

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Тольяттинский государственный университет
Кафедра “Теоретическая механика”

**Руководство к решению задач
по теоретической механике для студентов, обучающихся
по специальности 180800**

Тольятти 2003



531
P 857

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Тольяттинский государственный университет

Кафедра "Теоретическая механика"

**Руководство к решению задач
по теоретической механике для студентов, обучающихся
по специальности 180800**



Тольятти 2003

УДК 531

Руководство к решению задач по теоретической механике для студентов, обучающихся по специальности 180800/Сост. Т.Е. Корнилова, С.Е. Архангельская – Тольятти: ТГУ, 2003. – С.104.

Даны краткие теоретические сведения и структурно-логические схемы решения задач (в виде планов) по каждой теме практического занятия раздела «Статика», «Кинематика», «Динамика механических и электромеханических систем» для специальности 180800. Кроме этого представлены варианты контрольных работ по темам «Теорема об изменении кинетической энергии механических систем» и «Свободные малые колебания механических систем (с построением электроаналоговой схемы), а также представлены варианты РГТ теме «Динамика электромеханических систем» и разобраны типовые задачи этой теме.

Составитель: к. ф-м н, доцент Корнилова Т.Е.
доцент Архангельская С.Е

Научный редактор: к. ф-м н, доцент Прасолов С.Г.

Рецензенты: д.п.н., к.т.н., профессор Н.П.Бахарев (ТГУ);
начальник отдела доводки трансмиссии департамента технического развития ОАО АВТОВАЗ, к.т.н. В.П.Петунин

Утверждено научно-методическим советом университета.

Допущено и рекомендовано учебно-методическим объединением по званию в области энергетики (Решение №18-01/УМО от 26 марта 2003г.

© Тольяттинский государственный университет

ISBN 5-8259-0140-X

Содержание

1. Статика.....	6
1.1. Введение в статику. Тела связей и их реакции. Определение момента силы относительно центра и оси. Условие равновесия. План решения задач.....	6
1.2. Равновесие системы тел.....	11
1.3. Равновесие тел с учетом сил трения. Два типа задач на трение скольжения.....	12
1.4. Центр тяжести.....	13
2. Кинематика.....	16
2.1. Введение в кинематику. Траектория, скорость, ускорение. Способы задания движения.....	16
2.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси и его кинематические характеристики.....	18
2.3. Определение плоскопараллельного движения. Основные кинематические характеристики движения тела. Определение скоростей точек тела методом мгновенно центра скоростей (м.ц.с).....	19
2.4. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Мгновенный центр ускорений. Планы решения задач.....	21
2.5. Сложное движение точки. Определение относительного, переносного и абсолютного движения точки. Скорость и ускорение точки в сложном движении. Ускорение Кориолиса. План решения задач.....	25
2.6. Цилиндрические и конические зубчатые передачи. Формулы Виллиса.....	27
3. Динамика механических и электромеханических систем.....	30
3.1. Механическая система. Понятие внешних, внутренних сил. Понятие центра масс механической системы, момента инерции относительно оси. Теорема Гюйгенса.....	30
3.2. Теорема о движении центра масс. Следствие из теоремы. Планы решения задач.....	32
3.3. Момент количества движения точки, механической системы, тела. Теорема об изменении момента количества движения (кинематического момента) относительно центра и оси. Уравнение вращения тела. Физический маятник. Планы решения задач.....	34
3.4. Кинетическая энергия точки, тела, механической системы. Работа. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. План решения задач.....	36
3.5. Определение истинного и возможного перемещений. Число степеней свободы. Кинематический метод связей возможных перемещений. Принцип возможных перемещений. План решения задач.....	39

3.6.Обобщенные координаты, скорости, силы. Потенциальная энергия. Уравнения Лагранжа II рода. План решения задач.....	41
3.7.Особенности малых колебаний механических систем. Свободные, затухающие и вынужденные колебания с одной степенью свободы.....	43
3.8.Уравнение Лагранжа II рода и электро-аналоговая схема. Подбор масштабных коэффициентов и определение параметров электрической схемы.....	46
3.9.Электромеханические системы. Уравнения Лагранжа-Максвелла. План решения задач.....	48
Используемая литература.....	50
Приложение 1.....	51
Приложение 2.....	63
Приложение 3.....	74
Приложение 4.....	83
Приложение 5.....	92

Предисловие

Основным условием развития творческой активности студентов, обучающихся в ВУЗе, является организация их учебного процесса по каждой дисциплине. В ней кроется основной резерв повышения эффективности обучения и качества подготовки специалистов. В современной высшей школе учебный процесс все в большей мере приобретает характер самостоятельного труда студентов, организуемого и управляемого преподавателем. В связи с этим возникает необходимость в разработке и внедрении в учебный процесс методики организации самостоятельной работы студентов по изучаемым предметам.

По дисциплине «Теоретическая механика» (одной из сложных общетехнических дисциплин) была разработана методика проведения практических занятий для специальности 180800 по всем разделам курса. Эти методические указания содержат краткую теорию, основные формулы и структурно-логические схемы решения задач (в виде планов) по каждой изучаемой теме. Применение такой методики ведения практических занятий освобождает время для рассмотрения задач, имеющих специальную направленность. Так для студентов специальности 180800 введен раздел по изучению движения электро-механических систем с помощью уравнений Лагранжа-Максвелла. По этой теме разработаны РГР, которые представлены в приложении и разобраны типовые задачи. Так же в приложении приведены варианты контрольных работ по темам: «Теорема об изменении кинетической энергии механических систем» и «Свободные малые колебания механических систем (с построением электроаналоговой схемы)».

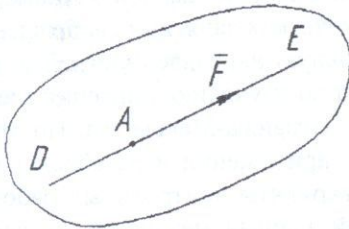
І. Статика

1.1. Введение в статику. Тела связей и их реакции. Определение момента силы относительно центра и оси. Условие равновесия. План решения задач

Статика – раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике силой.

Сила – величина векторная. Ее действие на тело определяется модулем, направлением, точкой приложения.



Прямая DE , вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Силу можно переносить вдоль линии ее действия.

В статике рассматривают свободные тела. На практике мы имеем дело с несвободными телами.

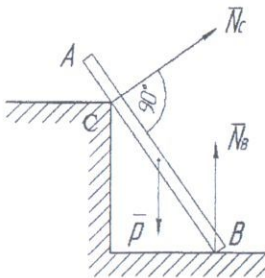
Всякое несвободное тело можно сделать свободным, заменив действие связей на тело их реакциями.

Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную тому направлению, по которому связь препятствует движению тела.

Величины этих реакций наперед неизвестны и определяются из условий равновесия.

Тела связей и их реакции

1. Гладкая опорная поверхность и опирание на угол.



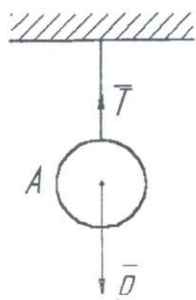
О.Р. (объект равновесия) – балка AB .

В.С. (внешние силы) – \bar{P} .

Т.С. (тела связей) – гладкая поверхность в т. B ,
угол в т. C .

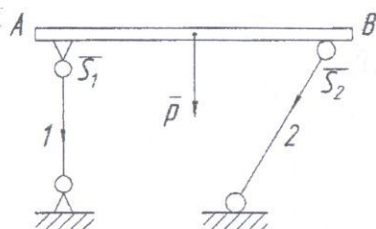
Р.Т.С. (реакции тел связей) – $\overline{N}_c, \overline{N}_B$.

2. Нить.



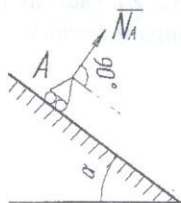
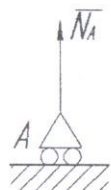
О.Р. – тело A .
 В.С. – \bar{P} .
 Т.С. – нить.
 Р.Т.С. – \bar{T} .

3. Стержневая опора.



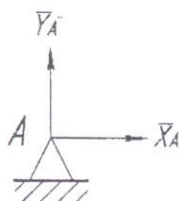
О.Р. – балка AB .
 В.С. – \bar{P} .
 Т.С. – стержни 1,2.
 Р.Т.С. – \bar{S}_1, \bar{S}_2 .

4. Шарнирно-подвижная опора.



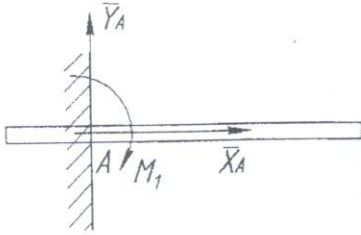
Р.Т.С. – \bar{N}_A .

5. Шарнирно-неподвижная опора.



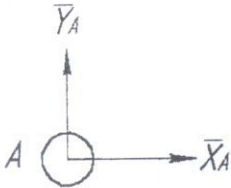
Р.Т.С. – \bar{X}_A, \bar{Y}_A .

6. Жесткая заделка в т. A .



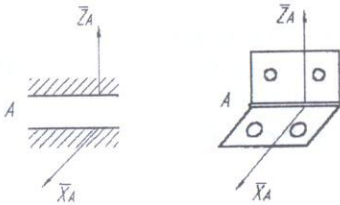
Р.Т.С. - $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_1$.

7. Плоский шарнир.



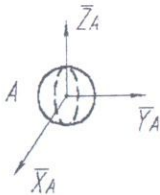
Р.Т.С. - \bar{X}_A, \bar{Y}_A .

8. Цилиндрический шарнир и дверная петля.



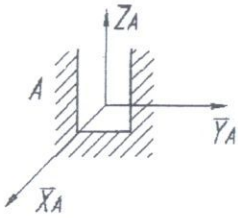
Р.Т.С. - \bar{X}_A, \bar{Z}_A , (всегда отсутствует реакция по оси шарнира и петли).

9. Сферический шарнир.



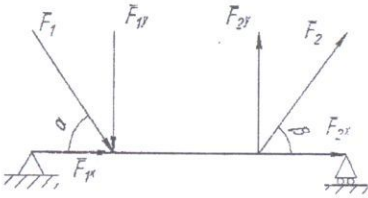
Р.Т.С. - $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$.

10. Подпятник.



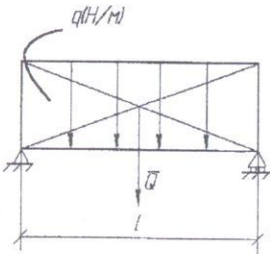
Р.Т.С. - $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$.

Разложение наклонной силы на составляющие в точке ее приложения

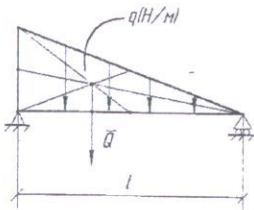


$$\begin{cases} F_{1X} = F_1 \cos \alpha \\ F_{1Y} = F_1 \sin \alpha \end{cases} ; \begin{cases} F_{2X} = F_2 \cos \beta \\ F_{2Y} = F_2 \sin \beta \end{cases}$$

Распределенная нагрузка



$$Q = q \cdot l.$$

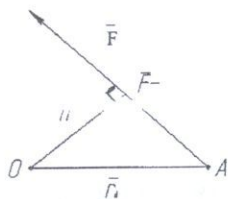


$$Q = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l.$$

Распределенная нагрузка задается интенсивностью $q \left(\frac{H}{M} \right)$.

Действие распределенной нагрузки заменяется равнодействующей равной площади фигуры, изображающей данную нагрузку. Эта равнодействующая приложена в центре тяжести фигуры и направлена в сторону действия распределенной нагрузки.

Момент силы относительно центра



Векторная формула момента силы относительно центра O имеет вид:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F},$$

модуль M_0 равен:

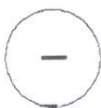
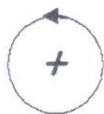
$$M_0 = \pm F \cdot h,$$

где h – плечо силы.

Плечо h силы F есть перпендикуляр, опущенный из центра O на линию действия силы.

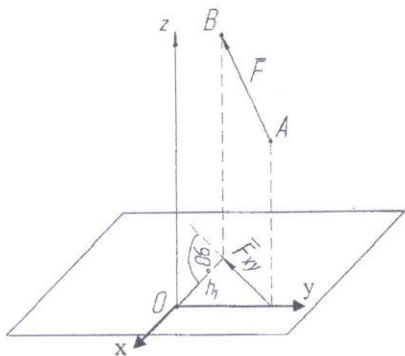
Если сила F проходит через центр O , то момент равен нулю.

Правило знаков



Руку ведем так: центр \rightarrow плечо \rightarrow в сторону действия силы.

Момент силы относительно оси



Величина момента силы \vec{F} относительно оси Z определяется формулой:

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h_1,$$

где \vec{F}_{xy} – проекция силы \vec{F} на плоскость xy , которая перпендикулярна оси z .

h_1 – плечо силы \vec{F}_{xy} относительно т. O .

Если сила параллельна оси, либо ее пересекает, то момент силы относительно этой оси равен нулю.

Момент берется со знаком плюс, если, глядя с положительного направления

оси видеть поворот силы \vec{F}_{xy} относительно т. O против часовой стрелки, в противном случае – знак минус.

Уравнения равновесия произвольной системы сил

1. Плоская система сил.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum M_{kO} = 0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

За центр O берем ту точку, в которой сходится наибольшее число неизвестных реакций.

2. Пространственная система сил.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum F_{kz} = 0; \\ \sum M_{kx} = 0; \\ \sum M_{ky} = 0; \\ \sum M_{kz} = 0. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Начало координат помещаем в ту точку, в которой сходится наибольшее число неизвестных реакций.

План решения задач

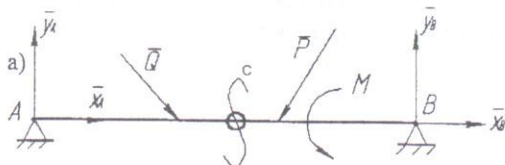
1. Выделяем объект равновесия.
2. Строим систему координат.
3. Расставляем внешние силы (распределенную нагрузку заменяем равнодействующей, наклонную силу раскладываем по осям координат в точке ее приложения).
4. Выделяем тела связей.
5. Расставляем реакции тел связей (наклонную реакцию раскладываем по осям координат в точке ее приложения).
6. Составляем уравнения равновесия (1.1.1 или 1.1.2).
7. Решая полученную систему уравнений, определяем неизвестные реакции.

1.2. Равновесие системы тел

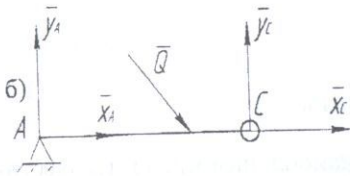
Система тел – это конструкция, состоящая из нескольких тел, связанных между собой гибкой связью.

Рассмотрим два способа решения задач.

Первый способ

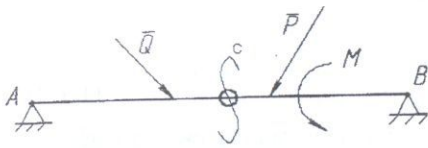


Рассматривается равновесие всей системы целиком (схема *a*), при этом реакции в точке соединения тел отсутствуют, и плоский шарнир телом связи не является.

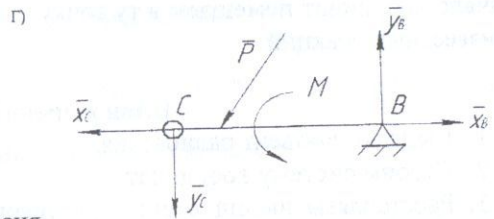
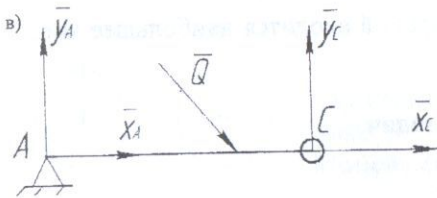


Затем система разрезается по точке соединения тел (т.С) и рассматривается равновесие наименее нагруженной части системы (схема б), при этом плоский шарнир уже является телом связей, и в т.С расставляются реакции.

Второй способ



Система сразу разрезается по точке соединения тел (т.С) и рассматривается равновесие каждой части в отдельности (схемы в и г), при этом реакции в точке соединения расставляются во взаимно противоположные стороны, т.к. силы действия равны силам противодействия.



Составление уравнений равновесия проводится по обычному плану решения задач п.1.1.1.

1.3. Равновесие тел с учетом сил трения.

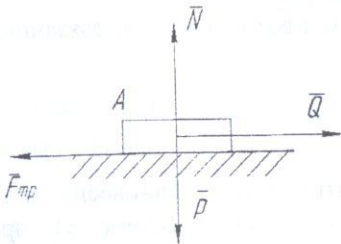
Два типа задач на трение скольжения

Трение скольжения

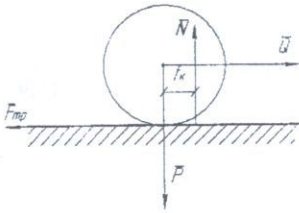
Сила трения скольжения в покое всегда направлена в сторону, противоположную той, куда силы стремятся сдвинуть тело, и изменяется в пределах:

$$0 \leq F_{np} \leq F_{np},$$

где $F_{np} = fN$; f – коэффициент трения скольжения, который является безразмерной величиной; N – нормальная реакция в точке приложения силы трения скольжения.



Трение качения



Трение качения возникает при движении круглого тела по поверхности. При этом нормальная реакция сдвигается в сторону предполагаемого движения тела на величину f_k , которая является коэффициентом трения качения, измеряемого в единицах длины. В результате этого, образуется пара сил (P, N) , действие которой характеризуется моментом $M_{\text{кач}}$:

$$M = f N.$$

причем $M_{\text{кач}}$ направлен в сторону противоположную предполагаемому движению тела.

Два типа задач на трение скольжения

Первый тип

Рассматривается предельное положение равновесия, составляются обычные уравнения равновесия статики по плану п.1.1 и к ним добавляется соотношение

$$F_{\text{тр}} = fN.$$

Затем решается полученная система 4-х уравнений.

Второй тип

Определяются условия всевозможных положений равновесия.

При этом рассматривается равновесие объекта в его предельном положении и к обычным уравнениям равновесия статики добавляется неравенство

$$F_{\text{тр}} \leq fN,$$

причем величина $F_{\text{тр}}$ определяется из уравнений равновесия, а неравенство служит для определения условий возможности равновесия объекта. Уравнения равновесия составляются по плану п.1.1.

1.4. Центр тяжести тела

Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующих сил тяжести, действующих на частицы данного тела при любом положении тела в пространстве.

Координаты центра тяжести тела определяются по формулам

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k X_k}{P}; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k Y_k}{P}; Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k Z_k}{P}, \quad (1.4.1)$$

где P_k – сила тяжести k -й точки тела; X_k, Y_k, Z_k – координаты k -й точки тела.

Для однородных тел формулы (1.4.1) имеют вид:

а) объемные тела

$$X_c = \frac{\sum V_k X_k}{V}; Y_c = \frac{\sum V_k Y_k}{V}; Z_c = \frac{\sum V_k Z_k}{V}; \quad (1.4.2)$$

б) плоские фигуры

$$X_c = \frac{\sum S_k X_k}{S}; Y_c = \frac{\sum S_k Y_k}{S}; Z_c = \frac{\sum S_k Z_k}{S}; \quad (1.4.3)$$

в) стержневые системы

$$X_c = \frac{\sum L_k X_k}{L}; Y_c = \frac{\sum L_k Y_k}{L}; Z_c = \frac{\sum L_k Z_k}{L}, \quad (1.4.4)$$

где X_k, Y_k, Z_k – координаты центра тяжести, соответственно k -го объема тела, площади фигуры, стержня; V_k, S_k, L_k – соответственно объем, площадь, длина k -й части тела

$$V = \sum V_k, S = \sum S_k, L = \sum L_k.$$

Способы определения центра тяжести тела

1. Метод симметрии

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

2. Метод разбиения

Тело разбивается на конечное число частей, для каждой из которых известно положение центра тяжести, затем центр тяжести всего тела определяется по формулам (1.4.1) - (1.4.4), причем, если тело имеет вырезы или пустоты, то для этих частей величина объема или площади в формулах (1.4.2), (1.4.3) берется со знаком минус.

3. Метод интегрирования

Если тело нельзя разбить на конечное число частей, положение центров тяжести которых известно, то тело разбивают на бесконечно малые элементы и в формулах (1.4.1)-(1.4.4) от суммирования переходят к интегрированию. Например, для плоских фигур формулы (1.4.3) примут вид:

$$X_c = \int_{(S)} X dS; Y_c = \int_{(S)} Y dS; Z_c = \int_{(S)} Z dS.$$

План решения задач

1. Разбить тело (фигуру) на элементы и пронумеровать их.
2. Отметить на чертеже центр тяжести каждого элемента.
3. Построить систему координат
4. Записать нужную расчетную формулу из (1.4.1) - (1.4.4)
5. Построить и заполнить таблицу вида:

№ эле- мен- та	P _k (V _k , S _k , L _k)	X _k	Y _k	Z _k	P _x X _k (V _k X _k ; S _k X _k ; L _k X _k)	P _k Y _k (V _k Y _k ; S _k Y _k ; L _k Y _k)	P _k Z _k (V _k Z _k ; S _k Z _k ; L _k Z _k)
Σ	ΣP _k (ΣV _k ; ΣS _k ; ΣL _k)				ΣP _x X _k (ΣV _k X _k ; ΣS _k X _k ; ΣL _k X _k)	ΣP _k Y _k (ΣV _k Y _k ; ΣS _k Y _k ; ΣL _k Y _k)	ΣP _k Z _k (ΣV _k Z _k ; ΣS _k Z _k ; ΣL _k Z _k)

6. Подсчитать координаты X_c, Y_c, Z_c по одной из выбранных формул (1.4.1)-(1.4.4).
7. Отметить на чертеже т.С (X_c, Y_c, Z_c).

II. Кинематика

2.1. Введение в кинематику. Траектория, скорость, ускорение. Способы задания движения

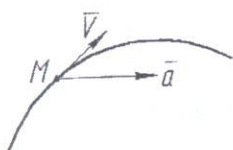
Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел без учета их массы и действующих на них сил.

Под движением в механике понимают изменение с течением времени положения данного тела относительно других тел в пространстве. Для этого вводят систему координат.

Кинематически задать движение – значит задать закон движения точки относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

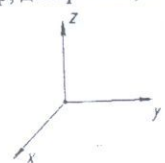
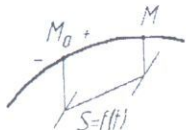
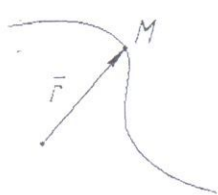
Основными кинематическими характеристиками являются: траектория, скорость, ускорение.

Траекторией точки называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка.



Быстрота и направление движения точки по траектории определяется вектором скорости \vec{V} ; векторная величина \vec{a} , характеризующая изменение модуля и направления \vec{V} с течением времени, называется ускорением точки.

Способы задания движения

Координатный	Естественный	Векторный
Задаются		
1. Система координат (например, декартовая).  2. Закон движения точки: $\begin{cases} X = f_1(t); \\ Y = f_2(t); \\ Z = f_3(t). \end{cases} \quad (2.1.1)$	1. Уравнение траектории движения точки. 2. Начало движения на траектории. 3. Направление движения по траектории. 4. Закон движения точки. $S = f(t)$ 	1. Полюс (т. O). 2. Закон движения точки $\vec{r} = \vec{f}(t)$ 

Переход от координатного способа задания к естественному и векторному

1. Из системы (2.1.1) исключаем t и определяем уравнение траектории движения точки (для плоского случая $Y = f(x)$).

2. Подставляя $t=0$ в систему (2.1.1), определяем координаты т.М:

$$M_0 \begin{cases} x_0 = \\ y_0 = \end{cases}$$

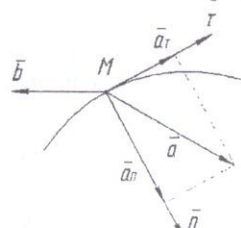
3. Исследуя поведение функций системы (2.1.1) при $t > 0$, определяем направление движения точки по траектории.

4. Закон движения определяем по формуле:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Кинематические характеристики способов задания движения

Координатный	Естественный	Векторный
Скорость		
$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k},$ $\begin{cases} V_x = \dot{X}; \\ V_y = \dot{Y}; \\ V_z = \dot{Z}. \end{cases}$ $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$	$V = \dot{S}.$ <p>Вектор скорости направляется по касательной к траектории в сторону движения точки.</p>	$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$
Ускорение		
$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$ $\begin{cases} a_x = \dot{V}_x; \\ a_y = \dot{V}_y; \\ a_z = \dot{V}_z; \end{cases}$ $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$	<p>Естественные оси координат</p> 	$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$

Эта система координат связывается с движущейся точкой и определяется осями $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$.

$$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau,$$

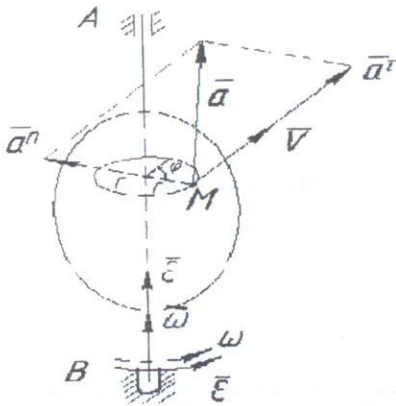
где $a^n = \frac{V^2}{\rho}$ (ρ – радиус кривизны в т. М), $a^\tau = \dot{V}$;

$$a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2}.$$

Вектор a^n направляется по оси \vec{n} . Вектор a^τ – по оси $\vec{\tau}$, для ускоренного движения он совпадает с \vec{V} , для замедленного – противоположен \vec{V} .



2.2. Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси и его кинематические характеристики



Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое, при котором две точки A и B , принадлежащие телу или неизменно с ним связанные, остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через эти точки называется осью вращения.

Кинематические характеристики вращательного движения

Угловые характеристики тела	Линейные характеристики точек тела
<p>1. Закон вращения тела $\varphi = f(t)$.</p> <p>2. Угловая скорость тела $\omega = \dot{\varphi}$.</p> <p>Вектор ω направляется по оси вращения в ту сторону, чтобы с его конца было видно вращение тела против часовой стрелки.</p> <p>3. Угловое ускорение тела $\varepsilon = \dot{\omega}$.</p> <p>Вектор ε направляется по оси вращения, для ускоренного движения он совпадает с ω, для замедленного противоположен ω.</p> <p>4. Закон равнопеременного вращения тела</p> $\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}; \\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \end{cases}$	<p>1. Линейная скорость точки $V = \omega r$.</p> <p>Вектор \vec{V} направляется по касательной к траектории движения точки.</p> <p>2. Линейное ускорение точки $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$,</p> <p>причем $a^n = \omega^2 r$</p> <p>(вектор \vec{a}^n направляется к центру окружности), $a^\tau = \varepsilon r$</p> <p>(вектор \vec{a}^τ направляется по касательной к окружности, для ускоренного движения совпадает с \vec{V}, для замедленного – противоположен \vec{V}).</p> $a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2}.$
<p>5. Передача вращений</p> $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{Z_2}{Z_1},$ <p>где r_1, r_2 – радиусы соответствующих колес; Z_1, Z_2 – число зубьев соответствующих колес.</p>	

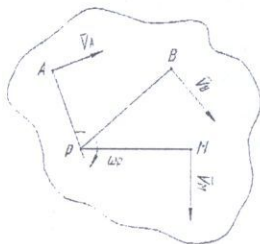
2.3. Определение плоскопараллельного движения. Основные кинематические характеристики движения тела. Определение скоростей точек тела методом мгновенного центра скоростей (м.ц.с.). Теорема о проекции скоростей двух точек тела. План решения задач

Плоскопараллельным движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Основными кинематическими характеристиками этого движения являются скорость и ускорение поступательного движения полюса, а также угловая скорость и ускорение во вращательном движении вокруг полюса.

Полюс это точка, для которой известны скорость и ускорение.

Одним из способов определения линейных скоростей точек тела при плоскопараллельном движении является способ, основанный на понятии о мгновенном центре скоростей.



Мгновенным центром скоростей (м.ц.с.) точек тела называется точка P , скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Правило построения м.ц.с.

Для построения м.ц.с. необходимо знать направление скоростей двух точек тела, затем восстановить перпендикуляры к направлению скоростей в точках A и B . Точка пересечения перпендикуляров даст м.ц.с. (т. P).

Мгновенная угловая скорость ω_p и скорость т. B определяются по формулам:

$$\omega_p = \frac{V_A}{AP}, \quad (2.3.1)$$

$$V_B = \omega_p \cdot BP. \quad (2.3.2)$$

Правило построения скорости по известному м.ц.с.

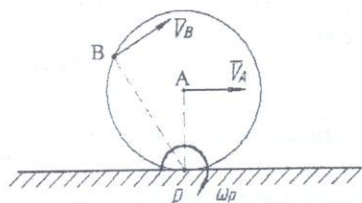
Чтобы построить скорость любой т. M плоской фигуры, необходимо т. P соединить с т. M , а затем к этой прямой в т. M восстановить перпендикуляр в сторону ω_p , тогда

$$V_M = \omega_p \cdot PM. \quad (2.3.3)$$

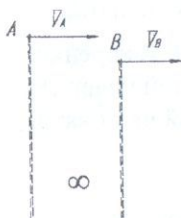
Частные случаи определения м.д.с.

1. Качение без скольжения плоской фигуры по неподвижной поверхности.

М.д.с. (т.Р) лежит в точке касания колеса с неподвижной поверхностью. Вычисления проводим по формулам (2.3.1) и (2.3.2).



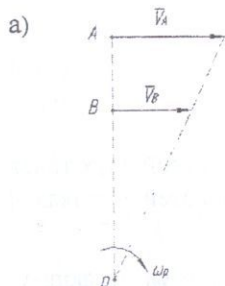
2. $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B \perp \overline{AB}$



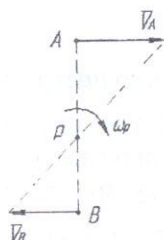
М.д.с. (т.Р) лежит в бесконечности. Величина $\omega_p = 0$, и скорости всех точек тела в данный момент равны между собой. Имеем мгновенное поступательное движение, т.е.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_b = \dots \quad (2.3.4)$$

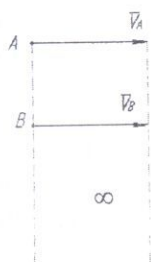
3. $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B \perp \overline{AB}$



б)



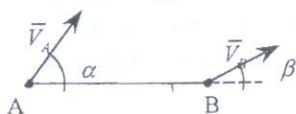
в)



В случаях а) и б) вычисления проводим по формулам (2.3.1) и (2.3.2), в случае в) выполняется пункт 2.

Теорема о проекции скоростей двух точек плоской фигуры

Проекция скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой:



$$V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta. \quad (2.3.5)$$

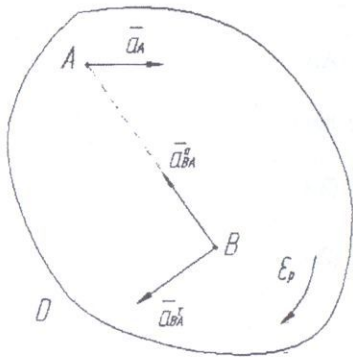
План решения задач

1. Изображаем механизм в заданном положении.
2. Проводим анализ движения звеньев механизма (анализ начинаем с того звена, движение которого задано).
3. Определение скоростей точек звена, совершающего плоскопараллельное движение:
 - а) строим траектории и скорости двух точек этого звена;
 - б) подсчитываем модуль скорости одной точки;
 - в) строим м.ц.с. (по правилу построения);
 - г) находим ω_p по формуле (2.3.1);
 - д) показываем ω_p на чертеже;
 - е) определяем линейную скорость точки по формуле (2.3.2) (если необходимо строим эту скорость на чертеже).

Примечание

1. Если в задаче не требуется построения м.ц.с. и определения величины ω_p , то линейную скорость точки вычисляем по формуле (2.3.5).
2. Если механизм имеет несколько звеньев, совершающих плоскопараллельное движение, то для каждого звена повторяем 3-ий пункт плана.
3. При переходе от одного звена к другому определяем скорости общих точек этих звеньев.

2.4. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Мгновенный центр ускорений. Планы решения задач



Ускорение любой точки B плоской фигуры складывается из ускорения полюса (т. A) и ускорения точки B вокруг полюса:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r}, \quad (2.4.1)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{a_{BA}^n} &= \omega_p^2 \cdot AB; \\ \overline{a_{BA}^r} &= \varepsilon_p \cdot AB, \end{aligned} \right. \quad (2.4.2)$$

$$(2.4.3)$$

причем $\overline{a_{BA}^n}$ - направляется от т. B к полюсу A ;

$\overline{a_{BA}^r}$ - направляется перпендикулярно к прямой BA в сторону ε_p .

Если полюс движется по криволинейной траектории, то (2.4.1) записывается в виде:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^r} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r}. \quad (2.4.4)$$

При решении задач основную сложность составляет определение величины ε_p . По способам определения ε_p задачи можно разделить на несколько типов:

При решении задач основную сложность составляет определение величины ε_p . По способам определения ε_p задачи можно разделить на несколько типов:

- 1) задана прямолинейная траектория точки, ускорение которой требуется определить;
- 2) задана криволинейная траектория точки, ускорение которой требуется определить;
- 3) определение ускорения катящегося без скольжения колеса;
- 4) заданы ускорения двух точек тела, требуется определить угловую скорость, угловое ускорение тела и линейное ускорение третьей точки тела.

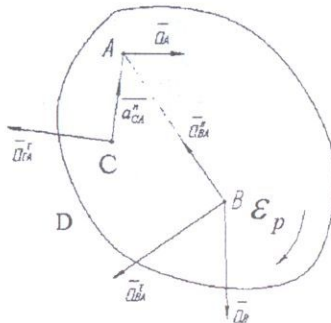
План решения задач 1-3 типов

1. Изображаем механизм в заданном положении.
2. Проводим анализ движения звеньев механизма.
3. Для звена, совершающего плоскопараллельное движение, выбираем полюс.
4. Определяем по модулю и строим на чертеже скорость и ускорение полюса.
5. Записываем векторное уравнение (2.4.1) или (2.4.4).
6. Определение a_{BA}^n :
 - а) строим на чертеже вектора скоростей двух точек звена;
 - б) строим м.ц.с.;
 - в) вычисляем ω_p по формуле (2.3.1);
 - г) показываем направление ω_p на чертеже;
 - д) вычисляем a_{BA}^n по формуле (2.4.2);
 - е) строим вектор $\overline{a_{BA}^n}$ на чертеже;
7. Определение a_B и a_{BA}^r :

1-й тип	2-й тип	3-й тип
а) строим $\overline{a_{BA}^r}$ на чертеже ($\overline{a_{BA}^r} \perp AB$ и направлен в любую сторону); б) строим $\overline{a_B}$ на чертеже ($\overline{a_B}$ направляется по прямолинейной траектории т.В в любую сторону); в) строим в т.В систему координат; г) проектируем (2.4.1) или (2.4.4) на оси координат; д) из полученной системы уравнений определяем a_B и a_{BA}^r ;	а) строим $\overline{a_{BA}^r}$ на чертеже ($\overline{a_{BA}^r} \perp AB$ и направлен в любую сторону); б) уравнение (2.4.1) или (2.4.4) заменяем уравнением $\overline{a_B^n} + \overline{a_B^r} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r} \quad (2.4.5)$ или $\overline{a_B^n} + \overline{a_B^r} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^r} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r}; \quad (2.4.6)$ в) определяем a_B^n по формуле: $a_B^n = \frac{V_B^2}{\rho};$ г) строим $\overline{a_B^n}$ на чертеже (его направляем по нормали к центру кривизны траектории т.В); д) строим $\overline{a_B^r}$ на чертеже ($\overline{a_B^r}$ направляется по касательной к траектории т.В в любую сторону);	а) определяем ε_p по формуле: $\varepsilon_p = \frac{a_A^r}{Ap}$, где a_A^r - касательная ускорения центра колеса; б) показываем ε_p на чертеже (его ориентируем по направлению a_A^r); в) вычисляем a_{BA}^r по формуле (2.4.3); г) строим $\overline{a_{BA}^r}$ на чертеже; д) строим систему координат в т.В;

1-й тип	2-й тип	3-й тип
<p>е) показываем истинное направление $\overline{a_B}$ и $\overline{a_{BA}^r}$ на чертеже;</p> <p>ж) определяем ε_p из формулы (2.4.3);</p> <p>з) строим ε_p на чертеже (его ориентируем по истинному направлению $\overline{a_{BA}^r}$).</p>	<p>е) строим систему координат в т.В;</p> <p>ж) проектируем (2.4.5) или (2.4.6) на оси координат;</p> <p>з) из полученной системы уравнений определяем a_{BA}^r и a_{BA}^r;</p> <p>и) показываем истинное направление $\overline{a_{BA}^r}$ и $\overline{a_{BA}^r}$ на чертеже;</p> <p>к) определяем ε_p из формулы (2.4.3)</p> <p>л) показываем ε_p на чертеже (его ориентируем по истинному направлению $\overline{a_{BA}^r}$);</p> <p>м) определяем модуль a_B по формуле: $a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^r)^2}$.</p>	<p>е) проектируем уравнение (2.4.1) или (2.4.4) на оси координат и определяем:</p> $\begin{cases} a_{BX} = \\ a_{BY} = \end{cases};$ <p>ж) определяем модуль a_B по формуле:</p> $a_B = \sqrt{a_{BX}^2 + a_{BY}^2}.$

План решения задач 4-го типа



1. Определение ω_p и ε_p тела D:

- выбираем любую из заданных точек за полюс (например, т.А);
- записываем уравнение (2.4.1) или (2.4.4) для другой точки (т.В);
- строим на чертеже a_{BA}^n и a_{BA}^r ;
- строим систему координат в т.В;
- проектируем уравнение (2.4.1) или (2.4.4) на оси координат;
- из полученной системы уравнений определяем a_{BA}^n и a_{BA}^r ;
- показываем истинное направление $\overline{a_{BA}^r}$ на чертеже;
- определяем ω_p и ε_p из формул (2.4.2) и (2.4.3);
- показываем ε_p на чертеже (его ориентируем по истинному направлению $\overline{a_{BA}^r}$).

2. *Определение линейного ускорения третьей точки (т.С):*

- а) выбираем полюс (например, т.А);
- б) записываем для т.С уравнение (2.4.1) или (2.4.4);
- в) подсчитываем $\overline{a_{CA}^n}$ и $\overline{a_{CA}^r}$ по формулам (2.4.2) и (2.4.3) соответственно;
- г) строим $\overline{a_{CA}^n}$ и $\overline{a_{CA}^r}$ на чертеже;
- д) строим в т. С систему координат;
- е) проектируем уравнение (2.4.1) или (2.4.4), записанное для т.С, на оси координат и определяем:

$$\begin{cases} a_{Cx} = & ; \\ a_{Cy} = & ; \end{cases}$$

ж) подсчитываем полное ускорение т.С по формуле:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}.$$

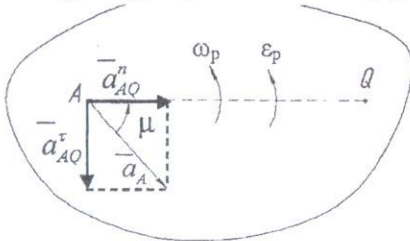
Мгновенный центр ускорений

При непоступательном движении плоской фигуры в каждый момент времени имеется т.О, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорения (м.ц.у.).

Тогда ускорение любой точки А определится соотношением

$$\overline{a}_A = \overline{a}_{AQ}^n + \overline{a}_{AQ}^r,$$

где \overline{a}_{AQ}^n и \overline{a}_{AQ}^r определяются из формул (2.4.2) и (2.4.3) соответственно.



Положение м.ц.у. определяется углом μ :

$$\mu = \arctg \frac{|\epsilon_p|}{\omega_p^2} \quad (2.4.7)$$

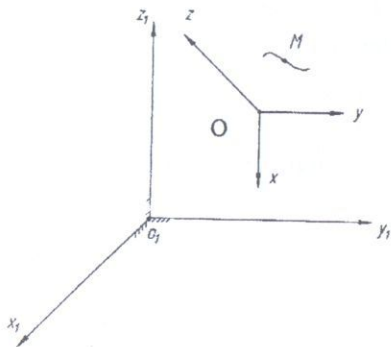
и расстоянием AQ:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \omega_p^2}}. \quad (2.4.8)$$

Частные случаи построения м.ц.у.

1. Если $\epsilon_p = 0$, тогда $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\epsilon_p|}{\omega_p^2} = 0$ и $\mu = 0$, т.е. $\overline{a}_A = \overline{a}_{AQ}^n$, причем ускорение любой точки тела направлено от т.А к м.ц.у. (т.О) и по модулю $a_A = a_{AQ}^n = \omega_p^2 \cdot AQ$. Следовательно м.ц.у. в этом случае можно найти как точку пересечения прямых, по которым направлены ускорения двух точек тела.
2. Если $\omega_p = 0$, тогда $\operatorname{tg} \mu = \infty$ и $\mu = 90^\circ$, т.е. $a_A = a_{AQ}^r = \epsilon_p \cdot AQ$, причем \overline{a}_A перпендикулярно прямой AQ. Значит, в этом случае м.ц.у. можно найти как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из двух точек тела к ускорениям этих точек.

2.5. Сложное движение точки. Определение относительного, переносного и абсолютного движений точки. Скорость и ускорение точки в сложном движении. Ускорение Кориолиса. План решения задач



Движение т.М относительно подвижной системы отсчета называется *относительным движением*.

Движение т.М относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ называется *абсолютным движением*.

Движение подвижной системы отсчета $OXYZ$ вместе с зафиксированной в ней т.М относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ называется *переносным движением*.

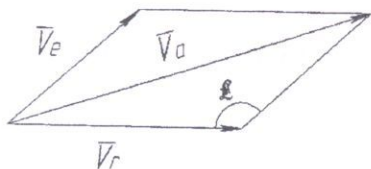
В теории сложного движения точки приняты следующие обозначения:

$\overline{V}_r, \overline{a}_r$ - скорость и ускорение в относительном движении;

$\overline{V}_e, \overline{a}_e$ - скорость и ускорение в переносном движении;

$\overline{V}_a, \overline{a}_a$ - скорость и ускорение в абсолютном движении.

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей. Значит, абсолютная скорость является диагональю параллелограмма, построенного на векторах \overline{V}_e и \overline{V}_r как на сторонах, т.е.:



$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e \quad (2.5.1)$$

Вектора \overline{V}_e и \overline{V}_r строятся по касательным к соответствующим траекториям движения. Модуль V_a определяется либо по теореме Пифагора, либо по теореме косинусов, либо через проекции уравнения (2.5.1) на оси координат:

$$\begin{cases} V_{ax} = V_{rx} + V_{ex}; \\ V_{ay} = V_{ry} + V_{ey}; \\ V_{az} = V_{rz} + V_{ez}. \end{cases}$$

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2}.$$

Абсолютное ускорение точки при сложном движении равно векторной сумме переносного, относительного и кориолисового ускорений, т.е.

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^t + \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^t + \overline{a}_{кр}, \quad (2.5.2)$$

где $\overline{a}_r^n + \overline{a}_r^t = \overline{a}_r$; $\overline{a}_e^n + \overline{a}_e^t = \overline{a}_e$.

Если переносное и относительное движение происходят по прямолинейной траектории, то $\vec{a}_r^n = 0$ и $\vec{a}_e^n = 0$.

Ускорение Кориолиса определяется по формуле:

$$\vec{a}_{кор} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r, \quad (2.5.3)$$

где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости в переносном движении.

Модуль $a_{кор}$ вычисляется следующим образом:

$$a_{кор} = 2\omega_e \cdot V_r \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r). \quad (2.5.4)$$

Правило построения $\vec{a}_{кор}$ и частные случаи определения $a_{кор}$

Вектор $\vec{a}_{кор}$ направляется перпендикулярно плоскости векторов $(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r)$ и направлен в ту сторону, чтобы с его конца видеть поворот вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору \vec{V}_r на наименьший угол против часовой стрелки.

Ускорение $\vec{a}_{кор} = 0$, если

- а) переносное движение поступательное ($\omega_e = 0$);
- б) $\vec{\omega}_e \parallel \vec{V}_r$, т.е. $\sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r) = 0$;
- в) $V_r = 0$.

План решений задач

1. Выделяем т.М, совершающую сложное движение.
2. Проводим анализ движения (выделяем переносное, относительное, абсолютное движения).
3. Определяем положение т. М в момент времени t_1 и показываем ее на чертеже.
4. Определение абсолютной скорости точки:
 - а) записываем уравнение (2.5.1);
 - б) строим траекторию точки в относительном движении, определяем модуль V_r , строим \vec{V}_r на чертеже;
 - в) строим траекторию точки в переносном движении, определяем модуль V_e , строим \vec{V}_e на чертеже;
 - г) строим \vec{V}_a на чертеже, как диагональ параллелограмма со сторонами \vec{V}_r и \vec{V}_e ;
 - д) определяем модуль V_a либо по теореме Пифагора, либо по теореме косинусов, либо методом проекций;
5. Определение абсолютного ускорения точки:
 - а) записываем уравнение (2.5.2);
 - б) определяем по модулю и строим на чертеже a_r^n и a_r^t ;
 - в) определяем по модулю и строим на чертеже a_e^n и a_e^t ;

- г) определение $a_{кор}$ (строим на чертеже вектор $\overline{\omega}_e$, подсчитываем модуль $a_{кор}$ по формуле (2.5.4), строим $\overline{a}_{кор}$ на чертеже);
- д) строим абсолютную систему координат;
- е) проектируем на оси координат и определяем:

$$\begin{cases} a_{ax} = \\ a_{ay} = \\ a_{az} = \end{cases} ;$$

- ж) определяем модуль абсолютного ускорения по формуле

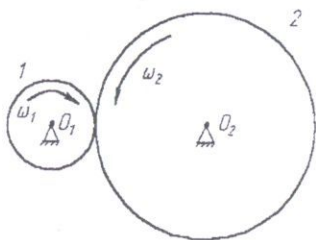
$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}.$$

2.6. Цилиндрические и конические зубчатые передачи. Формулы Виллиса

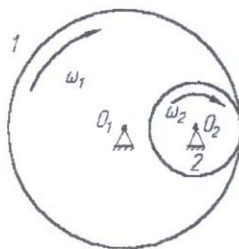
Рассмотрим основные виды зубчатых передач.

Рядовой назовем передачу, в которой все оси колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны.

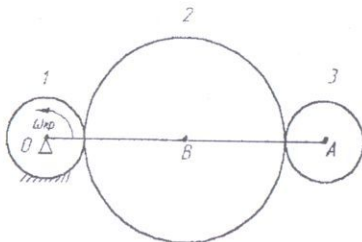
а) внешнее зацепление



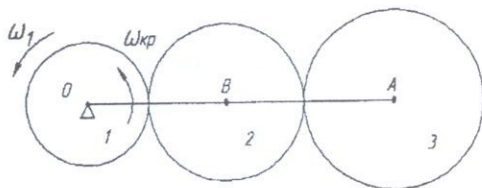
б) внутреннее зацепление



Планетарной называется передача, в которой шестерня 1 неподвижна, а оси остальных шестерен, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе OA , вращающемся вокруг оси неподвижной шестерни.



Дифференциальной называется передача аналогичная планетарной, но с подвижной шестерней 1.



Движение любой шестерни редуктора можно рассматривать как сложное вращение относительно т.О – абсолютное (угловая скорость ω); относительно собственного центра – относительное (ω_r); вращение кривошипа относительно т.О – переносное ($\omega_e = \omega_{кр}$). Оси вращения во всех движениях параллельны между собой.

Расчет угловых скоростей цилиндрического редуктора производится с помощью формул Виллиса:

$$\frac{\omega_1 - \omega_{кр}}{\omega_2 - \omega_{кр}} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (2.6.1)$$

где знак «+» берется для внутреннего зацепления;

знак «-» - для внешнего зацепления;

ω_1, ω_2 - алгебраические значения абсолютных скоростей соответствующих колес;

$\omega_{кр}$ - алгебраическое значение переносной скорости кривошипа;

$\begin{cases} \omega_1 - \omega_{кр} = \omega_{1r} \\ \omega_2 - \omega_{кр} = \omega_{2r} \end{cases}$ - относительные угловые скорости соответствующих колес.

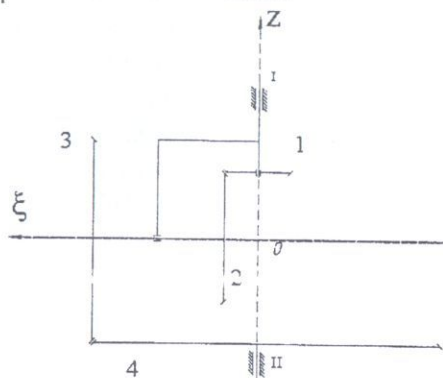
Если первое колесо неподвижно (планетарная передача), то в формуле (2.6.1) принимается $\omega_1 = 0$. Если имеется несколько колес, соединенных кривошипом, и необходимо выразить скорость последнего колеса через скорость первого, то для каждой пары колес последовательно составляются формулы Виллиса, а затем полученные выражения перемножаются.

Для расчета угловых скоростей конического редуктора используют формулу Виллиса, записанную в виде:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \pm \frac{r_2}{r_1}, \quad (2.6.2)$$

где ω_{1r}, ω_{2r} - относительные угловые скорости конических колес 1 и 2. Если ось конического колеса неподвижна и совпадает с осью вращения водила, то относительная скорость колеса может быть представлена в виде разности абсолютной скорости этого колеса и его переносной скорости, равной угловой скорости

водила. Если ось колеса не совпадает с осью водила, а составляет некоторый угол $\alpha > 0$, то такую разность записать нельзя.



Рассмотрим применение формулы (2.6.2) на конкретном примере. Ось конического колеса 1 неподвижна и совпадает с осью водила, т.е. для колеса 1 можно записать:

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_l, \quad (2.6.3)$$

где ω_1 - абсолютная скорость колеса 1; ω_l - угловая скорость водила.

Ось конического колеса 2 подвижная и не совпадает с осью водила, а составляет с ней угол $\pi/2$. Значит, для колеса 1 алгебраическое равенство вида (2.6.3) записать нельзя. Абсолютная угловая скорость колеса 2 определится векторным равенством:

$$\overline{\omega_2} = \overline{\omega_{2r}} + \overline{\omega_l}, \quad (2.6.4)$$

где $\overline{\omega_2}$ - абсолютная угловая скорость колеса 2.

Правило знаков для конических колес в формуле Виллиса определяется из следующего условия: $\langle\langle + \rangle\rangle$ - если, глядя со стороны положительных направлений осей, видеть вращение соответствующих колес (при остановленном водиле) в одном направлении, и $\langle\langle - \rangle\rangle$ - если вращение колес происходит в разных направлениях.

Для нашего примера формула (2.6.2) запишется следующим образом:

$$\frac{\omega_1 - \omega_l}{\omega_{2r}} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Абсолютная угловая скорость конического колеса 2 определится с помощью теоремы Пифагора, т.к. $\overline{\omega_2} \perp \overline{\omega_l}$ ($\overline{\omega_{2r}}$ направляется по оси ξ , вектор $\overline{\omega_l}$ - по оси z).

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{2r}^2 + \omega_l^2}. \quad (2.6.5)$$

Направление $\overline{\omega_2}$ можно определить, если построить $\overline{\omega_{2r}}$ и $\overline{\omega_l}$ из т.О в масштабе с учетом знаков и затем их сложить по правилу параллелограмма.

Из чертежа видно, что $\omega_{3r} = \omega_{2r}$ и $\omega_3 = \omega_2$.

III. Динамика механических и электромеханических систем

3.1. Механическая система. Понятие внешних, внутренних сил. Понятие центра масс механической системы, момента инерции относительно оси. Теорема Гюйгенса

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой из них зависит от положения и движения всех остальных. В связи с этим силы, действующие на механическую систему делятся на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел не входящих в состав данной системы. *Внутренними* называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы.

Обозначения:

\vec{F}_k^e - внешние силы;

\vec{F}_k^i - внутренние силы.

Свойства внутренних сил:

$$\sum \vec{F}_k^i = 0; \sum \overline{mom}_0(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Внешние и внутренние силы делятся на активные и реакции связей. Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем.

Движение системы зависит от ее суммарной массы и распределения масс.

Масса механической системы равна арифметической сумме масс всех точек, образующих систему ($M = \sum m_k$).

Положение центра масс $\vec{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ системы определяется формулой:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M} \quad (3.1.1)$$

или в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} X_c = \frac{\sum m_k X_k}{M}; \\ Y_c = \frac{\sum m_k Y_k}{M}; \\ Z_c = \frac{\sum m_k Z_k}{M}; \end{cases} \quad (3.1.2)$$

где \vec{r}_k и (x_k, y_k, z_k) – соответственно радиус – вектор или координаты центра масс k -го тела механической системы.

Положение центра масс характеризует распределение системы не полностью, поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс – момент инерции тела.

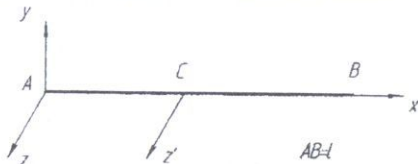
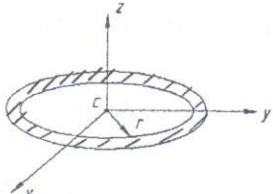
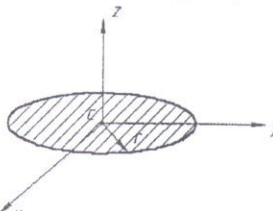
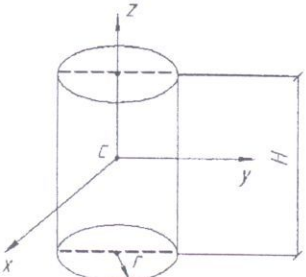
Моментом инерции тела относительно данной оси OZ называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний до этой оси:

$$J_z = \sum m_k h_k^2$$

или выраженная через радиус инерции i :

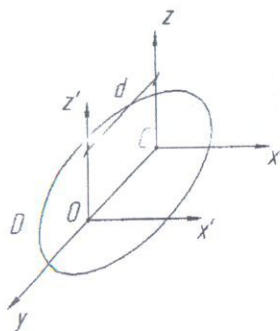
$$J_z = Mi^2.$$

Моменты инерции некоторых тел

Тело	Формула момента инерции
<p>1. Тонкий однородный стержень длины l и массы M (оси Z и Z' перпендикулярны к плоскости чертежа).</p> 	$J_{AZ} = \frac{1}{3} Mr^2;$ $J_{CZ'} = \frac{1}{12} Ml^2.$
<p>2. Тонкое круглое кольцо радиуса r и массы M.</p> 	$J_{CZ} = Mr^2;$ $J_{CX} = J_{CY} = \frac{1}{2} Mr^2.$
<p>3. Круглая однородная пластина радиуса r и массы M.</p> 	$J_{CZ} = \frac{1}{2} Mr^2;$ $J_{CX} = J_{CY} = \frac{1}{4} Mr^2.$
<p>4. Тонкостенный цилиндр радиуса r, высоты H, массы M.</p> 	$J_{CZ} = \frac{1}{2} Mr^2;$ $J_{CX} = J_{CY} = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right).$

Теорема Гюйгенса

Момент инерции тела относительно оси Z' равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями, т.е.



$$J_{Z'} = J_{CZ} + Md^2, \quad (3.1.3)$$

где J_{CZ} - момент инерции тела относительно центральной оси Z , которая параллельна оси Z' ; d - расстояние между осями Z и Z' .

3.2. Теорема о движении центра масс. Следствия из теоремы.

Первая и вторая задача динамики. Планы решения задач

Поступательное движение механической системы характеризуется движением центра масс системы.

Теорема о движении центра масс

Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой как бы приложены все внешние силы, действующие на систему.

Векторное уравнение движения центра масс имеет вид:

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e. \quad (3.2.1)$$

Из уравнения (3.2.1) видим, что внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс механической системы.

Уравнение (3.2.1) в проекциях на оси координат

$$\begin{cases} M\ddot{X}_c = \sum F_{kx}^e; \\ M\ddot{Y}_c = \sum F_{ky}^e; \\ M\ddot{Z}_c = \sum F_{kz}^e. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Следствия из теоремы

Если:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum \bar{F}_k^e = 0, & \text{ то } \bar{V}_c = \text{const}; \\ \text{б) } \sum F_{kx}^e = 0, & \text{ то } V_{cx} = \text{const}; \\ \text{в) } \sum F_{kx}^e = 0, & V_{cx0} = 0, \text{ то } X_{c0} = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

и имеет место равенство

$$\sum m_k \Delta X_k = 0, \quad (3.2.4)$$

где ΔX_k - абсолютное перемещение центра масс k -го тела механической системы вдоль оси X .

$$\Delta X_k = \Delta X_k^e + \Delta X_k^r. \quad (3.2.5)$$

Здесь ΔX_k^e - переносное перемещение центра масс k -го тела системы;

ΔX_k^r - относительное перемещение центра масс k -го тела системы.

Первая задача динамики: по заданной массе и заданному закону движения центра масс определить главный вектор внешних сил, действующих на систему.

План решения задач

1. Выделяем механическую систему.
2. Расставляем внешние силы.
3. Строим систему координат.
4. Записываем (3.2.2) в развернутом виде.
5. Составляем по формулам (3.1.2) закон движения центра масс.
6. Дифференцируем дважды полученный закон движения и подставляем его в (3.2.2).
7. Из полученной системы уравнений определяем неизвестные силы.

Вторая задача динамики: по известной массе и по заданным силам определить закон движения центра масс механической системы.

В этом разделе решаем задачи на определение перемещений тел механической системы, используя формулы (3.2.4) и (3.2.5) при выполнении условия (3.2.3).

План решения задач

(определение перемещений тел механической системы)

1. Выделяем механическую систему.
2. Изображаем механическую систему на чертеже в начальный момент времени. Строим систему координат.
3. Расставляем внешние силы.
4. Проверяем выполнение условия (3.2.3).
5. Изображаем систему в конечный момент времени.
6. Отмечаем на чертеже перемещения тел системы.
7. Выделяем относительное и переносное перемещения тел.
8. Записываем уравнение (3.2.4) в развернутом виде.
9. Определяем ΔX_k по формуле (3.2.5).
10. Найденные значения ΔX_k подставляем в (3.2.4).
11. Решая полученное уравнение, определяем искомое перемещение.

**3.3. Момент количества движения точки, механической системы, тела.
Теорема об изменении момента количества движения (кинетического
момента) относительно центра и оси. Уравнение вращения тела.
Физический маятник. Планы решения задач**

Момент количества движения:

а) для точки

$$\begin{cases} \vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{V}; \\ K_0 = r \cdot mV \sin(\vec{r} \wedge m\vec{V}); \end{cases} \quad (3.3.1)$$

б) для тела

$$K_Z = I_Z \omega, \quad (3.3.2)$$

где I_Z - момент инерции тела относительно оси Z ;

в) для механической системы

$$\begin{cases} \vec{K} = \sum \vec{K}_{i0}; \\ K_Z = \sum K_{zi}. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Теорема об изменении кинетического момента

Производная по времени от момента количества движения механической системы относительно неподвижного центра O равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра.

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e. \quad (3.3.4)$$

Теорема (3.3.4) характеризует вращательное движение системы.

Если ось вращения неподвижна, то теорема запишется в виде

$$\frac{dK_Z}{dt} = M_Z^e. \quad (3.3.5)$$

Следствия из теоремы

Если:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{M}_0^e = 0, \text{ то } \vec{K}_0 = \vec{c} \overline{\omega n s t}; \\ \text{б) } M_Z^e = 0, \text{ то } K_Z = \text{const или } K_{Z0} = K_{Z1}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$I_Z \varepsilon = M_Z^e, \quad (3.3.7)$$

где ε – угловое ускорение тела относительно оси Z .

План решения задач

(вращение механической системы, относительно неподвижной оси)

1. Выделяем механическую систему.
2. Расставляем внешние силы.
3. Записываем уравнение (3.3.5) или (3.3.7).
4. Подсчитываем M_z^e .
5. В зависимости от значения M_z^e поступаем следующим образом:

$M_z^e = 0$	$M_z^e \neq 0$
а) изображаем механическую систему в начальный и конечный момент времени; б) для точек расставляем вектора $m\vec{V}$, для тел, показываем направление вращения; в) записываем соотношение (3.3.6); г) подсчитываем K_{z0} и K_{z1} независимо друг от друга; д) найденные значения K_{z0} и K_{z1} подставляем в (3.3.6); е) решая полученное уравнение, определяем неизвестные величины.	а) для точек показываем вектора $m\vec{V}$, для тел показываем направление вращения; б) определяем величину K_z для всей механической системы; в) найденные значения K_z и M_z^e подставляем в (3.3.5) или (3.3.7); г) решая полученное дифференциальное уравнение, определяем неизвестные величины.

Примечание. Если точка совершает сложное движение, то момент количества движения складывается из моментов количеств движения в относительном и переносном движении, т.е.

$$\bar{K}_{\text{точки}}^{\text{абс}} = \bar{K}_{\text{точки}}^{\text{пер}} + \bar{K}_{\text{точки}}^{\text{отн}}.$$

Физический маятник

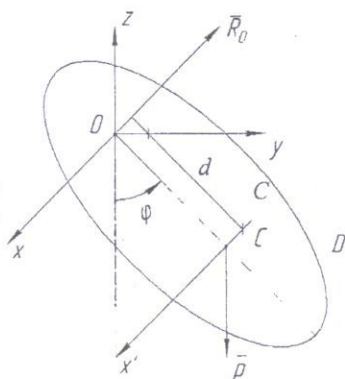
Физическим маятником называется твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр его тяжести, и находящееся под действием только силы тяжести.

Уравнение движения малых колебаний физического маятника имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Pd}{J_x} \varphi = 0, \quad (3.3.8)$$

где J_x – момент инерции тела относительно оси X, который вычисляется по формуле (3.1.3):

$$J_x = J_{Cx} + Md^2. \quad (3.3.9)$$



Величина полупериода колебаний равна:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J_x}{Pd}}. \quad (3.3.10)$$

Теория физического маятника применяется для определения моментов инерции тел неправильной формы относительно центральной оси SX_1 .

План решения задач

1. Записываем формулу полупериода (3.3.10).
2. Определяем из нее J_x .
3. Значение J_x подставляем в (3.3.9).
4. Решая полученное уравнение, определяем J_{cx} .

3.4. Кинетическая энергия точки, тела, механической системы. Работа.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

План решения задач

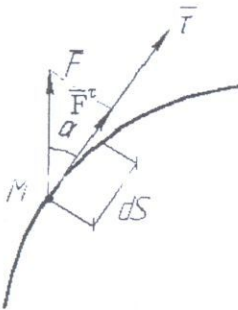
Кинетическая энергия

Материальная точка	Механическая система	Абсолютно твердое тело
$T = \frac{mV^2}{2}$	$T = \sum T_k$	<p>а) поступательное движение</p> $T = \frac{1}{2} MV_C^2,$ <p>V_C – скорость центра масс тела;</p> <p>б) вращательное движение</p> $T = \frac{1}{2} J_Z \omega^2,$ <p>J_Z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость тела.</p> <p>в) плоско-параллельное движение:</p> $T = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_p^2,$ <p>J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела; ω_p – мгновенная угловая скорость; V_C – скорость центра масс тела.</p>

Работа

Работа характеризует то действие силы, которым определяется изменение модуля скорости движущейся точки.

Элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

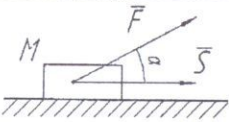
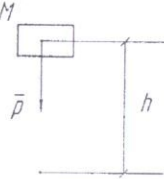
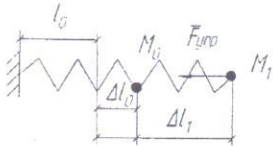
или

$$dA = F \cdot dS \cos \alpha,$$

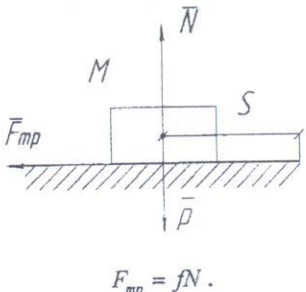
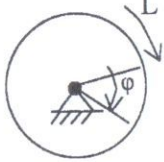
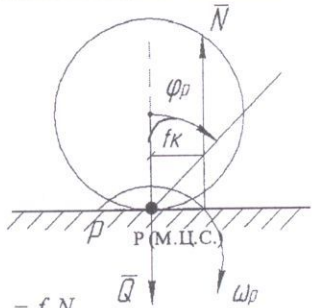
или

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

Примеры вычисления работы различных сил

Силы	Работа
<p>1.</p>  <p style="text-align: center;">$\alpha - const$</p>	$A_F = F \cdot S \cdot \cos(\vec{F} \wedge \vec{S}).$
<p>2.</p>  <p style="text-align: center;">$p = mg$</p>	$A_p = \pm mgh.$
<p>3.</p>  <p style="text-align: center;">$F_{\text{пруж}} = c\Delta l$</p>	$A_{\text{пруж}} = \frac{C}{2} (\Delta l_0^2 - \Delta l_1^2),$ <p>Δl_0 – начальная деформация пружины; Δl_1 – конечная деформация пружины.</p>

Продолжение табл.

	Силы	Работа
4.	 <p style="text-align: center;">$F_{mp} = fN.$</p>	$A_{mp} = -F_{mp} \cdot S.$
5.	 <p style="text-align: center;">L – вращающий момент.</p>	$A_L = L \cdot \varphi,$ <p style="text-align: center;">φ – угол поворота относительно оси вращения.</p>
6.	 <p style="text-align: center;">$M_{кач} = f_k \cdot N$</p>	$A_{кач} = -M_{кач} \cdot \varphi_p,$ <p style="text-align: center;">φ_p – угол поворота колеса относительно м.п.с. (т.Р.).</p>

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

1. Дифференциальная форма

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \quad (3.4.1)$$

2. Интегральная форма

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \quad (3.4.2)$$

где T – кинетическая энергия механической системы;

$\sum A_k^e$ – сумма работ внешних сил;

$\sum A_k^i$ – сумма работ внутренних сил.

Свойство работы внутренних сил

Для системы, состоящей из абсолютно твердых тел и для систем с идеальными связями сумма работ внутренних сил равна нулю.

План решения задач (интегральная форма теоремы)

1. Выделяем механическую систему, движение которой рассматриваем.
2. Изображаем систему в начальный и конечный момент времени на чертеже.
3. Отмечаем путь, пройденный каждым телом системы.
4. Расставляем силы, действующие на каждое тело системы.
5. Проводим анализ движения каждого тела и расставляем скорости.
6. Записываем теорему (3.4.2).
7. Вычисляем T_0 и T_1 (скорости всех тел выражаем через искомую или заданную).
8. Вычисляем работу всех сил, приложенных к телам механической системы (все перемещения выражаем через заданное или искомое).
9. Величины T_0 , T_1 , $\sum A_k^e$, $\sum A_k^i$ подставляем в (3.4.2).
10. Решая полученное уравнение, определяем искомую величину.

3.5. Определение истинного и возможного перемещений. Число степеней свободы. Кинематический метод связей возможных перемещений.

Принцип возможных перемещений. План решения задач

Возможные перемещения (в.п.) – это любые бесконечно малые воображаемые перемещения, допускаемые связями, происходящие в данный момент.

Истинные перемещения (и.п.) – это бесконечно малые перемещения, происходящие строго по закону движения за промежуток времени dt .

Возможные перемещения обозначаются - δr , δs , δx .

Истинные перемещения обозначаются - dr , ds , dx .

Система может иметь бесконечное множество в.п., но лишь конечное число из них линейно независимо. Число линейно независимых в.п. совпадает с числом степеней свободы.

Правило определения числа степеней свободы

Сколько звеньев механизма надо остановить до полной остановки механизма, столько степеней свободы.

Все возможные перемещения могут быть выражены через линейно независимые. Существует несколько методов связей возможных перемещений через линейно независимые возможные перемещения (л.н.з.в.п.).

Остановимся на кинематическом методе связей.

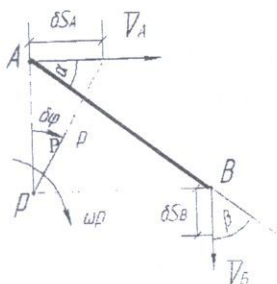
Кинематический метод связей возможных перемещений

Этот метод заключается в определении связей между скоростями точек приложения сил. В полученном выражении скорости заменяются на соответствующие перемещения, причем линейной скорости соответствуют линейные возможные перемещения, угловой – угловые. При этом линейное в.п. точки направляется строго по линейной скорости точки для данного положения механизма, а угловое в.п. тела – строго в сторону угловой скорости тела.

Примеры.

1. Плоскопараллельное движение тела AB :

а) по теореме проекций скоростей точек на прямую, соединяющую эти точки



$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$$

или через перемещения

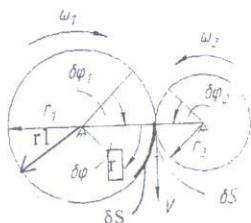
$$\delta S_A \cos \alpha = \delta S_B \cos \beta;$$

б) через м.ц.с.

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \rightarrow \frac{\delta S_B}{AP} = \frac{\delta S_A}{BP};$$

$$\omega_P = \frac{V_A}{AP} \rightarrow \delta \varphi_P = \frac{\delta S_A}{AP}.$$

2. Вращательное движение, передача вращения:



$$\frac{\omega_1}{r_1} = \frac{\omega_2}{r_2} \rightarrow \frac{\delta \varphi_1}{r_1} = \frac{\delta \varphi_2}{r_2};$$

$$V = \omega r \rightarrow \delta S = \delta \varphi r.$$

3. Сложное движение точки: определяется связь между абсолютной, переносной и относительной скоростями, а затем в полученных выражениях скорости заменяются на соответствующие перемещения.

Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений позволяет рассматривать равновесие механических систем, не прибегая к их расчленению.

Для равновесия механической системы с идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил на любом возможном перемещении равнялась нулю:

$$\sum \delta A_k^e = 0. \quad (3.5.1)$$

План решения задач

1. Выделяем механическую систему.
2. Расставляем силы, действующие на систему.
3. Определяем число степеней свободы.
4. Даем системе в.п. и изображаем на чертеже перемещения точек приложения сил.
5. Записываем уравнение (3.5.1) в развернутом виде.
6. Выбираем л.н.з.в.п.
7. Выражаем все в.п. через л.н.з.в.п.
8. Полученную связь подставляем в уравнение (3.5.1).
9. Выносим л.н.з.в.п. за скобку.
10. Приравниваем выражение в скобках к нулю (число таких уравнений равно числу степеней свободы)
11. Решая полученное уравнение или систему уравнений, определяем неизвестные величины.

3.6. Обобщенные координаты, скорости, силы. Потенциальная энергия.

Уравнение Лагранжа II рода. План решения задач

Линейно независимые координаты, которые однозначно определяют положение механической системы в пространстве, являются *обобщенными координатами* q_i механической системы.

Число обобщенных координат равно числу степеней свободы механической системы.

Производные от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями* \dot{q}_i .

Обобщенная сила, соответствующая данной обобщенной координате, равна отношению работы всех сил, приложенных к механической системе, совершаемой на перемещениях, вызванных приращением данной обобщенной координаты, к величине этого приращения:

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}, \quad (i=1 \dots S), \quad (3.6.1)$$

где S – число степеней свободы механической системы.

Потенциальной энергией механической системы в данном положении M называется скалярная величина Π , равная работе, которую произведут консервативные силы при перемещении системы из данного положения в нулевое (за нулевое положение обычно берется начальное положение системы).

Формулы вычисления потенциальной энергии

Силы	Потенциальная энергия
Сила тяжести $P = mg$.	$\Pi = Ph$, h – наикратчайшее расстояние между двумя точками, взятое по вертикали.
Сила упругости $F = c\Delta l$.	$\Pi = \frac{c}{2}(\Delta l_1^2 - \Delta l_0^2)$, $\Delta l_0, \Delta l_1$ соответственно начальная и конечная деформация пружины или $\Pi = \frac{C}{2}[(f_{cm} + \lambda)^2 - f_{cm}^2]$, f_{cm} – удлинение пружины в положении статического равновесия; λ – удлинение пружины в произвольный момент времени.

Уравнение Лагранжа II рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2,\dots,S). \quad (3.6.2)$$

где T – кинетическая энергия механической системы.

Число уравнений Лагранжа совпадает с числом степеней свободы механической системы.

План решения задач

1. Выделяем механическую систему.
2. Изображаем систему в произвольный момент времени на чертеже.
3. Расставляем силы, действующие на механическую систему.
4. Определяем число степеней свободы механической системы.
5. Записываем уравнение (3.6.2).
6. Определение кинетической энергии механической системы:
 - а) проводим анализ движения каждого тела системы;
 - б) расставляем скорости;
 - в) определяем T_k для каждого тела системы, выражая все скорости через обобщенные;
 - г) определяем $T = \sum T_k$ для всей механической системы.
7. Определение обобщенной силы:

Общий случай (определение обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате q_i).	Для потенциальных сил.
а) фиксируем все обобщенные координаты, кроме q_i ; б) даем системе в.п. δq_i и показываем на чертеже перемещение точек приложения сил; в) определяем δA_i всех сил, приложенных к системе, на полученных в.п.; г) выражаем все в.п. через δq_i ; д) подставляем полученные выражения в δA_i ; е) определяем Q_i по формуле (3.6.1).	а) определяем потенциальную энергию всех потенциальных сил и выражаем все перемещения через обобщенные координаты; б) определяем Q_i по формуле $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1 \dots S),$ где Π – общая потенциальная энергия. <i>Примечание.</i> Для исследования малых колебаний механических систем (раздел 3.7), величину $\Pi_{\text{упр}}$ определяем по формуле (3.7.1) и величину f_{cm} из соотношения (3.7.2). Затем найденное значение f_{cm} подставляем в выражение для Q_i , которое упрощаем.

8. Определяем $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}; \frac{\partial T}{\partial q_i}; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$.
9. Подставляем эти выражения и величину обобщенной силы (пункт 7) в уравнение (3.6.2).
10. Решаем полученные дифференциальные уравнения и определяем искомые величины.

3.7. Особенности малых колебаний механических систем. Свободные, затухающие и вынужденные колебания с одной степенью свободы

Малые движения механических систем рассматриваются около положения устойчивого равновесия.

Особенности малых колебаний:

- а) за начало координат и за нулевой уровень потенциальной энергии принимается положение устойчивого равновесия;
- б) обобщенная координата q_i и обобщенная скорость \dot{q}_i в произвольный момент времени являются величинами первого порядка малости;
- в) кинетическая и потенциальная энергия вычисляются с точностью до малых второго порядка

$$\begin{cases} \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \\ \sin \alpha \approx \alpha. \end{cases}$$

Если на механическую систему действует сила упругости пружины, то положение устойчивого равновесия системы одновременно является положени-

ем ее статического равновесия, поэтому потенциальную энергию сил упругости вычисляем по формуле:

$$\Pi_{\text{упр}} = \frac{C}{2} [(f_{\text{см}} + \lambda)^2 - f_{\text{см}}^2], \quad (3.7.1)$$

где $f_{\text{см}}$ – деформация пружины в положении статического равновесия;
 λ – деформация пружины в произвольный момент времени.

Величина $f_{\text{см}}$ определяется из условия:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right|_{\dot{q}_i=0} = 0, \quad (3.7.2)$$

где Π – общая потенциальная энергия всех потенциальных сил, действующих на механическую систему.

Задачи решаем по плану пункта 3.6.6.

Свободные колебания

Свободные колебания имеют место, если на механическую систему действуют силы тяжести и упругости.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (3.7.3)$$

где k – частота свободных колебаний.

Период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Решение уравнения (3.7.3) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Задачи решаются методом уравнений Лагранжа II рода (раздел 3.6)

Затухающие колебания

Затухающие колебания имеют место, если на механическую систему действуют силы тяжести, упругости и сопротивления ($\overline{R^i} = -\mu \overline{V^i}$).

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \quad (3.7.4)$$

Решение уравнения (3.7.4) записывается в зависимости от соотношения коэффициентов n и k :

а) при $n < k$

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t),$$

где k_1 частота затухающих колебаний, определяемая формулой

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Период затухающих колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Имеем периодические затухающие колебания.

Величина nT_1 называется логарифмическим коэффициентом затухания.

б) при $n > k$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$.

Имеем аperiодические затухающие колебания, т.к. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

в) при $n = k$

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t),$$

имеем также аperiодические затухающие колебания.

Задачи решаем методом уравнений Лагранжа II рода (раздел 3.6), но обобщенную силу определяем по формуле:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i' \quad (3.7.5)$$

где $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ - соответствует потенциальным силам,

Q_i' - соответствует не потенциальным силам.

Вынужденные колебания механической системы

Пусть на механическую систему, кроме восстанавливающей силы действует возмущающая сила вида

$$Q = Q_0 \sin pt.$$

Такая возмущающая сила называется гармонической.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без учета сил сопротивления записывается в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = b \sin pt. \quad (3.7.6)$$

Частное решение этого уравнения дает закон вынужденных колебаний.

$$X_1 = A \sin pt \quad (p \neq k),$$

где $A = \frac{b}{k^2 - p^2}$ - амплитуда вынужденных колебаний;

p - частота вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой возмущающей силы.

Явление совпадения частот собственных колебаний k и частоты вынужденных колебаний p называется *резонансом*, в этом случае $A \rightarrow \infty$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = b \sin pt. \quad (3.7.7)$$

Частное решение этого уравнения дает закон вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления

$$X_1 = A_1 \sin(pt - \beta),$$

где $A_1 = \frac{b}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$ - амплитуда вынужденных колебаний;

$\operatorname{tg} \beta = \frac{2np}{k^2 - p^2}$ - сдвиг фазы вынужденных колебаний.

Задачи решаются методом уравнений Лагранжа II рода (раздел 3.6.), причем обобщенная сила вычисляется по формуле (3.7.5).

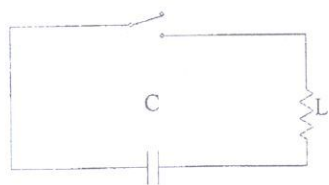
3.8. Уравнение Лагранжа II рода и электро-аналоговая схема. Подбор масштабных коэффициентов и определение параметров электрической схемы

Дифференциальное уравнение свободных колебаний может быть записано в виде

$$J_{np} \ddot{x} + C_{\gamma} x = 0. \quad (3.8.1)$$

Движение электрического заряда для контура, составленного из конденсатора с постоянной емкостью C и катушки индуктивности с индуктивностью L , описывается уравнением

$$L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (3.8.2)$$



Сравнивая уравнение (3.8.1) с уравнением (3.8.2) видим, что процессы свободных колебаний и движения заряда по контуру описываются одинаковыми по виду уравнениями. Следовательно, можно провести аналогию

$$x \rightarrow q; \quad J_{np} \rightarrow L; \quad C_{\gamma} \rightarrow 1/C.$$

Значит с любой механической системой, совершающей свободные колебания, может быть сопоставлен электрический контур, составленный из конденсатора постоянной емкости C и катушки с индуктивностью L .

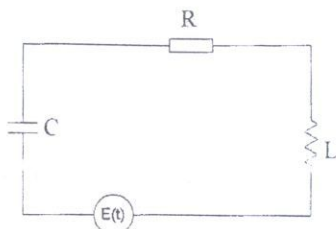
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки с учетом сил сопротивления имеет вид

$$J_{np} \ddot{x} + c_{\gamma} \dot{x} + c_{\delta} x = Q_0 \sin pt. \quad (3.8.3)$$

С этим дифференциальным уравнением можно сопоставить дифференциальное уравнение движения заряда q :

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q + R\dot{q} = e_0 \sin pt \quad (3.8.4)$$

Уравнению (3.8.4) соответствует следующая электрическая схема.



Сравнивая уравнения (3.8.3) и (3.8.4) можно провести аналогию между

$$x \rightarrow q; J_{np} \rightarrow L; C_{\text{Э}} \rightarrow \frac{1}{C}; \alpha \rightarrow R; Q_0 \rightarrow e_0$$

Таким образом, с любой механической системой, совершающей вынужденные колебания с учетом сил сопротивления, может быть сопоставлен электрический контур, составленный из катушки индуктивности с индуктивностью L , конденсатора постоянной емкости C , электрического сопротивления R и ЭДС $E(t) = e_0 \sin pt$.

Введем масштабные коэффициенты

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{J_{np}}{L}; K_2 = \frac{\alpha}{R}; K_3 = \frac{c_0}{\frac{1}{C}} = c_{11}; \\ K_4 = \frac{x}{q}; K_5 = \frac{Q_0}{e_0}. \end{array} \right. \quad (3.8.5)$$

Поскольку скорости моделируемого и моделирующего процессов различны, то вычисляется число K_0 , определяющее отношения моделируемого времени t к моделирующему времени τ :

$$K_0 = \frac{t}{\tau}.$$

Величина K_0 показывает, во сколько раз процесс в моделируемой электрической схеме протекает быстрее, чем в механической.

Три параметра электрического контура (например L , C , e_0) задаются произвольно, независимо друг от друга, и при этом определяются три независимых масштабных коэффициента K_1 , K_3 , K_5 из системы (3.8.5). Остальные масштабные коэффициенты определяются из индикаторов подобия:

$$\frac{K_3 \cdot K_4}{K_5} = 1; \frac{K_2 \cdot K_4}{K_5 \cdot K_0} = 1; \frac{K_1 \cdot K_3}{K_5 \cdot K_0^2} = 1. \quad (3.8.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{K_2}{K_3}; \\ K_2 &= \sqrt{K_1 \cdot K_3}; \\ K_0 &= \sqrt{\frac{K_1}{K_3}}. \end{aligned} \quad (3.8.7)$$

Величину R определяем из соотношения $K_2 = \frac{\alpha}{R}$.

3.9. Электромеханические системы. Уравнения Лагранжа-Максвелла. План решения задач

Электромеханической системой (ЭМС) называется механическая система, содержащая электрические цепи. В ЭМС происходит преобразование электрической, магнитной и механической энергии. Движение ЭМС описывается уравнениями Лагранжа-Максвелла.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} + Q_{x_i} + Q_{x_i}^{em}; & (i = 1 \dots S) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} = \frac{\partial W_e}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{q}_j} + E(t); & (j = 1 \dots S_1) \end{cases}$$

- где S - число степеней свободы механической части;
 S_1 - число степеней свободы электрической части;
 T - кинетическая энергия механической части системы;
 Π - потенциальная энергия механической части системы;
 Φ - диссипативная функция рассеивания механических сил;
 Q_{x_i} - обобщенные силы, имеющие механическую природу;
 $Q_{x_i}^{em}$ - обобщенная электромагнитная сила;
 W_m - энергия магнитного поля;
 W_e - энергия электрического поля;
 Φ_e - функция рассеивания электрических сил;
 $E(t)$ - ЭДС;
 x_i - обобщенная координата механической части системы;
 q_j - обобщенная координата электрической части системы.

Здесь

$$W_m = \sum \frac{1}{2} L \dot{q}_j^2; \quad (3.9.2)$$

$$W_e = \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} q_i^2; \quad (3.9.3)$$

$$\Phi_e = \sum \frac{1}{2} R \dot{q}_j^2; \quad (3.9.4)$$

$$Q_{x_i}^{em} = \frac{\partial W_m}{\partial x_i} - \frac{\partial W_e}{\partial x_i}. \quad (3.9.5)$$

План решения задач

1. Проводим анализ электромеханической системы. Выбираем обобщенные координаты.
2. Записываем уравнение Лагранжа-Максвелла (3.9.1).
3. Определяем кинетическую энергию T механической части системы.
4. Определяем потенциальную энергию Π механической части системы.
5. Определяем диссипативную функцию рассеивания Φ механических сил.
6. Определяем обобщенную силу Q_{x_i} соответствующую неконсервативным силам, но имеющую механическую природу.
7. Определяем энергию магнитного поля W_m по формуле (3.9.2).
8. Определяем энергию электрического поля W_e – (3.9.3).
9. Определяем функцию рассеивания Φ_e электрических сил – (3.9.4).
10. Вычисляем обобщенную электромагнитную силу $Q_{x_i}^{em}$ - (3.9.5).
11. Подставляем найденные выражения в уравнения (3.9.1).
12. Решаем полученную систему уравнений и определяем искомые величины.

Расчетно-графические задания по этой теме приведены в прил.3, в нем также разобраны примеры решения некоторых типовых задач.

Используемая литература

1. Тарг С.Н. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш.шк., 1986.
2. Бухгалац Н.Н. Основной курс теоретической механики. - М.: Наука, 1969.
3. Яблонский А.А. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике. - М.: Высш.шк., 1985.
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковчкая Л.Б. Курс физики. Т.2. - М.: Высш. шк. 1977.
5. Лурое А.И., Ходжаев К.Ш. Уравнения Лагранжа-Максвелла в курсе теоретической механики/Сборник науч.-метод. статей. - М.: Высш.шк., 1976.
6. Мартиненко Ю.Г. Аналитическая динамика электромеханических систем: Учеб.пособие. - М.: МЭИ, 1984.
7. Корнилова Т.Е. Методические указания по теме «Динамика электромеханических систем». – Тольятти: ТолПИ, 1985.
8. Корнилова Т.Е., Архангельская С.Е. Исследование свободных колебаний при наличии сил сопротивления и вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы. – Тольятти: ТолПИ, 1993.
9. Архангельская С.Е. Исследование малых колебаний механических систем методом уравнений Лагранжа II рода. – Тольятти: ТолПИ, 1986.
10. Архангельская С.Е. Методические указания по подготовке к практическим занятиям по кинематике. – Тольятти: ТолПИ, 1990.
11. Архангельская С.Е. Методические указания к практическим занятиям по динамике для студентов электромеханических специальностей. – Тольятти: ТолПИ, 1985.

Контрольная работа
«Теорема об изменении кинетической энергии механической системы»
 (схемы систем приведены на рис.1-4)

ВАРИАНТ 1

Система, состоящая из трех зубчатых колес, насаженных на неподвижные параллельные оси, приведена в движение постоянным вращающим моментом M , приложенным к колесу B . Считая колеса однородными дисками и пренебрегая трением, определить угловую скорость ω колеса B в зависимости от его угла поворота φ , если $r_A = r_C = 2r$; $r_B = r$; $P_A = P_C = 2P$; $P_B = P$. В начальный момент система находилась в покое.

ВАРИАНТ 2

Груз A массой m_1 , скользящий по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, прикреплен к нерастяжимой нити, переброшенной через блок B массой m и намотанной на каток C . Каток, представляющий собой однородный сплошной цилиндр массой m_3 , имеет возможность катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Пренебрегая массой нити, определить скорость груза A после того, как он переместится по наклонной плоскости на расстояние S . В начальный момент система находилась в покое, масса блока равномерно распределена по ободу, коэффициент трения скольжения f , трения качения δ .

ВАРИАНТ 3

Зубчатые колеса, насаженные на неподвижные параллельные оси, имеют внутреннее зацепление. Колесо I радиусом r_1 и весом P_1 приводится в движение постоянным вращающим моментом M_1 . Считая колесо I однородным диском и, пренебрегая трением, определить угловую скорость колеса I в зависимости от его угла поворота φ , если вес зубчатого колеса II равен P_2 и масса его распределена по ободу равномерно. В начальный момент механическая система находилась в покое.

ВАРИАНТ 4

Через блок A весом Q_1 переброшена нерастяжимая невесомая нить, к одному концу которой прикреплен груз C весом Q_3 . Другой конец нити намотан на каток B весом Q_2 и радиусом r . Считая массы блока A и колеса B распределенными по их ободам равномерно, определить скорость груза C в зависимости от пройденного пути h . Коэффициент трения качения равен f_k . В начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 5

На неподвижную горизонтальную ось O_1 свободно насажено зубчатое колесо I , радиусом r_1 , весом Q_1 . На параллельную ей ось O_2 насажены жестко скрепленные между собой зубчатое колесо II радиусом r_2 и вал III радиуса $0,5r_2$. Вес колеса II и вала III равен Q_2 . На вал намотана веревка, к концу которой прикреплен груз M , весом P . Определить скорость груза M , если он опустится вниз на расстояние h , считая колесо I однородным диском, а радиус инерции колес $II-III$ равен $r_2\sqrt{2}$.

ВАРИАНТ 6

Каток A весом Q , скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок B , груз C весом P . Каток A и блок B – однородные диски с одинаковым весом Q и радиусом R . Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. Определить скорость оси катка A , если груз поднимается на высоту h . Коэффициент трения качения катка равен f_k . В начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 7

Через блоки A, B, C переброшена нерастяжимая невесомая нить, к одному концу которой прикреплен каток D весом P и радиусом r . К другому концу приложена сила F . Определить скорость оси катка D в зависимости от пройденного пути S . Вес каждого блока равен Q , масса блоков и катка равномерно распределена по ободу, коэффициент трения качения катка равен f_k . В начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 8

Вагонетка A массой m_1 поднимается по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту при помощи нерастяжимого троса, намотанного на барабан радиусом r двухступенчатого ворота B , имеющего массу m_1 . На барабан ворота радиусом $2r$ намотан другой нерастяжимый трос, к концу которого подвешен противовес с массой m_2 . Ворот приводится в движение постоянным вращающим моментом L . Пренебрегая массами тросов и колес вагонетки, определить скорость вагонетки в зависимости от угла поворота φ ворота B . В начальный момент времени система находилась в покое. Радиус инерции ворота $2r$.

ВАРИАНТ 9

Каток A весом P и радиусом R , спускаясь по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, приводит во вращение посредством невесомой и нерастяжимой нити барабан B весом Q и радиусом r . Определить скорость оси катка A в зависимости от пройденного расстояния S . Коэффициент трения качения f_k . Барабан и каток считать однородными круглыми цилиндрами. Массой блока пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 10

Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из однородного кривошипа OA весом P , шестерни B весом Q и радиусом r , неподвижной шестерни радиусом R . В начальный момент времени кривошип OA отклонен от вертикали на угол 60° и опущен из состояния покоя. Считая шестерню B однородным диском, кривошип OA однородным стержнем, и пренебрегая трением, определить скорость т. A в момент, когда кривошип займет положение OA_1 .

ВАРИАНТ 11

Зубчатая рейка AB длиной l и весом P расположена на плоскости под углом α к горизонту. При скольжении рейка вращает зубчатое колесо весом Q с неподвижной осью вращения O . Считая зубчатое колесо однородным диском и пренебрегая трением, определить скорость рейки AB в момент, когда в точке касания находится конец B рейки, если в начальный момент в точке касания находился конец A рейки и скорость ее равнялась нулю.

ВАРИАНТ 12

Вал кабестана весом Q и радиусом r приводится в движение постоянным вращающим моментом M , приложенным к рукоятке AB . Определить скорость оси катка C при повороте кабестана на угол φ , если вес катка - P и радиус - R . Вал кабестана и каток считать однородными цилиндрами. Коэффициент трения качения катка равен f_k . В начальный момент система находилась в покое.

ВАРИАНТ 13

Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из однородного стержня AB весом P и длиной $2a(OA=OB=a)$, шатуна AC весом Q_1 и длиной l , ползуна C весом Q_2 . К стержню приложен постоянный вращающий момент M . Определить угловую скорость стержня AB , когда он повернется на угол $\frac{\pi}{2}$, если в начальный момент времени система находилась в покое и стержень AB был перпендикулярен к направляющей ползуна.

ВАРИАНТ 14

Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из кривошипа OA весом P , подвижной шестерни I весом Q и радиусом r , неподвижной шестерни II радиусом R . К кривошипу OA приложен постоянный вращающий момент M . Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от угла поворота φ , если в начальный момент времени механическая система находилась в покое, а кривошип занимал горизонтальное положение.

ВАРИАНТ 15

Падая вниз, груз M весом Q передает движение валу C катка A . Каток A радиусом $2r$ жестко насажен на вал C радиусом r , их общий вес P , радиус инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа, равен $r\sqrt{2}$. Пренебрегая весом блока D , определить скорость груза M , если он опустится на высоту h . Коэффициент трения качения катка A равен f_k . В начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 16

Стержень DE весом Q лежит на двух катках A и B весом P каждый. К стержню приложена по горизонтали вправо сила F , приводящая в движение стержень. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Найти скорость стержня DE , если он переместился на расстояние S . Коэффициент трения качения катков равен f_k . Катки считать однородными цилиндрами. В начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 17

Механизм, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из кривошипа OA весом P_1 и длиной a , шатуна AB весом P_1 и длиной l , ползуна B весом P_3 . К кривошипу OA приложен постоянный вращающий момент M . Определить скорость ползуна B , когда кривошип OA повернется на угол $\frac{\pi}{2}$, т.е. займет положение OA_1 . В начальный момент времени система находилась в покое и кривошип занимал вертикальное положение.

ВАРИАНТ 18

Груз A весом P , опускаясь вниз посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через невесомый блок D и намотанной на шкив B радиусом $2r$, заставляет вал C катиться без скольжения по горизонтальному рельсу. Шкив B жестко насажен на вал C радиусом r , их общий вес Q , а радиус инерции относительно оси O , перпендикулярной плоскости чертежа, равен $r\sqrt{2}$. Найти скорость груза A , если он опустится на расстояние h ; коэффициент трения качения вала f_k .

ВАРИАНТ 19

Вес кривошипа OA длиной a равен P_1 , вес шатуна AB длиной $2a$ равен P_2 , вес колеса D радиусом R равен P_3 . Механизм расположен в вертикальной плоскости. К кривошипу приложен вращающий момент M . Определить скорость т. B , когда кривошип повернется на угол $\frac{\pi}{2}$, если коэффициент трения качения колеса D равен f_k . В начальный момент система находилась в покое и стержень OA занимал вертикальное положение.

ВАРИАНТ 20

Груз A весом P_1 , опускаясь вниз посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок D весом P_2 и намотанной на каток B , заставляет каток катиться по горизонтальной поверхности. Найти скорость груза A , если он опустится на расстояние h . Вес катка равен P_3 , радиус инерции блока $r\sqrt{2}$. В начальный момент времени система находилась в покое; коэффициент трения качения катка f_k .

ВАРИАНТ 21

Под действием приложенного к барабану B момента M груз A весом P_1 поднимается вверх с помощью невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок D весом P_2 . Определить угловую скорость барабана B при повороте его на угол φ , если вес барабана B равен P_3 . Блок и барабан считать сплошными цилиндрами. Радиус инерции блока D равен $r\sqrt{2}$, если в начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 22

Груз A весом P_1 , опускаясь вниз посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок B весом P_2 , приводит в движение блок D и груз E . Найти скорость груза A , если он пройдет расстояние S . Блок D и груз E одинакового веса, который равен P_3 . В начальный момент времени система находилась в покое.

ВАРИАНТ 23

Груз A весом P_1 , опускаясь вниз по наклонной плоскости посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок D , приводит в движение блок B с грузом E . Определить скорость груза A , если он пройдет расстояние S . Вес блоков D и B равен P_2 , вес груза E — P_3 . В начальный момент времени система находилась в покое. Блоки считать сплошными цилиндрами.

ВАРИАНТ 24

К блоку D в виде сплошного цилиндра весом P_1 приложен вращающий момент M . Определить скорость груза A , если блок D повернется на угол φ . Вес блока B равен P_2 , груза A — P_3 , радиус инерции блока $r\sqrt{2}$. В начальный момент времени система находилась в покое.

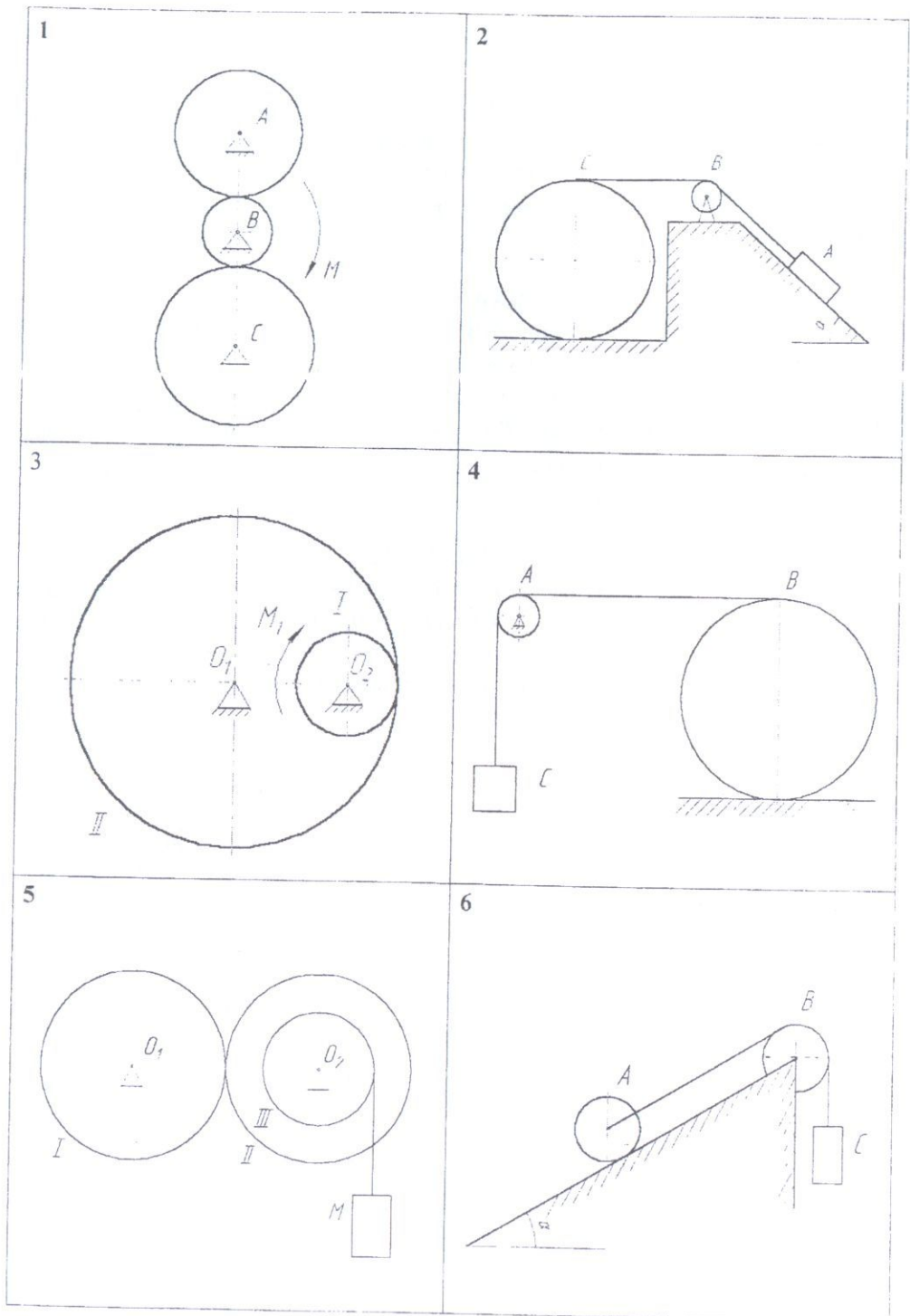
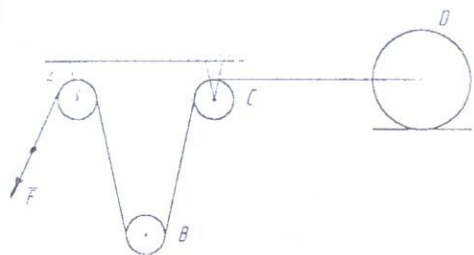
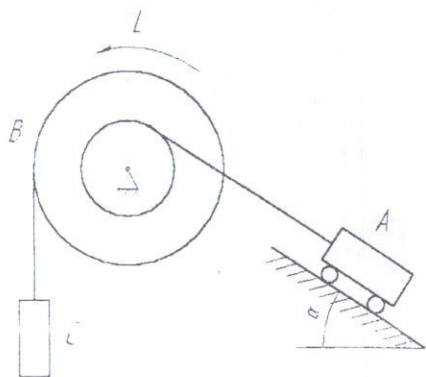


Рис. 1

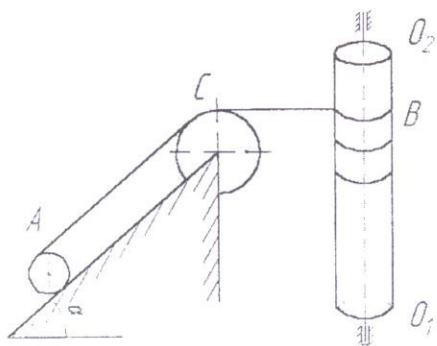
7



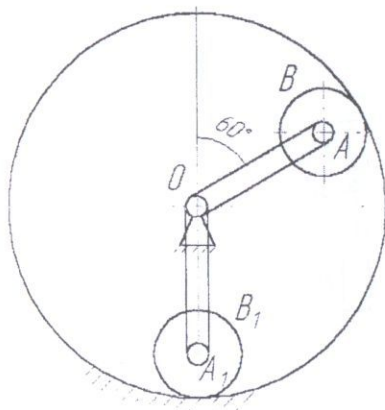
8



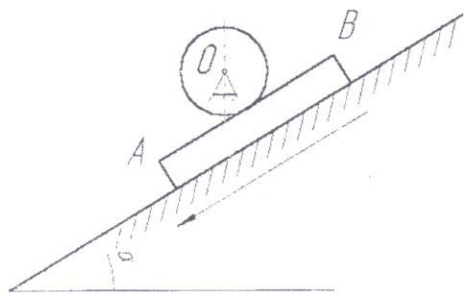
9



10



11



12

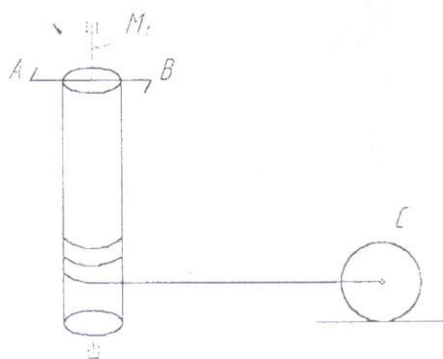
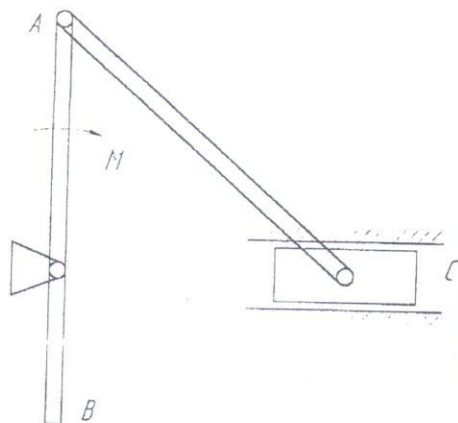
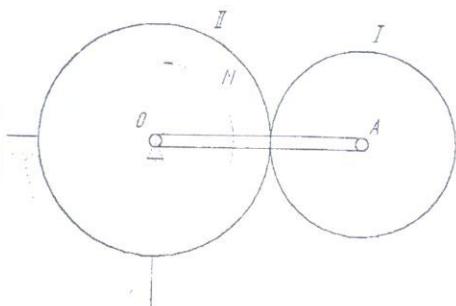


Рис. 2

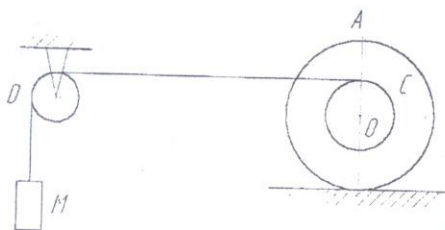
13



14



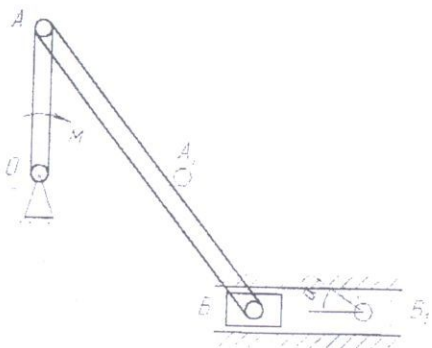
15



16



17



18

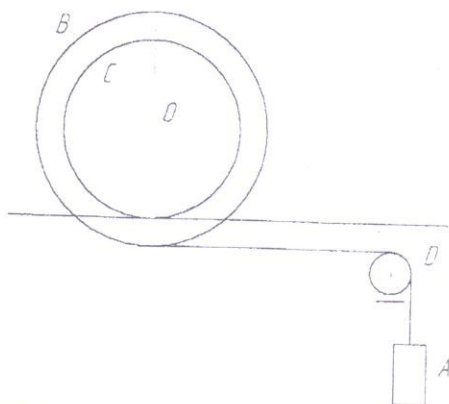
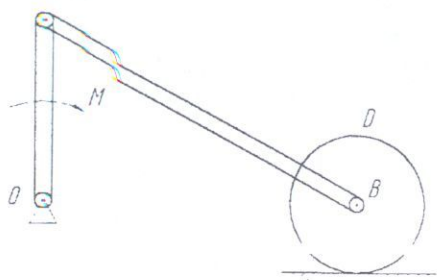
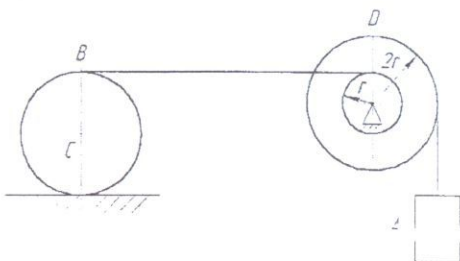


Рис. 3

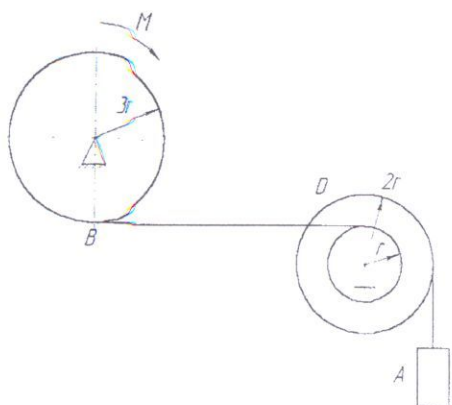
19



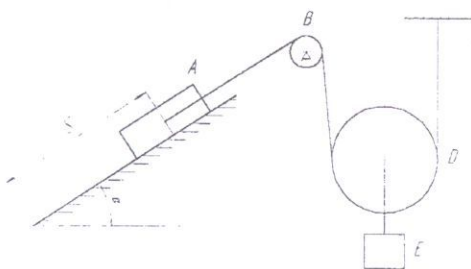
20



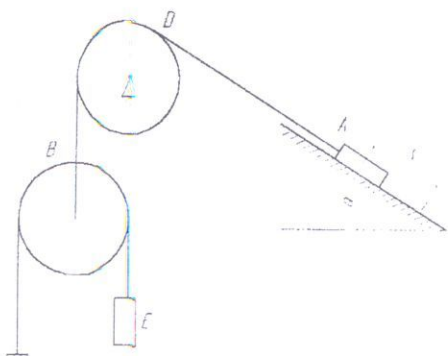
21



22



23



24

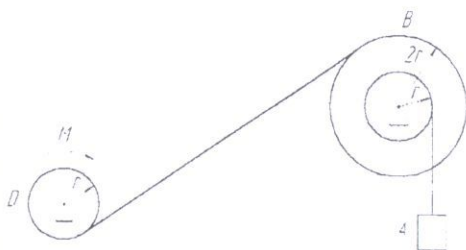
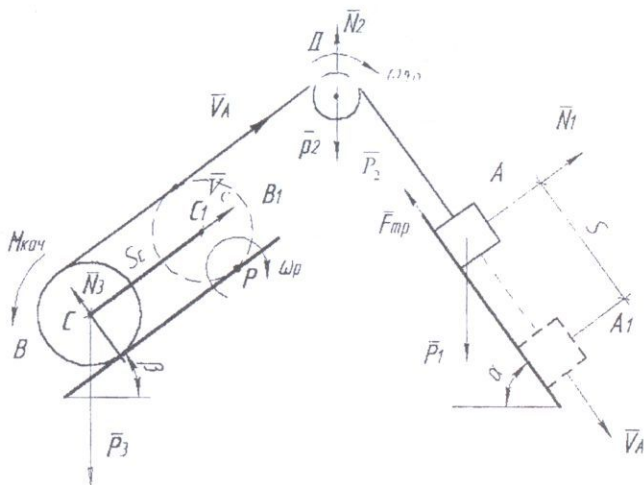


Рис. 4

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. К грузу A весом P_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок D весом P_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка B весом P_3 и радиусом R . Определить скорость груза A в зависимости от пройденного пути S , если система в начальный момент находилась в покое. Блок D и каток B считать однородными круглыми цилиндрами, коэффициент трения скольжения равен f , коэффициент трения качения f_k , вес нити пренебречь.



Решение

Механическая система состоит из тел A, B, D . Силы, действующие на систему показаны на чертеже, причем

$$F_{mp} = fN_1 = fP_1 \cos \alpha;$$

$$M_{kach} = f_k N_3 = f_k P_3 \cos \beta.$$

Тело A совершает поступательное движение, D – вращательное, B – плоскопараллельное.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для механической системы:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^r$$

Причем $T_0=0$, т.к. система в начальный момент времени находилась в покое.

Определим T_1 :

$$T_1 = T_A + T_B + T_D$$

Найдем значения кинетической энергии тел A, B, D .

$$T_A = \frac{1}{2} M_1 V_A^2 = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} V_A^2;$$

$$T_B = \frac{1}{2} J_2 \omega_B^2,$$

где $J_2 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} r_D^2;$ $\omega_B = \frac{V_A}{r_D}.$

Тогда

$$T_A = \frac{1}{4} \frac{P_3}{g} V_A^2;$$

$$T_B = \frac{1}{2} M_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_p^2,$$

где $V_C = \frac{V_A}{2}$; $\omega_p = \frac{V_A}{2r_R}$; $J_C = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} r_R^2$.

Следовательно, $T_B = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \cdot \frac{V_A^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P_3 r_R^2}{g} \cdot \frac{V_A^2}{4 r_R^2} = \frac{3}{16} \frac{P_3}{g} V_A^2$.

Таким образом, $T_1 = \frac{V_A^2}{16g} (8P_1 + 4P_2 + 3P_3)$.

Определим работу внутренних и внешних сил.

$$\sum A_k^i = 0$$

- по свойству работы внутренних сил.

$$\sum A_k^e = A_{P_1} + A_{mp} + A_{P_3} + A_{кач},$$

где

$$A_{P_1} = P_1 S \sin \alpha;$$

$$A_{mp} = -F_{mp} \cdot S = -f P_1 \cos \alpha \cdot S;$$

$$A_{P_3} = -P_3 S_C \sin \beta = -P_3 \sin \beta \cdot \frac{S}{2}, \quad \text{м.к.} \quad S_C = \frac{S}{2};$$

$$A_{кач} = -M_{кач} \cdot \varphi = -f_k P_3 \cos \beta \cdot \frac{S}{2R}, \quad \text{м.к.} \quad \varphi = \frac{S}{2R}.$$

Итак

$$\sum A_k^e = \left(P_1 \sin \alpha - f P_1 \cos \alpha - \frac{P_3 \sin \beta}{2} - f_k \frac{P_3 \cos \beta}{2R} \right) \cdot S.$$

Подставим все найденные величины в теорему об изменении кинетической энергии и получим:

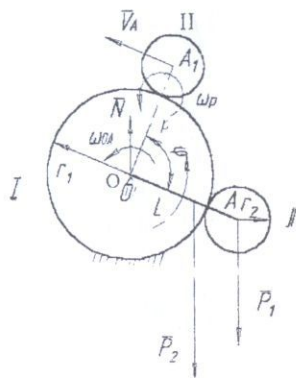
$$\frac{V_A^2}{16g} (8P_1 + 4P_2 + 3P_3) = \left(P_1 \sin \alpha - f P_1 \cos \alpha - \frac{P_3 \sin \beta}{2} - \frac{f_k P_3 \cos \beta}{2R} \right) \cdot S.$$

Тогда

$$V_A = \sqrt{\frac{P_1 \sin \alpha - f P_1 \cos \alpha - \frac{P_3 \sin \beta}{2} - \frac{f_k P_3 \cos \beta}{2R}}{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}}.$$

2. Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента L , приложенного к кривошипу OA . Определить угловую скорость кривошипа OA в зависимости от его угла поворота, если неподвижное

колесо I имеет радиус r_1 , подвижное колесо II – радиус r_2 и массу M_1 , а кривошип OA – массу M_2 . Колесо II считать однородным диском, а кривошип – однородным стержнем.



Решение

Механическая система состоит из колес I и II , кривошипа OA .

Силы, действующие на механическую систему, показаны на чертеже.

Кривошип OA совершает вращательное движение, колесо II – плоскопараллельное, колесо I – неподвижное.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для механической системы

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$$

Величина $T_0 = 0$, т.к. система в начальный момент времени находилась в покое.

Определим T_1 :

$$T_1 = T_{OA} + T_{II}$$

Найдем кинетическую энергию кривошипа OA и колеса II .

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_0 \omega_{OA}^2 = \frac{1}{6} M_2 (r_1 + r_2)^2 \omega_{OA}^2, \text{ т.к. } J_0 = \frac{1}{3} M_2 (r_1 + r_2)^2;$$

$$T_{II} = \frac{1}{2} M_1 V_{A1}^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_p^2,$$

$$\text{но } V_{A1} = \omega_{OA} (r_1 + r_2), \omega_p = \frac{V_{A1}}{r_2} = \frac{\omega_{OA} (r_1 + r_2)}{r_2}; J_A = \frac{1}{2} M_1 r_2^2.$$

Тогда

$$T_{II} = \frac{3}{4} M_1 \omega_{OA}^2 (r_1 + r_2)^2.$$

Следовательно

$$T_1 = \frac{\omega_{OA}^2 (r_1 + r_2)^2}{12} (2M_2 + 9M_1).$$

Определим работу внутренних и внешних сил.

$$\sum A_k^i = 0$$

- по свойству работы внутренних сил.

$$\sum A_k^e = A_l = L \cdot \varphi.$$

Силы тяжести P_1 и P_2 работу не совершают, т.к. механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Подставим найденные величины в теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{\omega_{CM}^2 (r_1 + r_2)^2}{12} (2M_2 + 9M_1) = L \cdot \varphi,$$

Отсюда

$$\omega_{CM} = \frac{2}{r_1 + r_2} \sqrt{\frac{3L\varphi}{9M_1 + 2M_2}}.$$

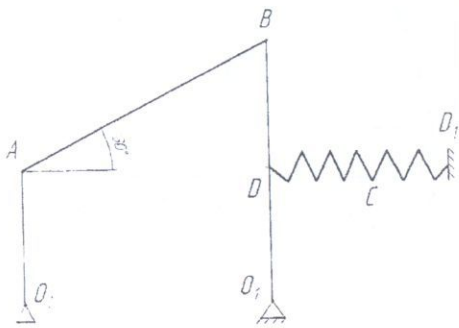
Контрольная работа
«Исследование свободных колебаний механической системы»

Определить частоту и период свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей, считая жесткость пружин равной C . Блоки, катки, стержни – однородные тела, момент инерции блоков равен i . Построить также электроаналоговую схему для данного механического процесса и подобрать коэффициенты и параметры электрической цепи, задав самостоятельно численное значение величин P_1, P_2, P_3, a, r .

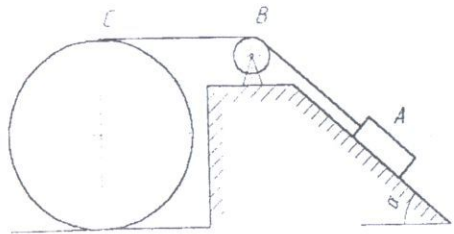
Схемы систем приведены на рис. 5-8, необходимые данные - в таблице.

Номер варианта	Вес тел системы	Линейные характеристики тел системы	Номер варианта	Вес тел системы	Линейные характеристики тел системы
1	$P_{o1A} = P_1;$ $P_{o2A} = P_2;$ $P_{AB} = P_3.$	$O_1A = O_2D = BD = a.$	13	$P_{AD} = P_1;$ $P_0 = P_2.$	$R_0 = r.$
2	$P_{oA} = P_2;$ $P_{BC} = P_2;$ $P_o = P_3.$	$OB = BA = a;$ $R_o = r.$	14	$P_A = P_1;$ $P_B = P_2.$	$R_A = r_1;$ $R_B = r_2.$
3	$P_{AB} = P_1;$ $P_o = P_2.$	$R_o = r.$	15	$P_D = P_1;$ $P_{AB} = P_2.$	$R_D = r.$
4	$P_{AB} = P_1;$ $P_{o1} = P_{o2} = P_{o3} = P_2.$	$R_{o1} = R_{o2} = R_{o3} = r.$	16	$P_{OA} = P_1;$ $P_A = P_2.$	$OA = l;$ $R_{A1} = r.$
5	$P_M = P_1;$ $P_A = P_B = P_2.$	$R_A = R_B = r.$	17	$P_0 = P_1;$ $P_M = P_2.$	$R_0 = r.$
6	$P_M = P_1;$ $P_C = P_3;$ $P_A = P_2;$ $P_{BC} = 0.$	$R_A = R_C = r.$	18	$P_0 = P_1;$ $P_{OA} = P_2.$	$R_1 = 2r;$ $R_2 = r;$ $OA = l.$
7	$P_B = P_1;$ $P_0 = P_2;$ $P_{AB} = 0.$	$R_B = 2R_{o1} = r.$	19	$P_A = P_1;$ $P_B = P_2;$ $P_M = P_3.$	$i_A = r\sqrt{2}.$
8	$P_{oA} = P_1;$ $P_A = P_2.$	$OA = l;$ $OB = a;$ $R_1 = r.$	20	$P_{oA} = P_1;$ $P_B = P_2;$ $P_M = P_3.$	$OA = l;$ $R_B = r;$ $OD = a.$
9	$P_{M1} = P_1;$ $P_{M2} = P_2;$ $P_1 = P_B = P_2.$	$R_A = R_B = r.$	21	$P_A = P_1;$ $P_B = P_2;$ $P_M = P_3.$	$R_1 = R_B = r.$
10	$P_{oA} = P_1;$ $P_{AB} = P_2;$ $P_B = P_3.$	$OA = l;$ $OD = a.$	22	$P_A = P_1;$ $P_B = P_2;$ $P_M = P_3.$	$i_B = r\sqrt{2}.$
11	$P_B = P_1;$ $P_{AB} = P_2;$ $P_M = P_3;$ $P_{AD} = 0.$	$OA = a_1;$ $OD = a_2;$ $a_1 \neq a_2.$	23	$P_D = P_1;$ $P_M = P_2;$ $P_{o1} = P_3.$	$R_{A1} = r;$ $OB = BA = a.$
12	$P_{oA} = P_1;$ $P_M = P_2;$ $P_{AB} = 0.$	$OA = l;$ $OD = a.$	24	$P_{A1} = P_1;$ $P_B = P_2;$ $P_M = P_3.$	$i_B = r\sqrt{2}.$

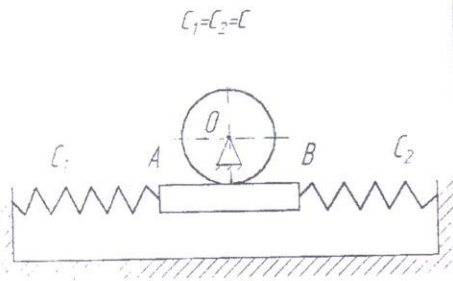
1



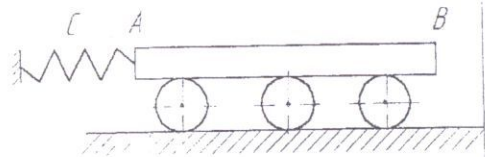
2



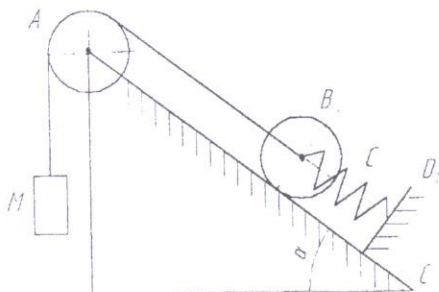
3



4



5



6

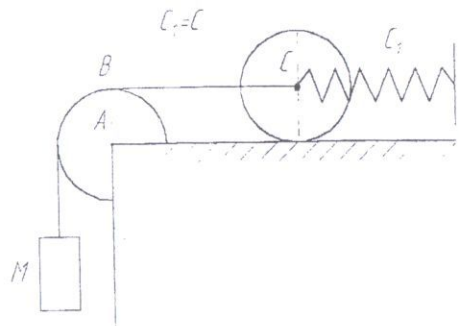
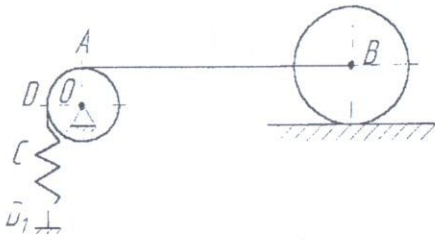
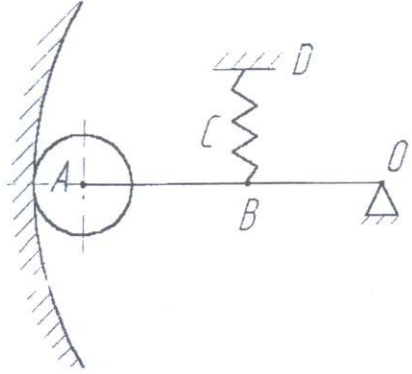


Рис. 5

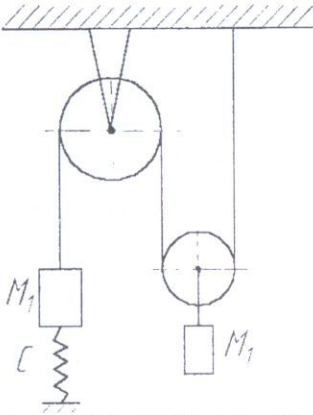
7



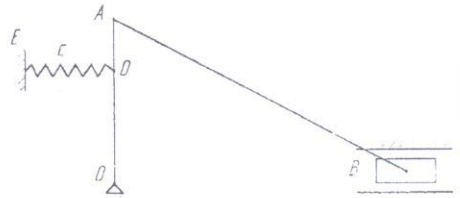
8



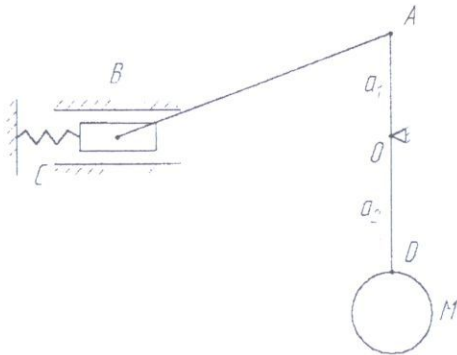
9



10



11



12

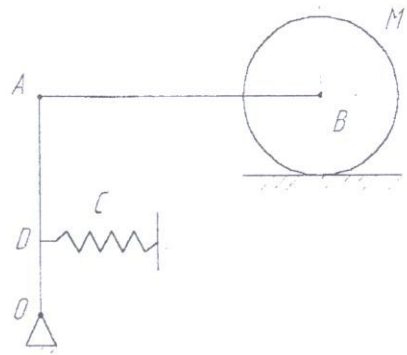
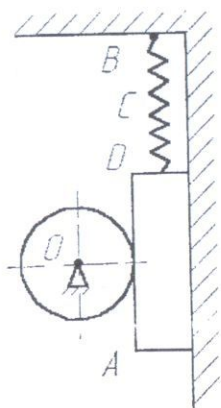
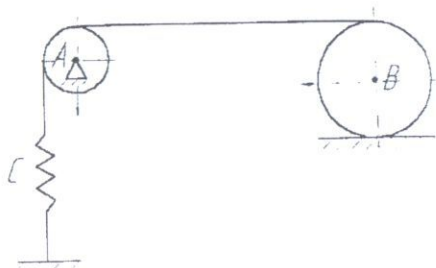


Рис. 6

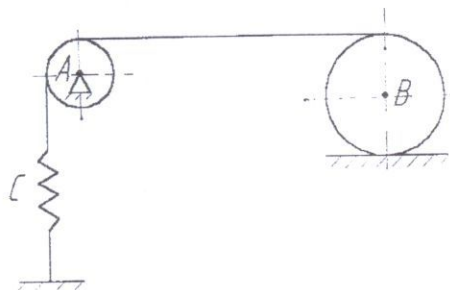
13



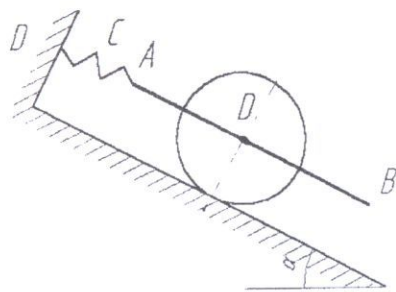
14



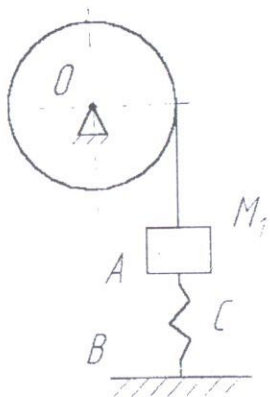
15



16



17



18

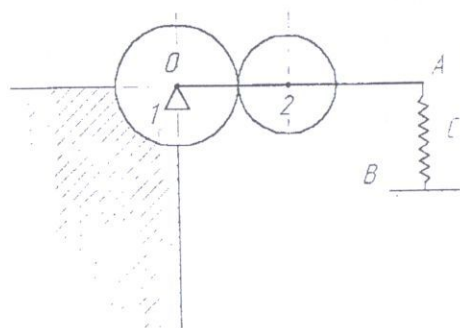
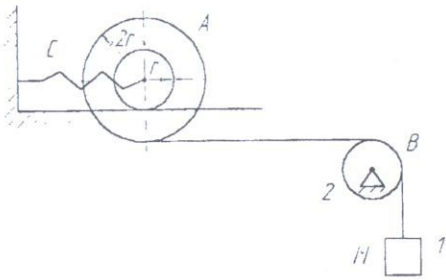
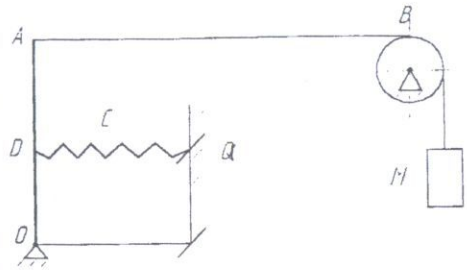


Рис. 7

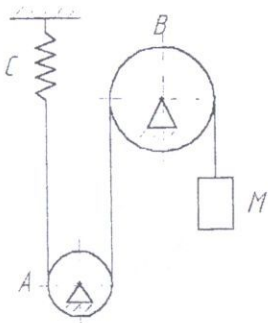
19



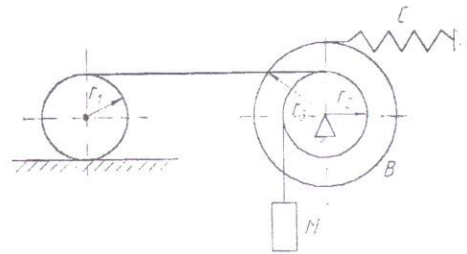
20



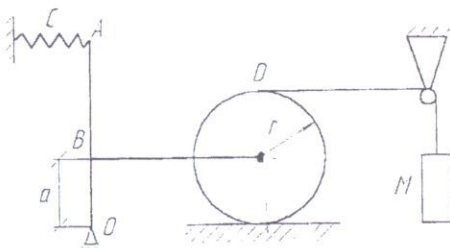
21



22



23



24

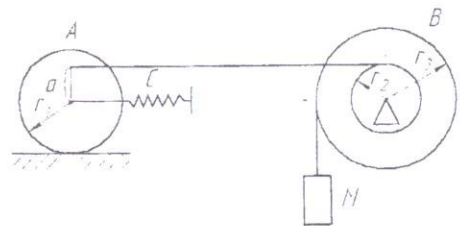


Рис. 8

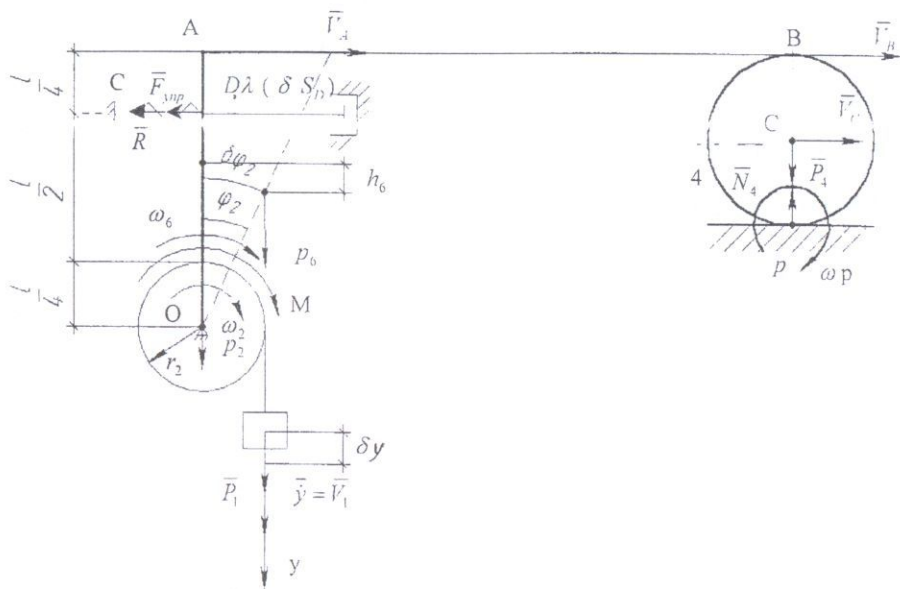
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Исследовать затухающие и вынужденные колебания механической системы, составить электрическую аналоговую схему и определить ее параметры.

Дано:

$$m_1 = 1 \text{ кг}; \quad m_2 = 2 \text{ кг}; \quad m_4 = 1 \text{ кг}; \quad m_5 = 6 \text{ кг};$$

$$l = 0,6 \text{ м}; \quad c = 0,02 \frac{\text{н}}{\text{м}}; \quad y_0 = 0,002 \text{ М}; \quad \dot{y}_0 = 0,08 \text{ \%}.$$



I. Исследование затухающих колебаний

Пусть в т. D крепления пружины присоединен демпфер, сила сопротивления которого $\bar{R} = -\alpha \bar{v}'_n$, где α ($\frac{\text{н}}{\text{с}}$) - коэффициент пропорциональности.

Воспользуемся уравнением Лагранжа II рода. Приняв за обобщенную координату вертикальное отклонение y груза I от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины, имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial y} + Q'_y,$$

где T - кинетическая энергия системы,

Π - потенциальная энергия системы,

Q'_y - обобщенная сила соответствующая неконсервативным силам.

Определим кинетическую энергию системы T :

$$T = T_1 + T_2 + T_6 + T_4,$$

здесь тело I совершает поступательное движение, тело 2 и 6 - вращательное, тело 4 - плоскопараллельное.

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{l}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2.$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{4} m_2 \dot{y}^2, \text{ где } J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2; \omega_2 = \frac{\dot{y}}{r_2}.$$

$$T_6 = \frac{1}{2} J_6 \omega_6^2 = \frac{8m_6 \dot{y}^2}{3}, \text{ где } J_6 = \frac{1}{3} m_6 l^2; r_2 = \frac{l}{4}; \omega_6 = \omega_2.$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_p^2, \text{ где } J_C = \frac{1}{2} m_4 r_4^2;$$

$$V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{V_A}{2} = \frac{\omega_6 \cdot l}{2} = \frac{\omega_2 l}{2} = \frac{\dot{y} l}{2r_2} = 2\dot{y}; \omega_p = \frac{V_C}{r_4} = \frac{2\dot{y}}{r_4}.$$

Тогда

$$T_4 = 3m_4 \dot{y}^2.$$

Таким образом $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{y}^2 + \frac{8m_6 \dot{y}^2}{3} + 3m_4 \dot{y}^2 = \frac{\dot{y}^2}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4 \right).$

Найдем потенциальную энергию системы:

$$\Pi = \Pi_{p_1} + \Pi_{p_6} + \Pi_{y_{\text{уп}}}. \quad \Pi_{p_1} = m_1 g y;$$

$$\Pi_{p_6} = -m_6 g h,$$

где $h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi) = \frac{l}{2} \left(1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) = \frac{l}{4} \varphi^2$, но $\varphi = \frac{y}{r_2} = \frac{4y}{l}$.

Тогда

$$\Pi_{p_6} = -m_6 g \cdot \frac{l\varphi}{4} = -m_6 g \frac{4y^2}{l};$$

$$\Pi_{y_{\text{уп}}} = \frac{c}{2} [(f_{cm} + \lambda)^2 - f_{cm}^2], \text{ но } \lambda = 3y, \text{ т.е. } \Pi_{y_{\text{уп}}} = \frac{c}{2} [(f_{cm} + 3y)^2 - f_{cm}^2].$$

Следовательно, $\Pi = -m_1 g y - m_6 g \frac{4y^2}{l} + \frac{c}{2} [(f_{cm} + 3y)^2 - f_{cm}^2].$

Величину f_{cm} определим из соотношения

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left(-m_1 g - m_6 g \frac{8y}{l} + c \cdot 3(f_{cm} + 3y) \right) \Big|_{y=0} = -m_1 g + 3c f_{cm} = 0.$$

Отсюда

$$f_{cm} = \frac{m_1 g}{3c}.$$

Подставим величину f_{cm} в $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ и упростим полученное выражение

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \left(9cy - m_6 g \frac{8y}{l} \right) = \left(9c - m_6 g \frac{8}{l} \right) y.$$

Определим Q'_y . Для этого составим выражение δA_y :

$$\delta A_y = -R \cdot \delta S_y,$$

где $R = \alpha V = \alpha V_D = \alpha \cdot \omega_2 \cdot \frac{3}{4} l = \frac{3}{4} \alpha \cdot l \omega_2 = 3\alpha \dot{y}$;

$$\delta S_y = \frac{3}{4} l \cdot \delta \varphi_2 = 3\delta y, \text{ т.к. } \delta \varphi_2 = \frac{4}{l} \delta y.$$

Тогда

$$\delta A_y = -\alpha \dot{y} \cdot 9\delta y = -9\alpha \dot{y} \delta y.$$

Следовательно

$$Q'_y = -9\alpha \dot{y}.$$

Определим величины, входящие в левую часть уравнения Лагранжа II рода.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \dot{y} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4 \right);$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \ddot{y} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4 \right).$$

Подставим все найденные величины в уравнение Лагранжа II рода и получим

$$\ddot{y} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4 \right) = - \left(9c - \frac{8m_6 g}{l} \right) y - 9\alpha \dot{y}.$$

или

$$\ddot{y} + \frac{9\alpha}{m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4} \dot{y} + \frac{9c - \frac{8m_6 g}{l}}{m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4} y = 0.$$

Введем обозначения

$$k^2 = \frac{9c - \frac{8m_6 g}{l}}{m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4} = 734,4c^{-2};$$

$$2n = \frac{9\alpha}{m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_6 + 6m_4} = 0,375\alpha.$$

Тогда имеем

$$\ddot{y} + 0,375\alpha \dot{y} + 734,4y = 0.$$

Для того чтобы колебания системы были затухающими, должно выполняться условие $n \ll k$, т.е. $0,1875\alpha \ll 27,1$ и $\alpha \ll 144,5$.

Положим $\alpha = 20$, тогда $n=3,75$ и решение уравнения запишется в виде

$$y = e^{-3,75t} (C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 27,2c^{-1}$; k_1 – частота затухающих колебаний;

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 0,23c; \quad T_1 \text{ – период затухающих колебаний.}$$

Используя начальные условия, определим C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = 0,002; \\ C_2 = 0,0032. \end{cases}$$

Окончательно $y = e^{-3,75t} (0,0032 \sin 27,2t + 0,002 \cos 27,2t)$ м.

Декремент затухания $e^{-nT_1} = e^{-0,86} = 0,42$.

II. Исследование вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления

К стержню *OA* кроме силы сопротивления \bar{R} , приложенной в т.*D*, приложен возмущающий момент $M = M_0 \sin pt = 36 \sin pt$ (нм).

При решении этой задачи, изменится только определение Q'_y , все остальные расчеты для составления уравнения Лагранжа II рода возьмем из п. I.

Определим Q_y^i для данной задачи. Составим δA_1 :

$$\delta A_1 = R \cdot \delta S_{\rho_1} + M \cdot \delta \varphi, \text{ где } \delta \varphi = \frac{\delta y}{r_2} = \frac{4\delta y}{l}.$$

Тогда с учетом результатов п.1 имеем

$$\delta A_1 = -9\alpha \dot{y} \cdot \delta y + M_0 \sin pt \cdot \frac{4}{l} \delta y = \delta y \left(-9\alpha \dot{y} + M_0 \sin pt \cdot \frac{4}{l} \right).$$

Отсюда
$$Q_y^i = -9\alpha \dot{y} + \frac{4M_0}{l} \sin pt.$$

Учитывая результаты п.1, уравнение Лагранжа II рода примет вид

$$\ddot{y} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_0 + 6m_4 \right) = - \left(9c - \frac{8}{l} m_0 g \right) y - 9\alpha \dot{y} + \frac{4M_0}{l} \sin pt$$

или
где

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = h \sin pt,$$

$$2n = 0,375\alpha;$$

$$k^2 = 373,4;$$

$$h = \frac{4M_0}{l \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3} m_0 + 6m_4 \right)} = 1.$$

Это дифференциальное уравнение представляет собой неоднородное уравнение второго порядка, решение которого складывается из общего решения \bar{y} соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения:

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Соответствующее однородное уравнение и его решение было разобрано в п.1, оно является затухающим, т.е. им можно пренебречь, а исследовать только колебания, определяемые законом y^* .

Решение y^* запишется в виде:

$$y^* = A \sin(pt - \beta),$$

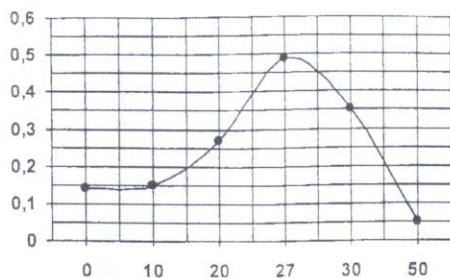
где
$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Решение y^* дает закон вынужденных колебаний, происходящих с частотой p .

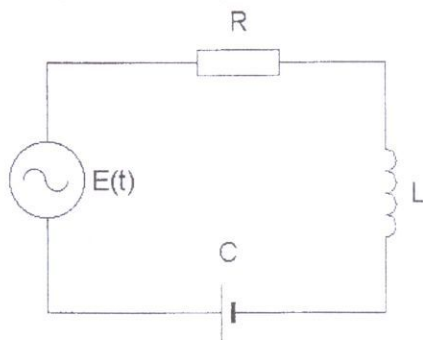
Изобразим зависимость амплитуды A от частоты p .

p	0	10	20	27	30	50
A	0.14	0.15	0.27	0.49	0.35	0.05



Построим электрическую аналоговую схему для данного механического процесса, а также осуществим подбор коэффициентов и параметров электрической схемы.

Электрическим аналогом данной механической системы с одной степенью свободы является следующий электрический контур



Запишем уравнение соответствующей электрической цепи:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

- где L – индуктивность катушки;
 C – емкость конденсатора;
 R – сопротивление;
 $E(t) = E_0 \sin pt$ – ЭДС цепи;
 q – заряд в цепи.

Уравнение вынужденных колебаний механической системы запишем в виде

$$a\ddot{y} + \gamma\dot{y} + c_1 y = M_1 \sin pt,$$

где $a = m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3}m_6 + 6m_4 = 40;$

$$\gamma = \frac{9}{16} \cdot \frac{l^2}{r_2^2} \cdot \alpha = \frac{9}{16} \cdot 16 \cdot 20 = 180;$$

$$C_1 = 9c - \frac{8}{l} m_8 g = 17608;$$

$$M_1 = M_0 \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{36 \cdot 4}{0,6} = 240.$$

Введем масштабные коэффициенты:

$$K_1 = \frac{a}{L}; \quad K_2 = \frac{\gamma}{R}; \quad K_3 = \frac{C_1}{\gamma C};$$
$$K_4 = \frac{\gamma}{q}; \quad K_5 = \frac{M_1}{E_0}; \quad K_0 = \frac{t}{\tau}$$

где t – время моделируемого процесса;
 τ – время моделирующего процесса.

Три параметра электрического контура задаем независимо:

$$L=300 \text{ МГн}; \quad C=10 \text{ мкФ}; \quad E_0=20 \text{ в.}$$

Тогда получим три независимых масштабных коэффициента

$$K_1 = \frac{a}{L} = 0,13 \cdot 10^3 \frac{\text{Кг}^2}{\text{Гн}},$$

$$K_3 = C_{11} = 0,17 \frac{\text{Фн}}{\text{м}},$$

$$K_5 = \frac{M_1}{E_0} = 12 \frac{\text{н}}{\text{в}}.$$

Остальные масштабные коэффициенты определим из индикаторов подобия:

$$\frac{K_3 K_4}{K_5} = 1; \quad \frac{K_2 K_4}{K_5 K_0} = 1; \quad \frac{K_1 K_4}{K_5 K_0^2} = 1.$$

Тогда

$$K_4 = \frac{K_5}{K_3} = 70,6; \quad K_0 = \sqrt{\frac{K_1}{K_3}} = 27,6; \quad K_2 = \sqrt{K_1 \cdot K_3} = 4,7,$$

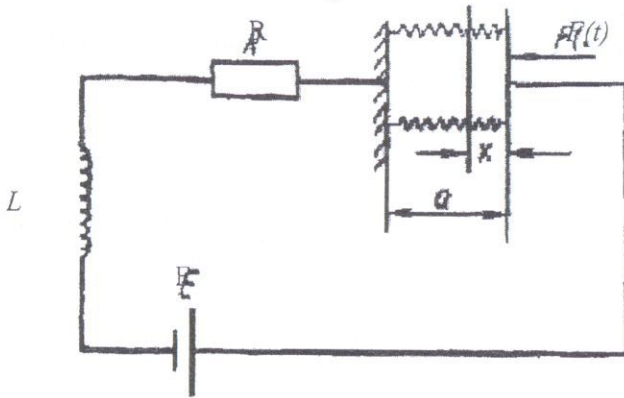
так как $K_2 = \frac{\gamma}{R}$, то $R = \frac{\gamma}{K_2} = \frac{180}{4,7} = 38,3 \text{ Ом}$

Полученное значение $K_0 = 27,6$ показывает, что в моделирующей электрической цепи процесс протекает в 27,6 раз быстрее, чем в механической.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
по теме «Динамика электромеханических систем»

Пример 1

Конденсаторный микрофон состоит из последовательно соединенных катушки самоиндукции L , резистора сопротивления R и конденсатора, пластины которого связаны двумя пружинами общей жесткости k . Цепь присоединена к источнику питания с постоянной ЭДС E , и на пластину конденсатора действует переменная сила $F(t)$. Емкость конденсатора в положении равновесия системы C_0 , расстояние между пластинами в этом положении a , масса подвижной пластины конденсатора m . Составить уравнения движения системы.



Решение

1. Анализируем систему и выбираем обобщенные координаты. Данная система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем смещение x подвижной пластины конденсатора из положения равновесия и изменение заряда q от равновесного значения.

Пусть в положении равновесия конденсатор имеет заряд q_0 , а пружины сжаты на величину δ_{cm} силой, с которой пластины конденсатора притягиваются друг к другу. При колебаниях системы полный заряд на конденсаторе и величина зазора между пластинами

$$\begin{aligned} q_n &= q_0 + q, \\ d &= a - x, \end{aligned} \tag{1}$$

где d — зазор между обкладками;

q_n — полный заряд;

a — расстояние между пластинами в положении равновесия;

q — изменение заряда от равновесного значения;

q_0 — заряд в положении равновесия.

2. Для данной системы записываем уравнения Лангранжа-Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} + Q_x^f + Q_x^{em}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial W_m}{\partial q} &= - \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{q}} + E. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы. Подвижная пластина движется поступательно. Кинетическая энергия ее

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

4. Вычисляем потенциальную энергию системы. В системе действует только консервативная сила упругости $F_{упр}$. Потенциальная энергия системы равна работе консервативных сил при перемещении системы из данного положения в нулевое. За нулевое положение системы принимаем ее положение равновесия. Тогда потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} k \left\{ (x + \delta_{em})^2 - \delta_{em}^2 \right\} = \frac{1}{2} k (x^2 + 2x\delta_{em}), \quad (3)$$

где k — жесткость пружины;

δ_{em} — деформация пружины в положении статического равновесия.

5. Определяем диссипативную функцию Φ . Для данной системы $\Phi = 0$.

6. Вычисляем энергию магнитного поля катушки индуктивности

$$W_m = \frac{L\dot{q}^2}{2}, \quad (4)$$

где L — индуктивность катушки;

$\dot{q} = i$ — ток, проходящий через катушку.

7. Вычисляем энергию электрического поля

$$W_e = \frac{(q_0 + q)^2}{2C}, \quad (5)$$

где C — емкость конденсатора.

Емкость конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между обкладками конденсатора и прямо пропорциональна площади его пластин:

$$C = \frac{\varepsilon \cdot S}{a - x}.$$

где x — смещение пластины из положения равновесия;

a — расстояние между пластинами в положении равновесия;

S — площадь каждой из обкладок;

ε — диэлектрическая проницаемость вакуума.

В положении равновесия $C = C_0$, т. е. $C_0 = \frac{\varepsilon \cdot S}{a}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot S &= C_0 a, \\ C &= \frac{C_0 a}{a - x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Окончательно энергия электрического поля

$$W_e = \frac{(q_0 + q)^2 (a - x)}{2C_0 a}. \quad (7)$$

8. Вычисляем функцию рассеивания

$$\Phi_c = -\frac{R\dot{q}^2}{2}, \quad (8)$$

где R — омическое сопротивление цепи;

$\dot{q} = i$ — ток в сопротивлении.

9. Определяем обобщенную силу Q_x^F , соответствующую механическим силам неконсервативного характера. В системе действует только одна неконсервативная сила $F(t)$. Для определения Q_x^F дадим системе такое возможное перемещение, при котором

$$\delta x \neq 0, \quad \delta q = 0.$$

Вычисляем возможную работу:

$$\delta A = F(t) \cdot \delta x.$$

Следовательно, обобщенная сила

$$Q_x^F = \frac{\delta A}{\delta x} = F(t).$$

10. Определяем обобщенную электромагнитную силу

$$Q_x^{em} = \frac{\partial W_m}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W_e}{\partial x} = 0 - \frac{(q_0 + q)^2}{2C_0 a}. \quad (9)$$

11. Подставляем найденные значения T , Π , W_e , W_m , Q_x^F в уравнения Лагранжа-Максвелла.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k\delta_{cm} - kx + F(t) + \frac{(q_0 + q)^2}{2C_0 a}; \\ L\ddot{q} = -\frac{(q_0 + q)(a - x)}{C_0 a} + E - Rq. \end{cases} \quad (10)$$

Для определения δ_{cm} и q_0 исследуем положение равновесия системы. В состоянии равновесия имеем:

$$x = \dot{x} = \ddot{x} = q = \dot{q} = \ddot{q} = F(t) = 0.$$

Тогда из уравнения (10) следует

$$\begin{cases} 0 = -k\delta_{cm} + \frac{q_0^2}{2C_0 a}; \\ 0 = -\frac{q_0}{C_0} + E. \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (10) с учетом формул (11) преобразуются к виду

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + F(t) + \frac{q_0 q}{C_0 a} + \frac{q^2}{2C_0 a}; \\ L\ddot{q} = -R\dot{q} - \frac{q_0}{C_0} + \frac{q x}{C_0 a} + \frac{q_0 x}{C_0 a} - \frac{q}{C_0} + E(t). \end{cases} \quad (12)$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + \frac{E}{a}q + \frac{q^2}{2C_0a} + F(t); \\ L\dot{q} = -R\dot{q} + \frac{Ex}{a} + \frac{qx}{C_0a} - \frac{q}{C_0}; \end{cases} \quad (13)$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - \frac{Eq}{a} - \frac{q^2}{2C_0a} = F(t); \\ L\dot{q} + R\dot{q} - \frac{Ex}{a} - \frac{qx}{C_0a} + \frac{q}{C_0} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Пример 2

Определить частоты малых свободных колебаний конденсаторного микрофона в примере 1. Сопротивлением резистора пренебречь.

Решение

1. Определение дифференциальных уравнений малых колебаний системы. Значения величин T , Π , W_e , W_m определены в примере 1.

При исследовании малых колебаний системы кинетическая и потенциальная энергии системы, а также энергии электрического и магнитного полей вычисляются с точностью до второго порядка малости.

Разложим энергию электрического поля в ряд по степеням обобщенных координат q и x ,

$$W_e = \frac{(q_0 + q)^2(a - x)}{2C_0a} = \frac{q_0^2}{2C_0} + \frac{q_0q}{C_0} - \frac{q_0^2x}{2C_0a} - \frac{q_0qx}{C_0a} + \frac{q^2}{2C_0} - \frac{q^2x}{2C_0a}.$$

Откинем члены выше второго порядка малости

$$W_e' = \frac{q_0^2}{2C_0} - x \left(\frac{q}{2C_0a} + \frac{q_0q}{C_0a} \right) + \frac{q_0q}{C_0} + \frac{q^2}{2C_0}. \quad (15)$$

Учтем, что по условию задачи $R = 0$, т. е. $\Phi_e = 0$, и возмущающая сила $F(t)$ при свободных колебаниях равна нулю.

Следовательно,

$$Q_x^F = 0.$$

С учетом изменений W_e и Q_x^F уравнения (14) примут вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - \frac{E}{a}q = 0; \\ L\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \frac{E}{am}q = 0; \\ \dot{q} + \frac{q}{LC_0} - \frac{E}{aL}x = 0. \end{cases} \quad (16)$$

2. Определение частоты малых колебаний. Ищем решение системы (3.16) в виде

$$\begin{cases} x = A \sin(k_1 t + \beta); \\ q = B \sin(k_1 t + \beta). \end{cases} \quad (17)$$

где k_1 — частота колебаний;

β — сдвиг фазы колебаний.

Подставляем формулы (17) в уравнения (16):

$$\begin{cases} -Ak_1^2 \sin(k_1 t + \beta) + \frac{k}{m} A \sin(k_1 t + \beta) - \frac{E}{am} B \sin(k_1 t + \beta) = 0; \\ -Bk_1^2 \sin(k_1 t + \beta) + \frac{B}{LC_0} \sin(k_1 t + \beta) - \frac{E}{aL} A \sin(k_1 t + \beta) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Отсюда

$$\begin{cases} A \left(-k_1^2 + \frac{k}{m} \right) - \frac{E}{am} B = 0; \\ B \left(-k_1^2 + \frac{1}{LC_0} \right) - \frac{E}{aL} A = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Определитель этой системы должен быть равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \left(-k_1^2 + \frac{k}{m} \right) & -\frac{E}{am} \\ -\frac{E}{aL} & \left(-k_1^2 + \frac{1}{LC_0} \right) \end{vmatrix} = 0; \quad (20)$$

или

$$\left(-k_1^2 + \frac{k}{m} \right) \left(-k_1^2 + \frac{1}{LC_0} \right) - \frac{E^2}{a^2 mL} = 0;$$

или

$$k_1^4 - k_1^2 \left(\frac{k}{m} + \frac{1}{LC_0} \right) + k \frac{1}{mLC_0} - \frac{E^2}{a^2 mL} = 0.$$

Получим

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} + \frac{1}{LC_0} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k}{m} + \frac{1}{LC_0} \right)^2 + \frac{4E^2}{a^2 mL}};$$

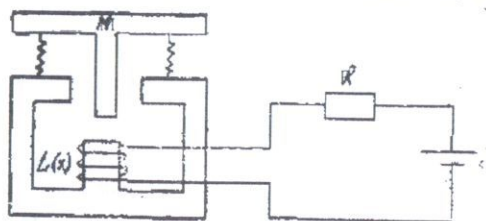
Окончательно,

$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{1}{LC_0}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k}{m} + \frac{1}{LC_0} \right)^2 + \frac{4E^2}{a^2 mL}}. \quad (21)$$

Пример 3

Система, изображенная на рисунке, отвечает принципиальной схеме электромагнитного датчика акселерометра. Масса якоря M , общая жесткость пружин k . Самоиндукция катушки изменяется вследствие изменения воздушного зазора в магнитопроводе $L(x)$ (x — вертикальное смещение якоря из положения,

когда пружины не напряжены). К катушке присоединена электрическая цепь, состоящая из элемента с заданной ЭДС E и сопротивления цепи R . Составить уравнения движения системы и определить ее положение равновесия.



Решение

1. Анализ электромеханической системы и выбор обобщенных координат. Данная система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем: x — вертикальное смещение якоря из положения, когда пружины не напряжены; заряд q , соответствующий току в цепи.

2. Уравнения Лагранжа-Максвелла имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q_x^f + Q_x^{em}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial W_m}{\partial q} = - \frac{\partial W_e}{\partial q} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{q}} + E(t). \end{cases} \quad (22)$$

3. Кинетическая энергия механической системы

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2}, \quad (23)$$

где M — масса якоря.

4. Потенциальная механическая энергия равна потенциальной энергии силы упругости пружины и силы тяжести P (веса якоря). Если за нулевое положение системы принять положение, когда пружины не напряжены, то

$$\Pi = \frac{1}{2}kx^2 - Px. \quad (24)$$

5. Сопротивление движения отсутствует, т.е.

$$\Phi = 0. \quad (25)$$

6. Энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{L(x)\dot{q}^2}{2}, \quad (26)$$

где $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = i$ — ток в цепи.

7. Энергия электрического поля $W_e = 0$, так как конденсатор в цепи отсутствует.

8. Функция рассеивания

$$\Phi_e = \frac{R\dot{q}^2}{2}. \quad (27)$$

где R — омическое сопротивление цепи.

9. Обобщенная сила, соответствующая механическим неконсервативным силам

$$Q_x^f = 0.$$

10. Обобщенная электромагнитная сила

$$Q_x^{em} = \frac{\partial W_m}{\partial x} - \frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{\dot{q}^2}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x}. \quad (28)$$

11. Подставляем полученные значения T , Π , W_e , Q_x^{em} в уравнения Лагранжа-Максвелла (22), предварительно найдя производные

$$\begin{cases} \frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}} = L(x)\dot{q}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = M\ddot{x}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{q}} \right) = \dot{q} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + L(x)\ddot{q}. \end{cases} \quad (29)$$

Уравнения (22) принимают вид

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -kx + \frac{\dot{q}^2}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} + P; \\ L\ddot{q} + \dot{q}\dot{x} \frac{\partial L(x)}{\partial x} = E - R\dot{q}. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть в положении равновесия

$$x = \dot{x} = \ddot{q} = 0; \quad x = x_0; \quad \dot{q} = i_0. \quad (31)$$

Тогда из уравнений (30) следует

$$\begin{cases} kx_0 - \frac{1}{2}i_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{x=x_0} = P; \\ E - Ri_0 = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2k}i_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{x=x_0} + \frac{P}{k}; \\ i_0 = \frac{E}{R}. \end{cases} \quad (32)$$

Пример 4

Составить уравнения малых движений вблизи положения равновесия электромагнитного датчика, описанного в примере 3.

Решение

1. Выбор обобщенных координат.

За обобщенные координаты возьмем изменение заряда e и вертикальное перемещение якоря из положения равновесия ξ .

В этом случае, вертикальное смещение якоря из положения, когда пружины не напряжены,

$$x = x_0 + \xi \quad (33)$$

и заряд

$$q = q_0 + e, \quad (34)$$

где x_0 — статическая деформация пружин;

q_0 — заряд в положении равновесия;

e — приращение полного заряда q .

2. Уравнения Лагранжа-Максвелла имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + Q_{\xi}^{em} + Q_{\xi}^F - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\xi}}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{e}} \right) - \frac{\partial W_m}{\partial e} = - \frac{\partial W_m}{\partial e} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{e}} + E(t). \end{cases} \quad (35)$$

3. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{M \dot{\xi}^2}{2}. \quad (36)$$

4. Потенциальная механическая энергия

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} k \left\{ (x_0 + \xi)^2 - x_0^2 \right\} - P \xi; \\ \Pi &= \frac{1}{2} k \left\{ 2 x_0 \xi + \xi^2 \right\} - P \xi. \end{aligned} \quad (37)$$

За нулевое положение системы принято положение равновесия системы.

5. Сопротивление отсутствует, т.е. $\Phi = 0$.

6. Энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{L(x_0 + \xi) \cdot \dot{q}^2}{2}. \quad (38)$$

В случае малых колебаний значения энергий вычисляются с точностью до второго порядка малости.

Разложим функцию $L(x_0 + \xi)$ в ряд, ограничиваясь членами только первого порядка малости

$$L(x_0 + \xi) = L(x_0) + \left(\frac{\partial L}{\partial \xi} \right)_{x_0} \cdot \xi. \quad (39)$$

Введем обозначения

$$L(x_0 + \xi) = L + L_1 \xi; \quad (40)$$

$$\dot{q}^2 = (\dot{q}_0 + \dot{e})^2 = \dot{q}_0^2 + 2\dot{q}_0 \dot{e} + \dot{e}^2. \quad (41)$$

Тогда

$$W_m = \frac{1}{2} (L_0 + L_1 \xi) (\dot{q}_0^2 + 2\dot{q}_0 \dot{e} + \dot{e}^2) = \frac{1}{2} (L_0 \dot{q}_0^2 + L_0 2\dot{q}_0 \dot{e} + L_0 \dot{e}^2 + L_1 \xi \dot{q}_0^2 + L_1 \xi 2\dot{q}_0 \dot{e} + L_1 \xi \dot{e}^2). \quad (42)$$

Ограничиваясь членами только второго порядка малости, получаем

$$W_m = \frac{1}{2}(L_0 \dot{q}_0^2 + L_0 2\dot{q}_0 \dot{e} + L_0 \dot{e}^2 + L_1 \xi \dot{q}_0^2 + L_1 \xi 2\dot{q}_0^2 \dot{e}). \quad (43)$$

7. Энергия электрического поля (конденсатор отсутствует)

$$W_c = 0. \quad (44)$$

8. Функция рассеивания

$$\Phi_c = \frac{1}{2}R(\dot{q}_0 + \dot{e})^2 = \frac{R}{2}(\dot{q}_0^2 + 2\dot{q}_0 \dot{e} + \dot{e}^2). \quad (45)$$

9. Обобщенная сила

$$Q_\xi^F = 0. \quad (46)$$

10. Обобщенная электромагнитная сила

$$Q_\xi^{em} = \frac{\partial W_m}{\partial \xi} - \frac{\partial W_e}{\partial \xi} = \frac{1}{2}L_1 \dot{q}_0^2 + L_1 \dot{q}_0 \dot{e}. \quad (47)$$

11. Предварительно найдем частные производные и подставим T , Π , W_m , Φ_e , Q_ξ^{em} в уравнения Лагранжа-Максвелла.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) &= M \ddot{\xi}; & \frac{\partial T}{\partial \xi} &= 0; & \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} &= kx_0 + k\xi - P; \\ \frac{\partial W_m}{\partial \dot{e}} &= L_0 \dot{q}_0 + L_0 \dot{e} + L_1 \xi \dot{q}_0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{e}} \right) &= L_0 \ddot{e} + L_1 \dot{q}_0 \dot{\xi}; \\ \frac{\partial \Phi_e}{\partial \dot{e}} &= F(\dot{q}_0 + \dot{e}). \end{aligned}$$

Уравнения (35) принимают вид

$$\begin{cases} M \ddot{\xi} = -k(\xi + x_0) + P + \frac{1}{2}L_1 q_0^2 + L_1 \dot{q}_0 \dot{e}; \\ L_0 \ddot{e} + L_1 \dot{\xi} \dot{q}_0 + R(\dot{q}_0 + \dot{e}) = E. \end{cases} \quad (48)$$

В положении равновесия $\dot{\xi} = \xi = 0$, $\dot{e} = e = 0$ и из уравнения (48) следует

$$\begin{cases} -k x_0 + P + \frac{1}{2}L_1 q_0^2 = 0; \\ R \dot{q}_0 = E, \end{cases}$$

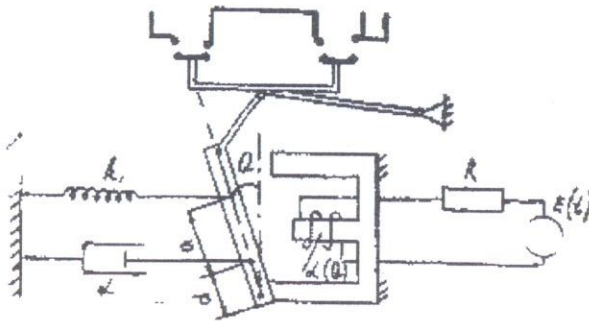
и уравнения (48) принимают вид

$$\begin{cases} M \ddot{\xi} + k\xi - L_1 \dot{q}_0 \dot{e} = 0; \\ L_0 \ddot{e} + L_1 \dot{\xi} \dot{q}_0 + R\dot{e} = 0. \end{cases}$$

Расчетно-графические работы
«Динамика электромеханических систем»

Задача 1

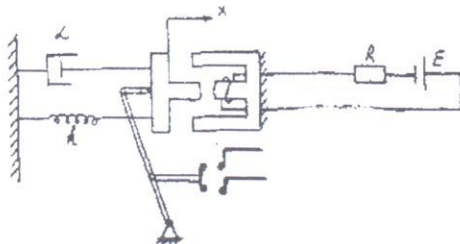
Электромагнитный выключатель состоит из неподвижного и подвижного контактов, возвратной пружины, успокоительного механического демпфера, якоря и силового электромагнита. При подаче напряжения E на клеммы силовой катушки якорь притягивается к полюсам электромагнита и происходит замыкание контактов.



Масса якоря m_1 , коэффициент вязкого сопротивления демпфера a . Индуктивность катушки $L(\theta)$. Активное сопротивление R , коэффициент жесткости пружины k . Когда пружина не деформирована, угол $\theta = \theta_0$. Составить уравнения движения электромагнитного выключателя. Массами передаточного механизма пренебречь.

Задача 2

Электромагнитный выключатель состоит из неподвижного и подвижного контактов, возвратной пружины, успокоительного механического демпфера, якоря и силового электромагнита.



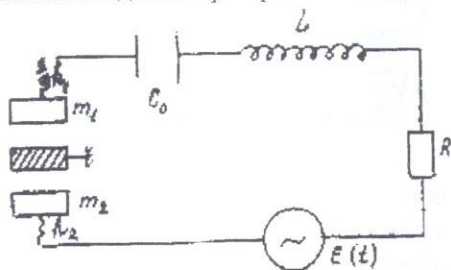
При подаче напряжения E на клеммы силовой катушки якорь притягивается к полюсам электромагнита и происходит замыкание. Масса якоря m_1 , коэф-

коэффициент вязкого сопротивления демпфера a . Индуктивность катушки $L(x)$, где x — расстояние между якорем и магнитом. Активное сопротивление R , коэффициент жесткости пружины k . Когда пружина не деформирована, $x=a$.

Составить уравнения движения электромагнитного выключателя. Массами передаточного механизма пренебречь.

Задача 3

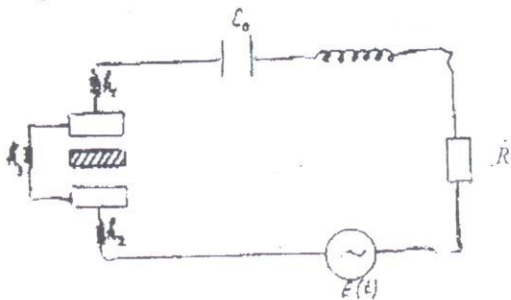
Два груза массой m_1 и m_2 связаны с неподвижными стенками пружинами жесткости k_1, k_2 . Каждый из грузов несет на себе пластину, образующую с неподвижными пластинами конденсатор переменной емкости.



Составить уравнения движения систем, если в положении, показанном на рисунке, деформации пружин δ_1 и δ_2 , расстояния между пластинами α_1 и α_2 , емкости конденсаторов C_1 и C_2 .

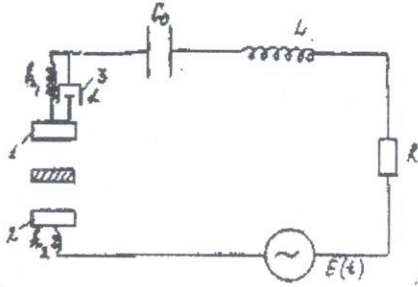
Задача 4

Два груза массой m_1 и m_2 связаны с неподвижными стенками и между собой пружинами жесткости k_1, k_2 и k_3 . Каждый из грузов несет на себе пластину, образующую с неподвижными пластинами конденсатор переменной емкости. Составить уравнения движения системы, если в положении показанном на рисунке, деформации пружин $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, расстояния между пластинами α_1 и α_2 , емкости конденсаторов в этом положении C_1 и C_2 .



Задача 5

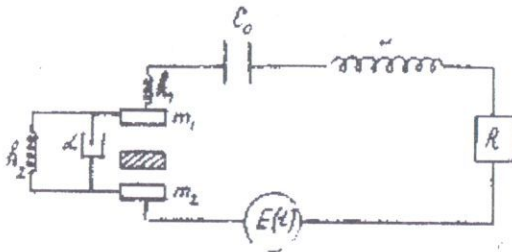
Груз массой m_1 связан с неподвижной стенкой пружиной жесткости k_1 и демпфером λ с коэффициентом вязкого сопротивления a . Груз массой m_2 связан с неподвижной стенкой пружиной жесткости k_2 . Каждый из грузов несет на себе пластину, образующую с неподвижными пластинами конденсатор переменной емкости.



Составить уравнения движения системы, если в положении, показанном на рисунке, деформации пружин δ_1 и δ_2 , расстояния между пластинами α_1 и α_2 , емкости конденсаторов в этом положении C_1 и C_2 .

Задача 6

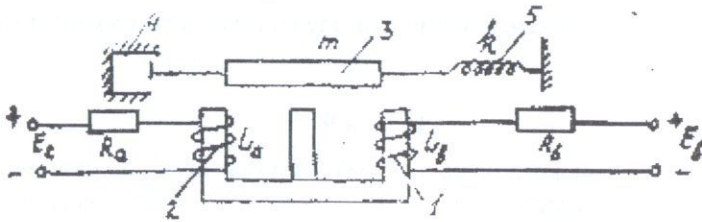
Два груза массой m_1 и m_2 связаны между собой пружиной жесткости k_2 и демпфером с коэффициентом вязкого трения a . Груз массой m_1 связан с неподвижной стенкой пружиной жесткости k_1 . Груз массой m_1 несет на себе пластину, образующую с неподвижной пластиной конденсатор переменной емкости. Груз массой m_2 образует с неподвижной пластиной конденсатор постоянной емкости.



Составить уравнения движения системы, если в положении равновесия деформации пружин δ_{cm1} и δ_{cm2} расстояние между пластинами α_1 и α_2 , емкости конденсаторов C_1 и C_2 .

Задача 7

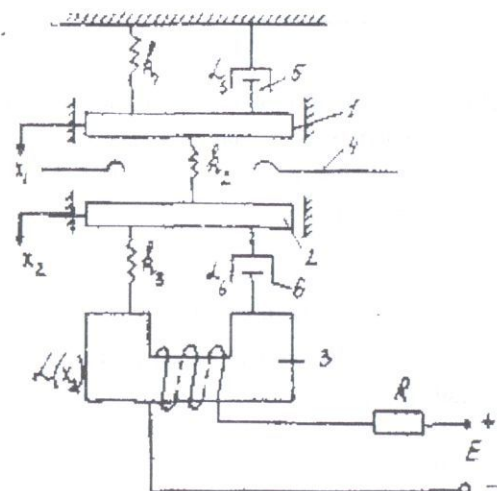
Электромагнитное устройство автоматического регулирования состоит из двух обмоток 1 и 2, якоря 3, демпфера 4, пружины 5.



Составить уравнения движения частей электромеханической системы, если коэффициент сопротивления демпфера α , индуктивность катушек L_a , L_b , коэффициент взаимной индукции $M_{1,2}$, жесткость пружины k , масса якоря m , омическое сопротивление R_a , R_b , напряжение E_a , E_b .

Задача 8

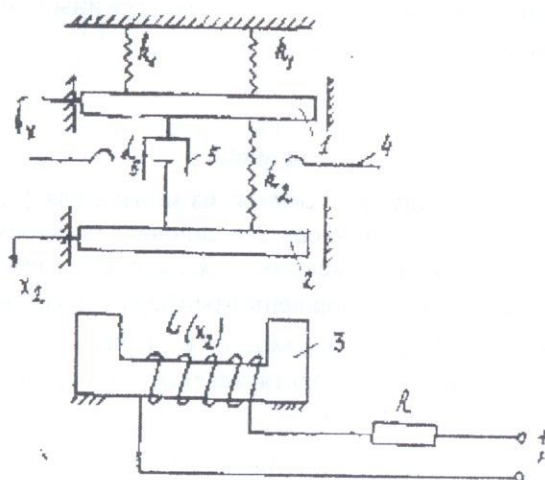
Электромагнитный контактор состоит из замыкателя 1, расположенного на штоке воздушного демпфера 5, якоря 2 и силового электромагнита 3. Якорь с замыкателем связан пружиной жесткости k_2 , а с электромагнитом пружиной жесткости k_3 и демпфером 6. Поршень демпфера 5 возвращается в исходное положение пружиной возврата жесткости k_1 . При подаче напряжения E на клеммы силовой катушки якорь притягивается к полюсам электромагнита, и замыкатель 1 замыкает контакты 4.



Масса движущихся частей демпфера 5 и замыкателя m_1 , масса якоря m_2 , коэффициенты вязкого сопротивления α_5 и α_6 , активное сопротивление R , коэффициенты жесткости пружин k_1 , k_2 и k_3 . Индуктивность электромагнита $L(x)$. Составить уравнения движения элементов электромагнитного контактора.

Задача 9

Электромагнитный контактор состоит из замыкателя 1, связанного с неподвижной стенкой пружиной жесткости k_1 , якоря 2 и электромагнита 3. Якорь с замыкателем связан пружиной жесткости k_2 и демпфером 5. При подаче напряжения на клеммы силовой катушки якорь притягивается к полюсам электромагнита и замыкатель 1 замыкает контакты 4.



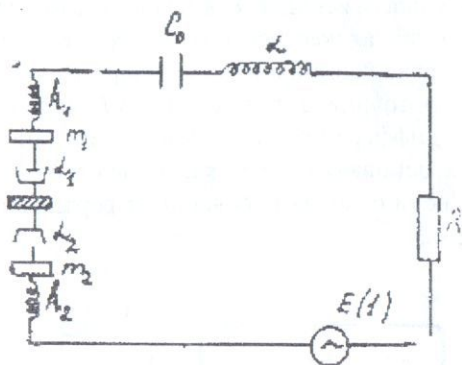
Масса замыкателя m_1 , масса якоря m_2 , коэффициент вязкого сопротивления демпфера α , индуктивность электромагнита $L(x_2)$, активное сопротивление R , коэффициент жесткости пружин k_1 и k_2 . Составить уравнения движения элементов электромагнитного контактора.

Задача 10

Два груза массой m_1 и m_2 связаны с неподвижными стенками пружинами жесткости k_1 , k_2 . Каждый из грузов несет на себе пластину, образующую с неподвижной пластиной конденсатор переменной емкости.

Подвижные пластины связаны с неподвижной через демпферы. Коэффициенты вязкого сопротивления демпферов α_1 и α_2 .

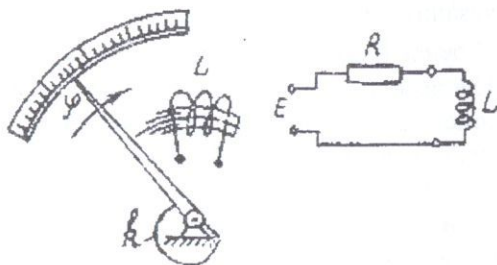
Составить уравнения движения системы, если в положении, показанном на рисунке, деформации пружины δ_1 и δ_2 , расстояния между пластинами α_1 и α_2 , емкости конденсаторов в этом положении C_1 и C_2 .



Задача 11

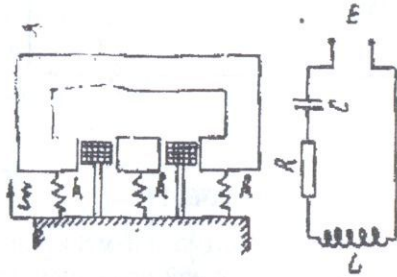
Механическая часть электромагнитного измерительного прибора содержит закрепленную на оси стрелку с возвратной пружиной, угловая жесткость которой k , демпфер с моментом сопротивления — $\beta\dot{\varphi}$ (φ — угловая скорость, β — постоянная) и сердечник, который при втягивании в соленоид создает вращательный момент. Электрическая часть прибора состоит из неподвижного соленоида индуктивности $L(\varphi)$, подключаемого к измеряемой цепи. Измеряемая цепь содержит э. д. с. E и активное сопротивление R .

Составить дифференциальные уравнения движения стрелки и уравнение тока в измерительной цепи. Исследовать резонансные свойства системы, задав зависимость $L(\varphi)$, получить угол поворота φ как функцию измеряемого напряжения E .



Задача 12

Сейсмический датчик содержит магнит весом P , в кольцевом зазоре которого располагается катушка, имеющая n витков. Магнит закреплен на основании с помощью пружин, общая жесткость которых k . Катушка укреплена на основании неподвижно, магнитная индукция в зазоре B . Внешняя электрическая цепь прибора содержит источник, э. д. с. которого E , активное сопротивление R и емкость C . Составить дифференциальные уравнения, описывающие движение якоря по отношению к основанию датчика, а также изменение заряда на обкладках конденсатора, если основание совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi_0 \cos \omega t$.



Решить полученную систему дифференциальных уравнений, исследовать резонансные свойства системы.

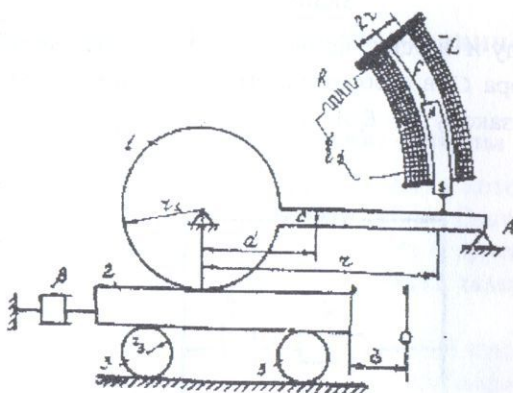
Задача 13

На вход электромеханического реле подается постоянное напряжение E . Электрическая цепь устройства состоит из источника напряжения, омического сопротивления R и n -витковой катушки соленоида среднего радиуса r . Индуктивность катушки L . Якорь представляет собой постоянный магнит. Средняя величина магнитной индукции в зазоре равна B . Механическая часть включает в себя тела 1, 2 и 3 с указанными на чертеже размерами и массами m_1 , m_2 и m_3 . Момент инерции тела 1 относительно оси, проходящей через точку O , равен J_1 . Центр тяжести этого тела находится в точке C . Тела 3 — сплошные однородные цилиндры. Качение происходит без проскальзывания. Сопротивление качению отсутствует. Для задержки исполнения команды в конструкцию включен демпфер, развивающий силу сопротивления, пропорциональную скорости поршня. Коэффициент пропорциональности β . При обесточенном соленоиде тело занимает положение, изображенное на рисунке, опираясь на опору A . На якорь действует сила, вращающая его в соленоиде,

$$F = \alpha i,$$

где $\alpha = 2\pi n B$; i — ток в контуре.

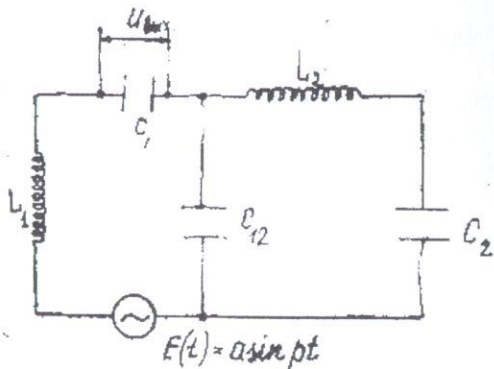
Изменением индуктивности в процессе движения пренебрегаем.



Вычислить наименьшее напряжение E , при котором возможно срабатывание реле, и время с момента подачи напряжения до начала движения. Определить условия в виде строгого неравенства, при котором обеспечивается аperiodический характер движения якоря реле, т.е. что бы ускорение якоря менялось аperiodически.

Задача 14

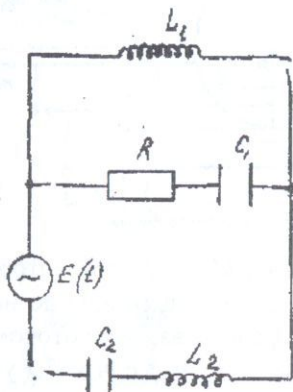
В изображенном на рисунке контуре подобрать емкости C_1 , C_2 и индуктивность L_2 таким образом, чтобы выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ было равно нулю при заданном значении частоты генератора $p = p_0$ (поглотитель колебаний).



Задаваясь конкретными данными, построить зависимость $L_2(p)$. Остальные параметры системы задать самостоятельно.

Задача 15

Найти амплитуду A и сдвиг фазы φ вынужденных колебаний заряда на обкладках конденсатора C_2 в изображенном на рисунке контуре, если э.д.с. генератора меняется по закону $E = E_0 \sin \omega t$.



Задаваясь конкретными значениями параметров системы, построить амплитудную и фазовую характеристики.

Аналитическая динамика электромеханических систем

1. Электромеханические системы

Электромеханическими называются системы, в которых механические и электромагнитные процессы связаны между собой. Состояние такой системы должно задаваться величинами, описывающими те и другие процессы. Для механической части системы такими характеристиками являются обобщенные координаты и скорости.

Гораздо сложнее обстоит дело с электрической системой. Для описания электромагнитных явление в любом устройстве необходимо знать распределение векторов в пространстве и во времени, определяющих электромагнитное поле: вектора магнитной индукции B и вектора напряженности электрического поля E . Таким образом, электромагнитное поле описывается бесконечно большим числом функций. Но та же самая картина наблюдается и при описании состояния твердого тела, если учитывать его деформации. В механике вводится идеализированное понятие абсолютно твердого тела и пружины, лишенной массы, что позволяет описать положение механической системы конечным числом параметров - обобщенными координатами.

Аналогично этому и в теоретической электротехнике вводятся модели электрических и магнитных цепей, которые оперируют только конечным числом параметров: электрическим током, напряжением, магнитным потоком.

Этими моделями можно воспользоваться только при соблюдении следующих условий:

а) поперечные размеры проводников малы по сравнению с их длиной (такие проводники называются линейными);

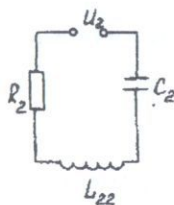
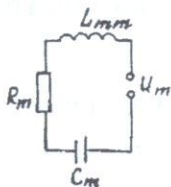
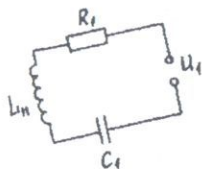
б) должно выполняться условие квазистационарности, которое позволяет исключить из рассмотрения распространение электромагнитных волн подобно тому, как введение понятия абсолютно твердого тела в механике обозначает неучет высокочастотных колебаний в деформируемом теле.

Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Поэтому переменный ток с периодом T в электрической цепи длиной l можно считать квазистационарным, если выполнено условие $T \gg \frac{l}{c}$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света в вакууме.

2. Уравнение электрических цепей

Пусть в состав электромеханической системы входит m независимых цепей. Каждая цепь состоит из последовательно соединенных проводников и конденсаторов; разные цепи между собой электрически не связаны, но электромаг-

нитные процессы в цепях не независимы, так как все цепи находятся в общем магнитном поле.



Введем обозначения:

$e_1; e_2; e_3; \dots; e_m$ - заряды конденсаторов;

$i_1; i_2; \dots; i_m$ - токи в цепях;

$u_1; u_2; \dots; u_m$ - заданные электродвижущие силы, приложенные к контуру;

$R_1; R_2; \dots; R_m$ - сопротивление в цепях;

$C_1; C_2; \dots; C_m$ - емкость конденсатора в цепи. Токи связаны с зарядами соотношением

$$i = \frac{de}{dt} = \dot{e}. \quad (2.1)$$

Электрическая емкость конденсатора есть отношение величины заряда одной из его обкладок e_K к разности потенциала между обкладками U_K^e

$$C_K = \frac{e_K}{U_K^e}. \quad (2.2)$$

Емкость конденсатора C_K зависит от расстояния между обкладками конденсатора, которое может меняться с изменением положения системы. Следовательно, в общем случае C_K будет являться функцией обобщенных координат:

$$C_K = C_K(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (2.3)$$

Энергия электрического поля между обкладками конденсатора

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^m \frac{e_K^2}{C_K}. \quad (2.4)$$

Из соотношений (2.4) и (2.2) следует, что напряжение между обкладками конденсатора равно частной производной от энергии магнитного поля по заряду e_K :

$$U_K^e = \frac{\partial W_e}{\partial e_K} = \frac{e_K}{C_K}. \quad (2.5)$$

Предположим, что пространство, окружающее проводники, заполнено неферромагнитной однородной изотропной средой. В этом случае энергия магнитного поля определяется выражением

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m L_{jk} i_k i_j, \quad (2.6)$$

где L_{jk} - взаимная индуктивность j -го и k -го контуров;

L_{kk} - индуктивность k -го контура.

Индуктивность контура зависит от размеров и формы j -го и k -го контуров, их взаимного расположения, магнитной проницаемости окружающей среды. Следовательно, индуктивность есть функция обобщенных координат системы, которые определяют расположение тел в магнитном и электрических полях:

$$L_{jk} = L_{jk}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N). \quad (2.7)$$

Поскольку энергии магнитного и электрического полей являются сугубо положительными величинами, то коэффициенты в формулах (2.6) в (2.4) также положительны.

Магнитный поток Φ_j через j -й контур определяется выражением

$$\Phi_j = \frac{\partial W_m}{\partial i_j} = \sum_{k=1}^m L_{jk} i_k. \quad (2.8)$$

Согласно основному закону электромагнитной индукции ЭДС индукции E_j^u в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока:

$$E_j^u = -\frac{d\Phi_j}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_j} \right). \quad (2.9)$$

Используя закон Ома для j -го контура, получим

$$R_j i_j + u_j^c = E_j + E_j^u, \quad (2.10)$$

где $R_j i_j$ - падение напряжения на сопротивлении; u_j^c - падение напряжения на конденсаторе; E_j - сторонняя ЭДС; E_j^u - ЭДС индукции.

Подставив в формулу (2.10) выражения (2.9) и (2.5), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_j} \right) + \frac{\partial W_c}{\partial e_j} + R_j i_j = E_j. \quad (2.11)$$

Введем понятие электрической диссипативной функции

$$\Psi_c = \sum_{i=1}^m R_i i_i^2. \quad (2.12)$$

Функция Ψ_c характеризует потерю энергии, которая идет на нагревание проводника:

$$R_i i_i = \frac{\partial \Psi_c}{\partial i_i} = \frac{d\Psi_c}{d i_i}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.11) можно использовать и для разветвленных электрических цепей.

Разветвленная электрическая цепь состоит из участков, через любое сечение которых течет один и тот же ток; эти участки располагаются между узлами, в которых сходится не менее трех ветвей.

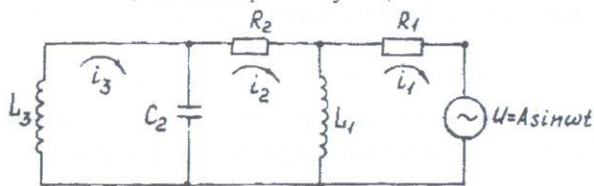
Число независимых уравнений m , необходимых для описания системы, определяется выражением

$$m = p - (S - 1), \quad (2.14)$$

где p - количество ветвей; S - количество узлов.

Аналогично определяется число независимых обобщенных координат для механической системы.

Для примера рассмотрим электрическую цепь



Для этой цепи $p=6$; $S=4$. Следовательно, $m=3$, т.е. система имеет три степени свободы.

За обобщенные координаты принимаем электрические заряды $e_1; e_2; e_3$, проходящие через сечения независимых контуров. Уравнения для данной системы имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_e}{\partial \dot{e}_1} \right) = - \frac{\partial W_e}{\partial e_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_1} + E_1; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_e}{\partial \dot{e}_2} \right) = - \frac{\partial W_e}{\partial e_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_2} + E_2; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_e}{\partial \dot{e}_3} \right) = - \frac{\partial W_e}{\partial e_3} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_3} + E_3. \end{cases} \quad (2.15)$$

Определяем входящие в эти уравнения функции:
энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{1}{2} L_3 \dot{e}_3^2 + \frac{1}{2} L_1 (\dot{e}_2 - \dot{e}_1)^2; \quad (2.16)$$

энергия электрического поля

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{C_2} (e_3 - e_2)^2; \quad (2.17)$$

электрическая диссипативная функция

$$\Psi_e = \frac{1}{2} (R_3 \dot{e}_3^2 + R_2 \dot{e}_2^2 + R_1 \dot{e}_1^2); \quad (2.18)$$

ЭДС

$$E_1 = A \sin \omega t; \quad E_2 = E_3 = 0. \quad (2.19)$$

Подставляя значения W_m, W_e, Ψ_e и E_1 в уравнения (2.15), получаем систему дифференциальных уравнений электрических колебаний:

$$\begin{cases} L_1 \ddot{e}_1 - L_1 \ddot{e}_2 + R_1 \dot{e}_1 = A \sin \omega t; \\ -L_1 \ddot{e}_1 + L_2 \ddot{e}_2 + R_2 \dot{e}_2 + \frac{1}{C_2} e_2 - \frac{1}{C_2} e_3 = 0; \\ L_3 \ddot{e}_3 + R_3 \dot{e}_3 - \frac{1}{C_3} e_2 + \frac{1}{C_3} e_3 = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

3. Определение пондеромоторных сил

В электромеханической системе кроме сил механического происхождения действуют силы, возникающие в результате действия электрических и магнитных полей на материальные тела. Эти силы называются пондеромоторными.

Уравнение Лагранжа для механической части системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j + Q_j^*,$$

где Q_j^* - обобщенная пондеромоторная сила.

Для нахождения Q_j^* составим уравнение энергетического баланса электрической части системы. Мощность сторонних ЭДС расходуется на нагревание проводников $\sum_{k=1}^n R_k i_k^2$; на изменение энергий магнитного и электрического полей, а также на механическую мощность пондеромоторных сил $\sum_{j=1}^S Q_j^* \dot{q}_j$ (\dot{q}_j - обобщенная скорость).

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\sum_{k=1}^m E_k i_k = \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{j=1}^S Q_j^* \dot{q}_j. \quad (3.1)$$

Поскольку W_m зависит от токов i_j и обобщенных координат, то, используя правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt}. \quad (3.2)$$

Для преобразования выражения (3.2) воспользуемся тождеством

$$\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k. \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.3) в формулу (3.2), получаем

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k \right) - \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k. \quad (3.4)$$

Согласно теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k = 2W_m. \quad (3.5)$$

Выражение (3.4) с учетом (3.5) принимает вид

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt} (2W_m) - \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k.$$

Отсюда следует

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k - \sum_{j=1}^S \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.6)$$

Энергия электрического поля W_e является функцией зарядов e_k и обобщенных механических координат. Поэтому ее производная по времени

$$\frac{dW_e}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \frac{de_k}{dt} + \sum_{j=1}^S \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.7)$$

Подставляя выражения (3.6) и (3.7) в уравнение (3.1), получаем

$$\sum_{k=1}^m E_k i_k = \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 + \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k - \sum_{j=1}^S \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \dot{e}_k + \sum_{j=1}^S \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^S Q_j^* \dot{q}_j. \quad (3.8)$$

Преобразуем уравнение (3.8) к виду

$$\sum_{k=1}^m \left\{ E_k - R_k i_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) - \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \right\} i_k = \sum_{j=1}^S \left(-\frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + Q_j^* \right) \dot{q}_j. \quad (3.9)$$

Согласно уравнению для электрических цепей (2.11) имеем

$$E_k - R_k i_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) - \frac{\partial W_e}{\partial e_k} = 0. \quad (3.10)$$

С учетом выражения (3.10) из уравнения (3.9) следует

$$\sum_{j=1}^S \left(Q_j^* + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0. \quad (3.11)$$

Обобщенные скорости \dot{q}_j являются независимыми величинами. Поэтому выполнение равенства (3.11) при любых значениях \dot{q}_j возможно только тогда, когда коэффициенты при \dot{q}_j будут равны нулю, т.е.

$$Q_j^* + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} = 0.$$

Отсюда находим

$$Q_j^* = \frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j}. \quad (3.12)$$

Обобщенные пондеромоторные силы равны частным производным по обобщенным механическим координатам от разности между магнитной и электрической энергией системы.

Впервые уравнения электромеханических систем получил Максвелл в 1873г. Эти уравнения носят названия уравнений Лагранжа-Максвелла.

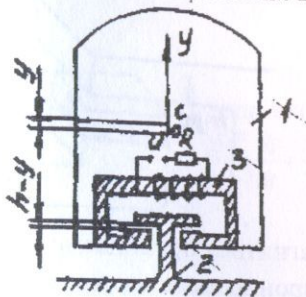
Для системы, состоящей из n материальных точек и m независимых электрических контуров, они имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + Q_j; & j = 1, 2, \dots, S; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{e}_k} \right) = -\frac{\partial W}{\partial e_k} - \frac{\partial \Psi_c}{\partial e_k} + E_k; & k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (3.13)$$

где S - число степеней свободы механической части системы;

m - число независимых контуров.

Пример. На вагоне поезда установлен электромагнит, который притягивается к T -образному феррорельсу. При номинальной силе тока в обмотке электромагнита и номинальном зазоре между электромагнитом и рельсом сила притяжения уравнивает силу тяжести вагона. Требуется определить величину номинальной силы тока и номинального напряжения в электрической цепи.



Решение

1. Примем, что вагон совершает поступательное прямолинейное движение вдоль вертикальной оси Y . За начало отсчета на оси Y примем точку O , с которой совпадает центр масс C вагона при номинальной величине зазора между электромагнитом и рельсом. За обобщенную координату выберем координату y центра масс вагона. Поскольку система не содержит конденсаторов, то за обобщенную координату электрической части системы примем ток в обмотке электромагнита. Таким образом, рассматриваемая электромеханическая система имеет две степени свободы, и уравнения Лагранжа-Максвелла имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial W_m}{\partial y}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i} \right) = - \frac{\partial \Psi}{\partial i} + u. \end{cases} \quad (3.14)$$

2. Определяем кинетическую энергию системы. Относительно оси Y вагон движется поступательно, т.е.

$$T = \frac{1}{2} P \dot{y}^2, \quad (3.15)$$

где P - вес вагона.

3. Определяем потенциальную энергию. За нулевое положение системы принимаем положение равновесия

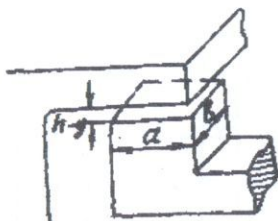
$$\Pi = Py. \quad (3.16)$$

4. Определяем энергию магнитного поля. Из курса физики известно, что энергия магнитного поля

$$W_m = \iiint_V \frac{1}{\mu} B^2 dV, \quad (3.17)$$

где μ - коэффициент магнитной проницаемости; B - вектор магнитной индукции; V - область, содержащая магнитное поле.

Если предположить, что зазор между магнитом и рельсом намного меньше линейных размеров a и b , то магнитное поле в воздушном зазоре между магнитом и рельсом можно считать однородным и краевыми эффектами пренебречь.



Предположим, что магнитная проницаемость μ магнита и рельса велика по сравнению с магнитной проницаемостью воздушного зазора, и можно пренебречь интегралом по объему магнита и феррорельса. Тогда в уравнении (3.17) остается интеграл от постоянного вектора \mathbf{B} по объему двух воздушных зазоров:

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} S(h-y)B^2, \quad (3.18)$$

где S - площадь магнита; μ_0 - магнитная проницаемость воздуха.

Магнитный поток через обмотку электромагнита

$$\Phi = BS_n, \quad (3.19)$$

где n - число витков обмотки.

Магнитный поток пропорционален току i в цепи

$$\Phi = L_{II}i, \quad (3.20)$$

где L_{II} - коэффициент самоиндукции.

Приравнявая (3.19) и (3.20), имеем

$$B = \frac{L_{II} i}{S_n}. \quad (3.21)$$

Подставляя это выражение в формулу (3.18), получаем

$$W_m = \frac{(h-y)L_{II}^2}{\mu_0 S_n} i^2. \quad (3.22)$$

Энергию магнитного поля можно представить в виде

$$W_m = \frac{1}{2} L_{II} i^2. \quad (3.23)$$

Приравнявая (3.22) и (3.23), находим зависимость коэффициента самоиндукции от обобщенной координаты y

$$L_{II} = \frac{\mu_0 S n^2}{2(h-y)} \quad (3.24)$$

и энергию магнитного поля системы

$$W_m = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)} i^2 \quad (3.25)$$

5. Определяем функцию Релея

$$\phi = \frac{1}{2} b \dot{y}^2, \quad (3.26)$$

где b - коэффициент вязкого трения при движении вагона.

6. Определяем функцию рассеивания

$$\Psi_v = \frac{1}{2} R i^2, \quad (3.27)$$

где R - сопротивление цепи.

7. Вычисляем частные производные величин, входящих в уравнения (3.14)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{P}{g} \ddot{y}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)} \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S n^2 \dot{y} i}{(h-y)^2}; \\ \frac{\partial W_m}{\partial y} &= + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)^2} i^2. \end{aligned}$$

8. Составляем уравнения движения системы

$$\begin{cases} \frac{P}{g} \ddot{y} = -P - b \dot{y} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)^2} i^2; \\ \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)} \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)^2} \dot{y} i = -Ri + u. \end{cases} \quad (3.28)$$

Перепишем уравнения (3.28) в виде

$$\begin{cases} \frac{P}{g} \ddot{y} = +P + b \dot{y} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)^2} i^2 = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)} \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S n^2}{(h-y)^2} \dot{y} i + Ri = u. \end{cases} \quad (3.29)$$

9. Из уравнений (3.29) можно определить величину номинального напряжения и тока. Ограничимся наиболее простым случаем линейной зависимости напряжения от величины зазора между рельсом и вагоном, т.е. положим

$$u = u_0 + k(h-y),$$

где $U_0 = const$ - номинальное напряжение;

k - коэффициент усиления сигнала датчика смещения вагона.

В положении равновесия вагона

$$y = 0; \quad \dot{y} = 0; \quad i = i_0. \quad (3.30)$$

Тогда из уравнений (3.28) следует

$$\begin{cases} u_0 = R i_0 - k h; \\ i_0^2 = \frac{4 P h}{\mu_0 S n^2}. \end{cases} \quad (3.31)$$

4. Контрольная работа

Основываясь на уравнениях Лагранжа-Максвелла, составить контурные уравнения для электрических цепей (рис. 9-12).

План решения задач

1. Установить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты.
2. Записать уравнения Лагранжа-Максвелла.
3. Найти энергию магнитного тела.
4. Найти энергию электрического поля.
5. Найти функцию рассеивания.
6. Найти частные производные и поставить в уравнения Лагранжа-Максвелла.

При определении энергии магнитного поля учесть, что при наличии коэф-фициента взаимной индукции M_{12} имеем

$$W_m = \frac{1}{2} M_{12} i_1 i_2,$$

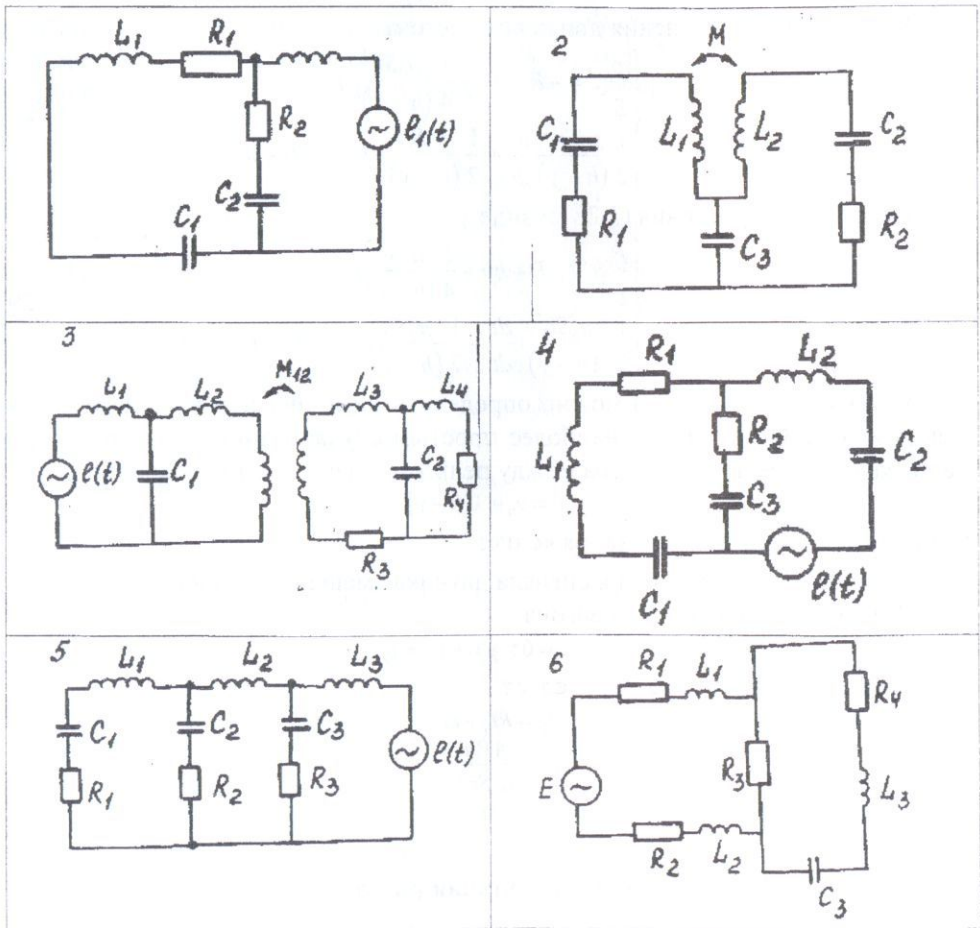


Рис.9

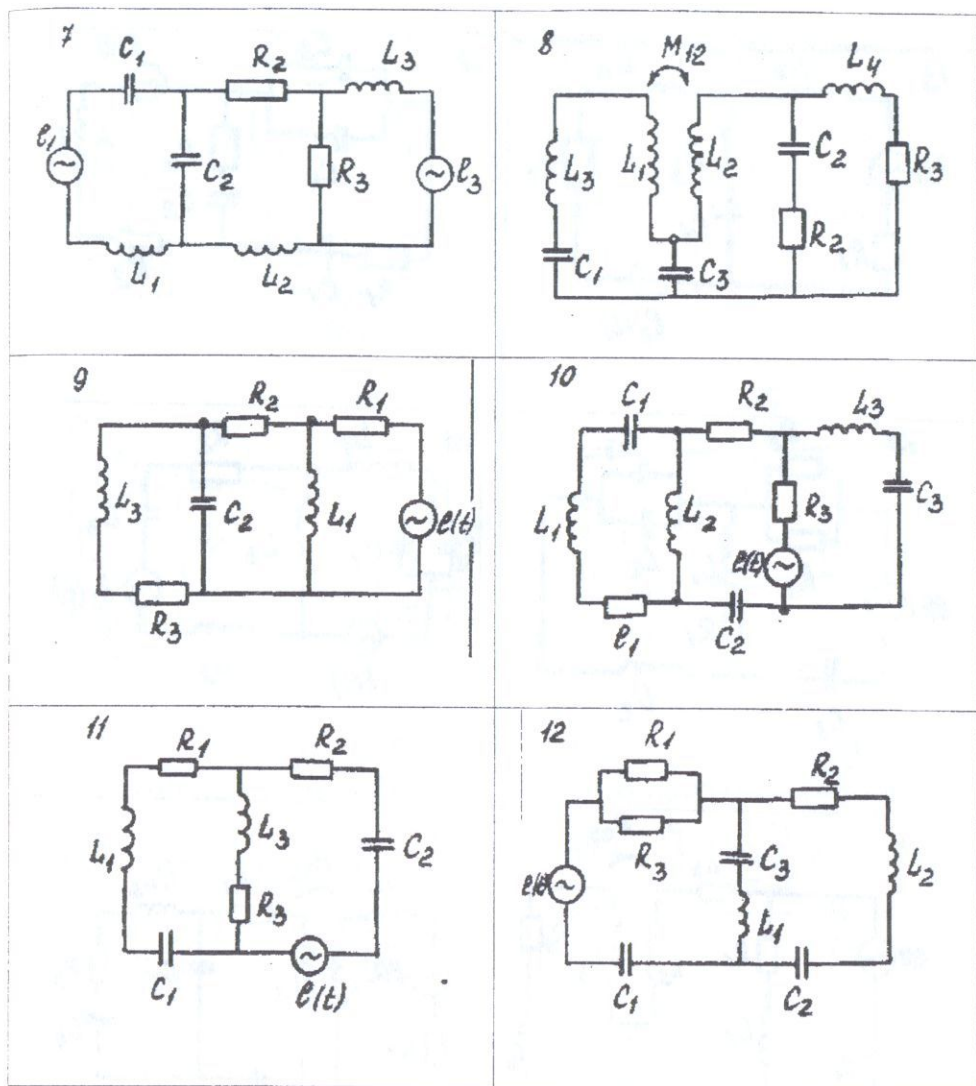


Рис. 10

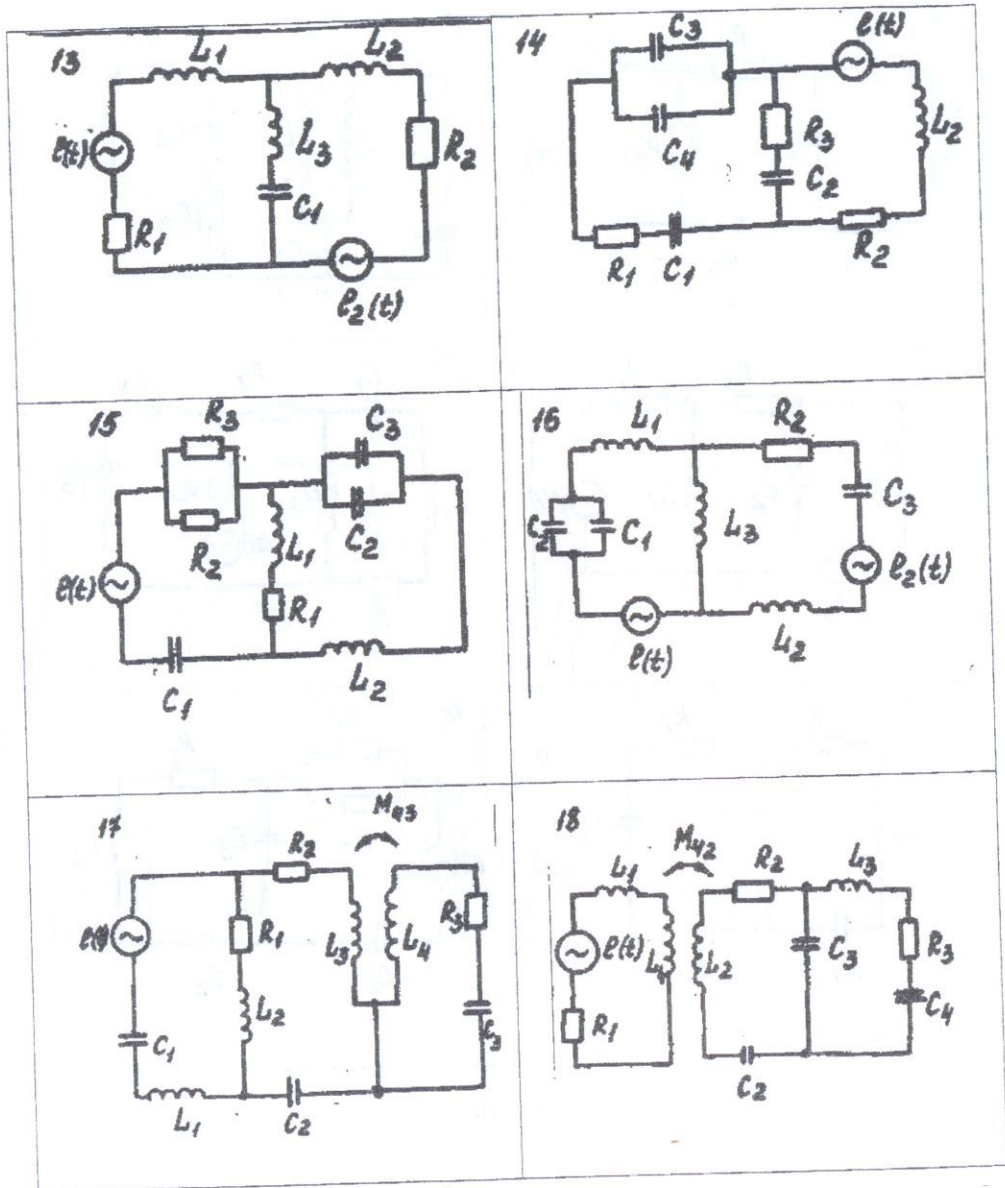


Рис. 11

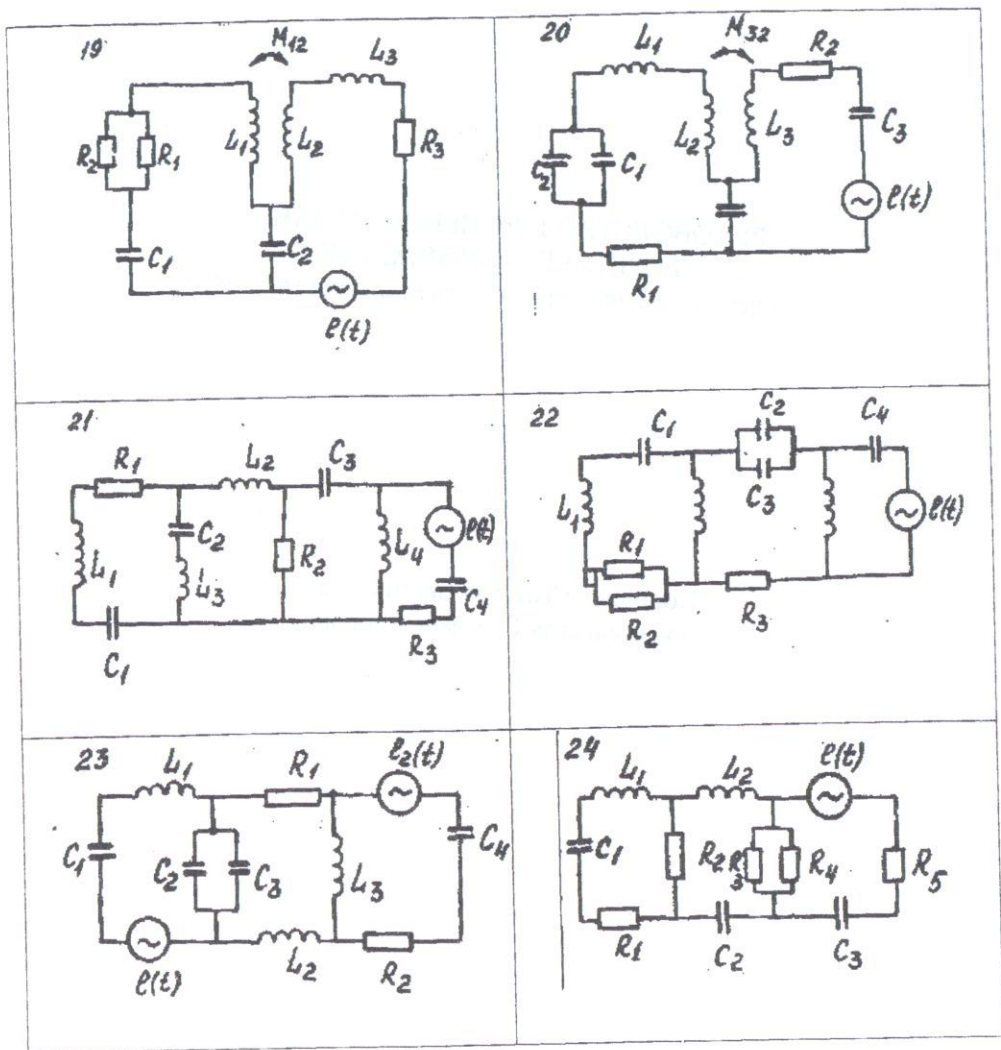


Рис.12

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
для студентов, обучающихся по специальности 180800

Корнилова Татьяна Евгеньевна
Архангельская Светлана Евновна

Подписано в печать 13.01.2003. Формат А4.
Печать оперативная. Усл.п.л. 6,5. Уч.-изд.л. 6,35.
Тираж 100 экз.

Тольяттинский государственный университет.
Тольятти, Белорусская, 14.

