Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р
Тольяттинский политехнический институт

А.Я.Цирулик

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЭЛЕКТРОМАШИНОСТРОЕНИИ

Учебное пособие

Куйбышев 1983

Куйбышевский авиационный институт

УДК (519.281.2:621.313)(076)

Цирулик А.Я. Планирование эксперимента в электромеханике.
Учебное пособие. - Куйбышев: КуАИ, 1983, 43 с.

Рассмотрены факторы, обусловившие развитие математической теории планирования инженерных и научных экспериментов в середине XX века и широкого её применения, методологические и математические основы теории, методы планирования эксперимента при отыскании линейных и нелинейных математических моделей многофакторных объектов проектирования и исследования, методы статистической оценки результатов эксперимента.

Пособие предназначено для студентов - электромехаников, изучающих курс "Теория планирования эксперимента". Оно может быть полезным также для студентов других специальностей, аспирантов и преподавателей, впервые осваивающих методы математического планирования эксперимента.

Рецензенты: профессор Скороспешкин А.И., зав.кафедрой электрических машин Куйбышевского политехнического института; доцент Костылев Б.И., зав.кафедрой электрических сетей и станций Куйбышевского политехнического института.
Научный редактор: профессор Ивашин В.В.
Утверждено на ред.-изд. совете института 21.09.1981 г.

ВВЕДЕНИЕ

Мысль о том, что эксперимент можно планировать, восходит к глубокой древности, однако лишь в XX веке возникло специальное направление прикладной математики, развивающей математические методы планирования эксперимента.

Английский математик Р.Фишер в конце двадцатых годов XX века впервые показал целесообразность одновременного изменения в эксперименте всех факторов в противоположность господствующему принципу поочередного изменения отдельных факторов, когда остальные сохраняются неизменными.

В начале 50-х годов начало оформляться самостоятельное направление прикладной математики, связанное с оптимизацией многофакторных объектов исследования.

Первая работа в этой области была опубликована в 1951 г. в США Боксом и Уилсоном. В нашей стране первая работа появилась в 1960 году. Автором ее был профессор МГУ В.В.Налимов, который стал руководителем первой группы исследователей в области теории эксперимента в нашей стране. Вторая группа образовалась при Московском энергетическом институте под руководством Г.К.Круга. В шестидесятых годах эти две группы были ведущими в исследованиях по теории планирования эксперимента в СССР.

В 1965 году вышла в свет монография В.В.Налимова и Н.А.Черновой, которая позволила широкой научной и инженерной общественности познакомиться с методами научного управления экспериментом и обеспечила широкое распространение этих методов в нашей стране [1].

Первые исследования электрических машин, в которых использовались методы теории планирования эксперимента, выполнены в 1966 году по инициативе Э.К.Стрельбицкого в Томском политехническом институте [3,4] . Здесь во второй половине 60-х годов эти методы стали широко применяться на кафедре электрических машин, что послужило толчком к их распространению и использованию при решении задач электромеханики [5,6,7,8] .

Математики продолжали развивать теорию планирования эксперимента, и в настоящее время это довольно глубоко разработанная ветвь прикладной математики, имеющая непосредственную связь с задачами научных и инженерных исследований. Методы планирования эксперимента сейчас широко используются при исследовании и разработке многопараметрических объектов – машин и технологических процессов.

В деятельности инженера-электромеханика исследования занимают большое место. Проектирование оптимальной машины или аппарата – это задача оптимизации многофакторного объекта, которая грамотно и быстро может решаться тóлько на основе современных математических методов. Оптимизация технологических процессов в электромашино- и электроаппаратостроении также должна осуществляться на основе таких методов. Поэтому будущему инженеру важно изучить основы теории планирования эксперимента, чтобы в практической работе использовать изученные методы для повышения производительности труда при проектировании и производстве электрических машин и аппаратов, а также для решения таких производственных задач, которые вообще нельзя решить традиционными методами.

I. ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛИВШИЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Долгое время математика привлекалась лишь на последней стадии выполнения экспериментального исследования – на стадии математической обработки экспериментальных данных с целью получения количественных зависимостей выходных характеристик объекта исследования от его входных параметров (факторов) [I] . Математик не вмешивался в постановку эксперимента, процесс экспериментирования не был формализован. Каждый исследователь по собственному усмотрению планировал и проводил эксперимент, руководствуясь интуитивными представлениями об оптимальной стратегии исследования, сложившимися у него под влиянием его научного руководителя, методов, применяемых в научном коллективе, и в результате личного опыта работы. Это было возможно до тех пор, пока приходилось изучать достаточно простые объекты как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения выполнения эксперимента, пока исследования не требовали значительных затрат денежных средств и времени, пока издержки, связанные с ошибочностью интуитивных решений о способе проведения эксперимента, встречались нечасто и были невелики.

Научный и технический прогресс обусловили появление таких факторов, которые не позволяли быстро и успешно решать исследовательские задачи традиционными методами [I] .

Во-первых, усложнение экспериментальных установок привело к резкому увеличению стоимости экспериментов. Например, для проведения исследований в области физики элементарных частиц необходимо создание мощных дорогостоящих ускорителей.

Проблема извлечения наибольшего количества информации об изучаемых явлениях при ограниченных затратах является сейчас весьма актуальной. Ошибки, связанные с выбором неудачной стратегии экспериментального исследования, в условиях, когда эксперимент проводится на дорогом оборудовании и когда в проведении эксперимента участвуют целые коллективы научных, инженерных и технических работников, могут привести к очень большим материальным потерям. Интуиция и опыт исследователя теперь являются плохими союзниками в выборе правильной стратегии исследования. Появилась необходимость в оптимальной организации исследования, опирающейся на четко сформулированные методы планирования эксперимента, которые позволяют получить максимум информации об исследуемом объекте при минимуме опытов и гарантируют получение ответа на поставленный вопрос.

Во-вторых, переход от изучения "хорошо организованных" систем к изучению "плохо организованных" систем создал ряд проблем, ранее не встречавшихся. Со времен Ньютона и до начала XX века точные науки стремились иметь дело с "хорошо организованными" системами, то есть такими, в которых удавалось выделить явления одной физической природы, зависящие от небольшого числа переменных. Результаты исследования таких систем удавалось представить функциональными зависимостями, которые можно было достаточно легко осмыслить. Этим зависимостям приписывалась роль абсолютных законов, объясняющих процессы, протекающие в исследуемом объекте.

Соответствующей была и методология исследования. В течение более чем 200 лет единственно правильной методологией считалась методология однофакторного эксперимента. Исследователь предполагал, что он с любой степенью точности может стабилизировать все независимые переменные (факторы) исследуемой системы. Затем,поочередно изменяя значения факторов, он определял однофакторные зависимости.

Развитие науки и техники в начале XX века потребовало перейти к изучению более сложных,"плохо организованных" систем. В этих системах не удается разделить действие факторов различной физической природы, выделить отдельные процессы с целью их независимого изучения. При изучении таких систем возникают различные помехи. Например, при исследовании технологических процессов не всегда возможно провести всю серию опытов на одной партии сырья. Партии сырья могут отличаться по составу, качеству и т.п., поэтому результаты, полученные в разных сериях опытов, будут отличаться не только потому,что опыты проведены при разных параметрах технологического процесса, но и потому,что они выполнены на разных партиях сырья. Когда задача исследования состоит в изучении влияния параметров технологического процесса на качество продукции, то можно сделать ошибочные выводы, если при проведении эксперимента не позаботиться заранее об исключении влияния различий в качестве сырья. То же можно сказать и о влиянии исполнителя: лаборанта, техника и т.п. Например, если необходимо исследовать влияние типа применяемого инструмента на степень повреждаемости изоляции провода и пазовой изоляции электрической машины в процессе изготовления обмотки статора, то следует позаботиться об исключении влияния "эффекта рук". Несмотря на то, что разные обмотчицы работают по одной методике, из-за различия в опыте работы и индивидуальных особенностей работы они в разной степени повреждают изоляцию одним и тем же инструментом. Эксперимент должен быть спланирован так, чтобы исключить влияние этого различия. Рассмотрим этот пример более подробно. Пусть исследуется влияние на повреждаемость изоляции четырех типов инструмента T_I, T_2, T_3 и T_4 при четырех значениях коэффициента заполнения паза статора K_I , K_2 , K_3 и K_4 . Работа поручается четырем обмотчицам - А, В, С и Д. Очевидно, планы эксперимента, показанные в табл.I.I и I.2, неприемлемы. В табл.I.I влияние типа инструмента смешано с влиянием "типа" обмотчицы, так как каждая обмотчица работает только одним инструментом.
В табл.I.2 влияние коэффициента заполнения паза смешано с влиянием "типа" обмотчицы. Лучшим будет план, показанный в табл.I.3. В этом плане влияние типа инструмента и влияние коэффициента заполнения паза оцениваются независимо от влияния "типа" обмотчицы. План этот представляет собой так называемый латинский квадрат. Исследователь

не знакомый с такими планами, рассуждал бы так: чтобы исключить влияние квалификации обмотчицы и правильно оценить влияние типа инструмента и коэффициента заполнения паза, необходимо, чтобы каждая из четырех обмотчиц выполнила обмотку статора всеми четырьмя типами инструмента при всех четырех значениях коэффициента заполнения паза. Но тогда каждая обмотчица должна обмотать I6 статоров, а всего их потребуется 64. В плане же по табл. I.3 требуется всего I6 статоров для проведения исследования – в 4 раза меньше. Благодаря знанию методов планирования эксперимента та же цель достигается гораздо дешевле и быстрее.

Таблица I.I

Первый вариант плана

	T_I	T_2	T_3	T_4
K_I	А	В	С	Д
K_2	А	В	С	Д
K_3	А	В	С	Д
K_4	А	В	С	Д

Таблица I.2

Второй вариант плана

	T_I	T_2	T_3	T_4
K_I	А	А	А	А
K_2	В	В	В	В
K_3	С	С	С	С
K_4	Д	Д	Д	Д

Таблица I.3

Третий вариант плана

	T_I	T_2	T_3	T_4
K_I	А	В	С	Д
K_2	В	С	Д	А
K_3	С	Д	А	Ь
K_4	Д	А	В	С

Заметим, что поручить всю работу по обмотке I6 статоров только одной обмотчице нельзя, так как в этом случае возникает сомнение, не получатся ли выводы о том, какой тип инструмента лучше, другими, если работу выполнит обмотчица с другим уровнем квалификации. План по табл.I.3 позволяет сделать правильные выводы о качестве инструмента при усредненной квалификации обмотчиц.

В рассмотренном примере тип инструмента и коэффициент заполнения паза статора – это факторы, влияние которых на повреждаемость изоляции изучается. Эти факторы называют контролируемыми, или основными. Квалификация обмотчицы – это не основной фактор. Его влияние необходимо исключить. Как правило, в эксперименте источниками помех являются неосновные, или неуправляемые, факторы.

Источником помех является также постепенное изменение свойств изучаемой системы. В технологических процессах это обусловлено изменением свойств сырья из-за старения и увлажнения при хранении, изменением активности катализатора, колебанием состава сырья и т.п. Постепенное изменение неуправляемых факторов во времени называют временны́м дрейфом. Дрейф приводит к искажению результатов эксперимента.

Пусть исследуется влияние некоторых факторов, например, контактного давления, марки щеток, состояния поверхности коллектора, на искрение щеток машины постоянного тока. Так как исследования ведутся достаточно долго, то заметным будет износ подшипников, что приводит к постепенному увеличению амплитуды вибраций машины. Это, в свою очередь, постепенно ухудшает условия коммутации и усиливает искрение щеток. Следовательно, результаты, полученные в этих опытах, отличаются не только потому, что изменились управляемые факторы, но и потому, что имел место дрейф амплитуды вибраций. План эксперимента нужно составить так, чтобы результаты эксперимента не были искажены влиянием помех, в данном случае - влиянием временно́го дрейфа амплитуды вибраций.

Большое количество факторов, характеризующих работу подобных систем, их разнородность, взаимосвязи между факторами и наличие помех не позволяют исследовать сложные системы традиционными способами.

В-третьих, резкое увеличение объема производства в XX веке привело к дефициту сырьевых и энергетических ресурсов. Возникла проблема экономии энергии, сырья и материалов, которая, в свою очередь, создала необходимость решать многочисленные задачи оптимизации при разработке машин, механизмов, оборудования и технологических процессов. Потребовались современные эффективные методы решения оптимизационных задач.

Необходимость эффективного изучения сложных систем обусловила появление исследований, направленных на формализацию самого процесса исследования. Появилась наука о науке. Теория эксперимента - составная часть этой науки. Содержанием теории эксперимента является разработка математических методов оптимального управления экспериментом. Одним из основных разделов теории эксперимента является планирование эксперимента. Планированием эксперимента называют составление схемы изменения значений переменных (факторов) исследуемого объекта, обладающей некоторыми оптимальными свойствами. Разработка таких схем представляет собой сложную математическую задачу. Решением этой задачи занимаются специалисты в области прикладной математики. Разработаны принципы построения планов эксперимента, оптимальных при решении конкретных исследовательских задач.

2. МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ОСНОВА ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

2.1. Два метода решения исследовательских задач

Существуют два принципиально различных метода решения исследовательских задач [1,2] .

Первый метод - классический, традиционный. Он основан на изучении механизма протекающих в изучаемом объекте процессов, раздельном изучении процессов разной физической природы, стремлении описать элементарные процессы интегральными, дифференциальными или алгебраическими уравнениями, построить теорию функционирования объекта исследования и на основе этой теории создать математическую модель объекта. Под математической моделью здесь подразумевается система уравнений, описывающая свойства объекта. Полученная математическая модель используется для создания методик расчета объекта при его проектировании или для управления объектом при его эксплуатации.

Традиционный метод исследования несколько столетий был единственным. Он широко используется и в настоящее время в фундаментальных научных исследованиях и в прикладных науках. В последнем случае этот метод используется на начальных стадиях изучения принципиально новых технических объектов, принципы работы и внутренние связи которых слабо изучены. Этот метод требует больших затрат времени и средств.

В середине XX века стал успешно развиваться второй подход к исследованию, основанный на кибернетическом методе "черного ящика". Этот метод не требует изучения механизма протекающих в объекте процессов. Исследователь не интересуется внутренней функциональной структурой объекта, рассматривает его как "черный ящик", доступа в который нет. Сущность метода состоит в следующем.

На "входе" объекта исследования действует ряд факторов (входные параметры объекта): $x_1, x_2, \dots, \dots, x_i, \dots, x_k$. На "выходе" объекта измеряется некоторый показатель y, являющийся характеристикой того или иного эксплуатационного свойства объекта, интересующего исследователя. Изменяя количественные значения входных факторов объекта, исследователь изменяет его состояние, в результате чего в соответствии со свойствами объекта изменяется численное значение показателя y. Исследователь проводит ряд опытов, в каждом из которых все факторы принимают некоторые значения в заданном интервале и экспериментально определяется соответствующее значение показателя y, называемого параметром цели. По результатам исследования составляется табл.2.I.

Таблица 2.I

Таблица эксперимента

Номера опытов	Факторы					Показатель цели
	x_1	x_2	x_3	...	x_k	
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	...	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	...	x_{k2}	y_2
...	...	...	...	...	...	...
N	x_{1N}	x_{2N}	x_{3N}	...	x_{kN}	y_N

В этой таблице жирной линией обведена так называемая матрица планирования эксперимента, в которой любая строка представляет собой значения всех факторов в соответствующем опыте, а любой столбец - значения одного из факторов во всех опытах.

В табл.2.I содержится объективная информация о свойствах объекта исследования, определяющих зависимость параметра цели от факторов x_i:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k). \tag{2.I}$$

Эта информация содержится в неявной форме, поэтому специальной математической обработкой результатов эксперимента информацию о свойствах объекта следует извлечь и определить зависимость (2.I).

Ясно, что описанный метод прост с методологической точки зрения, не требует очень глубоких знаний объекта исследования, его свойств. Достаточно лишь дать перечень существенных параметров, определяющих объект, и установить, что может служить показателем цели при исследовании объекта. Не изучая механизма взаимодействия факторов x_1, x_2, $x_3, \dots$, x_k при их влиянии на y, исследователь может экспериментально найти зависимость (2.I).

Этот метод может использоваться и при проведении "машинного эксперимента", при котором исследуется не сам физический объект, а его математическая модель. При выполнении "машинного эксперимента" в полной мере используются все результаты традиционных аналитических и экспериментальных исследований объекта, ибо математическая модель объекта построена по результатам таких исследований. Например, в результате выполнения традиционных исследований индукционно-динамической машины (ИДМ) методами электромеханических аналогий строится схема замещения ИДМ. Для схемы замещения записывается система дифференциальных уравнений, которая и является математической моделью ИДМ. Выполняя расчеты на ЭВМ при различных значениях параметров схемы замещения, можно исследовать влияние этих параметров на свойства ИДМ. Но так как параметров много, то возникают трудности исследования многофакторного объекта (разд.I). Применение методов теории планирования эксперимента дает возможность снять эти трудности и предложить оптимальный план вариантных расчетов на ЭВМ, позволяющий затем найти зависимость (2.I).

Планирование эксперимента заключается в составлении матрицы планирования (табл.2.I). Возникает вопрос, какие значения факторов использовать при проведении эксперимента и в какой последовательности их чередовать при переходе от одного опыта к другому. Последнее имеет принципиальное значение, так как от способа варьирования значений факторов зависит возможность оценки степени влияния отдельных факторов в многофакторном эксперименте. Если матрица планирования эксперимента не будет составлена по некоторой особой схеме, то по результатам эксперимента не удастся в "чистом виде" выявить зависимость параметра цели от каждого фактора. Действительно, как видно из табл.2.I, при одновременном изменении значений факторов в различных опытах изменения параметра цели обусловлены влиянием сразу всех факторов. Математической обработкой результатов эксперимента необходимо из смешанной информации выделить информацию о влиянии отдельных факторов, а это, как будет видно из дальнейшего, возможно не при всяком способе составления матрицы планирования эксперимента.

2.2. Виды исследовательских задач

В зависимости от видов задач исследования необходимо применять различные планы эксперимента. Поэтому следует сделать классификацию задач, помогающую формулировать эти задачи при изучении конкретного объекта. Всякое всестороннее исследование технического устройства или технологического процесса может быть разделено на отдельные этапы, на каждом из которых решается определенная задача. Различают следующие виды исследовательских задач.

Задача определения оптимального состава многокомпонентной системы. Такая задача весьма характерна для решения проблем химической и металлургической технологии. Например, требуется разработать новый сплав с большой твердостью. Возникает задача, на основе какого металла и с какими легирующими добавками делать этот сплав. Вопрос определения оптимального процентного содержания каждого элемента еще не ставится. Ставится задача - из чего делать? Это и есть задача определения оптимального состава многокомпонентной системы.

В электромеханике такая задача не является широко распространенной, хотя и ее иногда приходится решать. Например, исследования в области создания электромобилей комбинированного типа связаны с задачей выбора оптимального варианта многокомпонентной системы.

Вариант I: двигатель внутреннего сгорания, генератор постоянного тока, двигатели постоянного тока, система управления.

Вариант 2: двигатель внутреннего сгорания, синхронный генератор, преобразователь частоты, асинхронные двигатели, система управления.

Могут быть и другие варианты.

Задача оптимизации, то есть отыскания оптимальных условий протекания технологического процесса или оптимальных значений параметров технического устройства, при которых какой-либо важный показатель цели достигает максимального (минимального) значения.

Это самая общая формулировка задачи. Для конкретного объекта исследования задача должна быть сформулирована более конкретно.

Пример I. Каковы должны быть оптимальные значения геометрических параметров активной зоны ИДМ (указать, каких именно) данной мощности и данного габарита, чтобы было максимальным ее быстродействие.

Пример 2. Каковы должны быть значения параметров схемы полупроводникового импульсного генератора для индукционного нагрева (дать перечень параметров), при которых к.п.д. энергопреобразования будет максимальным.

Задача оптимизации - это наиболее часто решаемая задача. Она всегда должна решаться при проектировании технических устройств.

Особенность этой задачи состоит в том, что во всех технических объектах и технологических процессах желательно достичь наилучших значений сразу нескольких параметров цели, но это невозможно. Значения параметров объекта, оптимальные по какому-либо одному параметру цели, как правило, являются неоптимальными по другим параметрам цели. В связи с этим приходится оптимизировать параметры всегда по одному, наиболее важному показателю, остальные же показатели выступают в качестве технических ограничений. Это значит, что для таких показателей должны быть заданы граничные значения (ограничения сверху или снизу), переходить которые не допускается. Таким образом, задача оптимизации чаще всего решается в условиях наличия технических ограничений. Определяются оптимальные значения параметров объекта, при которых один важнейший параметр цели принимает максимальное (минимальное) значение при условии, что параметры - лимитеры принимают значения, не выходящие за ограничения.

Задача идентификации, т.е. отыскания зависимости параметра цели от параметров объекта в виде функции (2.I), которую называют функцией цели.

Пример I. Определить зависимость длительности полного хода якоря ИДМ от геометрических параметров, активной зоны ИДМ данной мощности.

Пример 2. Определить зависимость к.п.д. энергопреобразования в полупроводниковом импульсном генераторе для индукционного нагрева от параметров его схемы.

Задача идентификации решается довольно часто. Найденная функция цели может использоваться для довольно простого анализа свойств объекта исследования, для решения задачи оптимизации, для выработки рекомендаций по проектированию объектов данного типа.

Задача отсеивания. При решении этой задачи необходимо выяснить, какие из перечисленных параметров объекта существенно влияют на параметр цели, а какие - несущественно. Несущественно влияющие параметры в дальнейшем не рассматриваются как факторы при более детальном изучении объекта.

Пример. Определить, какие из параметров схемы полупроводникового импульсного генератора для индукционного нагрева при своем изменении существенно изменяют к.п.д. энергопреобразования, а какие не влияют на к.п.д.

Хронологически прежде всего должна решаться задача отсеивания, потом задача оптимизации или идентификации, в зависимости от того, какая именно задача стоит перед исследователем. При исследовании технических устройств задачу отсеивания решают не всегда, так как исследователь, как правило, имеет достаточно полные знания принципа работы и свойств исследуемого объекта, поэтому априори может сделать правильные выводы о том, какие параметры действительно являются существенными для данного параметра цели, а какие несущественны.

2.3. Математические основы теории планирования эксперимента

Математической основой теории планирования эксперимента является регрессионный анализ, сущность которого состоит в следующем.

Пусть необходимо найти зависимость параметра цели y от факторов исследуемого объекта $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Как правило, аналитическое выражение функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ неизвестно, поэтому ее приходится представлять полиномом вида

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot x_i^2 + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \cdots \qquad (2.2)$$

с коэффициентами регрессии b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij}.

Разложение функции в степенной ряд эквивалентно представлению ее рядом Тейлора [I]:

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad b_{ii} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \qquad b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}.$$

Коэффициенты регрессии полинома (2.2) должны быть вычислены путем математической обработки результатов эксперимента, записанных в табл.2.I, методом наименьших квадратов. Так как метод наименьших квадратов - это метод линейной алгебры, то он не может быть использован для отыскания коэффициентов нелинейного полинома (2.2). Однако можно ввести обозначения

$$x_0 = 1, \quad x_1^2 = x_{k+1}, \quad x_2^2 = x_{k+2}, \ \ldots, \ x_k^2 = x_{2k},$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_{2k+1}, \quad x_1 \cdot x_3 = x_{2k+2}, \ \ldots, \ x_{k-1} \cdot x_k = x_{k'},$$

в системе которых полином (2.2) записывается как однородное линейное уравнение

$$\hat{y} = b_0 \cdot x_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \cdots + b_{k'} \cdot x_{k'} = \sum_{i=0}^{k'} b_i \cdot x_i \qquad (2.3)$$

После такой формальной линеаризации функции (2.2) метод наименьших квадратов может быть применен.

Чтобы методом наименьших квадратов найти коэффициенты регрессии, нужно минимизировать сумму квадратов отклонений

$$S_R=\sum_{u=1}^{N}\left(y_u-b_0\cdot x_{0u}-b_1\cdot x_{1u}-b_2\cdot x_{2u}-\cdots-b_{k'}\cdot x_{k'u}\right)^2.$$

Найдем частные производные от этого выражения по каждому из неизвестных коэффициентов b_i и получим систему так называемых нормальных уравнений

$$\begin{aligned}
&b_0\cdot(00)+b_1\cdot(01)+b_2\cdot(02)+\cdots+b_{k'}\cdot(0k')=(0y);\\
&b_0\cdot(10)+b_1\cdot(11)+b_2\cdot(12)+\cdots+b_{k'}\cdot(1k')=(1y);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_0\cdot(k'0)+b_1\cdot(k'1)+b_2\cdot(k'2)+\cdots+b_{k'}\cdot(k'k')=(k'y).
\end{aligned}\qquad(2.4)$$

Здесь для сокращения записи уравнений введены обозначения:

$$(ii)=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}^2,\quad (ij)=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}\cdot x_{ju},\quad (iy)=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}\cdot y_u.\qquad(2.5)$$

Чтобы найти интересующие нас коэффициенты регрессии, необходимо решить систему нормальных уравнений (2.4). Предварительно нужно вычислить по данным табл.2.I коэффициенты (ii) и (ij) системы уравнений и свободные члены (iy). Коэффициенты (ii) и (ij), как видно из выражений (2.5), являются скалярными произведениями вектор - столбцов матрицы планирования эксперимента (табл.2.I), номера которых соответствуют числам i и j. Свободные члены (iy) представляют собой скалярные произведения вектор - столбцов факторов с номером i на вектор - столбец значений y.

Из системы уравнений (2.4) следует, что коэффициенты регрессии не могут быть определены независимо друг от друга. Физически это означает, что каждый коэффициент b_i не характеризует "чистое" влияние соответствующего фактора x_i на y, а несет в себе информацию о влиянии всех факторов. Действительно, в каждом уравнении системы (2.4) имеются члены, содержащие все факторы. В такой ситуации уравнение (2.3) можно рассматривать лишь как интерполяционную формулу для вычисления значений y по известным значениям x_i. Ничего нельзя сказать о степени влияния каждого фактора на y. Результаты исследования оказываются весьма ограниченными.

От этого недостатка можно избавиться, если эксперимент планировать по некоторой схеме, составленной так, чтобы в матрице планирования скалярные произведения всех пар вектор - столбцов были равны нулю $\left(\sum_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot x_{ju} = 0\right)$. Векторы, скалярные произведения которых равны нулю, называются ортогональными. Поэтому и план эксперимента, при котором скалярные произведения вектор-столбцов равны нулю, называется ортогональным. Очевидно, что при ортогональном планировании эксперимента все недиагональные коэффициенты системы нормальных уравнений (2.4) будут равны нулю и система уравнений распадется на $k'+1$ независимых уравнений. Коэффициенты регрессии будут вычисляться независимо друг от друга по формуле

$$b_i = (iy)/(ii) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot y_u \Big/ \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 . \qquad (2.6)$$

Это значит, что каждый коэффициент регрессии b_i в зависимости (2.3) характеризует степень влияния соответствующего фактора x_i на y. Следовательно, найденная по результатам эксперимента зависимость может использоваться для анализа свойств объекта исследования и управления им.

Итак, планировать эксперимент (физический или "машинный") надо так, чтобы матрица планирования эксперимента была ортогональной. Это основополагающее условие, которое необходимо соблюдать при исследовании многофакторных объектов. Построение ортогональных планов эксперимента при решении различных задач исследования - предмет теории планирования эксперимента.

3. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ И ДРОБНЫЕ ПЛАНЫ

3.I. Полный факторный эксперимент. Общие сведения

Полный факторный эксперимент (сокращенно ПФЭ) позволяет найти математическую модель исследуемого объекта, заданную линейным многочленом вида

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot x_i \qquad (3.1)$$

или неполным квадратичным многочленом вида

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j . \qquad (3.2)$$

Для отыскания коэффициентов регрессии b_i линейной функции (3.1) достаточно в эксперименте определить значения y при двух значениях каждого фактора x_i. Поэтому в планах ПФЭ каждый фактор варьируется только на двух уровнях – верхнем и нижнем. Такие планы называются линейными.

Линейные планы используются в отсеивающих экспериментах, а при решении задач идентификации – в тех случаях, когда на основе априорных данных предполагается линейная зависимость y от входных факторов или зависимость вида (3.2). Линейные планы могут применяться также в тех случаях, когда путем нелинейного преобразования функциональные зависимости линеаризованы. В этих случаях линейный план составляется для преобразованных переменных.

3.2. Составление планов ПФЭ

Принципы составления планов ПФЭ рассмотрим на конкретных примерах. Пусть требуется определить зависимость параметра y, характеризующего качество продукции, от параметров технологического процесса ее изготовления, причем параметрами (факторами) техпроцесса являются, например, температура t и давление в реакторе P (пример условный). Вводятся обозначения: $X_1 = t$, $X_2 = P$. Каждый фактор решено варьировать в эксперименте на двух уровнях согласно табл.3.I.

Таблица 3.I

Таблица варьирования факторов

Факторы	X_1, °С	X_2, Па
Верхний уровень (X_{i+})	I00	$6 \cdot 10^5$
Нижний уровень (X_{i-})	80	$4 \cdot 10^5$
Средний уровень (нулевой уровень или центр эксперимента) (X_{i0})	90	$5 \cdot 10^5$
Шаг варьирования (ΔX_i)	I0	$I \cdot 10^5$

Таблица 3.2

Условия опытов

Номера опытов	X_1, °С	X_2, $\times 10^5$ Па	y
I	I00	6	y_1
2	80	6	y_2
3	I00	4	y_3
4	80	4	y_4

Если в эксперименте каждый фактор устанавливают лишь на верхний или нижний уровень, то все возможные комбинации условий экспери-

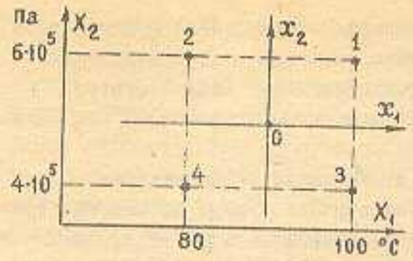

Рис.3.I. Расположение экспериментальных точек на плоскости

мента исчерпываются в четырех опытах (табл.3.2).

Согласно этой таблице должны быть реализованы технологические процессы при условиях, соответствующих опытам I,2,3 и 4, и по результатам эксперимента должны быть определены значения y_1, y_2, y_3, y_4. Условия опытов I...4 можно показать также графически (рис.3.I). Нумерация точек I,2,3,4 соответствует номерам опытов в табл.3.2. В точке 0 – центр эксперимента (нулевой уровень) – опыт не выполняется.

Для упрощения обработки результатов эксперимента методом наименьших квадратов от действительных переменных X_i переходят к кодовым безразмерным переменным x_i, которые определяются по формуле

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i} \quad , \tag{3.3}$$

где X_{i0} – центральное значение фактора X_i (нулевой уровень);

ΔX_i – шаг варьирования фактора X_i.

Операция (3.3) означает перенос начала координат в точку 0 (рис.3.I) и измерение факторов x_i в единицах, равных шагу варьирования. В этом случае верхнему уровню фактора X_i будет соответствовать число +I кодового фактора x_i, а нижнему уровню – число -I. Тогда таблица плана эксперимента, в которой факторы выражены в кодовых единицах, примет следующий вид (табл.3.3).

Таблица 3.3

Условия опытов при кодовом представлении факторов

Номера опытов	x_0	x_1	x_2	y
I	+	+	+	y_1
2	+	–	+	y_2
3	+	+	–	y_3
4	+	–	–	y_4

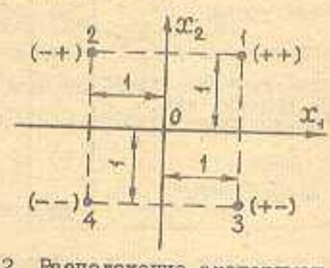

Рис.3.2. Расположение экспериментальных точек в плоскости преобразованных факторов

Графически план эксперимента можно в этом случае показать на рис.3.2. Экспериментальные точки расположились в вершинах квадрата. В скобках записаны координаты этих точек по осям x_1 и x_2 (на первом месте по оси x_1), которые равны +1 или -I. Цифра I обычно опускается на рисунке и в плане. В табл.3.3, кроме столбцов x_1 и x_2, включен также столбец фиктивной переменной x_0, во всех опытах принимающей значение +I (см.п.2.3). Часть таблицы, обведенная жирными линиями, является матрицей планирования эксперимента. Знак "+" означает, что фактор находится в опыте на верхнем уровне, а знак "-" - на нижнем.

Теперь построим план ПФЭ при трех независимых переменных для отыскания зависимости $y=f(x_1, x_2, x_3)$, задаваемой линейным многочленом. Предположим, что мы рассматриваем тот же самый технологический процесс, но в качестве параметра техпроцесса решено взять еще длительность процесса $T=X_3$.

В предыдущем эксперименте, делая четыре опыта и изменяя только температуру X_1 и давление X_2, длительность процесса X_3 мы поддерживали неизменной. Так как фактор X_3 не был включен в число переменных, экспериментальные точки на рис.3.2 следует считать расположенными в плоскости $x_3=const$, что соответствует, например, верхнему уровню фактора x_3. Теперь, чтобы проследить влияние X_3 на y, нужно все экспериментальные точки переместить по оси x_3 в плоскость, соответствующую нижнему уровню x_3 (рис.3.3). Точки имеют теперь по три координаты. Число опытов удвоится. Чтобы построить план эксперимента, нужно взять за основу план для двух переменных (табл.3.3), добавить столбец фактора x_3 и во всех четырех опытах этого плана x_3 установить на уровень (+I). Добавить еще четыре опыта, в которых план для x_1 и x_2 повторяется без изменения, а фактор x_3 принимает значение -I. Получится следующий план (табл.3.4). Штриховой линией в этой таблице выделен план для двух переменных.

Экспериментальные точки в плане при трех переменных располагаются в вершинах куба (рис.3.3).

Если требуется составить план ПФЭ на 4 переменных, то в табл.3.4 необходимо ввести столбец x_4, в первых восьми опытах фактор x_4 установить на уровень (+I), добавить еще восемь опытов, повторив весь предыдущий блок плана из восьми опытов, но фактор x_4 в этих новых опытах установить на уровень (-I). План будет содержать

16 опытов. Аналогично можно построить планы для бо́льшего числа факторов.

Таблица 3.4

План эксперимента для трех переменных

Номера опытов	x_0	x_1	x_2	x_3	y
I	+	+	+	+	
2	+	−	+	+	
3	+	+	−	+	
4	+	−	−	+	
5	+	+	+	−	
6	+	−	+	−	
7	+	+	−	−	
8	+	−	−	−	

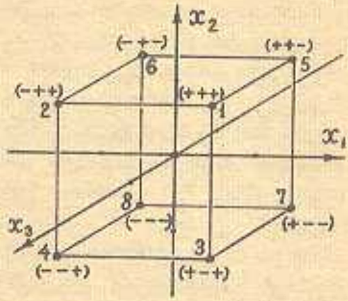

Рис.3.3. Расположение экспериментальных точек в факторном пространстве кодовых факторов

В общем случае в плане ПФЭ при K независимых переменных содержится $N = 2^K$ опытов, поэтому планы ПФЭ называют планами типа 2^K. Так, если $K=5$, то $N=32$, при $K=6$ $N=64$, при $K=10$ $N=1024$. Как видим, с ростом числа входных факторов число необходимых опытов в ПФЭ быстро увеличивается. В дальнейшем мы увидим, что не обязательно пользоваться планами типа 2^K, можно построить планы, содержащие значительно меньшее число опытов.

Планы ПФЭ на любое число переменных составляют, пользуясь формальным правилом: в столбце x_1 уровни "+" и "−" чередуют каждый раз при переходе к следующему опыту. В столбце каждого следующего фактора знаки чередуют в два раза реже, чем в столбце предыдущего фактора (табл.3.4). При $K=3$ экспериментальные точки находятся в вершинах куба. При $K>3$ экспериментальные точки находятся в вершинах K-мерного гиперкуба, который нельзя изобразить на рисунке.

3.3. Дробные планы (дробные реплики от полного факторного эксперимента)

Количество опытов N в плане эксперимента можно сократить, если использовать так называемые дробные реплики от полного факторного эксперимента, представляющие собой часть плана ПФЭ, составленную по определенной схеме. Существуют следующие дробные планы:

1. Полуреплика от ПФЭ - половина опытов ПФЭ, план типа $2^{к-1}$.

2. Четвертьреплика от ПФЭ - $\frac{1}{4}$ часть опытов ПФЭ, план типа $2^{к-2}$.

3. $\frac{1}{8}$ - реплика от ПФЭ - $\frac{1}{8}$ часть опытов ПФЭ, план типа $2^{к-3}$.

4. $\frac{1}{16}$ - реплика от ПФЭ - $\frac{1}{16}$ часть опытов ПФЭ, план типа $2^{к-4}$,

и т.д.

Дробный план типа $2^{к-р}$ содержит в $2^р$ раз меньше опытов, чем план ПФЭ.

План дробного факторного эксперимента (сокращенно ДФЭ) строится следующим образом. Для к-р факторов составляют план ПФЭ по правилам, описанным в п.3.1. Элементы столбцов для остальных р факторов получают перемножением соответствующих элементов столбцов предыдущих факторов, причем для каждого из р факторов комбинация факторов - сомножителей должна быть своей.

Рассмотрим пример.

Пусть число факторов к=6. План ПФЭ при таком значении К содержал бы $N = 2^6 = 64$ опыта. Построим план ДФЭ типа $2^{к-3} = 2^{6-3}$, то есть $\frac{1}{8}$ - реплику от ПФЭ. Для трех факторов (6-3=3) составим план ПФЭ из 8 опытов, а столбцы остальных факторов получим с помощью следующих соотношений, которые называются генерирующими соотношениями:

$$x_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\ ; \quad x_5 = x_1 \cdot x_2\ ; \quad x_6 = x_2 \cdot x_3 . \qquad (3.4)$$

Эти соотношения показывают, элементы каких столбцов надо перемножить, чтобы получить элементы факторов x_4, x_5, x_6. Получим следующий план, в котором столбец $x_2 \cdot x_3$ включен только для последующих пояснений. Заметим, что соотношения (3.4) можно было бы взять и со знаком минус.

Полученный план содержит лишь 8 опытов вместо 64 в плане ПФЭ. Однако этот план обладает худшей разрешающей способностью в отношении разделения влияния отдельных факторов и их парных и тройных взаимодействий на y. Это объясняется тем, что, например, фактор x_6 в эксперименте изменяется от опыта к опыту точно так же, как и фактор $x_2 \cdot x_3$ (табл.3.5). Поэтому нельзя сказать, объясняется ли изменение y в эксперименте изменением x_6 или изменением $x_2 \cdot x_3$. При вычислении коэффициентов регрессии b_6 и b_{23} получатся одинаковые значения, и нельзя сказать, что именно вычислено: b_6 или b_{23}. Это означает, что найденные коэффициенты регрессии будут оценками совместных эффектов

$$b_4 \to \beta_4 + \beta_{123}\,, \quad b_5 \to \beta_5 + \beta_{12}\,, \quad b_6 \to \beta_6 + \beta_{23}\,. \tag{3.5}$$

Таблица 3.5

Дробный план для шести переменных

Номера опытов	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_2x_3	y
I	+	+	+	+	+	+	+	+	
2	+	−	+	+	−	−	+	+	
3	+	+	−	+	−	−	−	−	
4	+	−	−	+	+	+	−	−	
5	+	+	+	−	−	+	−	−	
6	+	−	+	−	+	−	−	−	
7	+	+	−	−	+	−	+	+	
8	+	−	−	−	−	+	+	+	

Здесь символом β обозначены теоретические значения коэффициентов регрессии в отличие от их экспериментальных оценок b.

Таким образом, дробный план не позволяет оценить коэффициенты b_i при линейных членах многочлена в "чистом виде" и определить "чистое" влияние факторов x_i. Поэтому дробные планы следует применять в тех случаях, когда есть уверенность, что парные, тройные и т.п. эффекты равны нулю. В этом случае в выражениях (3.5) коэффициенты β_{123}, β_{12}, β_{23} были бы равны нулю, и коэффициенты b_4, b_5 и b_6 были бы оценками соответственно β_4, β_5 и β_6.

Коэффициенты типа b_{ijq} при тройных произведениях имеют место в зависимости вида

$$\hat{y} = b_0 + \Sigma\, b_i \cdot x_i + \Sigma\, b_{ii} \cdot x_i^2 + \Sigma\, b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \\ + \Sigma\, b_{iii} \cdot x_i^3 + \Sigma\, b_{ijq} \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_q\,, \tag{3.6}$$

описывающей математическую модель объекта исследования. В инженерных и прикладных научных исследованиях, как правило, исследуемые объекты обладают такими свойствами и параметры их x_i изменяются обычно в таких небольших пределах, что математические модели функционирования этих объектов достаточно точно могут быть описаны многочленами второй степени. Это значит, что в выражении (3.6) коэффициенты типа b_{iii} и b_{ijq} почти всегда можно считать равными нулю. Тем более это справедливо в отношении коэффициентов при четверных и более взаимодействиях факторов. Сказанное иллюстрируется рис.3.4, где кривая I определяет неизвестную нам зависимость характеристики некоторого объекта от его параметра x.

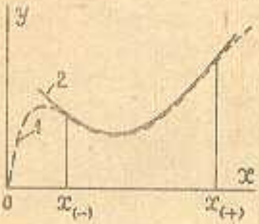

Рис.3.4. Аппроксимация части зависимости параболой

Эта зависимость при широком интервале изменения x довольно сложная, она не может быть точно описана квадратным уравнением, здесь потребовалось бы уравнение более высокой степени. Однако в реальных объектах входные параметры обычно могут изменяться или их целесообразно изменять в значительно более узких пределах согласно техническим условиям, инженерно-физическому смыслу и т.п. Если в данном случае x может изменяться в пределах от $x_{(-)}$ до $x_{(+)}$, то отрезок функции $y(x)$, соответствующий этому интервалу, можно достаточно точно описать уравнением второй степени (рис.3.4, кривая 2). Конечно, за пределами интервала истинная и полученная зависимости далеко разойдутся, но за пределами интервала эти зависимости нас не интересуют.

Итак, как правило, исследователя интересует математическая модель объекта лишь в достаточно малом объеме факторного пространства. Например, при проектировании электрической машины, рассматривая влияние величины индукции в воздушном зазоре машины на выходные характеристики машины, нет смысла изменять индукцию от нуля до бесконечности. В машинах малой и средней мощности индукцию в зазоре следует брать не меньше 0,6 тесла, чтобы уровень использования машины не был слишком низок, и не более чем 0,95 тесла, так как при большей индукции будет сильное насыщение стали магнитопровода со всеми вытекающими отсюда последствиями. Для машины конкретной мощности разумный, с инженерной точки зрения, диапазон возможных индукций в зазоре еще меньше. Аналогичные соображения можно высказать в отношении любого другого параметра электрической машины, аппарата или другого технического объекта, а также технологического процесса.

Таким образом, если план ДФЭ дает возможность оценить линейные эффекты совместно с тройными или с эффектами более высокого порядка, то такой план можно считать обладающим достаточно высокой разрешающей способностью, так как тройные и более высокого порядка эффекты можно считать равными нулю. Что же касается парных эффектов, то они чаще всего не равны нулю, так как математическая модель практически любого объекта исследования нелинейна и требует описания уравнением второй степени. Поэтому генерирующие соотношения типа $x_i = x_j \cdot x_q$ применять нельзя. Необходимо, чтобы в соотношении было не менее трех сомножителей. Отсюда, в частности, следует, что при К=3 нужно выполнить полный, а не дробный план. При К=4 можно построить лишь полуреплику от ПФЭ типа 2^{4-1} с генерирующим соотношением $x_4 = \pm x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Но чем больше К, тем больше имеется возможностей для построения дробных планов с разной степенью дробности. Например, при К=14 можно построить полуреплику от ПФЭ типа 2^{14-1} и четвертьреплику типа 2^{14-2} в различных вариантах, планы типа 2^{14-3}, 2^{14-4}, 2^{14-5}, 2^{14-6}, 2^{14-7} и другие. В последнем случае план содержит $N = 2^{14-7} = 128$ опытов против $N = 2^{14} = 16376$ опытов в полном факторном эксперименте.

При решении задач идентификации следует составлять такие планы, чтобы они позволяли получить несмешанные оценки не только линейных, но и парных эффектов. Это необходимо для правильного описания поверхности цели уравнением второй степени. Таким образом, возникает необходимость оценки разрешающей способности дробных реплик.

3.4. Разрешающая способность дробных реплик

Под разрешающей способностью дробных реплик понимают их способность раздельно оценивать коэффициенты регрессии b_i при линейных членах и b_{ij} при парных произведениях факторов. Разрешающая способность дробных планов проверяется с помощью определяющего контраста, полученного из генерирующего соотношения умножением обеих частей равенства на его левую часть. Например, если полуреплика типа 2^{4-1} построена на основе генерирующего соотношения $x_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, то определяющий контраст получим умножением этого равенства на x_4:

$$x_4^2 = 1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 .$$

Здесь 1 – вектор – столбец положительных единиц, координаты его получены возведением в квадрат координат вектора x_4. Для определения всех совместных оценок надо последовательно умножить независимые переменные x_i на определяющий контраст. В данном примере получим следующие соотношения:

$$x_1 = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \; ; \qquad x_2 = x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \; ;$$

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \; ; \qquad x_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \, .$$

Это значит, что коэффициенты регрессии будут оценками

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{234} \; ; \qquad b_2 \to \beta_2 + \beta_{134} \; ;$$

$$b_3 \to \beta_3 + \beta_{124} \; ; \qquad b_4 \to \beta_4 + \beta_{123} \, .$$

Отсюда следует, что линейные эффекты оцениваются независимо от парных, так как коэффициенты $\beta_{234}, \beta_{134}, \beta_{124}, \beta_{123}$ можно считать равными нулю.

Для определения оценок парных эффектов надо определяющий контраст умножить последовательно на все пары произведений факторов. Получим соотношения $x_1 x_2 = x_3 \cdot x_4$, $x_1 \cdot x_3 = x_2 \, x_4$, $x_1 \cdot x_4 = x_2 \cdot x_3$. Это значит, что коэффициенты регрессии b_{ij} будут оценками

$$b_{12} \to \beta_{12} + \beta_{34} \; ; \qquad b_{14} \to \beta_{14} + \beta_{23} \; ; \qquad b_{23} \to \beta_{23} + \beta_{14} \; ;$$

$$b_{13} \to \beta_{13} + \beta_{24} \; ; \qquad b_{34} \to \beta_{34} + \beta_{12} \; ; \qquad b_{24} \to \beta_{24} + \beta_{13} \, .$$

Коэффициенты при парных произведениях факторов оцениваются совместно, данная полуреплика не обладает разрешающей способностью в отношении парных эффектов.

Если имеется несколько определяющих контрастов (в планах большей дробности), то все их надо перемножать попарно, по три, по четыре и т.д., перебирая все возможные комбинации и анализируя совместные оценки коэффициентов регрессии.

Разрешающая способность дробных реплик зависит от выбора вида генерирующего соотношения.

3.5. Рандомизация опытов в плане эксперимента

После того как план эксперимента составлен (полный или дробный), его необходимо реализовать. При этом последовательность выполнения опытов не должна соответствовать нумерации их в плане. Опыты необходимо "перемешать" так, чтобы обеспечивалась случайная последовательность выполнения опытов. Это необходимо для исключения влияния на результаты эксперимента изменения во времени неконтролируемых факторов, не включенных в число независимых переменных. Рассмотрим это на примере.

Пусть исследуется некоторый технологический процесс с параметрами x_1, x_2 и x_3 и с выходной характеристикой y. Составлен план эксперимента типа 2^3 (табл.3.6).

Таблица 3.6

Номера опытов	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	+	+	+	+	
2	−	+	+	+	
3	+	−	+	+	
4	−	−	+	+	
5	+	+	−	−	
6	−	+	−	−	
7	+	−	−	−	
8	−	−	−	−	

Кроме факторов x_1, x_2, x_3, на технологический процесс могут влиять и другие факторы, известные или неизвестные исследователю, которые он не контролирует или хотя и контролирует, но не в силах стабилизировать на одном неизменном уровне. Эти факторы самопроизвольно могут изменяться во времени, и если опыты выполнять в последовательности, соответствующей их нумерации в таблице, то при большой длительности эксперимента дрейфующие во времени неучтенные факторы могут значительно изменяться по величине и существенно исказить результаты эксперимента, если окажется, что такие факторы оказывают влияние на y. Пусть рассматриваемый техпроцесс есть химико-технологический процесс, в котором используется некоторый катализатор в одном и том же количестве в каждом опыте. Считается, что активность катализатора неизменна. На самом же деле при хранении катализатора активность его может постепенно уменьшаться во времени вследствие старения его под влиянием условий окружающей среды. Так как эксперимент растянут во времени, то при выполнении первой половины опытов будет использоваться более активный катализатор (уровень +), чем при выполнении последующих опытов (уровень −). Кроме запланированного изменения факторов x_1, x_2, x_3, происходит незапланированное изменение фактора x_4 – активности катализатора. Так как факторы x_3 и x_4 в эксперименте изменяются одинаково (табл.3.6), то нельзя оценить "чистое" влияние фактора x_3. Коэффициент b_3 будет совместной оценкой $\beta_3 + \beta_4$. Неучтенных факторов, уровни которых дрейфуют во времени вверх или вниз, может быть много, поэтому $b_3 \to \beta_3 + \sum_{i>3} \beta_i$.

Для того чтобы исключить влияние неконтролируемого временного дрейфа неучтенных факторов на результаты эксперимента, необходимо план сделать ортогональным относительно этого дрейфа, т.е. необходимо, чтобы и первые, и последние, и центральные в таблице опыты с равной вероятностью оказались выполненными и в первую, и в последнюю очередь во времени. Для выполнения этого условия нужно случайным образом назначить очередность выполнения опытов, обеспечивая при этом равную вероятность для всех номеров опытов. В простейшем случае все номера опытов можно написать на одинаковые бирки и вынимать их из урны после тщательного перемешивания. Очередность выполнения тех или иных номеров опытов соответствует той последовательности, в которой они вынуты из урны. Можно также воспользоваться таблицей случайных чисел, для чего из любого столбца таблицы выписывают подряд числа в количестве, равном числу опытов. Эти числа и определяют номера опытов, а последовательность выполнения опытов должна соответствовать порядковому номеру числа в ряде. Числа в таблице случайных чисел обычно многозначные, поэтому справа или слева от каждого числа надо отделить столько знаков, сколько их содержит число опытов. В нашем примере число опытов N однозначное, поэтому будем отделять один знак слева. Выписывать числа надо, пропуская те, которые дают числа больше N или которые повторяют уже выпавшие номера опытов. С учетом этого нами выписаны следующие 8 чисел: 7873, 2551, 5695, 3463, 4326, 6467, 8266, 1856. Очередность выполнения опытов в нашем примере должна быть следующая: опыты № 7,2,5,3,4,6,8,1.

Процедура случайного перемешивания опытов в отношении последовательности их выполнения называется рандомизацией опытов. Рандомизация обязательно должна делаться при исследовании технологических процессов, а также устройств, на работу которых могут оказывать влияние дрейфующие неконтролируемые факторы. В „машинных экспериментах" (расчетах на ЭВМ) или при исследовании устройств, в которых не проявляются процессы старения или износа в течение времени экспериментирования и на которые не влияют изменяющиеся внешние условия, рандомизацию опытов делать не обязательно.

3.6. Свойства планов ПФЭ и ДФЭ и вычисление коэффициентов регрессии

Как и в любом другом плане эксперимента, в планах ПФЭ и ДФЭ столбцы представляют собой вектор – столбцы значений соответствующих факторов. Координатами векторов являются числа +I или –I. Анализируя табл.3.3...3.5, нетрудно увидеть, что рассмотренные планы обладают следующими свойствами:

$$\text{I.}\quad (ii)=\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = N, \quad (i=0,1,2,3,\dots,\kappa),$$

т.е. скалярные произведения вектор - столбцов всех факторов самих на себя равны числу опытов N . Напомним, что эти скалярные произведения являются диагональными коэффициентами матрицы коэффициентов системы нормальных уравнений, на основе которой вычисляют коэффициенты регрессии b_i . Таким образом, планирование эксперимента по типу ПФЭ избавляет нас от необходимости вычисления диагональных коэффициентов системы.

$$2.\quad (ij)=\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\cdot x_{ju}=0, \quad (i\neq j),$$

то есть все скалярные произведения вектор - столбцов разноименных факторов матрицы планирования (включая и фактор x_0) равны нулю. Так как такие скалярные произведения являются недиагональными коэффициентами матрицы коэффициентов нормальных уравнений, то свойство 2 избавляет нас от необходимости вычислять эти коэффициенты и делает матрицу коэффициентов системы нормальных уравнений (3.7) диагональной.

$$\begin{pmatrix} N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

Вследствие этого система нормальных уравнений распадается на систему равенств

$$b_0\cdot N=(0y), \quad b_1\cdot N=(1y), \dots, b_k\cdot N=(ky).$$

По результатам эксперимента необходимо вычислить лишь свободные члены уравнений

$$(iy)=\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\cdot y_u \quad (i=0,1,2,\dots,\kappa). \qquad (3.8)$$

но эти вычисления существенно упрощаются, так как значения y необходимо умножать лишь на числа +I или -I.

Искомые коэффициенты регрессии b_i зависимости $\hat{y}=\sum b_i\cdot x_i$ можно определить по весьма простым формулам

$$b_i=\frac{1}{N}\cdot(iy)=\frac{1}{N}\cdot\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\cdot y_u \qquad (3.9)$$

Отпадает необходимость решать систему нормальных уравнений.

Свойство 2 плана эксперимента свидетельствует об ортогональности вектор - столбцов всех факторов. Поэтому план является ортогональным. Ортогональное планирование имеет большие преимущества перед классическим, неортогональным. Некоторые из преимуществ мы только что рассмотрели, другие рассмотрим несколько позже.

3.7. Вычисление коэффициентов неполного квадратного многочлена

Как уже отмечалось в п.3.I, по результатам линейного эксперимента можно определить коэффициенты b_i не только линейной зависимости (3.I), но и зависимости в виде неполного квадратичного полинома (3.2), который более точно опишет зависимость $\hat{y}=f(x_1,x_2,...,x_k)$. Коэффициенты b_i вычисляются по формуле (3.9). Для вычисления коэффициентов b_{ij} следует расширить расчетную таблицу плана и результатов эксперимента, включив в нее столбцы факторов типа $x_i \cdot x_j$. При К=3 получится следующая таблица.

Таблица 3.7

Таблица для расчета коэффициентов регрессии

Номера опытов	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	y
I	+	+	+	+	+	+	+	y_1
2	+	−	+	+	−	−	+	y_2
3	+	+	−	+	−	+	−	y_3
4	+	−	−	+	+	−	−	y_4
5	+	+	+	−	+	−	−	y_5
6	+	−	+	−	−	+	−	y_6
7	+	+	−	−	−	−	+	y_7
8	+	−	−	−	+	+	+	y_8

Элементы вектор - столбцов факторов $x_i \cdot x_j$ получаются перемножением соответствующих элементов вектор - столбцов x_i и x_j. К факторам типа $x_i \cdot x_j$ подходим, как к новым самостоятельным факторам (формальная линеаризация, п.2.3), определяем скалярное произведение вектор - столбца каждого такого фактора на вектор - столбец y и вычисляем коэффициенты b_{ij} аналогично выражению (3.9) по формуле

$$b_{ij}=\frac{1}{N}\cdot(ijy)=\frac{1}{N}\cdot\sum_{u=1}^{N}x_{iu}\cdot x_{ju}\cdot y_u \quad . \qquad (3.10)$$

3.8. Переход к естественным переменным

Полученные зависимости $\hat{y}=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ в виде (3.1) или (3.2) справедливы, если факторы выражены в кодовых единицах, так как вычисление коэффициентов регрессии b_i и b_{ij} производилось по данным таблицы, в которой все факторы x_i выражены в кодовых единицах. Для того чтобы перейти к зависимостям, в которых факторы выражены в естественных единицах, в выражениях (3.1) или (3.2) факторы x_i следует записать в виде $x_i=(X_i-X_{i0})/\Delta X_i$

$$\hat{y}=b_0+\sum_{i=1}^{k} b_i \frac{X_i-X_{i0}}{\Delta X_i}+\sum_{i<j}^{k} b_{ij}\cdot\frac{X_i-X_{i0}}{\Delta X_i}\cdot\frac{X_j-X_{j0}}{\Delta X_j}. \tag{3.11}$$

Можно пользоваться этим выражением или сделать дальнейшие преобразования, учитывая, что X_{i0}, X_{j0} и ΔX_i, ΔX_j – это константы эксперимента.

Приведя подобные члены, получим:

$$\hat{y}=B_0+\sum_{i=1}^{k} B_i X_i+\sum_{i<j}^{k} B_{ij} X_i X_j, \tag{3.12}$$

где $B_0=b_0-\sum_{i=1}^{k} b_i\cdot\frac{X_{i0}}{\Delta X_i}-\sum_{i<j}^{k} b_{ij}\cdot\frac{X_{i0}\cdot X_{j0}}{\Delta X_i\cdot\Delta X_j}$,

$$B_i=b_i-\sum_{i\neq j}^{k} b_{ij}\cdot\frac{X_{j0}}{\Delta X_i\cdot\Delta X_j}, \qquad B_{ij}=b_{ij}\cdot\frac{1}{\Delta X_i\cdot\Delta X_j}.$$

В формуле (3.12) факторы выражены уже в натуральных единицах.

Заметим в заключение, что при проведении эксперимента можно контролировать сразу несколько выходных параметров объекта исследования и по результатам эксперимента определить зависимости этих параметров от одних и тех же входных факторов.

3.9. Статистические оценки результатов эксперимента

После вычисления коэффициентов регрессии необходимо оценить адекватность математической модели (степень точности описания полученной функцией результатов эксперимента) и значимость коэффициентов регрессии. Для выполнения этих процедур необходимо знать дисперсию ошибки опыта.

Оценка дисперсии ошибки опыта

Дисперсия ошибки опыта (или дисперсия воспроизводимости) характеризует степень рассеивания значений выходной величины y относительно среднего значения $\bar{y}$ в каком-либо опыте, если один и тот же опыт, выполняемый при одних и тех же условиях, повторять несколько раз.

В некоторых случаях при проведении эксперимента дисперсия ошибки опыта известна априори, тогда определять ее не нужно. В „машинных экспериментах" (расчетах на ЭВМ) дисперсия ошибки опыта равна нулю.

Если дисперсия ошибки опыта в экспериментальном исследовании неизвестна, то она должна быть оценена путем выполнения несколько раз одного из опытов в плане эксперимента. Вычисляется она по формуле

$$s^2(y) = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{j=1}^{m} (y_j - \bar{y})^2, \qquad (3.13)$$

где m – число параллельных опытов, выполненных при одинаковых условиях;

y_j – значение y в j-м опыте;

$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{j}^{m} y_j$ – среднее значение y в m опытах.

Важно, чтобы дисперсии ошибки опыта были близки по величине в разных областях факторного пространства, или, иными словами, они должны быть однородны для всех опытов плана эксперимента. Часто есть основания считать дисперсии однородными из физических соображений. Если же уверенности в однородности дисперсий ошибки опыта нет, то следует несколько раз повторить не один, а несколько различных опытов плана эксперимента. Для проверки однородности дисперсий вычисляют критерий Кохрена, который равен отношению максимальной из дисперсий к сумме всех вычисленных дисперсий:

$$G = \frac{s_u^2(y)_{max}}{\sum_{u=1}^{n} s_u^2(y)}.$$

Здесь n – число опытов, которые выполнены несколько раз. Заметим, что критерием Кохрена можно пользоваться, если число параллельных опытов в каждом u – м опыте одинаково.

Если значение G не превышает табличного значения, то дисперсии можно считать однородными. Таблицы критерия Кохрена можно найти в работе [10]. Однородные дисперсии можно затем усреднить.

Если дисперсии неоднородны, то нужно найти способ преобразования параметра оптимизации y, приводящий к однородности дисперсий.

Оценка адекватности модели

Под адекватностью модели понимают степень достоверности описания свойств объекта исследования полученной зависимости (3.1) или (3.2). Если бы адекватность математической модели была абсолютной и если бы значения y в опыте определялись без ошибок, то значения y в каждом опыте оказались бы равными соответствующим значениям $\hat{y}$, вычисленным по полученной зависимости. В действительности такого никогда не бывает, и значения y_u в каждом u – м опыте отличаются от теоретических значений $\hat{y}_u$, вычисленных по модели.

Оценка адекватности модели основана на сравнении величины дисперсии адекватности s^2_{ag} с дисперсией ошибки опыта $s^2(y)$. Последняя нам уже известна, а дисперсия адекватности определяется по формуле

$$s^2_{ag} = \frac{1}{N-(K'+1)} \cdot \sum_{u=1}^{N} (y_u - \hat{y}_u)^2, \qquad (3.14)$$

где y_u – значения y в u – м опыте по опытным данным;
$\hat{y}_u$ – значения y в u – м опыте, вычисленное по уравнению (3.1) или (3.2).

Для того чтобы воспользоваться формулой (3.14), сначала надо вычислить по уравнению регрессии значения $\hat{y}_u$ для условий каждого опыта. Это трудоемко, поэтому обычно пользуются другой формулой, дающей тот же результат:

$$s^2_{ag} = \frac{1}{N-(K'+1)} \left[(yy) - \sum_{i=0}^{K} b_i \cdot (iy) - \sum_{i<j}^{K} b_{ij} \cdot (ijy) \right] =$$

$$= \frac{1}{N-(K'+1)} \left[\sum_{u=1}^{N} y_u^2 - \sum_{i=0}^{K} b_i \cdot \sum_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot y_u - \sum_{i<j}^{K} b_{ij} \cdot \sum_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot x_{ju} \cdot y_u \right]. \qquad (3.15)$$

Используемые в этом выражении суммы $\sum_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot y_u$ и $\sum_{u=1}^{N} x_{iu} \cdot x_{ju} \cdot y_u$ уже вычислены при определении коэффициентов регрессии.

Если окажется, что дисперсия адекватности меньше дисперсии ошибки опыта, то уравнение адекватно. Действительно, если ошибка в определении $\hat{y}$ по уравнению не превышает ошибки при определении y опытным путем, то уравнение следует признать адекватным.

Если дисперсия адекватности больше дисперсии ошибки опыта, то следует проверить, существенно ли больше. Для этого вычисляют критерий Фишера по формуле

$$F = \frac{S^2_{ag}}{S^2(y)} \qquad (3.16)$$

Вычисленное значение F сравнивают с табличным значением, определенным при числе степеней свободы $f_{ag} = N - (k'+1)$ для S^2_{ag} и числе степеней свободы $f_y = m - 1$ для $S^2(y)$, где m - число параллельных опытов при оценке дисперсии ошибки опыта, и при 5% -ном уровне значимости. Если дисперсия ошибки опыта была известна априори на основании многочисленных статистических данных, то $f_y = \infty$. Таблицы F - критерия Фишера имеются в книгах по математической статистике и теории эксперимента.

Если вычисленное значение F меньше табличного, то это значит, что S^2_{ag} несущественно превышает $S^2(y)$ и уравнение регрессии признается адекватным. В противном случае оно не адекватно.

Если задача исследования состояла в отыскании математической модели объекта исследования и уравнение регрессии оказалось адекватным, то цель достигнута. Если уравнение не адекватно, то необходимо продолжить эксперимент, выполнить еще ряд опытов, позволяющих вместе с ранее выполненными опытами определить коэффициенты полного квадратного уравнения. Речь, следовательно, идет о реализации плана эксперимента второй степени. Планированию второй степени посвящен следующий раздел.

Оценка значимости коэффициентов регрессии

Как уже отмечалось ранее, коэффициенты b_i, вычисленные по результатам эксперимента, являются оценками теоретических значений β_i, которые неизвестны и никогда не могут быть определены абсолютно точно, так как результаты эксперимента всегда отягощены некоторыми ошибками. Поэтому для каждого коэффициента регрессии b_i следует построить доверительный интервал, в пределах которого с определенной доверительной вероятностью P (обычно принимают P=0,95) гарантируется нахождение теоретического значения коэффициента регрессии β_i , то есть имеет место соотношение

$$b_i - \Delta b_i \leq \beta_i \leq b_i + \Delta b_i . \tag{3.17}$$

Величина $2\Delta b_i$ – это и есть доверительный интервал, или своего рода поле допуска для b_i . Для определения интервала сначала вычисляют дисперсию коэффициентов регрессии по формуле

$$s^2(b_i) = \frac{1}{N} \cdot s^2(y). \tag{3.18}$$

Дисперсия коэффициентов регрессии характеризует ошибку, с которой оцениваются коэффициенты. Из формулы (3.18) видно, что точность оценки коэффициентов регрессии быстро растет с ростом числа опытов N в плане эксперимента и что все коэффициенты оцениваются с одинаковой дисперсией.

Далее вычисляется Δb_i по формуле

$$\Delta b_i = \pm t_{0,05} \cdot s(b_i), \tag{3.19}$$

где $t_{0,05}$ – значение t– критерия Стьюдента при 5% -ном уровне значимости (α = I–P). Смысл уровня значимости можно пояснить следующим образом. Если много раз выполнять один и тот же эксперимент и каждый раз вычислять коэффициенты регрессии b_i , то будут получаться разные значения, располагающиеся на некотором интервале на оси b_i . Если доверительный интервал назначен при уровне значимости 0,05, то 5% вычисленных значений b_i окажется за пределами интервала. Приняв уровень значимости 0,05, мы решили пренебречь этими пятью процентами значений b_i , выпадающими из интервала. 95% значений b_i окажется в пределах доверительного интервала. Это смысл доверительной вероятности P. В инженерных исследованиях рекомендуется принимать P = 0,95, α = 0,05. В более строгих, научных исследованиях принимают P = 0,99, α = 0,01. Чем больше доверительная вероятность (или чем меньше уровень значимости), тем шире получается доверительный интервал. Это и понятно: чем с большей вероятностью нужно гарантировать нахождение b_i на интервале, тем шире его приходится задавать.

Значение $t_{0,05}$ определяют по таблицам, имеющимся в книгах по математической статистике или планированию эксперимента, на основании принятого уровня значимости и известного числа степеней свободы, которое равно f_y – числу степеней свободы для $s^2(y)$.

Вычислив доверительный интервал, можно оценить значимость коэффициентов регрессии. Если доверительный интервал некоторого b_i накрывает нулевое значение b_i (рис.3.5), то этот коэффициент считается незначимо отличающимся от нуля. Делают вывод, что соответствующий фактор x_i не влияет на y. Член $b_i \cdot x_i$ можно исключить из уравнения регрессии. Однако этот вывод можно делать лишь в том случае, если фактор x_i варьировался в эксперименте в достаточно широких пределах, соответствующих фактически возможным пределам его изменения в исследуемом объекте.

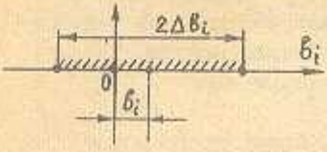

Рис.3.5. Расположение доверительного интервала на числовой оси при незначимом коэффициенте регрессии

4. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

План второго порядка служит для оценки коэффициентов нелинейной математической модели объекта исследования, заданной уравнением второй степени

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot x_i^2 + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j . \tag{4.1}$$

Такой вид модели приходится задавать в тех случаях, когда априори известно, что зависимость $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ нелинейна, или когда модель, полученная по результатам линейного эксперимента, оказалась неадекватной.

Здесь рассматриваются только композиционные планы второго порядка, хотя это не единственные типы квадратичных планов. Композиционные планы представляют собой композицию опытов линейного факторного эксперимента (полного или дробного), рассмотренного в предыдущей главе, и опытов в новых точках факторного пространства. Так как все точки располагаются симметрично относительно центральной точки эксперимента, эти планы называются центральными композиционными.

4.1. Построение центрального композиционного плана второго порядка

Будем пользоваться кодовым представлением входных факторов. Рассмотрим центральный композиционный план второй степени при двух переменных ($k=2$). Схема расположения экспериментальных точек в факторном пространстве показана на рис.4.1. Точки 1,2,3,4 соответствуют плану полного факторного эксперимента первой степени. Они образуют так называемое ядро планирования. Эти точки находятся на расстоянии ± 1 от осей координат. Здесь ± 1 – единица варьирования. Точки 5,6,7,8 – точки, лежащие на осях координат на расстоянии α от центра эксперимента. Число α называют плечом. Последняя, девятая точка находится в центре эксперимента.

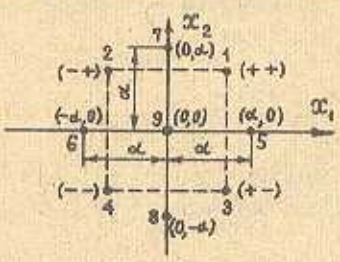

Рис.4.1. Схема расположения экспериментальных точек на факторной плоскости при центральном композиционном плане эксперимента

План эксперимента показан в табл.4.1. В этой таблице выписаны также столбцы x_1^2, x_2^2 и $x_1 \cdot x_2$, необходимые для обработки результатов эксперимента. Факторы x_1^2, x_2^2 и $x_1 \cdot x_2$ согласно принципу формальной линеаризации можно рассматривать как самостоятельные факторы и обозначить через x_3, x_4, x_5. Общее число факторов K' становится равным 5. Конечно, в эксперименте приходится иметь дело только с двумя факторами. Дополнительные три фактора введены формально на стадии обработки результатов эксперимента. При $k=3$ получится план, представленный в табл.4.2.

В общем случае при K независимых переменных число опытов в плане эксперимента $N=2^K+2k+1$. Здесь 2^K – число точек линейной части плана, $2k$ – число точек на осях координат, 1 – одна точка в центре эксперимента. При большом числе входных факторов в качестве линейной части плана (ядра) может использоваться дробная реплика типа 2^{K-p}. Тогда число опытов в плане второго порядка $N=2^{K-p}+2k+1$.

Таблица 4.I

План эксперименте для двух факторов

Номера опытов				x_3	x_4	x_5	
	x_0	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	$x_1 \cdot x_2$	y
I	+	+	+	+	+	+	
2	+	−	+	+	+	−	
3	+	+	−	+	+	−	
4	+	−	−	+	+	+	
5	+	α	0	α^2	0	0	
6	+	$-\alpha$	0	α^2	0	0	
7	+	0	α	0	α^2	0	
8	+	0	$-\alpha$	0	α^2	0	
9	+	0	0	0	0	0	

Таблица 4.2

План эксперимента для трех факторов

Номера опытов	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	y
I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
2	+	−	+	+	+	+	+	−	−	+	
3	+	+	−	+	+	+	+	−	+	−	
4	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	
5	+	+	+	−	+	+	+	+	−	−	
6	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	
7	+	+	−	−	+	+	+	−	−	+	
8	+	−	−	−	+	+	+	+	+	+	
9	+	α	0	0	α^2	0	0	0	0	0	
I0	+	$-\alpha$	0	0	α^2	0	0	0	0	0	
II	+	0	α	0	0	α^2	0	0	0	0	
I2	+	0	$-\alpha$	0	0	α^2	0	0	0	0	
I3	+	0	0	α	0	0	α^2	0	0	0	
I4	+	0	0	$-\alpha$	0	0	α^2	0	0	0	
I5	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

В приведенных выше планах не все векторы - столбцы ортогональны. Так, столбцы факторов вида x_i^2 не ортогональны столбцу x_0, так как

$$(0ii)=\sum_{u=1}^{N} x_{0u}\cdot x_{iu}^2 \neq 0. \qquad (4.2)$$

Также не ортогональны друг другу вектор - столбцы квадратичных факторов

$$(iijj)=\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2\cdot x_{ju}^2 \neq 0. \qquad (4.3)$$

Для ортогонализации вектор - столбцов x_i^2 с вектором x_0 элементы этих столбцов заменяют отклонениями их от среднего значения в столбце, т.е. вводят новые переменные вида

$$x_i' = x_i^2 - \overline{x}_i^2 \quad , \text{ где } \quad \overline{x}_i^2=\frac{1}{N}\cdot\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 . \qquad (4.4)$$

Для ортогонализации вектор - столбцов x_i' и x_j' соответствующим образом выбирают плечо точек α. Значения α вычислены методами матричной алгебры:

K:	2	3	4	5 ;
α:	I	I,2I5	I,4I4	I,547 ;
тип ядра плана:	2^2	2^3	2^4	2^{5-I}.

Таким образом, план для K=2 после преобразования (4.4) и с учётом того, что в табл. 4.I α=I, будет выглядеть следующим образом (табл.4.3).

Таблица 4.3

План эксперимента для двух факторов

Номера опытов	x_0	x_1	x_2	x_3 / x_1'	x_4 / x_2'	x_5 / $x_1 \cdot x_2$	y
I	+	+	+	0,333	0,333	+	
2	+	–	+	0,333	0,333	–	
3	+	+	–	0,333	0,333	–	
4	+	–	–	0,333	0,333	+	
5	+	+	0	0,333	–0,667	0	
6	+	–	0	0,333	–0,667	0	
7	+	0	+	–0,667	0,333	0	
8	+	0	–	–0,667	0,333	0	
9	+	0	0	–0,667	–0,667	0	

4.2. Вычисление коэффициентов регрессии и статистические оценки

Рассмотренный план (табл.4.3) ортогонален, матрица коэффициентов нормальных уравнений получается диагональной. Ее диагональные коэффициенты $(ii)=\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2$ (здесь предполагается сквозная нумерация всех факторов, т.е. i = 0,1,2,3,4,5). В силу ортогональности планирования все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга по формуле

$$b_i=\sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u \Big/ \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = (iy)/(ii). \tag{4.5}$$

Дисперсии коэффициентов регрессии определяются по формуле

$$s^2(b_i) = s^2(y) \Big/ \sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = s^2(y)/(ii). \tag{4.6}$$

Дисперсия адекватности определяется по формуле (3.14), где вместо К следует подставлять k' - новое число факторов при сквозной нумерации всех столбцов плана.

Оценка адекватности модели и значимости коэффициентов регрессии выполняется так, как описано в предыдущей главе.

Следует учитывать, что уравнение регрессии после преобразования квадратичных переменных записывается в виде

$$\hat{y} = b_0' + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii}(x_i^2 - \bar{x}_i^2). \tag{4.7}$$

После раскрытия скобок можно перейти к обычной форме записи (4.1), где

$$b_0 = b_0' - \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \bar{x}_i^2 .$$

4.3. Ротатабельное планирование второго порядка

Математические исследования ортогональных планов второго порядка, выполненные математиками, показали, что эти планы являются не оптимальными с информативной точки зрения. Оказалось, что количество информации о функции отклика, извлекаемое в эксперименте при использовании этих планов из разных областей факторного пространства, неодинаково. Это приводит к неодинаковой точности описания функции отклика в разных областях факторного пространства, что, конечно, не может удовлетворить исследователя. Большее количество информации извлекается из периферийной зоны пространства (рис.4.2,

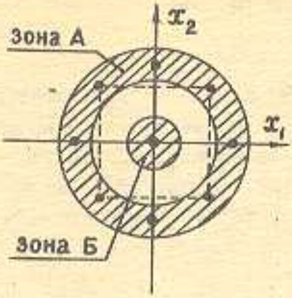

Рис.4.2. Зоны извлечения информации из факторного пространства

Таблица 4.4
Данные для построения планов второй степени

К	n_0	α	Тип ядра плана
2	5	1,414	2^2
3	6	1,682	2^3
4	7	2,0	2^4
5	10	2,378	2^5
5	6	2,0	2^{5-1}
6	15	2,828	2^6
6	9	2,378	2^{6-1}
7	21	3,333	2^7
7	14	2,828	2^{7-1}

зона А), меньшее - из центральной зоны (рис.4.2, зона Б). Если не пользоваться строгими количественными критериями для оценки информации, то объяснить упрощенно такую разницу в количестве извлекаемой из этих двух зон информации можно тем, что количество экспериментальных точек на периферии велико (и тем больше, чем больше число независимых переменных К), а в центре факторного пространства - только одна точка.

Кроме того, на равных расстояниях от центра эксперимента, но в разных направлениях также извлекается разное количество информации. Если изобразить информационные контуры вокруг центра (линии равной информации), то они не будут окружностями.

Оптимальными, с информационной точки зрения, являются получившие распространение так называемые ротатабельные планы второго порядка, отличающиеся от рассмотренных ортогональных тем, что в них нулевая (центральная) точка включена в план несколько раз для уравнивания количества информации, извлекаемой из центра и из периферии факторного пространства. Кроме того, в ротатабельных планах плечо осевых точек α имеет несколько другое значение, для того чтобы информационные контуры плана эксперимента стали круговыми. Количество нулевых точек n_0 и величина α зависят от числа независимых переменных К. Эти величины вычислены на основе математических методов. В общем случае плечо α можно вычислить по формуле $\alpha = 2^{к/4}$, если линейная часть плана представляет собой план типа $2^к$, или по формуле $\alpha = 2^{(к-р)/4}$, если линейная часть плана есть план типа $2^{к-р}$.

В качестве примера в табл.4.5 приведен ротатабельный композиционный план второй степени для двух переменных.

Таблица 4.5

Ротатабельный план для двух факторов

Номера опытов	x_0	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	$x_1 \cdot x_2$	y
I	+	+	+	+	+	+	
2	+	–	+	+	+	–	
3	+	+	–	+	+	–	
4	+	–	–	+	+	+	
5	+	I,4I4	0	2	0	0	
6	+	–I,4I4	0	2	0	0	
7	+	0	I,4I4	0	2	0	
8	+	0	–I,4I4	0	2	0	
9	+	0	0	0	0	0	
I0	+	0	0	0	0	0	
II	+	0	0	0	0	0	
I2	+	0	0	0	0	0	
I3	+	0	0	0	0	0	

В этом плане опыт в центре эксперимента повторен 5 раз. По данным, полученным в этой точке, вычисляют дисперсию ошибки опыта.

Если выполняется „машинный эксперимент", то расчет при значениях параметров, соответствующих нулевой точке, достаточно проделать один раз, но в план для вычисления коэффициентов регрессии эти данные должны быть включены n_0 раз.

4.4. Вычисление коэффициентов регрессии и статистические оценки при ротатабельном планировании

Ротатабельный план не полностью ортогонален, поэтому не все недиагональные коэффициенты матрицы коэффициентов нормальных уравнений равны нулю. Вычисление коэффициентов регрессии можно производить путем решения системы нормальных уравнений, как описано в разд.3. Можно пользоваться также формулами

$$b_0 = \frac{A}{N} \cdot \left[2 \cdot \lambda_4^2 \cdot (k+2) \cdot (0y) - 2 \cdot \lambda_4 \cdot c \cdot \sum_{i=1}^{k} (iiy)\right];$$

$$b_i = \frac{c}{N} \cdot (iy) \; ; \qquad b_{ij} = \frac{c^2}{N \cdot \lambda_4} \cdot (ijy) \; ;$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N} \Big[c^2 \cdot [(k+2) \cdot \lambda_4 - k] \cdot (iiy) + c^2 \cdot (1 - \lambda_4) \cdot \\ \cdot \sum_{i=1}^{k} (iiy) - 2 \cdot \lambda_4 \cdot c \cdot (0y) \Big] . \qquad (4.8)$$

Здесь

$$\lambda_4 = \frac{k \cdot N}{(k+2) \cdot (N - n_0)} , \quad c = \frac{N}{\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2} , \quad A = \frac{1}{2 \lambda_4 \cdot [(k+2) \lambda_4 - k]} . \qquad (4.9)$$

Дисперсии коэффициентов регрессии определяются по формулам

$$s^2(b_0) = \frac{2}{N} \cdot A \cdot \lambda_4^2 \cdot (k+2) \cdot s^2(y) ,$$

$$s^2(b_i) = \frac{c}{N} \cdot s^2(y) , \qquad s^2(b_{ij}) = c^2 \cdot s^2(y) / \lambda_4 \cdot N , \qquad (4.10)$$

$$s^2(b_{ii}) = \frac{A}{N} \cdot [(k+1) \cdot \lambda_4 - (k-1)] \cdot c^2 \cdot s^2(y) .$$

Оценка адекватности модели и значимости коэффициентов регрессии выполняется так же, как при ортогональном плане второго порядка. Здесь следует только иметь в виду, что не все коэффициенты регрессии имеют одинаковые дисперсии.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Налимов Б.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. - М.: Наука, 1965.

2. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.: Наука, 1971.

3. Стрельбицкий Э.К., Цирулик А.Я., Стукач В.С. Применение метода математической статистики для исследования коммутации. - Известия Томского политехнического института, т.160, 1966.

4. Гитман А.С., Стрельбицкий Э.К. Оптимизация электрических машин с помощью поверхностей отклика. - Известия ТПИ, т.160, 1966.

5. Стрельбицкий Э.К., Стукач В.С., Цирулик А.Я. Оценка искрения на коллекторе в машинах постоянного тока. - Известия ТПИ, т.190, 1968.

6. Стрельбицкий Э.К., Стукач В.С., Цирулик А.Я. Влияние технологических отклонений на искрение щеток в машинах постоянного тока. - Известия ТПИ, т.190, 1968.

7. Цирулик А.Я. Математические модели коммутации машин постоянного тока и надежности коммутации. - Диссертация кандидата технических наук. - Томск, 1967.

8. Ивоботенко Б.А., Ильинский Н.Ф., Копылов И.П. Планирование эксперимента в электромеханике. - М.: Энергия, 1975.

9. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука, 1976.

10. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука, 1976.

11. Горский В.Г., Адлер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов. - М.: Металлургия, 1974.

12. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. - М.: Мир, 1972.

13. Зедгинидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. - М.: Наука, 1976.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Св.план 1983 г., поз.2103

Анатолий Яковлевич Цирулик

Планирование эксперимента
в электромашиностроении

Редактор Н.В.Анашкина

Технический редактор Н.П.Лоренко

Корректор Е.С.Поздеева

Подписано в печать 18.04.83. ЕО01213 . Формат 60x90/16
Бумага обертка белая. Усл.п.л. 2,5 . Уч.-изд.л. 2,4 . Тираж 200.
Заказ № 2629 . Цена 10коп . Политехнический институт. Тольятти, Белорусская, 14.

Областная типография им.Мяги. г.Куйбышев, Венцека, 60.