значение для нахождения оптимального значения того или иного экономического показателя (наименьшие издержки, максимальная прибыль и т.д.). При этом отмечается, что на основе понятия термина производной возможно обобщение и систематизация знаний учащихся не только по экономике, но и по математике.

Следовательно, при реализации межпредметных связей появляется возможность экономнее по «времени определить структуру учебного плана. Все сферы математической науки связаны между собой, поэтому и школьные учебные предметы не могут быть изолированы друг от друга. Межпредметные связи являются одним из главных условий глубокого и всестороннего усвоения основ наук в образовательной организации. Реализация межпредметных связей избегает повторения в изучении теоретического материала, экономит время и создает благоприятные условия формирования общеучебных умений и навыков, помогает установить связи, повышает эффективность практической направленности обучения» [26].

1.3 Методическая схема обучения решению задач на приложения производной

С понятием «задача» люди регулярно сталкиваются в повседневной жизни как на бытовом, так и на профессиональном уровнях. Каждый из нас так или иначе сталкивается с решением разных проблем, которые часто называют задачами. В данном случае под задачей понимается сложный вопрос, проблема, требующие исследования и разрешения (Ожегов С.И. [47]).

Задача, по мнению Фридмана Л.М., «представляет собой требование или вопрос, на который необходимо найти ответ, опираясь и учитывая те условия», которые указаны в ней» [61].

«Наиболее общим является определение задачи как цели, заданной в определенных условиях (Леонтьев А.Н. [32]). Гурова Л.Л. [20] обращает особое внимание на объект мыслительных операций человека, решающего задачу»: «Задача – объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными ее элементами» [20]. Другую точку зрения излагает в своём исследовании Балл Г.А.: задача в самом общем виде описывается как система, структурными элементами которой идентифицируются как «предмет задачи, находящийся в исходном состоянии, и вопрос-требование задачи, которое встраивается в модель требуемого состояния предмета задачи» [8].

При изучении математики, учащиеся решают математические задачи, причем для достижения результата они используют специальные математические средства и методы.

Решить задачу – это значит выполнить ее требования или найти ответ на поставленный в ней вопрос.

Методическая система обучения решению математических задач, в общем случае, представляет собой упорядоченную совокупность взаимосвязанных методов, форм, средств и условий планирования и проведения, контроля и коррекции учебного процесса, направленных на эффективное обучение школьников решению задач [1].

А. М. Пышкало [53], отмечает что методическая система обучения любому другому предмету, представляет собой совокупность пяти взаимосвязанных компонентов, представленных на рисунке 2.

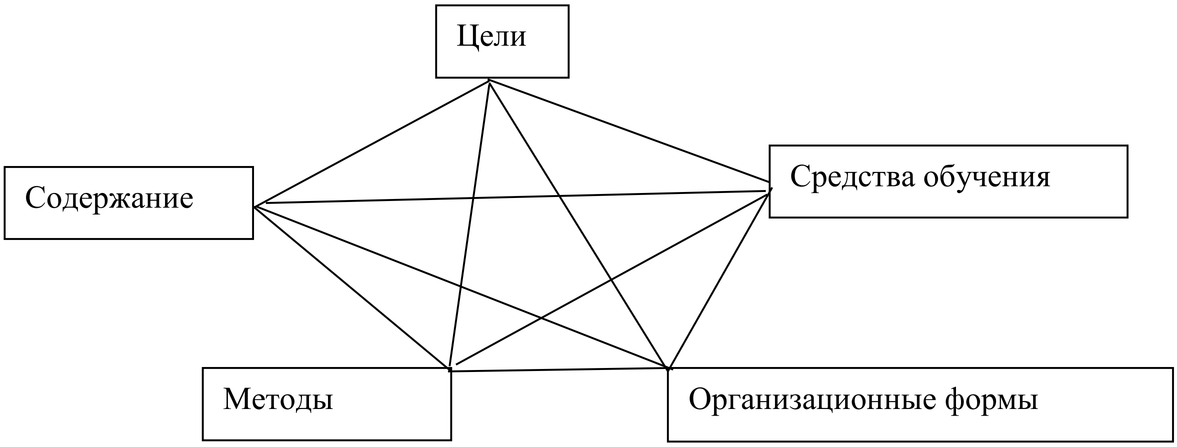

Рисунок 2 – Схема методической системы обучения по А.М. Пышкало

Иными словами, структурными компонентами «методической системы обучения учащихся решению задач являются:

– цели обучения;

– содержание обучения;

– методический инструментарий по обучению решению задач;

– ожидаемые результаты» [68].

Каждый структурный компонент сложен по своей структуре [53]. Так цели обучения соотносятся с целями Федерального государственного образовательно стандарта и рабочей программы; ожидаемые результаты включают в себя не только прогнозируемые результаты, но и мероприятия по коррекции знаний, умений учащихся с последующим анализом.

Самый объемный компонент, это методический инструментарий, который включает в себя формы, методы и средства. Здесь необходимо рассмотреть не только методы решения задач, но и формы обучения и проектирование средств.

Например, метод решения задач по схеме Пойя состоит из следующих этапов:

– усвоение содержания задачи (учащийся знакомиться с условием и требованием задачи, при необходимости делает чертеж или схему и обозначает на нем искомые величины, данные (если возможно); составление плана решения задачи, поиск решения, выявление хода решения;

– реализация плана решения задач;

– “взгляд назад”, т.е. анализ и проверка решения задач.

Отметим, что с учетом этапов планирования деятельности учителя, можно условно выстроить выделенные компоненты иерархией. Действительно цели определяют содержание обучения. В силу вариативности последнего достижение целей возможно с помощью различного материала. Последующий анализ содержания позволяет выделить наиболее эффективные методы обучения, которые реализуются в определенных формах. Комбинация методов и форм определяют выбор оптимальных средств обучения. А затем по анализу полученных результатов делается вывод о достижении цели. Поэтому методическая система обучения циклична.

Проведенный анализ структурных компонентов позволили спроектировать методическую схему обучения решению задач на приложения производной, которая представлена на рисунке 3.

Целевой компонент проектируется с учетом главной цели «обучения учащихся решению задач на применение производной», ожидаемые результаты формулируются в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом.

При проектировании содержательного компонента, учитывается анализ проведенный в п.1.2. При этом учитель выделяет те знания и умения темы, которые могут быть реализованы через метапредметные связи и представлены в виде прикладных задач.

Организационный компонент раскрывает организационно-методическую деятельности учителя и деятельность учащихся.

Учитель создает условия для реализации междпредметных связей в учебном процессе.

Рисунок 3 – Методическая схема обучения решению задач на приложения производной

Методика решения задач на приложение производной состоит из следующих этапов: «подготовительная работа решению задач; ознакомление учащихся с решением задач; закрепление умения решать задачи» [66].

Подготовительная работа решению задач на применение производной сводится к созданию у учащихся готовности к выбору приема решения задачи, усвоению новых способов решения задач.

Ознакомление с решением задач осуществляется в процессе перехода от ситуации, выраженной в задаче, к построению математической модели и выбора приема решения.

При этом данный этап состоит из следующих действий:

– ознакомление с содержанием задачи;

– поиск решения задачи;

– выполнение решения задачи;

– проверка решения задачи.

Ознакомление с содержанием задачи заключается в том, что учащиеся прочитав задачу выясняют смысл каждого понятия, выясняют условие и уточняют требования.

Поиск решения задачи можно проводить как методом нисходящего, так и восходящего анализа, устанавливая при этом связи между данными и искомыми величинами.

При этом на первых этапах обучения учащимся необходимо помогать в поиске с помощью вспомогательных вопросов.

Возможно использование наглядных методов обучения, а также математического моделирования.

Заканчивается этот этап составлением плана решения.

Выполнение решения задачи проводится письменно, при этом записываются все действия, используя соответствующую символику.

Проверка решения задачи заключается в поиске ответов на вопросы: удовлетворяет ли найденное неизвестное условиям задачи; является ли найденное решение наиболее рациональным.

Для поиска ответа на первый вопрос участникам учебного процесса необходимо либо составить обратную задачу и решить её, либо найти другой метод решения. Выбирая второй способ, тем самым находится ответ на второй вопрос.

Этап закрепления умения решать задачи на применение производной реализуется с целью развития у учащихся умения решать задачи определённого типа. При этом задачи усложняются, обогащаясь дополнительными условиями и данными.

Выбор методов обучения регламентирован целями, а также направленностью на активизацию познавательной деятельности учащихся и понимание учащимися изучаемого материала. В рамках данного использование методов проблемного обучения, дифференцированного и индивидуального подходов.

Формы обучения зависят от теоретического и задачного содержания на уроке. Действительно, при демонстрации стандартных задач на применение производной, возможно использование фронтальной работы, а в дальнейшем можно сочетать как фронтальную, так и индивидуальную форму.

В качестве средств обучения деятельности учителя рассматриваются знания учащихся из смежных дисциплин, а также математические задачи с межпредметными связями. При этом учитель, при создании условий, проговаривает тип связи, это сделано не только для того чтобы показать межпредметную связь, но и для формирования у школьника целостного представления о математике, как науке.

Контрольно-результативный компонент направлен на проведение диагностики, анализа и коррекции знаний учащихся. Входной контроль умения применять производную проводится после изучения понятия производной. В дальнейшем текущий контроль позволяет проверить сформированность у учащегося умения решать математические задачи в которых при реализации модели используется производная и её компоненты. Итогом этого этапа является диагностируемость результатов и сравнение их с ожидаемыми целями.

Таким образом, методическая схема обучения решению задач на приложения производной полностью соответствует методике обучения решению задач.

Выводы по первой главе

В результате проведения теоретического анализа литературы по проблеме исследования нами сделаны следующие выводы:

1. Основными целями обучения учащихся решению задач на приложения производной являются:

– демонстрация прикладной направленности учебного материала, с указанием наиболее эффективных методов приложения производной;

– личностное развитие учащихся;

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

– сформировать у учащихся шаблоны решений стандартных задач на приложения производной, а также предоставить учащимся возможности трансформировать шаблоны в нестандартную ситуацию;

– ориентировать учащихся на развитие общего умения решать задачи на приложения производной;

– научить учащихся переводить реальные предметные ситуации в математические модели, использующие понятие «производная».

2. С целью выявления знаний и умений, получаемых школьником в процессе изучения темы «Приложения производной», был проведен сравнительный анализ двух учебных пособий.

Анализ позволил выделить «основные знания и умения, которые обязательно должны усвоить учащиеся перед тем, как приступить к непосредственному применению производной:

1) учащиеся должны понимать, что такое приращение функции и приращение аргумента; геометрическая интерпретация приращения функции; физическая интерпретация приращения функции;

2) школьники обязательно должны овладеть правильным пониманием математической операции дифференцирования, понятием производная и правилами дифференцирования;

3) школьники должны знать производные элементарных функций и уметь находить производные от их комбинаций, а также уметь находить производные от сложных функций.

3. Методическая схема обучения решению задач на приложения производной позволила спроектировать структурные компоненты:

– целевой компонент, который проектируется с учетом главной цели - обучение учащихся решению задач на приложения производной;

– содержательный компонент, выделяющий те знания и умения темы, которые могут быть реализованы через метапредметные связи и представлены в виде прикладных задач;

– организационный компонент, раскрывающий организационно-методическую деятельности учителя и деятельность учащихся;

– контрольно-результативный компонент, направленный на проведение диагностики, анализ и коррекцию знаний учащихся.

Глава 2 Проектирование методической системы обучения решению задач на приложения производной в курсе алгебры и начал математического анализа

2.1 Пропедевтика изучения приложений производной в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

Пропедевтика изучения приложений производной в курсе алгебры и начал математического анализа позволяет учащимся усвоить качественно материал между смежными дисциплинами благодаря межпредметным связям.

Тема «Производная и ее приложения» представляет собой один из основных разделов начал математического анализа. В связи с отсутствием достаточной методической разработанностью этой темы «данная тема интересует многих методистов в настоящее время. Кроме того, материал по выбранной теме интересен с точки зрения истории. Разработкой данной темы занимались такие великие ученые, как Лейбниц и Ньютон - основоположники дифференциального исчисления» [67].

Знания по решению задач на приложения производной, обучающиеся начинают получать в 10 классе при изучении темы «Производная».

Для того чтобы подойти к изучению приложений производной, учащимся сначала предстоит решить задачи на нахождение производной различных элементарных функций.

Задача 1. Найдите производные функций.

1) $y = \frac{10x^2}{2}$ 2) $y = -3$

3) $y = \frac{\sin x}{2}$ 4) $y = 6\sqrt{x} + 5\sin x$

Задача 2. Вычислите $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, если $f(x) = 5\sin(x) + 3x^2 - \frac{9\pi}{4}x - 1$

Задача 3. Определите производные некоторых функций.

1) $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5$;

2) $z = \frac{x-a}{x+a}$;

3) $u = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}$;

4) $v = x^2 \sqrt{x^2 - 1}$.

Далее, решая задачи на среднюю скорость движения можно встретить аналогичные задачи и в физике. Приведем несколько примеров.

Задача 4. «Используя определение производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f\ (x) = 3 \cdot x + 2$ 2) $f\ (x) = 5 \cdot x + 7$

3) $f\ (x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ 4) $f\ (x) = -\,3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

Задача 5. Точка движется по закону $s\ (t) = 1 + 3 \cdot t$. Необходимо указать среднюю скорость движения за промежуток времени:

1) от t = 1 до t = 4 2) от t = 0,8 до t = 1

Задача 6. «Какова мгновенная скорость движения точки, если»:

1) $s(t) = 2 \cdot t + 1$ 2) $s(t) = 2 - 3 \cdot t$

Задача 7. «Закон движения задан формулой, необходимо найти мгновенную скорость движения точки» [16, с.120]:

1) $s(t) = \frac{3}{2}\ t^2$ 2) $s(t) = 5t^2$

Задача 8. По закону $s(t) = t^2 + 2$ движется тело. Необходимо определить скорость тела:

1) $t = 5$;

2) t = 10 [3].

Для решения данных задач необходимо знать формулы производной линейной функции, мгновенную скорость в момент времени.

Далее изучается тема «Производная степенной функции». Приведем примеры.

Задача 9. Найдите производную функции: x^6; x^{11}; x^{-2}; x^{-4}[21].

Задача 10. Вычислите: $f'(9)$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ [16, с.122]

Задача 11. Докажите, что $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ [24]

Затем изучаются темы «Правила дифференцирования», «Производные некоторых элементарных функций», «Производные тригонометрических функций», «Геометрический смысл производной» и т.п. Обучающиеся на протяжении 10-11 классов сталкиваются с этими темами.

Задача 12. «Найдите производную функции:

1) $x^2 + x$ 3) $5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 7$

2) $x^5 - 3 \cdot x^2$ 4) $-2 \cdot x^3 + 18 \cdot x$ [17, с.126]

Задача 13. «При каких значениях x значение производной функции $y = (x-3)^5\ (2 + 5 \cdot x)^6$ равно 0» [21]?

Задача 14. «Выясните, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f\ (x) = x^4 - 4 \cdot x^2 + 1$;

2)$f\ (x) = (x+2)^2 \sqrt{x}$.

Задача 15. Выясните, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) $(5 - 3 \cdot x)^4\ (3 \cdot x - 1)^3$;

2) $\frac{3x^2-1}{1-2x}$.

Задача 16. Найдите угол между касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке (0; 0) и осью Ox.

Задача 17. Найдите угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке (1; 1) и осью Ox и написать уравнение этой касательной» [17, с.135].

Задача 18. Покажите, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$ [10].

Стоит отметить, что при формировании элементов математического анализа, как правило, в действующих учебниках Ш.А. Алимова [6], А.Н. Колмогорова [27], А.Г. Мордковича [42] изучают, как связана между собой средняя и мгновенная скорость движения, затем изучают производные функции дифференцируемые в точке и решение данных задач.

В учебниках А.Г. Мордковича [44], Н.Я. Виленкина [16] «при изучении математического анализа сначала рассматриваются функции, заданные полиномами».

Далее на их примере «показываются возможности математического анализа и лишь после этого изучаются правила дифференцирования других функций, но уже обязательно с практическими приложениями.

Все это позволяет добиться перманентности и доступности изучения школьниками основ одномерного анализа.

Данные учебники написаны в соответствии с программой ФГОС курса математики средней школы общеобразовательного уровня, на изучение которого отводится 3 урока в неделю, и преподавание выполняется в рамках одного курса.

Базу учебника составляют широко применяемые в российских школах учебные пособия тех же авторов по алгебре и началам анализа и геометрии для 10-11 классов.

В любом параграфе находится детальное и подробное «изложение теоретического материала» [60].

Изложение теоретического материала в большей степени направлено на самостоятельное изучение, в связи с чем в учебниках в любом параграфе находится небольшое количество примеров с подробными решениями, а еще всевозможные методические рекомендации и советы для учителя.

В конце любого параграфа приводятся разноуровневые упражнения для решения.

В конце книг представлены ответы ко всем упражнениям, кроме устных.

Таким образом, при осуществлении пропедевтической работы с решением задач на приложения производной, изучение данной темы в 10-11 классах происходит в сжатой форме.

2.2 Основные формы, методы и средства обучения решению задач на приложения производной

На уроках математики при обучении решению задач на приложения производной работа может быть организована следующим способом:

– «индивидуальная работа;

– коллективная работа;

– групповая работа;

– работа в парах.

В проведении одного урока часто используется сразу несколько видов деятельности учащихся.

В таблице 3 показан фрагмент занятия, на котором осуществлялось «повторение формул методов решения задач на приложения производной», изучаемых в рамках элективного курса. На этом занятии одновременно применялись коллективная, парная и индивидуальная формы работы.

В проведении коллективной работы практиковалось составление алгоритмов по цепочке или с применением метода коллективной дискуссии.

После решения заданий из п.1 «дети опять работают индивидуально, выбирая любое из выше решенных заданий и составляя алгоритм его решения» [65].

Таблица 3 – Фрагмент занятия «Повторение основных методов решения задач на приложения производной» (этап повторения ранее изученного материала)

Деятельность учащихся
1. *«Восстанови формулы».* «Один учащийся у интерактивной доски дописывает формулы»[14]: 1. $(C)' = 0$ 2. $(kx + b)' = k$ 3. $(\sin x)' = \cos x$ 4. $(\cos x)' = -\sin x$ 5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Продолжение таблицы 3

6. $(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$ 7. $(Cu)' = Cu'$ 8. $(u \pm v)' = u'v \pm uv'$ 9. $(x^n)' = nx^{n-1}$ 10. $(e^x)' = e^x$ «А сейчас давайте все вместе проверим правильность выполнения, и, если имеются ошибки, исправим их. Используется парная работа. Дети меняются тетрадями, проверяют работы друг друга. Далее педагог открывает доску с правильным решением уравнений, и дети выполняют самопроверку»[14]. 2. Решение заданий у доски. Найдите производную каждой из функций 1. $f(x) = 5x^7$ 2. $f(x) = x^{-5}$ 3. $y = 2\sin x$ 4. $y = 1 - \cos x$ 5. $y = \sin(ax + b)$ «Один учащийся у доски решает устно одно из заданий, записывая лишь ответ и формулу, которые применял. Остальные учащиеся работают в парах следующим образом: выполняют задание в обсуждении, определяя, какой метод решения наиболее подходящий. Проверка правильности выполнения задания проводится в коллективном обсуждении. Дети по желанию высказываются о тех ошибках, которые обнаружили и в коллективной дискуссии определяют, как можно было решить задание более эффективно» [35]. 3. *Составление алгоритмов решеных заданий* 1. $f(x) = 5x^7$ По формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$ получаем $f'(x) = (5x^7)' = 5\cdot x^{7-1} = 5\cdot x^6 = 35x^6$ Ответ: $f(x) = 35x^6$ 2. $f'(x) = x^{-5}$; $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ По формуле $(x^n)' = nx^{n-1,}$ получаем $f(x) = \left(\frac{1}{x^5}\right)' = -5 \cdot \frac{1}{x^6} = -\frac{5}{x^6}$ Ответ: $f(x) = -\frac{5}{x^6}$ 3. $y = 2\sin x$ $y' = (2\sin x)'$ $y = 2\cos x$ Ответ: $y = 2\cos x$ 4. $y = 1 - \cos x$ $y' = (1 - \cos x)' = -(\cos x))' + (1)' = -(-sinx) + 0 = \sin x$ Ответ: $y = \sin x$ 5. $y = \sin(ax + b)$ $y' = (\sin(ax + b))'$

В таблице 4 рассмотрен фрагмент занятия, на котором составлялся алгоритм решения задачи на приложения производной по цепочке [65].

Таблица 4 – Фрагмент занятия «Доказательство теоремы о производных элементарных функций» (этап получения новых знаний)

Деятельность учащихся
На уроке доказываются формулы теорем о производных элементарных функций. Решается несколько примеров на использование этих формул. Доказать: 1. (C)'=0 2. $(e^x)' = e^x$. Доказательство 1. «Докажем, что производная постоянной функции равна нулю: (C)'=0, где C – постоянная, C=const. Пусть f(x) = C – постоянная функция. Ее значения определены для всех x и не зависят от переменной x. Поэтому $\varphi(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{C-C}{\Delta x} = 0$, при $\Delta x \neq 0$. Таким образом, функция $\varphi(\Delta x)$ определена для всех значений переменной Δx, кроме точки $\Delta x = 0$. Она является постоянной, равной нулю, $\varphi(\Delta x)$=0 , на всей области определения – то есть в любой проколотой окрестности точки Δx. Тогда согласно теореме о пределе постоянной функции»[48], (C)'= $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$= 0 2. «Докажем, что производная экспоненты равна самой экспоненте: $(e^x)' = e^x$. Для доказательства подставим в формулу производной показательной функции значение основания степени, равное числу e. Также воспользуемся тем, что ln e = $\log_e e$ = 1: $(e^x)' = e^x *$ ln e $= e^x * 1 = e^x$. Среди всех показательных функций (с различными значениями основания a), производная экспоненты имеет наиболее простой вид. Многие вычисления в математическом анализе оказываются более простыми, если в качестве основания показательной функции использовать число e. Поэтому в математическом анализе, показательную функцию стремятся привести к основанию e, то есть к экспоненте. Закрепление полученных знаний Дети по цепочке составляют алгоритм выражений»[18]

При использовании формы «групповой работы мы разделили класс на три группы и просили их самостоятельно разработать алгоритм решения задачи на приложение производной. Затем один человек от каждой группы записывал свой алгоритм на доске, а обучающиеся сравнивали свои алгоритмы.

При обучении решению задач на приложения производной нами были применены следующие методы работы: лекция; работа с интерактивной доской; дискуссии; наглядный метод; практический метод.

При помощи лекции осуществлялось изучение нового материала, объяснение того, как в рамках новой темы можно пользоваться алгоритмами. В таблице 5 рассмотрен фрагмент урока «Формулы теорем о производных элементарных функций» с применением метода лекции.

При групповой дискуссии дети выполняли построение алгоритмов на основании обсуждения того, какой шаг должен использоваться следующим, что именно нужно сделать и почему» [58]. Например, в рамках проведения занятия на тему «Формулы производных элементарных функций» был организован диалог». В ходе обсуждения дети делают вывод, что сначала необходимо определить, какую именно формулу необходимо применить на этом уроке.

– Ребята, сейчас мы с вами докажем формулы производных элементарных функций. Как вы думаете, какой шаг мы должны сделать в первую очередь для достижения результата?

Таблица 5 – Этап занятия на доказательство формул производных элементарных функций с использованием метода лекции (этап получения новых знаний)

Деятельность учащихся
«На уроке доказываются формулы производных элементарных функций. Решается несколько примеров на использование этих формул. Доказать: 1. (C)'=0 2. $(e^x)' = e^x$. 3. $(x^n)' = \mathrm{ax}^{\mathrm{n}-1}$ Доказательство 1. Докажем, что производная постоянной функции равна нулю: (C)'=0, где *C* – постоянная, C=const. Пусть f(x) = C – постоянная функция. Ее значения определены для всех *x* и не зависят от переменной *x*» *[58]*. Поэтому $\varphi(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{C-C}{\Delta x} = 0$, при $\Delta x \neq 0$.

Продолжение таблицы 5

Таким образом, «функция $\varphi(\Delta x)$ определена для всех значений переменной Δx, кроме точки $\Delta x = 0$. Она является постоянной, равной нулю, $\varphi(\Delta x)$=0 , на всей области определения – то есть в любой проколотой окрестности точки Δx. Тогда согласно теореме о пределе постоянной функции,   (C)'= $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$= 0   2. Докажем, что производная экспоненты равна самой экспоненте: (e^x)'= e^x.   Для доказательства подставим в формулу производной показательной функции значение основания степени, равное числу e. Также воспользуемся тем, что ln e = $\log_e e$ = 1: (e^x)' = e^x * ln e =$e^x * 1 = e^x$.   Среди всех показательных функций (с различными значениями основания a), производная экспоненты имеет наиболее простой вид. Многие вычисления в математическом анализе оказываются более простыми, если в качестве основания показательной функции использовать число e. Поэтому в математическом анализе, показательную функцию стремятся привести к основанию e, то есть к экспоненте.   Ребята, как мы видим, что при «доказательстве данных выражений мы использовали определенные алгоритмы, которые могут применяться в рамках решения задач, подобных этим. Использование одного единого алгоритма позволит упростить процесс решения задачи, что, в свою очередь, повысит эффективность проводимых вами решений задач»[45].

В диалоге ребята приходят к выводу, что сначала необходимо определить, какую именно формулу необходимо использовать на уроке.

– Сейчас давайте подумаем, что нужно делать дальше.

Ребята вспоминают об алгоритме, а именно, говорят что нужно «подставить имеющуюся формулу в уравнение, которое надо решить и в соответствии с примером в образце, привести свой пример к правильному решению. Например: Найти производную функции $f(x) = x^3 + x^4$

$f'(x) = 3x^{3-1} + 4x^{4-1} = 3x^2 + 4x^3$.

Метод «наглядности использовался нами при демонстрации ребятам основ построения алгоритмов по формулам производных элементарных функций. На основании данного алгоритма задачей ребят было составление таких же, но с уже другими формулами производных элементарных функций» [19].

В практическом методе предлагалось решить задачи, применяя формулы производных функций.

«Метод работы с интерактивной доской применялся параллельно со всеми вышерассмотренными методами работы в качестве средства наглядности, а также для облегчения усвоения знаний и умений учащихся» [40].

2.3 Система задач на приложения производной

При формировании системы задач на приложения производной задачи подбирались таким образом, чтобы в процессе решения любой из них обучающиеся использовали алгоритмы решения, представленные им ранее на уроках при изучении данной темы. При этом все задачи подбирались из профильного курса математики 10-11 классов. Наряду с задачами профильного уровня, система содержит олимпиадные задачи на приложение производной.

Согласно требований к системе заданий, представленных методистом «Е. И. Лященко, в разрабатываемую систему задач должны быть включены следующие задачи:

1) отображающие практическую значимость нового понятия;
2) на актуализацию опорных знаний и умений;
3) на выделение существенных признаков понятия;
4) на распознавание формируемого понятия;
5) на усвоение текста определения понятия;
6) на использование символики, связанной с понятием;
7) на установление свойств понятия;
8) на применение понятия» [34, С. 69].

На основании выше изложенного были подобраны задания для системы задач на приложения производной, которые характеризуются наличием наглядности либо в условии задачи, либо в ее решении. Разработаны задания разного уровня сложности, с разделением на различные приложения (геометрия, физика, экономика и др.).

Данная система задач может применяться в качестве дополнения к профильному материалу. Ниже приведена система задач, некоторые из которых приведены с решением.

Задачи на «Физический и механический смысл производной»

Задача 19. «По прямой движется материальная точка. Закон движения представлен формулой $x(t) = 6 \cdot t^2 - 48 \cdot t + 17,$ где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время движения в секундах. Найдите скорость движения (в м/с) в момент времени t = 9 м/с [44].

Решение. Скорость движения – это производная от пути по времени, то есть, чтобы найти закон изменения скорости нужно вычислить производную от функции x(t) по t, получим: $v(t) = x'(t) = 12t - 48$.

В момент времени t=9 с скорость материальной точки равна $v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$ м/с.

Ответ: 60.

Задача 20. Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд (рисунок 4). График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s.

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

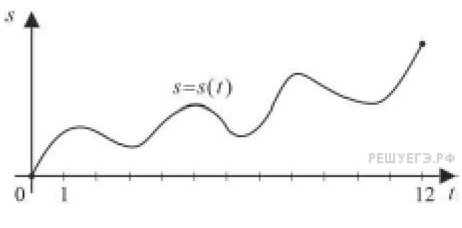

Рисунок 4 – График функции к задаче № 20

Решение.

Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$. Точек экстремума на графике 4.

Ответ: 6» [6].

Задача 21. «Прямолинейно движется материальная точка по закону $x(t) = \frac{1}{4 \cdot t^3} - 4 \cdot t^2 + t$, где

x — расстояние в метрах,

t — время в секундах.

Необходимо найти скорость в момент времени t = 12 с» [44].

Решение

Согласно физическому смыслу производной необходимо найти $x'(12)$.

$$x'(t) = \frac{3}{4t^2} - 8t + 1,$$

$x'(12) = \frac{3}{4} \cdot 12^2 - 8 \cdot 12 + 1 = 108 - 96 + 1 = 13$

Ответ: 13

Задание 22. «По прямой движется материальная точка. Закон её $x(t) = t^2 - 13 \cdot t + 23$, где x — расстояние от точки, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени скорость будет равна 3 м/с» [49]?

Решение. Находим производную функции $x'(t)=(t^2 - 13t + 23)'=2t - 13$. Приравниваем скорость, заданную полученной формулой, значению 3 м/с. $2t - 13=3$.Решив это уравнение, определим в какое время равенство является верным.

$2t - 13=3$.

$2t = 3+13$.

$t = \frac{16}{2} = 8$.

Ответ: 8

Задача 23. «Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 3t + t,\ 2$ (м), где t- время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения» [44].

Решение. $v\,(t) = S'(t)$

$v\,(t) = (3t + t\,2\,)' = 3 + 2\,t$

$v\,(t) = v\,(3) = 3 + 2 \cdot 3 = 9(\text{м/с})$

Ответ: 9 м/с

Задача 24. «Точка движется прямолинейно по закону $S = 2 \cdot t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени t_0 = 4м/с» [51].

Решение.

1.Скорость движения точки в момент времени определяется по формуле:

$v = \frac{dS}{dt} = 6t^2 + 2t$

2.$v(t_0) = 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 2 = 14(m/c)$

3. Ускорение движения определяется: $a = \frac{dv}{dt} = 12t + 2$

4. $a(t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50m/c^2$

Задача 25. «Закон изменения температуры тела Т задан $\mathrm{T} = 0{,}2 \cdot t^2$, где t - время. С какой скоростью нагревается тело в момент времени t_0 = 10 м/с» [44]?

Решение. Скорость нагревания тела составляет $0{,}4t$. Тогда в момент времени t_0 эта скорость равна $0{,}4 \cdot 10 = 4$

Задача 26. Вычислить мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0=1, двигающейся по закону $x(t) = t^2 + 3 \cdot t - 1$ [2].

Задача 27. «Через проводник, начиная с момента $t = 0$, протекает электричество, которое задается формулой q = $3 \cdot t^2 + t + 2$. Необходимо найти силу тока в момент времени t =3с» [44].

Решение.

$q = 3t\,2 + t + 2$

$I = q'(\,t)$

$I = (3t^2 + t + 2)' = 6t + 1$

$I(3) = 6 \cdot 3 + 1 = 19$ (A)

Ответ: 19 (A)

Задача 28. Прямолинейно по закону $S(t) = 1 - t + t^2$, движется тело, масса которого равна 5 кг, где S- измеряется в метрах, а t в секундах. «Необходимо найти кинетическую энергию тела через 10с после начала движения» [45] .

Решение.

$S(t) = 1 - t + t^2$

m =5 кг

t = 10c

$E = mv^2/2$

$v = S'(t)$

$v = (1 - t + t^2)' = -1 + 2t = 2t - 1$

$v(t) = v(10) = 2 \cdot 10 - 1 = 19$(м/с)

$E = mv^2/2 = 5 \times 361/2 = 902{,}5$ (Дж)

Ответ: 902,5 (Дж)

Задача 29. В химическую реакцию вступила часть вещества. Реакция задана зависимостью: $p(t) = 0{,}5 \cdot t^2 + 3 \cdot t - 3$ (моль) Какая скорость химической реакции будет через 3 секунды.

Решение.

$V(t) = \rho'(t)$

$V(t) = (0{,}5t^2 + 3t - 3)' = t + 3$

$V(t) = V(3) = 3 + 3 = 6$

Ответ: 6

Задача 30. Тело движется по прямой по закону

$S(t) = 2t^3 + 4t^2 - 5t + 10$. Какую скорость приобретает тело в момент, когда его ускорение станет равным 10 м/с^2?

Задача 31. Тело движется прямолинейно в вертикальном направлении по закону $h(t) = -8 \cdot t^2 + 18 \cdot t + 13$ (t – время, h – расстояние от поверхности Земли до тела). Определите скорость в момент времени t =1 [2]

Задача 32. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 1 + 4t - t^2$ (м), где t- время движения в секундах. Через какое время после начала движения тело остановится?

Решение.

v (t) = S′(t)

v (t) = 0

v (t) = (1+4t - t ^{2})′ = 4 - 2 t

4 - 2 t = 0

- 2 t = - 4

t = 2

Ответ: через 2 с тело остановится.

Задача 33. По прямой движется некоторая материальная точка. Закон ее движения задан формулой $S\ (t) = 2t\ + t^2$, где t – время движения измеряемое в секундах. Необходимо найти скорость движения точки в конце 5 секунды с момента начала её движения.

Решение.

$v\ (t) = S'\ (t)$

$v\ (t) = (2t + t^2)' = 2 + 2t$

$v\ (t) = v(5) = 2 + 2 \cdot 5 = 12\ (m/c)$

Ответ: 12 m/c

Задача 34. Найти, через какое время остановится тело, движущееся по закону $S(t) = 1 + 4t + t^2$ прямолинейно. $t -$ время движения в секундах.

Решение.

$v = S'\ (t)$

$v(t) = 0$

$v(t) = (1 + 4t + t^2)' = 4 - 2t$

$4 - 2t = 0$

$-2t = -4$

$t = 2$

Ответ: через 2с тело остановится.

Задача 35. Лена и Таня гуляли в парке. Таня захотела покататься на каруселях, а Лена решила сфотографировать Таню. Карусель вращается согласно закону $(t) = \frac{1}{9t^3} - \frac{2}{5t^2}$. Качество фотографии будет хорошим только при ускорении карусели, равном 3м/с^2. Когда лучше сделать снимок, чтобы он был хорошего качества?

Решение.

$$v(t) = \ (t) = \frac{1}{9t^3} - \frac{2}{5t^2}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{2}{3t} - 5$$

$$\frac{2}{3t} - 5 \ = 3$$

$$\frac{2 - 15t - 9t}{3t}$$

$2 - 24t = 0$

$-24t = -2$

$t = 12$ с.

Ответ: фотографировать Таню необходимо на 12 секунде.

Задача 36. Ежедневно автобус массой 7 тонн возит детей в ближайшую школу. Его скорость изменяется по закону $0{,}1t^3 + 2t$. Найти величину равнодействующей всех сил, которые действуют на автобус в момент времени t= 3с.

Решение.

$F = ma = mv'$

$F = m(0{,}1t^3 + 2t)' = m(0{,}3t^2\ + 0{,}2)$

$F = 7000(0{,}3 \cdot 9 + 0{,}2) = 20300(H) = 20{,}3kH$

Ответ: $20{,}3kH$

Задача 37. Уравнение движения велосипедиста, едущего по парку, имеет вид: $x = 5 + 2t + +0{,}5t^2$. Необходимо вычислить:

1) скорость велосипедиста через 2 секунды после начала движения;

2) ускорение велосипедиста через 2 секунды после начала движения;

3) равнодействующую всех сил, которая действует на велосипедиста при разгоне, если его масса 70кг.

Решение.

$x = 5 + 2t + 0{,}5t^2$

$v(t) = x'(t)$

$x'(t) = 2 + t$

$v = 2 + 2 = 4\ (m/c)$

$a(t) = x''(t)$

$x''(t) = 1$

$a = 1\text{м}/c^2$

$F = ma$

$F = 1 \cdot 70 = 70(H)$

Ответ: $v = 4(m/c)$

$a = 1(m/c^2)$

$F = 70(H)$

Задача 38. Ребята играли во дворе в мяч. Если подбросить мяч вертикально вверх со скоростью v_0, то он будет перемещаться по закону $h(t) = v_0 - \frac{gt^2}{2}$. $h -$ путь в метрах, t –твремя в секундах. Необходимо вычислить наибольшую высоту, на которую ребята могут подбросить мяч, если $v_0 = 50m/c$, $g = 10m/c^2$.

Решение.

$h(t) = v_0 - gt$

$h'^{(t)} = 50 - 10t$

$h(5) = 125$

Ответ: 125метров

Задачи на «Химический смысл производной»

Задача 39. В химической лаборатории в результате опыта вещество вступило в реакцию, которую можно описать следующей формулой $\rho\,(t) = 1t^2 + 5t - 5$ (моль). Необходимо вычислить скорость химической реакции через 8 секунд после её начала.

Решение.

$v(t) = \ \rho'\,(t)$

$v(t) = (1\,t^2 + 5t - 5)' = 2t + 5$

$v(t) = v(8) = 2 \cdot 8 + 5 \ = 21$

Ответ: 21.

Задачи на «Геометрический смысл производной»

Задача 40. «График функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 изображен на рисунке 5. Необходимо найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

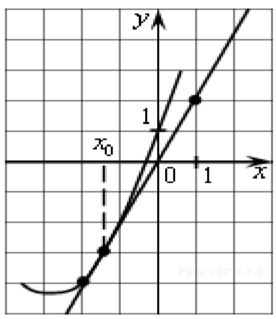

Рисунок 5 – График функции к задаче № 40

Решение.

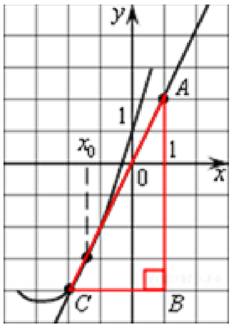

Рисунок 6 – Графическое решение к задаче № 40

Согласно геометрическому смыслу производной f(x$_0$) = tg α, где α– угол наклона касательной (рисунок 6) к графику функции f(x), проведенной через точку x$_0$, к положительному направлению оси (ox).

Из прямоугольного треугольника ABC, помеченного голубым цветом, видно, что tg α.= BC/AC=6/3 = 2 Поэтому f ’(x$_0$) = 2.

Ответ: 2**.**

Задача 41. Отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6, x_7$ графика функции $y = f(x),$ рисунок 7. Необходимо найти в каких точках производная будет отрицательна» [46]?

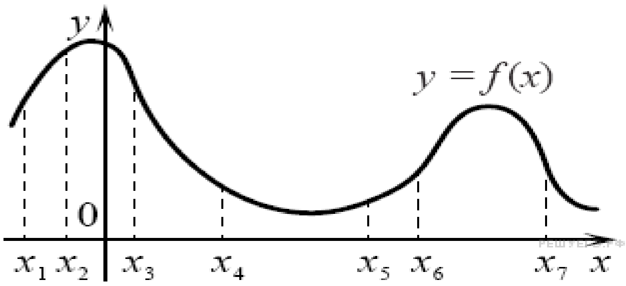

Рисунок 7 – График функции к задаче № 41

Решение. В точках $x_3, x_4, x_7,$ производная функции будет отрицательна, так как они принадлежат участкам убывания функции.

Ответ: 3.

Задача 42. «Изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 на рисунке 8. Какое значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

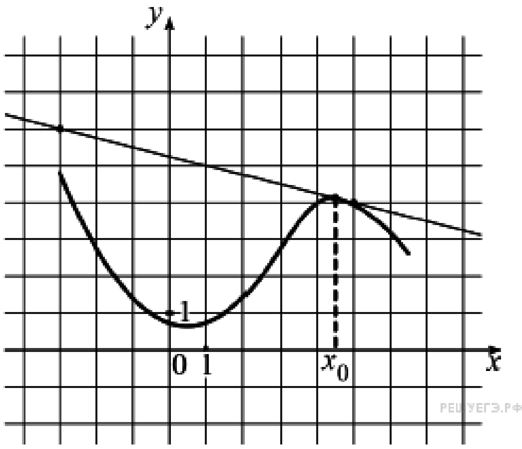

Рисунок 8 – График функции к задаче № 42

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник (рисунок 9) с вершинами в точках *A* (−3; 6), *B* (−3; 4), *C* (5; 4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом *ACB*» *[1]:*

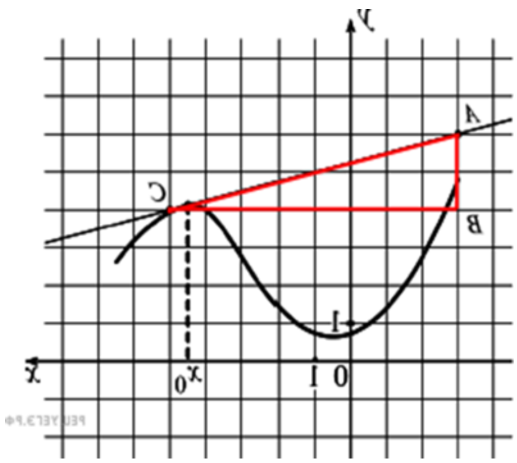

Рисунок 9 – Графическое решение к задаче № 42

$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}\,\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

О т в е т: −0,25.

Задача 43 «Необходимо найти $f'(8)$, как показана на рисунке 10, что, прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8.

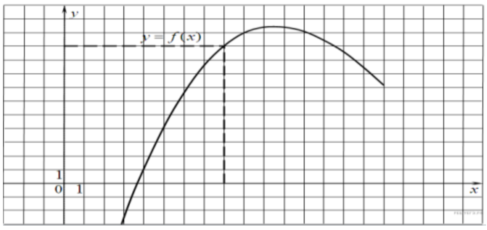

Рисунок 10 – График функции к задаче № 43

Решение. По формуле уравнение $y = kx$, прямая проходит через точку (8; 10), поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1{,}25$.

Поскольку угловой коэффициент касательной (рисунок 11) равен значению производной в точке касания, получаем» [1]: $f'(8) = 1{,}25$

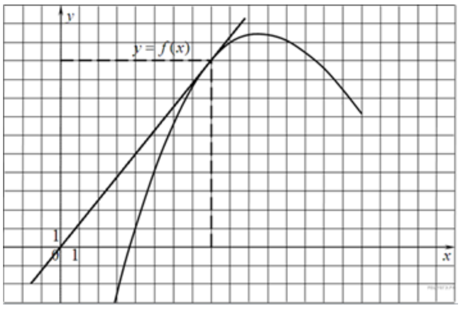

Рисунок 11 – Графическое решение к задаче № 43

Ответ: 1,25

Задача 44. «Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2 \cdot x - 2$ или совпадает с ней, рисунок 12.

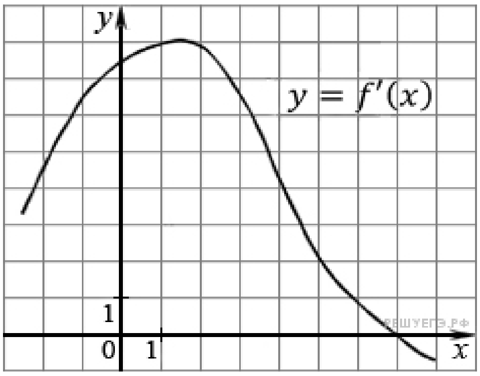

Рисунок 12 – График функции к задаче № 44

Решение. Касательная параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный $f'(x_0) = 2$. Найти, при каких производная принимает значение 2 (рисунок 13).

Искомая точка» [1] $x_0 = 5$.

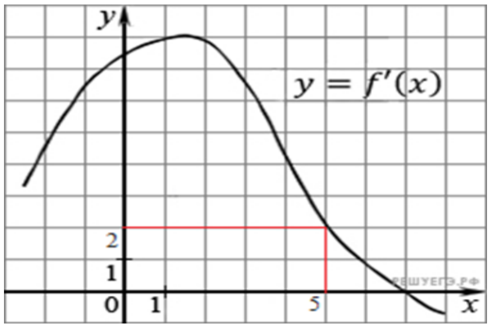

Рисунок 13 – Графическое решение к задаче № 44

Ответ: 5.

Задачи на «Экономический смысл производной»

Задача 45. «В течение рабочего дня, работника выпускается продукции u, которая выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6} \cdot t^3 + \frac{15}{2} \cdot t^2 + 100 \cdot t + 50$, где t – время, ч; причём $1 \leq t \leq 8$. Нужно узнать производительность труда и скорость через час начало работы и за час до окончания работы.

Решение:

Определи производительность труда $z(t)$ по формулой $z(t) = u'(t)$.

$z(t) = u'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100$

Через один час после начала работы производительность труда равна:

$z(1) = -2{,}5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5$

За один час до окончания работы:

$z(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5$

Определим скорость производительности труда $z'(t) = -5t + 15$

$z'(1) = -5 \cdot 1 + 15 = 10$, $z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$

Задача 46. Спрос определяется по функции: $q = \frac{p+8}{p+2}$ Функция предложения: $S = p + 0{,}5$. Где p(руб) – цена товара, q(шт.) – количество покупаемого товара; S(шт.) – количество предлагаемого на продажу товара в единицах времени.

Найти: а) равновесную цену: $q = S$; б) эластичность спроса и предложения для этой цены.

Решение:

а) $\frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5 \Rightarrow p = 2$ руб.

б) $E_p(q) = \frac{p(p+2)}{p+8} \cdot \frac{1\cdot(p+2) - 1\cdot(p+8)}{(p+2)^2} = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}$;

$E_{p=2}(q) = -0{,}3$; $|E_{p=2}(q)| < 1 \Rightarrow$ неэластична

$E_p(s) = \frac{p}{p+0{,}5} \Rightarrow E_{p=2}(s) = 0{,}8$; $|E_{p=2}(s)| < 1 \Rightarrow$ неэластична.

Таким образом, изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. При увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

Задача 47. Функция спроса y от цены x продукта имеет вид $y = 10 - - x$. Найти коэффициент эластичности спроса при цене товара $x = 2$ единицы.

Задача 48. Затраты на производство продукции объёма x задаются функцией $C(x) = x^2 + 5 \cdot x = 4$. Производитель реализует продукцию по цене 25 денежных единиц. Найдите максимальную прибыль П и соответствующий объём продукции x» [36].

В данной подборке задач по теме «Приложения производной» представлены задачи на геометрический, физический, экономический смысл.

Обучающиеся научатся с помощью производной строить графики функций, понимать, в чем состоит геометрический, физический и экономический смысл производной, находить скорость в момент времени, находить максимальную прибыль и объем продукции и др.

Применять знания в нестандартных ситуациях

Основной целью преподавателя при изучении задач на приложения производной является: обучить геометрическому, физическому и экономическому смыслу, сделать интуитивно ясными критерии возрастания и убывания функций, признаки максимума минимум.

2.4 Описание педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе учебного учреждения ГАПОУ «Ишимский многопрофильный техникум» отделение с. Казанское Тюменской области. В эксперименте принимали участие 66 обучающихся. Обучающиеся пользуются учебным пособием А.Н. Колмогорова.

Рассмотрим сущность педагогического эксперимента.

На момент проведения педагогического эксперимента обучающимися уже была изучена тема «Приложения производной». На начальном этапе нашего эксперимента мы провели стандартную контрольную работу по данной теме, которая включала в себя простые задания, например, задания на нахождение производной функции, вычисление значения производной в точке, нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

Анализ результатов контрольной работы показал, что обучающиеся затрудняются решать задачи на применение производной; многие выполнили контрольную работу лишь частично; 30% обучающихся вообще не справились с заданиями контрольной работы. Поэтому было принято решение провести в группе пропедевтическую работу по теме «Приложения производной», с целью научить решать задачи на приложения производной и закрепить полученные умения и навыки обучающихся. Также на занятиях математики была применена разработанная нами система задач на приложения производной.

На следующем этапе нашего педагогического эксперимента, после проведения пропедевтической работы, было предложено провести во всех группах одинаковую контрольную работу в качестве среза знаний по теме «Приложения производной».

Ниже приведен один из вариантов контрольной работы с решением.

Вариант контрольной работы по теме «Приложения производной»

Задание 1. Найдите производную функции.

y = $2^x - arctg\ x$

Решение.

По формуле суммы производных, находим

y' = $(2^x - arctg\ x)'$ = $(2^x)'$ – $(arctg\ x)'$

Далее, применяем формулы производных показательной и обратной тригонометрической функций:

y' = 2^x ln 2 $- \frac{1}{1+x^2}$

Ответ: y' = 2^x ln 2 $- \frac{1}{1+x^2}$

Задание 2. Вычислите приближенно $arctg$ 1,02 , заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Решение.

Функция y = $arctg\ x$. Нужно найти ее значение в точке $x = 1{,}02$. Приведем данное значение в виде следующей суммы:

$x = x_0 + \Delta x$

Значение x_0 и Δx подбираются так, чтобы в точке x_0 можно было вычислить значение функции и ее производной, а Δx было бы достаточно малой величиной. С учетом этого, делаем вывод, что

$x = 1{,}02 = 1 + 0{,}02$, то есть $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$.

Найдем значение функции у = $arctg\ x$ в точке $x_0\ = 1$:

$y(x_0) = y(1) = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$

Далее продифференцируем рассматриваемую функцию и найдем значение у'(x_0):

у' = ($arctg\ x$)' = $\frac{1}{1+x^2}$

Тогда у'(1) = $\frac{1}{2}$

Итак, $y(1{,}02) = arctg1{,}02 = y(1 + 0{,}02) \approx y(1) + y'(1) \cdot\ \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot$ $0{,}02 \approx\approx 0{,}7852 + 0{,}01\ = 0{,}7952$

Ответ: $arctg$ 1,02 $\approx 0{,}7952$

Задание 3. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = x^3 - x$ в точке $x_0\ =\ 0$.

Решение.

Из геометрического смысла производной, что производная функции $y = f(x)$, вычисленная при заданном значении x_0 , равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси O_x и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 , то есть

$f'(x_0) = tg\ \alpha$

Найдем производную от заданной функции:

$f'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$

в точке $x_0\ =\ 0$ имеем:

$f'(0) =\ -1$

Тогда окончательно получим, что

$tg\ \alpha =\ -1$

Ответ: $tg\ \alpha =\ -1$

Задание 4. Точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна ее скорость в момент времени t=1?

Решение.

Найдем скорость точки как первую производную от перемещения:

$$v(t) = x'(t) = (2t^3 - 3t)' = (2t^3)' - (3t)' = 2 \cdot (t^3)' - 3 \cdot (t)' =$$
$$= 2 \cdot 3t^2 - 3 \cdot 1 = 6t^2 - 3$$

В момент времени $t = 1$ скорость равна

$v\,(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 6 - 3 = 3$

Ответ: $v(1)$ = 3»

Задание 5. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $s(t) = -\,0{,}5t^3 + t + 2$ (м). Найти ускорение $a(t)$ точки в момент времени

$t \ = \ 2\,c$.

Решение.

Ускорение заданной точки найдем, взяв вторую производную от перемещения по времени: $a(t) = s''(t)$

Первая производная

$$s'^{(t)} = (-0{,}5t^3 + t + 2)' = (-0{,}5t^3)' + (t)' + (2)' = \ -1{,}5t^2 + 1 + 0 =$$
$$= \ -1{,}5t^2 + 1 \text{ (м/с)}$$

вторая производная $a(t) = s''(t) = (-1{,}5t^2 + 1)' = (-1{,}5t^2)' + (1)' =$ $-3t$ (м/с^2)

В момент времени t=2 с, $a(2) = -3 \cdot 2 = \ -6$ (м/с^2)

Ответ: $\mathrm{a}(2) = \ -6$ (м/с^2)

Задание 6. Найдите производную функции

$y = \cos(3x + 1)$

Решение.

Заданная функция является сложной и её производная равна произведению производной от косинуса на производную от его аргумента:

$$y' = (\cos(3x + 1))' = \ -\sin(3x + 1) \cdot (3x + 1)' =$$
$$= \ -\sin(3x + 1) \cdot (3 \cdot 1 + 0) = \ -3\sin(3x + 1)$$

Ответ: $y' = -3\sin(3x + 1)$.

После проведенной пропедевтической работы по результатам нового среза были получены следующие результаты: тема усвоена 80% обучающимися, остальные 20% с заданиями справились частично.

Таким образом, можно сделать следующие выводы: при изучении темы «Приложения производной» необходимо проводить с обучающимися пропедевтическую работу; с целью научить решать задачи на приложения производной и закрепить полученные умения и навыки обучающихся целесообразно применять разработанную систему задач на приложения производной; изучение теоретического материала приложения производной следует продолжать на всех уроках математики по данному разделу обучения и даже вне раздела, доводя полученные умения и навыки обучающихся до автоматизма.

Выводы по второй главе

В ходе проектирования методической системы обучения решению задач на приложения производной сделаны следующие выводы:

1) в процессе обучения решению задач на приложения производной целесообразно использовать следующие формы работы: работу в группах; коллективную работу; индивидуальную работу; работу в парах;

2) в рамках организации обучения решению задач на приложения производной преимущественно использовались «следующие методы работы: метод наглядности; практический метод; метод работы с интерактивной доской; лекция; дискуссия;

3) при работе над системой задач на приложения производной для профильного уровня подбирать задачи необходимо так, чтобы в процессе решения каждой задачи обучающиеся использовали применение изученных алгоритмов» [58];

4) с целью повышения уровня сформированности умений решения задач на приложения производной в старших классах следует обратить внимание на возможность реализации непрерывной пропедевтической работы в основной школе, направленной на формирование основных понятий данной темы через обобщенные представления, а также создание ассоциативных связей между ними. Данные пропедевтические меры позволят создать взаимосвязь между дисциплинами, смежными с математикой с дальнейшим развитием метапредметных компетенций.

5) проведен констатирующий и поисковый этап педагогического эксперимента. Результаты эксперимента показали, что при изучении темы «Приложения производной» необходимо проводить с обучающимися пропедевтическую работу; с целью научить решать задачи на приложения производной и закрепить полученные умения и навыки обучающихся целесообразно применять разработанную систему задач на приложения производной; изучение теоретического материала приложения производной следует продолжать на всех уроках математики по данному разделу обучения и даже вне раздела, доводя полученные умения и навыки обучающихся до автоматизма.

Заключение

В результате проведенного исследования были получены следующие результаты и выводы:

1. Рассмотрены теоретические аспекты изучения задач на приложения производной в курсе алгебры и начал математического анализа.

Выявлены основные цели и задачи обучения решению задач на данную тему.

2. Рассмотрена реализация межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы на основе задач на приложения производной с педагогической, дидактической и методической стороны.

В рамках данного исследования межпредметные связи выступают как фактор формирования содержания и структуры учебной дисциплины «Алгебра и начала анализа».

Реализация межпредметных связей избегает повторения в изучении теоретического материала, экономит время и создает благоприятные условия формирования общеучебных умений и навыков, помогает установить связи, повышает эффективность практической направленности обучения.

3. Описана методическая схема обучения решению задач на приложения производной.

В методической схеме были рассмотрены следующие компоненты:

- целевой;
- содержательный;
- организационный;
- контрольно – результативный.

4. Представлены методические рекомендации по реализации пропедевтической работы в основной школе, направленной на формирование умений решения задач на приложения производной.

5. Определены формы, методы и технологии организации учебной деятельности обучающихся при обучении решению задач на приложения производной.

6. Проанализированы типы и виды задач по исследуемой теме.

7. Разработана система задач на приложения производной.

Задания, подобранные для системы задач, характеризуются наличием наглядности либо в условии задачи, либо в ее решении.

Разработаны задания разного уровня сложности, с разделением на различные приложения (геометрия, физика, экономика и др.).

Данная система задач может применяться в качестве дополнения к профильному материалу.

8. Проведен анализ констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента.

Список используемой литературы

1. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 11 класс: углубл. уровень / [М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, В. Н. Соломин, А. Н. Головин]. —2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 2017.

2. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10—11 классы: учеб.пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [сост. Т. А. Бурмистрова]. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 2018. — 143 с.

3. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк./ А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2014.

4. Алгебра и начала анализа. 11 класс /С.М. Никольский, МК. Потопов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8 изд-е. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.

5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс /А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Н.Я. Виленкин; под ред. А.Г. Мордковича. – 9 изд-е. – М.: Мнемозина, 2012. – 343 с.

6. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 464 с.

7. Андрюхина, М.И. Межпредметная связь на уроках математики //Проблемы и перспективы развития образования в России. – 2013, № 22. – с.50-56.

8. Балл, Г. А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект / Г. А.Балл. – М.: Педагогика, 1990.

9. Башмаков, М.И. «Математика» учебник для учреждений начального и среднего проф. образования. – Издательский центр «Академия», 2011

10. Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования.- М.: Издательский центр «Академия», 2012

11. Бахтина, В.А. Методика преподавания темы "Производная и касательная" в классах с углубленным изучением математики: Дисс. к.п.н. 13.00.02. – Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования). – М., 1997. – 191 с.

12. Блаженских, Е.А. История становления производной и её приложения в науке: / Е.А. Блаженских// «Актуальные научные исследования в современном мире» Журнал - Переяслав, 2020. - Вып. 8(64), ч. 1, с.125-127

13. Блаженских, Е.А. Реализация межпредметных связей в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы на основе задач на приложения производной / Е.А. Блаженских // Вестник магистратуры, - 2021, № 4-3(115), с.57-59

14. Бякова, П.А. Задачи на тождественные преобразования тригонометрических выражений как средство развития алгоритмической культуры обучающихся: магистерская дис., - 2020. Режим доступа: https://dspace.tltsu.ru/bitstream/123456789/12674/1/Бякова%20П.А._%20Ммд-1701a.pdf

15. Васильев, Н. Б., Гутенмахер, В. Л. Прямые и кривые.— М.: Наука, 1998.

16. Виленкин, Н. Я. Алгебра – 10: для классов с углубленным изучением гуманитарных дисциплин. Часть 2 [Текст] / Н. Я. Виленкин. – Абакан: Редакционно-издательский отдел АГПИ имени Н.Ф.Катанова, 1993. – 165с.

17. Виленкин, О.С. Алгебра и математический анализ.11 кл.: Учеб. пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев, Мусатов, С.И. Шварцбурд. - 8-е изд., стереотип. - М.: Мнемозина, 2013. - 352 с.

18. Груденов, Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем.— М.: Просвещение, 1991.

19. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Изд-во «Вербум- М», «Издательский центр «Академия», 2003. —432 с.

20. Гурова, Л. Л. Психологический анализ решения задач / Л. Л. Гурова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та. – 1976. – 198 с.

21. Далингер, В. А. Элективные курсы в системе профильного обучения [Текст]: В.А. Далингер, А.Н. Зубков. // Вестник Омского государственного университета. – 2006. - №6. – с. 26 – 31.

22. Дубровская, Е.И. Методика обучения производной в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы/ Е.И. Дубровская // магистерская дис., - 2019. Режим доступа: https://dspace.tltsu.ru/bitstream/123456789/14191/1/Дубровская%20Е.И._Ммп-1701a.pdf

23. Епишева, О.Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Кн. для учителя / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. – М.: Просвещение, 1990. – 129 с.

24. Земляков, А., Ивлев, Б. 17 задач по анализу / А. Земляков, Б. Ивлев // Квант. – 1977. – № 1. – с. 36–39.

25. Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева; под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.

26. Клименкова, О.А. Реализация межпредметных связей экономики и математики в средней школе: На примере факультативного курса "Производная в экономике и математике": Дисс. к.п.н. 13.00.02. – Теория и

методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования). – М., 2003. – 144 с.

27. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

28. Колягин, Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика.— М.: Просвещение, 1995.

29. Коменский, Я. А. Избранные педагогические сочинения [Текст] / Я. А. Коменский.- В 2-х т. Т.1.- М.: Педагогика, 1982.- 656 с.

30. Кузнецов, С. А. Интегративный подход к решению основных проблем изучения математического анализа в школе и педагогическом вузе // ИТС. 2008. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/integrativnyy-podhod-k-resheniyu-osnovnyh-problem-izucheniya-matematicheskogo-analiza-v-shkole-i-pedagogicheskom-vuze (дата обращения: 25.10.2020).

31. Кулагин, П. Г. Межпредметные связи в процессе обучения [Текст]: П. Г. Кулагин. – М.: Просвещение. – 1981. – 95 с.

32. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность: учеб. Пособие / А. Н. Леонтьев. – Москва: Смысл: Академия, 2004. – 352 с.

33. Литвиненко, В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений: кн. для учителя. — М., Просвещение, 1991. 127 с.

34. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

35. Манвелов, С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. М.: Просвещение, 2002. - 175 с.

36. Максимова, В.Н. Межпредметные связи в учебно-воспитательном процессе современной школы. - М.: Просвещение, 1987, с. 52-67.

37. Максимова, В.Н. Межпредметные связи и совершенствование процесса обучения. – М.: Просвещение, 1984. – 143 с.

38. Марко, И.Г. Эксперимент как средство актуализации //Интеграция образования, 2013, № 2(71). – С. 62-66

39. Маскаева, А.М. Проектирование учебного содержания раздела «Начала математического анализа» в курсе средней школы // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2010. №5. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/proektirovanie-uchebnogo-soderzhaniya-razdela-nachala-matematicheskogo-analiza-v-kurse-sredney-shkoly (дата обращения: 15.10.2020).

40. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: учеб.пособие для студентов физ. -мат. фак. пед. Институтов/ Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканин Г.Л. — М.: Просвещение, 1975. — 462 с.

41. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе [Текст] / Мордкович А.Г. //Математика в школе. 2002 - № 6 – с.32-38.

42. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа.10-11 кл.: В двух частях. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. / А.Г. Мордкович. - 5-е изд. - М.: Мнемозина, 2014. - 375 с.

43. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.Учебник (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Издательство: Мнемозина, 2009. – 424 с.

44. Мордкович, А.Г. Математика 10 класс [Текст]: учебник для учащихся 10 классов общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова. – М.: Мнемозина, 2004 г. – 379 с.

45. Мордкович, А.Г. Математика 11 класс [Текст]: учебник для учащихся 11 классов общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова. – М.: Мнемозина, 2004 г. – 345 с.

46. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения элементов математического анализа в общеобразовательной школе [Текст] / А.Г. Мордкович // Математика в школе. – 2002. - №9. – С. 2-12.

47. Ожегов, С.И. Толковый словарь русского языка. 4-е изд., доп. / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова. – Москва: ИТИ Технологии, 2006. – 944 с.

48. Подготовка и защита бакалаврской работы, магистерской диссертации, дипломного проекта [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю. Н. Новиков. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2017. - 32 с. : ил. - (Учебники для вузов.Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-2267-8.

49. Плотникова, Е.Г. Межпредметные связи при обучении математике в вузе // Вестник МГОУ. Серия «Педагогика». № 2 / 2011. С. 95-100.

50. Попов, Н.И., Шустова, Е.Н. Ключевые задания как средство повышения уровня математических знаний школьников при изучении элементарных функций // Вестн. Том.гос. ун-та. 2020. №454. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/klyuchevye-zadaniya-kak-sredstvo-povysheniya-urovnya-matematicheskih-znaniy-shkolnikov-pri-izuchenii-elementarnyh-funktsiy (дата обращения: 25.09.2020).

51. Потапов, М. К. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 11 класс: пособие для учителей общеобразоват. организаций / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М. : Просвещение, 2013 — 256 с.

52. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]. – URL : http://fgosreestr. ru/ (Дата обращения 12.04.2020)

53. Пышкало, А. М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе [Текст] : автореф.дис. … д-ра пед. наук / А. М. Пышкало. – М., 1975 –60 с.

54. Рузавин, Г. И. Методология научного познания [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / Г. И. Рузавин. - Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. - 287 с. - ISBN 978-5-238-00920-9.Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11580.— ЭБС «IPRbooks».

55. Рушель, Р.О попытках введения профильной дифференциации в русской школе в 19-начале 20 века. \\ Математика. - 2006. - №14 - с.16-18

56. Саранцев, Г. И Методика обучения математике в средней школе / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

57. Смирнова, И.М. «Выпускная квалификационная работа» (методика обучения математике).- М., 2015. С. 37-48 / Электронный ресурс. Сайт УМК по геометрии авторов И.М. Смирновой и В.А. Смирнова. Раздел «Элементарная математика для студентов педагогических вузов» http://geometry2006.narod.ru/

58. Темербекова, А. А. Методика обучения математике [Электронный ресурс] : учеб.пособие / А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. - Санкт-Петербург : Лань, 2015. - 512 с. - ISBN 978-5-8114-1701-8.

59. Федорова, Н.Е. Изучение алгебры и начал математического анализа в 11 классе: кн. для учителя / Н. Е. Федорова, М. В. Ткачева. — М.: Просвещение, 2009 — 159 с.

60. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Приказ от 17 мая 2012 г. № 413. – URL:https://fgos.ru.

61. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи. М.: Московский психолого-соц. ин-т; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 1999. - 240 с.

62. Хинчин, А. Геометрический смысл производной / А. Хинчин // Квант. – 1977. – № 2. – С. 35–37.

63. Эскендаров, А.А., Казиева, Л.А. Интегрированные кроссворды-летучки для актуализации познавательного интереса к математике и реализации межпредметных связей //Вестник Дагестанского государственного университета. 2007. Вып. 1. – С. 65-66

64. Coad J., Keith J. Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school // University of Southampton Centre for Research in Mathematics Education Working Paper, 1999. p.1-7. 93 66. Ismail S.F.Z.H., Shahrill M., Mundia L. Factors Contributing to Effective Mathematics Teaching in SecondariveMathematy School in Brunei Darussalam // Procedia - Social and Behavioral Sciences. 2015. p. 474-481

65. Johnstone – Wilder P., Pimm D. Learning to teach Mathematics in the Secondary School a Companion to School Experience. London: Routledge, 1999. p. 297.

66. Lyndon R.C. Identities in two-valued calculi // Trans. Amer. Math. Soc. 71. N 3 (1951). P. 457-465.

67. Natsheh, I. Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. / Intisar Natsheh, Ronnie Karsenty // ZDM Mathematics Education, 2014 - № 46. P. 109-122.

68. Wathall, J.C. Mathematics: Analysis and Approaches, Higher Level / J.C. Wathall, J. Harcet, R. Harrison, // Oxford IB Diploma Programme, - Oxford University Press, 2019 – 855 p.