

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»

(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование

(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование

(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Методика обучения теме «Правильные многогранники» в школьном
курсе геометрии»

Студент

И.Н. Шаламова

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент С.Ш. Палферова

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ	
«ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ	
МАТЕМАТИКИ	10
§1. Основные подходы к введению понятия правильного многогранника	10
§2. Цели и задачи обучения школьников теме	
«Правильные многогранники»	20
§3. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме	
«Правильные многогранники»	25
§4. Анализ содержания теоретического и задачного материала темы	
«Правильные многогранники» в учебниках разных авторов	30
§5. Методические особенности обучения теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы»	41
Выводы по первой главе	51
ГЛАВА II. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ	
РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРАВИЛЬНЫЕ	
МНОГОГРАННИКИ»	53
§6. Методические рекомендации по обучению теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы	53
§7. Система задач по теме «Правильные многогранники» для учащихся старших классов общеобразовательной школы	61
§8. Результаты педагогического эксперимента	69
Выводы по второй главе	75
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	76
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	78
Приложение А. Ответы и решения к задачам, представленным в §7.....	83

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

Правильные многогранники заслуженно называют «жемчужиной» геометрии – они способны увлечь любого ребенка своей безупречной структурой и «правильной» красотой. Сформировавшийся интерес в дальнейшем можно использовать для рассмотрения и закрепления материала о свойствах и закономерностях многогранников.

Учитывая высокие требования к специалистам, которые диктует уровень научного и промышленного развития современного общества, сложно назвать профессию или сферу деятельности, где отсутствует необходимость в пространственном воображении. Умение мысленно создавать сложные объемные образы и свободно преобразовывать и комбинировать их необходимо в каждой современной профессии. Причем есть профессии (инженер, дизайнер, стилист, архитектор и так далее), где работа с пространственными объектами является основой деятельности. В других профессиях (экономист, технолог, водитель, программист и так далее) пространственное мышление имеет характер вспомогательной деятельности, необходимой для выполнения основных функций.

В условиях стремительного продвижения вперед науки и техники, остановка в совершенствовании процесса обучения означает столь же стремительное отставание уровня знаний выпускников от необходимого минимума. Таким образом, стоит вопрос о *необходимости постоянного совершенствования методов и форм обучения школьников основам стереометрии*, в том числе разработке и внедрению усовершенствованных подходов к изучению темы «Правильные многогранники».

Необходимо отметить, что выработка у учащихся навыка мыслить объемными образами и оперировать представленными объектами, анализируя, дополняя и видоизменяя их, является задачей, которая решается на протяжении всего процесса обучения человека (на этапе школьного

образования, среднего специального и в процессе обучения в ВУЗе). Таким образом, преподаватели всех уровней и направлений, включая учителей начальных классов и учителей-предметников (географов, филологов, физиков и так далее) работают в рамках программы по своему курсу еще и над формированием пространственного воображения у учащихся. Очевидно наличие межпредметных связей между геометрией и другими школьными предметами. Однако следует учитывать, что в конечном итоге ответственность за сформированный уровень пространственного мышления у учащегося ложится на преподавателя математики.

Тема о правильных многогранниках, как и стереометрия в целом, играют первостепенную роль в формировании у старшеклассников представлений о пространственных формах окружающего мира и способностей увидеть реальные объекты в их геометрических образах. Можно констатировать, что изучение правильных многогранников весьма актуально как в качестве инструмента для развития пространственного мышления, так и в качестве предмета для глубокого изучения правильных геометрических тел, имеющих общие свойства и подчиненных общим закономерностям для старшего звена школы. Именно поэтому в науке и педагогической практике тема обучения старшеклассников решению задач по стереометрии и по теме «правильные многогранники» занимает важное место.

Проблеме решения задач по рассматриваемой теме посвящены работы М.Г. Мехтиева [21], М.Ю. Хевсоковой [39], Т.В. Ходеевой [40], И.Б. Ольбинского [25], З.В. Тороповой [36], А.Р. Черняева [44].

Несмотря на достаточно подробное изучение вопроса, потребность в дальнейшей разработке методологических подходов к обучению теме «правильные многогранники», как одной из самых важных в стереометрии сохраняет свою актуальность.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися **противоречиями** между потребностями практической работы учителей в оптимально организованном процессе обучения школьников теме «правильные многогранники» и недостаточной методической проработкой изучения темы правильных многогранников в школьном курсе геометрии старших классов в современных динамично меняющихся условиях.

Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования**: выявление методических особенностей обучения теме «Правильные многогранники в школьном курсе геометрии» учащихся старших классов общеобразовательной школы.

Объектом исследования по теме работы является процесс обучения школьному курсу геометрии.

Предмет исследования: методика обучения решению задач на правильные многогранники.

Цель исследования: разработка методических рекомендаций по обучению старшеклассников теме «Правильные многогранники».

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что использование при обучении школьников разработанных методических материалов по теме «Правильные многогранники», включающих систему задач по многогранникам повысит уровень знаний учащихся по теме.

Исходя из определенной проблемы, объекта и предмета исследования для достижения поставленных целей необходимо пошагово решить следующие **задачи**:

1. Раскрыть методику введения понятия правильного многогранника.
2. Рассмотреть методические особенности обучения старшеклассников теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы.

3. Сформулировать методические рекомендации по обучению теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы.

4. Разработать систему задач для учащихся 10-11 классов общеобразовательной школы по рассматриваемой теме.

5. Провести педагогический эксперимент.

Теоретическо-методологическую основу исследования составляют:

- концептуальные положения методики преподавания математики в школе в целом и методики обучения теме «правильные многогранники» в частности в условиях профильной и уровневой дифференциации обучения математике (А.Д. Александров [2; 3], Л.С. Атанасян [5], И.М. Смирнова [31; 32] и др.)

- нормативные документы федерального уровня: Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 30.12.2015 г.) «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями, вступающими в силу с 01 июля 2016 г.) [38]; Стандарт основного общего образования по математике. Федеральный компонент государственных образовательных стандартов общего образования, утвержденный приказом Министерства образования Российской Федерации от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования» [33, 34]; примерная основная образовательная программа основного общего образования, одобрена Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию, протокол заседания от 8 апреля 2015 г., № 1/15; Приказ Минобрнауки РФ от 31 марта 2014 г. № 253 «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» с изменениями в соответствии с приказом Минобрнауки

России от 26 января 2016 года № 38 «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 31 марта 2014 г. № 253».

Базовыми для настоящего исследования явились также работы по методике обучения математике Л.Н. Бескина [6], А.Н. Киселева [17], В.Н. Литвиненко [19], Л.А. Люстерник [20].

В работе были использованы такие **методы исследования**, как *анализ* учебно-методической и научной литературы, результатов выполненных учащимися контрольных работ, *наблюдение* за работой учащихся в процессе изучения нового материала по рассматриваемой теме и самостоятельного выполнения заданий, *обобщение* результатов анализа и информации, полученной в ходе наблюдений.

Основными этапами в процесс исследования стали:

1 этап (2017/18 уч.г.): анализ нормативной базы, научно-практических работ, учебно-методической литературы, интернет-источников по теме исследования;

2 этап (2017/18 уч.г.): анализ комплекса задач, используемых при обучении теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии, изучение и обобщение типовых ошибок учащихся и основные затруднения при решении задач по теме правильных многогранников;

3 этап (2018/19 уч.г.): выделение методических особенностей обучения теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии;

4 этап (2018/19 уч.г.): формирование методических рекомендаций по обучению теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии для учащихся 11 класса и составление системы задач по рассматриваемой теме, описание педагогического эксперимента, оформление магистерской

диссертации с изложением сформулированных по результатам проведенного исследования выводов;

5 этап (2019/20 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования - 10-11 классы Чикчинской СОШ им. Х.Х. Якина.

Научная новизна исследования заключается в разработке системы задач по теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии.

Теоретическая значимость диссертации состоит в систематизации теоретического материала по рассматриваемой теме.

Практическая значимость работы заключается в разработке методических рекомендаций по обучению теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии для учащихся 10-11 класса, составлении системы задач по рассматриваемой теме.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии для учащихся 10-11 класса;
2. Система задач по теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии для учащихся 10-11 класса, включающая задачи на работу с кубом.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечена практическими исследованиями опыта обучения рассматриваемой теме в общеобразовательной школе, а также набором использованных методов (практика, основанная на теории).

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в систематизации теоретического материала по рассматриваемой теме, проведении педагогического эксперимента и разработке системы задач по теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на районной педагогической конференции Тюменского района и отражены в статье «Система задач для повышения уровня знаний учащихся старших классов общеобразовательной школы по теме «Правильные многогранники», опубликованной в журнале «Вестник магистратуры» [45].

Экспериментальная проверка изложенных в работе методических рекомендаций и разработанной системы задач проведена в ходе работы по индивидуальному обучению учащихся 10-11 классов Чикчинской СОШ им. Х.Х. Якина, а так же в ходе прохождения практики на базе кафедры высшей математики и математического образования ТГУ.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 37 рисунков, 13 таблиц, 1 приложение, список используемой литературы (81 источник). Основной текст работы изложен на 82 страницах.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§1. Основные подходы к введению понятия правильного многогранника

Теме «Правильные многогранники» по праву принадлежит звание одной из самых захватывающих в материале, изучаемом в рамках школьной программы геометрии. Успешное освоение материала по рассматриваемой теме является базой для дальнейшего изучения стереометрии. В свою очередь для успешного свободного вхождения в тему «Правильные многогранники» так же необходима некоторая база. Такой основой является материал о простейших пространственных понятиях, таких как: система координат и ее свойства, перемещение в заданном направлении на плоскости и в пространстве (векторы), свойства взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве служит базой для более глубокого изучения поверхностей многогранников - тел, образованных комбинациями поверхностей. Таким образом, изучение многогранников является предметом самых разносторонних исследований, включающих в себя различные типы задач, рассмотрение теорем и разнообразных завораживающих свойств многогранников, в том числе относящихся к «Платоновым телам». В качестве наиболее примечательных блоков материала по теме правильных многогранников можно выделить теорему Эйлера, свойства симметрии и двойственности правильных многогранников и другие.

Многогранники, в том числе и правильные, сочетают в себе понятия пространства, плоскости и прямых, а также свойства их взаимного расположения по праву занимают особое почетное место в курсе школьной геометрии. Правильные многогранники, обладающие особой привлекательностью симметричных тел, наиболее полно сочетают в себе

возможности для применения пространственного мышления в сочетании с четкой структурой объемного тела. Работа с правильными многогранниками не только интересна, но и весьма полезна для развития у учащихся пространственного воображения, умения производить мысленные построения тел и их комбинаций, выстраивать сечения. Выполнение таких простейших построений как: сечение куба в форме треугольника или квадрата; точки пересечения диагоналей требуют определенного уровня пространственного воображения и именно на примере изучения простых многогранников проще всего развивать навыки прикладного пространственного мышления [29, с. 44]. В процессе изучения простых многогранников рассматриваются и закрепляются такие базовые понятия стереометрии, как взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве, рассматривается практическое применение признаков их перпендикулярности и параллельности. Следует отметить, что рассмотрение первых теорем стереометрии на физических макетах правильных многогранников в большой степени способствует развитию и поддержанию интереса учащихся к изучаемому материалу [35].

Начиная уже с 7 века до нашей эры, в Древней Греции организуются философские школы, где создаются условия для изучения философской (теоретической) геометрии на основе полученных к тому моменту практических знаний. При этом ключевое внимание уделяется изучению и получению новых геометрических свойств. Одной из самых известных таких школ стала школа Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, правильный звездчатый или невыпуклый пятиугольник. При этом существование пяти правильных многогранников относили к строению Вселенной и материи. Это уже позже Платон стал утверждать, что материя имеет в своем составе четыре базовых элемента: огонь, земля, воздух и вода [41].

Дальнейшее развитие математики связано с именами Архимеда,

Евклида, Кеплера, которые использовали правильные многогранники в своих философских теориях и концепциях. Так, правильные однородные выпуклые многогранники, в которых все грани и углы равны, называются Платоновыми и являются трехмерным аналогом плоских правильных многоугольников [41].

В настоящее время к правильным многогранникам относятся: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, гексаэдр с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями – «Платоновы тела». Также существует семейство родственных Платоновым тел – тела, названные в честь другого великого ученого – «Архимедовы». Архимедовы тела – это полуправильные выпуклые многогранники, их отличительными свойствами является равенство многогранных углов при соблюдении условия о том, что грани представлены правильными многоугольниками, но не равных между собой (различных форм).

Само определение многогранника является понятием, при раскрытии которого очень важно соблюсти баланс сочетания практических примеров с рассмотрением физических моделей, точные логические цепочки доказательств с четкими формулировками и наглядные пространственные представления. В процессе раскрытия понятия многогранника для формирования у учащихся четких представлений о практической и теоретической сторонах понятия, а также взаимосвязи между ними на базе наглядных примеров формулируются понятия и их свойства, а затем применение теоретических выкладок рассматривается на тех же моделях с которых начиналось введение понятия.

В современной литературе преобладает два основных метода раскрытия понятия многогранника в курсе стереометрии школьной программы:

1. Многогранник изучается в качестве поверхности;
2. Многогранник рассматривается в качестве тела.

Так, Л.С. Атанасян и А.В. Погорелов дают схожие определения многогранника - как поверхности, ограничивающей тело и состоящей из многоугольников, и как тела, поверхность которого состоит из плоских многоугольников, то есть в понятиях присутствует указание и на тело и на поверхность.

Следует отметить, что в качестве тела многогранник рассматривается чаще.

Понятие многогранника является сложным и включает в себя такие более простые понятия (элементы): прямая, отрезок, плоскость, ограниченность, поверхность, площадь, угол, объем, внутренние и внешние точки и так далее. В связи с большим количеством элементов, с которыми сопряжено изучение многогранников, раскрывать понятие многогранника в рамках школьной программы необходимо не четким сухим определением, а языком, доступным для понимания учащихся. Понятие многогранника, опирающееся на практический опыт учащихся и имеющуюся у них базу пространственных понятий, будет усвоено гораздо лучше, чем теоретическое определение, которое прозвучит для подавляющей массы учащихся как бессмысленный набор слов. Для лучшего понимания учащимися оптимально обозначить многогранник как тело (или часть пространства) определенных размеров, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, а ребра образованы сторонами этих многоугольников [8, с. 66]. Перед использованием понятия многоугольника в качестве ключа к понятию многогранника лучше убедиться, что учащиеся имеют четкое представление о том, что такое многоугольник (многоугольник - это область поверхности, граница которой замкнута определенным числом отрезков). Отмечаем, что рассматриваемая область поверхности в силу своей ограниченности имеет определенный (конечный) размер.

Определение следует сразу же подкрепить практическими примерами, соответствующими заданному условию, например: кубик рубика, закрытая

коробка, огрaненный камень и так далее; не соответствующими заданным условиям: круглый карандаш, земной шар; примеры, которые можно рассмотреть с различных точек зрения, например открытая коробка.

Исходя из наглядного представления, понятие многогранника можно сформулировать так: многогранник – это конечная часть пространства, или, говоря математическим языком, часть пространства, которая ограничена замкнутой поверхностью. При обсуждении такого подхода к понятию многогранника необходимо четко обозначить, что многоугольники составляющие поверхность многогранника ограничивают только часть пространства, составляющую внутренний объем многогранника и при этом не ограничивают остальную часть пространства, так как пространство бесконечно. Кроме того, нужно разобрать (лучше на наглядной модели) что такое поверхность многогранника и из каких элементов она состоит (границы – многоугольники, ребра – линии соединения сторон многоугольников) и что такое внутренний объем многогранника (часть пространства, расположенная внутри многогранника и ограниченная поверхностью многогранника). Таким способом мы обозначим элементы многогранника и наглядно продемонстрируем, что поверхность многогранника всей площадью соприкасается с его внутренним объемом. Можно провести аналогию между поверхностью многогранника и воздушным шаром – она отделяет внутренний объем многогранника от внешнего по отношению к многограннику пространства, так же как и оболочка шара отделяет запертый в нем газ от внешней атмосферы.

Многогранник, в том числе его поверхность и внутренняя часть, состоят из единой части пространства. Следовательно, не выходя за пределы многогранника, можно провести непрерывный прямой отрезок или ломаную линию от одной точки многогранника (его поверхности или внутренности) до любой другой его точки.

Таким образом, постепенно в теоретическую плоскость переводится

наглядное представление о физической модели многогранника. Поэтапно на конкретных примерах разбираются свойства и взаимосвязь элементов многогранника, поименованных в его определении. На основе изучения нескольких конкретных примеров производится обобщение свойств элементов многогранника и их взаимосвязи. Таким образом, проделав путь от частного к общему на основе уже обобщенных свойств и разобранных примеров прорабатывается цепочка от общего к частному и разбираются конкретные примеры с целью определить – относится рассматриваемый объект к категории многогранников (правильных многогранников) или нет с обоснованием принятого решения.

Часто, говоря о многограннике, речь идет либо о теле (внутреннем объеме пространства многогранника), ограниченном сомкнутыми гранями-многоугольниками, либо о поверхности многогранника, состоящей из сомкнутых многоугольников, например, когда речь идет «о развертке куба», то предметом обсуждения является не тело, а поверхность. Такое смешение различных, но близких по смыслу понятий довольно распространено в геометрии.

Вышеописанные определения многогранника называют описательными или дескриптивными. Описательное определение многогранника дает описание многогранника, которое применительно к конкретному примеру позволяет определить - является ли объект исследования многогранником [10, с. 58].

Существует еще один подход к определению понятия «Многогранник». Этот подход основан не на описании свойств рассматриваемого геометрического объекта, а на особенностях его конструкции. Фигура относится к многогранникам в том случае, если она может быть сконструирована из многогранников, плотно примыкающих друг к другу. Такой подход является основой еще одного интересного свойства многогранников – любой многогранник (даже самый сложный) может быть

разложен на составляющие его многогранники. Учитывая тот факт, что тетраэдр является простейшим многогранником, то из тетраэдров можно сконструировать любой многогранник. Однако здесь важно учитывать одно важное условие применительно к каждой паре тетраэдров, составляющих рассматриваемую фигуру: они или вообще соприкасаются, или соприкасаются в одной точке (общей вершине), или соприкасаются вдоль одного ребра, или имеют одну общую грань. И обязательно от каждого одного входящего в конструкцию тетраэдра к любому другому можно проследовать, переходя по входящим в конструкцию тетраэдрам, имеющим общие грани. Лучше всего провести такое конструирование на физических моделях.

Вышеописанное определение многогранника называется конструктивным и его суть заключается в том, что любой многогранник может быть сконструирован путем последовательного плотного смыкания нескольких тетраэдров.

Рассмотренные варианты определения понятия многогранника наглядно демонстрируют, что, показывая, что в зависимости от уровня подготовки целевой аудитории и задач исследования могут использоваться различные определения понятия многогранника: конструктивное, дескриптивное и строгое математическое. С другой точки зрения многогранник может быть представлен как тело либо поверхность, а также как пространственный объект, состоящий из тела и ограничивающей его поверхности. Таким образом, с учетом многообразия подходов к определению многогранника для расширения кругозора учащихся и разностороннего рассмотрения изучаемого объекта оптимально при планировании изучения темы предусмотреть обзор различных способов определения понятия с подробным рассмотрением нескольких из них.

Понятие выпуклого многогранника в школьной программе обычно основывается на уже закреплённом общем определении многогранника, в

связи с чем усваивается учащимися проще.

Наиболее распространены два подхода к определению выпуклого многогранника. Многогранник относится к категории выпуклых в том случае, когда:

- выполняется условие, что две любые точки многогранника могут быть соединены прямым отрезком, не выходящим за пределы многогранника;
- он полностью находится по одну сторону от каждой из ограничивающих его плоскостей (к которым принадлежат его грани).

Обычно в школьном курсе геометрии выпуклые фигуры вводятся через понятие связных фигур. Связной фигурой называется такое геометрическое тело, в котором любые две точки можно соединить линией (прямой или ломаной), полностью принадлежащей этому телу. На основе материала изученного при рассмотрении плоских фигур, построено рассмотрение трехмерных геометрических объектов – выпуклых тел, к которым относятся тетраэдр, призма, параллелепипед и так далее.

Выпуклые многогранники представляют собой простейшие выпуклые тела. Выпуклое тело - это конечный объем пространства, замкнутый в результате пересечения (наложения) определенного количества полупространств между собой. Существует огромное множество выпуклых тел (фигур). Школьный курс геометрии направлен в основном на исследование пространственных объектов, относящихся к выпуклым телам или являющихся их комбинацией [16, с. 159].

В рамках изучения выпуклых многогранников в первую очередь обычно рассматриваются пирамиды и призмы и их разновидности. В большинстве учебных программ пирамиды и призмы описываются идентично, однако подходы к определению правильных многогранников используются различные.

Один из вариантов определений относит к категории правильных такие

выпуклые многогранники, все грани которых являются правильными многоугольниками, одинаковыми по форме и равными по размеру, при этом в каждой вершине многогранника сходится одинаковое количество ребер.

В пособии А.Д. Александрова «Геометрия для 10-11 классов: пособие для школ и классов с углубленным изучением математики» [3, с. 22] к приведенному определению добавлено уточнение о том, что все двугранные углы правильного многогранника равны, и он относится к категории выпуклых, то есть каждые две его точки могут быть соединены отрезком, который полностью находится в пределах многогранника.

В учебных материалах школьной программы по геометрии, составленных различными авторами представлены немного отличающиеся формулировки определения правильного многогранника - «Выпуклый многогранник относится к категории правильных, при условии, что:

- каждая его грань является правильным конгруэнтным многоугольником, и одновременно все его многогранные углы составлены равным числом граней;
- все грани являются правильными многоугольниками и все многогранные углы равны;
- все его грани – равные между собой правильные многоугольники, и все двугранные углы многогранника равны.

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что понятие правильного многогранника определяется исходя из понятия выпуклости и обязательного к соблюдению набора свойств многогранника:

- равное число ребер сходится в каждой из вершин;
- все грани - правильные равные многоугольники;
- все углы (многогранные и двугранные) соответственно равны между собой;
- все плоские углы и ребра многогранника соответственно равны между собой.

Таким образом, понятие правильного многогранника может быть основано на его свойствах. Подход к выбору определения в каждом конкретном случае необходимо проверять на соответствие ряду требований:

- представляемое учащимся определение понятия правильного многогранника основано на сформированных у учащихся знаниях о понятии правильной фигуры;

- определение является полным - охватывает весь перечень свойств, определяющих рассматриваемое понятие, таким образом, каждое свойство конкретной фигуры, относящейся к правильным многогранникам, может быть взято из свойств, поименованных в определении;

- определение правильного многогранника в качестве трехмерного объекта в пространстве, по сути, построено на аналогии с определением правильного многоугольника на плоскости;

- определение является кратким и в нем не упоминаются второстепенные свойства правильного многогранника, которые являются следствием основных свойств;

- определение дает возможность сделать возможные обобщения, которые могут быть применены к полуправильным и топологически правильным многогранникам [15, с. 90].

Таким образом, определение правильного многогранника на различных этапах изучения может быть дано различным (более или менее глубоким) и расширяться по мере рассмотрения его свойств. Следует отметить, что не существует универсального определения правильного многогранника. В зависимости от целей обучения следует выбирать и соответствующий подход к определению изучаемого понятия [29, с. 73].

§2. Цели и задачи обучения школьников теме «Правильные многогранники»

Помимо общих целей, на достижение которых направлено изучение общеобразовательного курса геометрии, к которым относятся: умение решать учебные задачи, теоретические задачи, излагать и доказывать теоремы, формулировать понятия и их определения изучение темы «Правильные многогранники» способствует достижению ряда прямых конкретных дидактических целей:

- наработка у учащихся навыков пространственного мышления;
- знакомство обучающихся с основными видами правильных многогранников и элементами их симметрии;
- наглядное рассмотрение и изучение свойств прямых и плоскостей в пространстве в том числе в зависимости от их взаимного расположения;
- усиление заинтересованности учащихся в исследовании изучаемого материала через работу с физическими моделями многогранников, в том числе рассмотрение на конкретных осязаемых примерах теорем стереометрии.

Изучение теоретического материала по рассматриваемой теме помимо прямых целей по формированию учебных знаний и навыков, способствует достижению косвенных, но не менее важных для развития личности и кругозора учащихся целей: рассмотрение исторической преемственности поколений, развития культуры человечества, воспитывает бережное отношение к историческому и культурному наследию народов мира, является этапом для формирования у учащихся целостной картины мира.

Таким образом, изучение темы «Правильные многогранники» позволяет углубить геометрические знания учащихся в том числе: усилить интерес обучающихся интерес к изучению геометрии, способствует

осознанию многогранного прикладного значения геометрии в различных научных сферах современного мира и повседневной жизни.

Для достижения перечисленных выше целей при обучении школьников теме «Правильные многогранники» решаются три основных группы задач:

1. Образовательные: изучение видов правильных многогранников и элементов их симметрии, рассмотрение формулы Эйлера и пространственной теоремы Пифагора для правильных многогранников. Закрепление полученных знаний в процессе решения практических задач и выполнения творческих заданий.

2. Развивающие: развитие алгоритмической культуры, пространственного воображения, умения мыслить творчески и интуитивно находить пути решения поставленных задач. Перечисленные способности важно развить до такой степени, чтоб учащийся в дальнейшем мог свободно ими пользоваться в том числе для деятельности с использованием геометрии и ее приложений при продолжении обучения после окончания школы, а так же в процессе трудовой деятельности.

3. Воспитательные: формирование культуры личности посредством обзорного ознакомления с историей математики, зарождением и развитием математических идей, раскрытия математической основы в процессах развития современной науки и техники.

Одним из основных инструментов, способствующих достижению вышеперечисленных целей и решению обозначенных задач, является применение наглядных пособий, в том числе выполнение заданий по изготовлению моделей правильных многогранников. Задания на изготовление моделей своими руками весьма полезны для учащихся. Это и отработка навыков выполнения чертежа развертки, и практическое применение теоретического материала о свойствах многогранника при построении чертежа. В процессе построения модели многогранник приобретает узнаваемые черты постепенно. Следует отметить, что свойства

конкретного вида многогранника при изготовлении модели изучаются практически, а следовательно, формируется глубокое понимание учеником предмета изучения. Это практическое знакомство позволяет при дальнейшем рассмотрении темы идти «от практики к теории». Именно такая последовательность освоения новой темы вызывает более живой интерес у учеников, чем теоретическое изучение материала, без возможности «потрогать руками» изучаемый объект.

В процессе изучения темы применяются практические задания с использованием иллюстративного, исследовательского, проблемного и проектного методов, а также разноуровневые задания, что позволяет индивидуализировать обучение и развивать у обучающихся пространственные представления и абстрактное мышление.

Таким образом, при изучении темы правильные многогранники на основе целей формулируются задачи, для выполнения которых используются специальные инструменты (Рис.1).

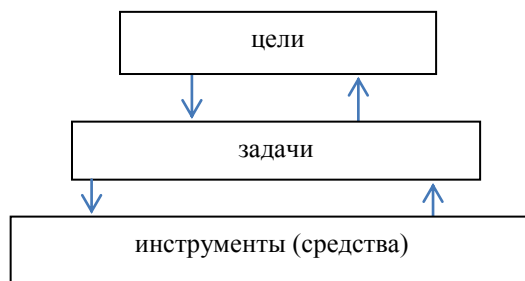


Рис. 1.

В начале изучения темы «правильные многогранники» учитель определяет для себя цели и формулирует задачи. Цели при изучении рассматриваемой темы и классификация степени их достижения по уровням приведены в Таблице 1.

Цели изучения темы «Правильные многогранники»

1. Цель по практическому усвоению изучаемого материала и развитию умственных способностей в процессе рассмотрения новых понятий, доказательства теорем и освоения способов решения новых типов задач.			
Уровень	Работа с понятиями	Работа с теоремами	Работа с задачами
Базовый	Основываясь на перечне объектов с использованием учебных материалов учащийся составляет план определения понятия правильного многогранника в целом.	Основываясь на шаблоне текста с использованием учебных материалов учащийся оформляет схематическую запись теоремы.	С помощью учебных материалов учащийся решает типовые задачи базового уровня сложности и определяет тип задачи.
Средний	Основываясь на перечне объектов с использованием учебных материалов учащийся составляет планы определений понятий правильных многогранников по типам.	Учащийся находит доказательство теоремы с использованием учебных материалов и умеет оформлять его схему, выделяет базис доказательства.	С помощью учебных материалов учащийся обобщает способы решения задач одного типа и уровня сложности и решает их.
Продвинутый	Основываясь на перечне объектов учащийся составляет планы определений понятий правильных многогранников по типам без использования учебных материалов.	Учащийся находит доказательство теоремы без использования учебных материалов.	Учащийся решает различные типы задач без использования учебных материалов.
2. Цель по усвоению теоретических знаний о геометрических понятиях, доказательству теорем, решению различных задач.			
Уровень	Работа с понятиями	Работа с теоремами	Работа с задачами
Базовый	Учащийся формулирует план определения понятий правильных многогранников, а также сами определения. Приводит примеры правильных многогранников с обозначением их признаков. Заполняет пробелы в шаблоне определения.	Учащийся доказывает теоремы приведенных правильных многогранников. Заполняет пробелы в шаблоне доказательства.	Учащийся решает задачи базового уровня с использованием учебных материалов.

Продолжение Таблицы 1

Уровень	Работа с понятиями	Работа с теоремами	Работа с задачами
Средний	Учащийся формулирует определение правильного многогранника, свободно приводит примеры к нему, представляет и может изобразить схему взаимосвязи между различными видами правильных многогранников.	Учащийся доказывает решение на конкретном примере. Выделяет базис доказательства и оформляет схему доказательства.	Учащийся решает задачи среднего уровня сложности с использованием учебных материалов.
Продвинутый	Учащийся формулирует определение правильного многогранника, определяет различие свойств и признаков, обозначает область применения сформулированного понятия.	Учащийся способен выделить основу доказательства, обозначить область практического применения конкретных теорем.	Учащийся решает задачи повышенного уровня сложности без использования учебных материалов.
3. Цель по умению работать в группе - организация взаимовыручки и взаимопроверки.			
Базовый	Учащийся оказывает помощь другим учащимся в группе, находящимся на одном уровне знаний с ним, участвует во взаимопроверке по конкретным задачам и доказательствам теорем.		
Средний	Учащийся оказывает помощь другим учащимся в группе, находящимся на одном уровне знаний с ним, или осваивающим уже пройденные им этапы. Готовит сообщение по изучаемой теме и защищает его совместно с другими (другим) учащимися (учащимся).		
Продвинутый	Учащийся оказывает помощь другим учащимся в группе, находящимся на одном уровне знаний с ним, или осваивающим уже пройденные им этапы. Опираясь на имеющиеся знания, готовит сообщение по глубокой проработке отдельных вопросов из изучаемой темы и защищает его совместно с другими (другим) учащимися (учащимся).		
4. Цель по умению планировать свою деятельность.			
Базовый	Учащийся осознает цели изучения конкретного материала. Выполняет весь объем заданий, предлагаемых учителем.		
Средний	Учащийся осознает и формулирует цели изучения конкретного материала. Выполняет весь объем заданий, предлагаемых учителем, и дополнительно выполняет задания, найденные им самостоятельно. Осуществляет проверку выполнения заданий. Опираясь на имеющиеся знания, готовит сообщение по изучаемой теме и защищает его.		

4. Цель по умению планировать свою деятельность.	
Продвинутый	Исходя из имеющихся целей, учащийся выполняет объем заданий, необходимый для полноценного усвоения материала, проверяя правильность и полноту выполнения заданий. Опираясь на имеющиеся знания, готовит сообщение по глубокой проработке отдельных вопросов из изучаемой темы и защищает его. Объективно оценивает свою деятельность и ее результаты. Корректирует свою деятельность на основе анализа достигнутых результатов.

Таким образом, на основе сформированной связки целей, задач и инструментов выстраивается оптимальное взаимодействие преподавателя и учащихся. Такая схема позволяет через решение каждого уровня задач двигаться к поставленной цели. В процессе обучения, по мере приближения к поставленным ранее целям, становится возможным установление новых целевых ориентиров. Отслеживание поэтапного достижения учащимися поставленных целей делает процесс обучения прозрачным и повышает его эффективность. Следует отметить, что зафиксированный результат в виде достижения конкретной цели на определенном уровне должен быть понятен всем заинтересованным в процессе обучения лицам. К таковым относятся как внутренние пользователи – непосредственные участники процесса: учащийся и преподаватель, так и внешние пользователи – административный персонал учебного заведения и вышестоящие организации, а также родители учащихся.

§3. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Правильные многогранники»

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки от 17 мая 2012 г. № 413) [37] – далее - ФГОС, обучение математике в основной школе имеет своей целью

структуризацию мыслительных процессов учащихся, выработку у них умения мыслить, изобретать способы решения поставленных задач. Геометрия в этом процессе является важным звеном, которое отвечает за наработку таких важных навыков, как умение выстраивать доказательную цепочку и обосновывать правомерность своих рассуждений и выводов. Кроме того, в своем составе ФГОС содержит перечень требований как к предметным, так и метапредметным результатам освоения учащимися школьного курса геометрии, так же в стандарте закреплены требования к системе оценивания. Система оценивания, разработанная на основе ФГОС, позволяет по мере прохождения промежуточных контрольных точек отслеживать результаты пройденных этапов обучения и с учетом достигнутых результатов планировать следующие этапы учебного процесса. Такая схема позволяет оптимальным образом достигать поставленных целей и наилучших результатов обучения.

Установлены требования к результатам обучения в условиях критериального оценивания:

- конкретизированы цели образовательного процесса на различных уровнях обучения математике в школе;
- представлены схемы разработки предметных и метапредметных результатов обучения геометрии на этапах планирования и реализации учебного процесса.

В качестве показателя достигнутого в изучении материала по теме уровня определена способность производить определенный перечень учебных, а также познавательных действий относительно материала по изучаемой теме. На основании оценки уровня владения учащимися познавательными и учебными действиями по определенной теме делается вывод о достижении запланированных результатов и поставленных целей по изучаемой (изученной) теме.

На примере учебника по геометрии авторов Александрова А.Д., Вернера А.Л., Рыжика В.И. [2] рассмотрим основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Правильные многогранники». Программа изучения темы (изучается в 11 классе) рассмотрена в Таблице 2.

Таблица 2

Требования к уровню подготовки учащихся в рамках курса геометрии
за 11 класс по теме «Правильные многогранники»

Тема	Требования к уровню подготовки
Многогранник и его элементы	Знания: - определение многогранника и его элементов: вершины, ребра, грани; - поверхность многогранника. Развертка; - многогранные углы. Умения: - распознавать на моделях и чертежах выпуклые и невыпуклые, правильные и полуправильные многогранники, многогранные углы; - изображать многогранники в параллельной проекции; - демонстрировать на моделях и чертежах элементы многогранников; - объяснить, какие многогранники называют правильными, а какие – полуправильными, провести геометрическое обоснование их существования; - объяснить, какие углы называют многогранными; - решать задачи на построение сечений многогранников; - при наличии компьютерных программ - уметь с использованием специального ПО изображать многогранники и иллюстрировать их свойства [27].
Призмы	Знания: - определение куба и параллелепипеда. - свойства граней и диагоналей параллелепипеда; - свойство диагоналей прямоугольного параллелепипеда; - симметрии параллелепипедов; - призма и ее элементы: основания, боковые ребра, высота, диагональ, боковая поверхность; - прямая и наклонная призмы; - правильная призма; - изображение призмы; - виды сечений куба, параллелепипеда и призмы [27]. Умения: - распознавать на моделях и чертежах изображение куба, параллелепипедов, призм; - демонстрировать на моделях и чертежах элементы призмы; - объяснить, какие призмы называют прямыми и наклонными, а какие – правильными [27].

Тема	Требования к уровню подготовки
Пирамиды	Знания: - определение пирамиды, ее вершина, основание, боковые ребра, высота, апофема, боковая поверхность; - правильная пирамида, ось правильной пирамиды; - усеченная пирамида; - изображения пирамиды, сечения пирамиды. Умения: - распознавать на моделях и чертежах изображение пирамиды; - демонстрировать на моделях и чертежах элементы пирамиды; - объяснить, какие пирамиды называют прямыми и наклонными, правильными, какие - тетраэдрами; - объяснить, что такое ось правильной пирамиды; - объяснить, какие пирамиды называют усеченными; - решать задачи на доказательство и вычисление элементов пирамиды, вычисление боковой и полной поверхностей пирамиды, на построение сечений и изображений пирамиды, тетраэдра.
Выпуклые многогранники	Знания: - определение выпуклого многогранника; - характерные свойства правильного многогранника; - формулировка теорем: о свойствах прямой призмы, граней и диагоналей параллелепипеда, диагоналей прямоугольного параллелепипеда, о боковой поверхности прямой и наклонной призм, их доказательства; - развертка выпуклого многогранника. Умения: - формулировать и доказывать теоремы: о свойствах прямой призмы, граней и диагоналей параллелепипеда, диагоналей прямоугольного параллелепипеда, о боковой поверхности прямой и наклонной призм; - выполнять развертку выпуклого многогранника; - изготавливать модель выпуклого многогранника; - решать задачи на доказательство и вычисления с применением свойств призмы и ее частных случаев, на построение сечений куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды, тетраэдра [27].
Теорема Эйлера	Знания: формулировка теоремы Эйлера, ее доказательства и выводов. Умения: доказательство теоремы Эйлера на примере простых многогранников.
Правильные и полуправильные многогранники	Знания: - определение правильного многогранника; - виды правильных многогранников (тела Платона: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр); - виды полуправильных многогранников (тела Архимеда);

Тема	Требования к уровню подготовки
	- понятие двойственности правильных многогранников; - понятие симметрии правильных многогранников; - правильные многогранные углы; - полуправильные многогранники, правильные звездчатые многогранники - сечения многогранников. Умения: - объяснить, как из теоремы Эйлера вытекает невозможность существования иных правильных многогранников, кроме тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра; - решать задачи на построение правильных многогранников, на построение сечений правильных многогранников, вычисления элементов правильных многогранников, двойственных многогранников [27].

На основании изложенного в таблице перечня знаний и умений видно, что к моменту завершения изучения темы правильные многогранники учащиеся должны иметь представление обо всех основных видах многогранников и их свойствах, уметь выполнять построение изображений многогранников и их сечений, выполнять развертки и изготавливать модели многогранников. Знать основные теоремы по теме «многогранники», уметь их доказывать и использовать при решении задач. Уметь решать задачи на вычисление неизвестных элементов на основе известных величин, вычислять параметры двойственных многогранников.

Для успешного усвоения учащимися перечисленных знаний и выработки навыков и умений учителю необходимо создать учащимся условия для формирования представления о соответствующих понятиях, для выработки необходимых навыков и умений в процессе выполнения системы заданий и упражнений.

§4. Анализ содержания теоретического и задачного материала темы «Правильные многогранники» в учебниках разных авторов

Ключевое значение темы «многогранники» для обучения геометрии, и, в частности, стереометрии, состоит в том, что на основе заключений и выводов, сделанных по итогам исследования свойств правильных многогранников, построены доказательства свойств и определения касательно других объемных геометрических объектов (тел).

Следует отметить, что правильные многогранники являются отдельной группой, изучение которой дает обширное поле деятельности для рассмотрения теоретического материала (изучения свойств и доказательства теорем), практических занятий (построение изображений многогранников, их сечений и изготовление моделей), а так же решения задач на вычисления, совмещающих в себе применение практических навыков и знание теории. В части теоретических изысканий особенно следует отметить такие блоки как изучение симметрии правильных многогранников, их двойственности, теорему Эйлера, вычисление объема тел и площади их поверхности.

Проанализируем содержание теоретического и задачного материала по теме «Правильные многогранники» в учебниках ряда авторов, подготовленных для различных образовательных профилей.

Рассмотрим содержание темы «Многогранники», предложенное в учебнике **Л. С. Атанасяна «Геометрия: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений»** [5]. Учебник разработан для программы общеобразовательной школы. Рассматриваемая тема представлена 3 главе. На изучение темы отведено 12 часов. Поурочное планирование по данной теме представлено в таблице № 4.1.

Подготовительная работа к изучению темы «Многогранники» с учащимися начинается со знакомства с простейшими видами многогранников – тетраэдра и параллелепипеда. Материал по указанным многогранникам предложен к рассмотрению в течение 5 уроков в §4 первой

главы учебника. Знакомство с тетраэдром и параллелепипедом (рассмотрение понятий, свойств фигур, работа по построению изображений многогранников и построению их сечений) нацелено на формирование основы знаний учащихся о трехмерном пространстве и его элементах (прямых, плоскостях и так далее) в том числе рассмотрение их свойств в различных вариантах расположения в пространстве и частных случаев взаимного пересечения геометрических элементов в пространстве. Важно, чтоб в процессе рассмотрения тетраэдра и параллелепипеда учащиеся с самого начала усвоили, что это объемные пространственные фигуры - многогранники, поверхность которых составлена из плоских поверхностей – соответствующих многоугольников. Так выстраивается понимание аналогий и различий между объемными телами и плоскими фигурами. При постановке преподавателем задачи на выполнение упражнений важно напоминать учащимся о необходимости подкрепления рассуждений по ходу решения задачи названиями соответствующих теорем (аксиом), используемых при построении выводов.

Таблица 3

Тема «Многогранники» в учебнике Л.С. Атанасяна

Номер урока	Содержание материала по теме
1-4	§1. Понятие многогранника. Призма. Раскрывается понятие многогранника через его частный случай - призму. Рассматривается площадь поверхности призмы. (п. 25-27)
5-9	§2. Пирамида. Раскрывается понятие пирамиды как вида многогранников. Рассматриваются частные случаи правильная и усеченная пирамида. Рассматривается площадь поверхности пирамиды (п. 28-30)
10	§3. Правильные многогранники. Раскрывается понятие правильных многогранников, симметрии в пространстве, элементы симметрии правильных многогранников, свойства многогранников, основанные на симметрии их элементов (п. 31-33)
11	Контрольная (проверочная) работа
12	Зачет по теме – подведение итогов

Одной из важных задач в процессе изучения темы является наработка навыка построения изображения рассматриваемых многогранников и их сечений. Для осознанного построения указанных изображений необходимо поэтапно сформировать и закрепить у учащихся способность пространственного представления многогранников, с тем, чтоб учащийся свободно мог перенести представленное изображение на бумагу в виде чертежа (или изобразить при помощи программного обеспечения и технических средств). Для успешного освоения учащимися навыков пространственного представления многогранников, в том числе тетраэдра и параллелепипеда удобно использовать световое оборудование, с помощью которого на плоскую поверхность экрана проецируется тень каркаса модели многогранника (границы не заполнены, каркас составлен только из ребер). Таким способом в увлекательной форме с учащимися удастся рассмотреть многочисленные варианты плоского изображения объемных фигур, которые в дальнейшем учащиеся смогут использовать при решении различных типов задач. Этот же прием помогает наглядно рассмотреть понятие и свойства параллельной проекции для практического подкрепления теоретических выкладок. По завершении изучения рассматриваемого материала учащиеся научатся формулировать понятия тетраэдра и параллелепипеда с приведением их основных свойств, демонстрировать на физических моделях и плоских изображениях элементы рассматриваемых многогранников (ребра, вершины, диагонали и грани) с описанием их свойств и зависимостей взаимного расположения. Графическая подготовка по итогам изучения параграфа заключается в выработке умения строить изображения тетраэдра и параллелепипеда и их сечения.

В рассматриваемом учебнике в рамках темы «Многогранники» раскрывается и систематизируется информация об этих объемных фигурах. После изучения самых простых из многогранников - тетраэдра и параллелепипеда дается описание других видов многогранников и

раскрываются их свойства. С учетом того, что учебник предназначен для общеобразовательных учреждений, он содержит доступное для понимания учащихся описание изучаемого понятия и варианты изображений многогранников, что позволяет оптимально раскрыть все основные свойства многогранников, необходимые для курса общеобразовательной школы. Кроме того, в учебнике имеется материал, раскрывающий определение геометрического тела, в рамках которого приведены понятия, не используемые в ранее изученном материале. Этот материал не предназначен для обязательного изучения. Геометрическое тело рассматривается, как правило, с сильными учащимися в рамках внеурочных (факультативных) занятий или предлагается им для самостоятельного изучения.

На этапе подготовки к рассмотрению понятий выпуклого и не выпуклого многогранников изучаются их частные случаи (тетраэдр, куб, параллелепипед, пирамида, призма). В рамках изучения частных случаев выпуклых многогранников закрепляются понятия и свойства элементов многогранника (ребра, вершины, грани, диагонали граней и рассматриваемых фигур). Для лучшего усвоения материала по теме многогранники традиционно используются физические модели, кроме того, в настоящее время широкое применение получают виртуальные модели. Работа с моделями позволяет учащимся сформировать четкое наглядное представление об элементах многогранников и их свойствах, в частности взаимном расположении. Этот навык необходим для результативной работы с многогранниками в процессе выполнения заданий по теме. После рассмотрения физических моделей многогранников учащимся обычно дается задание по изготовлению моделей правильных многогранников из плотной бумаги либо картона на основании схем разверток поверхности многогранников, приведенных в учебном пособии.

Завершением темы «Многогранники» здесь является блок материала по симметрии точек в пространстве. Рассмотрены всевозможные комбинации -

симметрия точек относительно других точек, относительно прямых и плоскостей. Изучаются центр, ось, плоскость симметрии правильного многогранника. Итогом изучения материала является вывод о том, что правильный многогранник является эталоном объемной симметричной фигуры. Приводится обоснование существования только пяти видов правильных многогранников и того факта, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n -угольники при $n > 5$. В данном учебнике ключевыми в определении правильного многогранника являются условия: 1) все грани - правильные многоугольники, равные между собой; 2) в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

На основании вышеизложенного видно, что в рассмотренном учебнике Л. С. Атанасяна материал по теме «многогранники» многообразен и основан на наглядном представлении объекта изучения. Теоретические аспекты преподаются на основании продемонстрированных свойств физических моделей и раскрываются по отношению к правильным пирамидам или призмам (правильным или прямым). Выводы по теоремам приведены в виде схем и формул, что способствует более легкому восприятию и запоминанию. Задания по теме направлены на выработку навыков комбинирования при решении задач знаний из различных разделов математики (геометрия, алгебра, тригонометрия) [5, 27].

Рассмотрим содержание темы «Многогранники», предложенное в учебнике **Александрова А.Д. «Геометрия для 10-11 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики»** [3]. Данный учебник является источником обширного объема информации по предмету для анализа и осмысления. Материал максимально нацелен на развитие мыслительных навыков ученика. Здесь новые знания являются результатом труда учащегося, направленного на проработку теории и выполнение практических заданий. Спецификой программы учебника

является последовательность предложения тем к изучению. Темой, предшествующей изучению темы «Многогранники», является тема «Круглые тела». Рассмотрение многогранников и их элементов приводится в связке со свойствами соответствующих многоугольников и составляющих их элементов.

Представление о некоторых видах многогранников формируется в рассматриваемом учебнике с использованием альтернативных подходов. В связи с тем, что к моменту изучения многогранников учащимися уже рассмотрены круглые тела, автор учебника приводит два определения призмы и пирамиды. Первое традиционное определение аналогично приведенному в учебнике Л. С. Атанасяна «Геометрия: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений». Призма определена как многогранник, имеющий два основания - равные многоугольники, и параллелограммов (боковых грани), причем у каждой боковой грани два противоположных ребра лежат на основаниях призмы. Пирамида – как многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника (основания пирамиды), и треугольников с общей вершиной (боковых граней пирамиды). Во втором варианте определения рассматриваемые многогранники представлены как цилиндр и конус соответственно, в основании которых лежит многоугольник. Предложены в двух вариантах определение «Многогранник» (традиционное и конструктивное), а так же «Выпуклый многогранник». При раскрытии в учебнике различных вариантов определений в каждом случае доказывалась равносильность приведенных подходов к определению рассматриваемых фигур. Введение в тему «Правильные многогранники» начинается с рассмотрения пяти типов правильных многогранников и построения их изображений. Наличие возможности построения всех пяти типов правильных многогранников является базой для доказательства их существования. Следующий этап – доказательство невозможности существования иных видов правильных

выпуклых многогранников, отличных от пяти построенных. Такая подача материала является одной из важных отличительных особенностей рассматриваемого учебника от учебников, разработанных другими авторами. В большинстве программ после введения определения понятия правильного многогранника приводится теорема Эйлера, и только потом рассматриваются возможные виды правильных многогранников и доказывается невозможность существования иных видов. Благодаря вариативному подходу к определениям учебник является исключительно полезным источником информации по теме «Многогранники». При этом следует отметить, что значительная часть материала является уникальной для учебных пособий, разработанных для школьной программы, в связи с чем отдельные блоки материала могут применяться преподавателями общеобразовательных школ для проведения факультативных занятий и рассмотрения в рамках элективных курсов с учащимися успешно освоившими основную учебную программу и проявляющими живой интерес к предмету.

Таблица 4

Тема «Многогранники» в учебнике Александрова А.Д.

Номер урока	Содержание материала по теме
1-2	Обобщение понятие многоугольника. Раскрытие понятия «Многогранник»
3-5	Рассмотрение частных случаев многогранника: Призма, параллелепипед. Задания по теме
6-10	Пирамида. Виды пирамид. Задания по теме
11-13	Выпуклые многогранники
14-16	Теорема Эйлера. Развертка выпуклого многогранника
17-19	Правильные многогранники. Задания по теме

Рассмотрим содержание темы «Многогранники», предложенное в учебнике **Смирновой И.М. «Геометрия: учебное пособие для 10-11 кл. гуманитарного профиля»** [31]. В связи с тем, что данный учебник предназначен для классов гуманитарного профиля, в нем расширено описание культурного и исторического аспектов темы. В рассматриваемом

учебнике многогранники предложены к изучению в п. 3 «Основные пространственные фигуры». Многогранник описывается как пространственная фигура, поверхность которой состоит из многоугольников - граней. Стороны и вершины граней - соответственно ребра и вершины многогранника. При изучении многогранников используются физические модели, а также рассматриваются примеры из архитектуры и искусства.

Тематическое планирование темы в соответствии с программой рассматриваемого учебника приведено в Таблице 5.

Таблица 5

Тема «Многогранники» в учебнике Смирновой И.М.

Номер урока	Содержание материала по теме
1-2	Выпуклые многогранники (п. 18)
3-4	Теорема Эйлера (п. 19)
5-6	Приложения теоремы Эйлера (п. 20*)
7-8	Правильные многогранники (п. 21)
9	Топологически правильные многогранники (п. 22*)
10-11	Полуправильные многогранники (п. 23)
12	Звездчатые многогранники (п. 23)

Изучение материала по теме начинается с рассмотрения призмы и пирамиды на примере их частных случаев: куба => прямоугольного параллелепипеда => параллелепипеда => прямой призмы => правильной призмы => призмы, пирамиды, в том числе правильной. При переходе к рассмотрению каждого следующего вида отслеживается общность и отличия с рассмотренными ранее.

Большое внимание в данной программе уделено прикладным заданиям по самостоятельному изготовлению моделей с целью практического знакомства с изучаемыми многогранниками.

Материал по рассмотрению теоремы Эйлера содержит теоретическую и практическую части. Подробно рассмотрены правильные многогранники, дан обзор полуправильных и звездчатых многогранников.

Приведенные в учебнике [31] определения изучаемых понятий сформулированы следующим образом: «Выпуклый многогранник является правильным, если его грани - правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится равное число граней»; «Выпуклый многогранник называется полуправильным, если его гранями являются правильные многоугольники (возможно, и с разным числом сторон), причем в каждой вершине сходится одинаковое число граней».

В книге [6] Л.Н. Бескина, «Стереометрия» систематизирован практически весь материал по курсу стереометрии, в объеме, необходимом и достаточном для школьного курса геометрии. Параграф, содержащий материал по правильным многогранникам и теореме Эйлера разбит на три части. Вводным материалом к теме является рассмотрение развертки поверхности многогранника. Далее предложен материал по теореме Эйлера. В завершение параграфа рассмотрено понятие правильного многогранника, его возможные виды и основные свойства. Книга содержит детальный разбор сложных для понимания учащихся моментов. Предложены эффективные методы подачи материала для лучшего усвоения.

Книга А.П. Киселева «Элементарная геометрия» [17] является вспомогательным пособием для школьного учителя математики. Раздел 3 блока стереометрия рассматриваемой книги посвящен многогранникам, в пункте 7 раздела «Понятие о правильных многогранниках» рассмотрены правильные многогранники, их существующие виды приведены упражнения по теме.

Книга Л.А. Люстерника [20] «Выпуклые фигуры и многогранники» будет полезна в качестве источника дополнительной информации для использования во внеурочной деятельности, в том числе в рамках элективных курсов. В ней в числе прочего имеется материал по правильным сетям, рассмотрена их аналогия с многогранниками. Кроме того, рассмотрена

аналогия между пространственными фигурами - правильными многогранниками и плоскими - правильными многоугольниками.

Полезным учебным пособием по элементарной геометрии для преподавателей математики является книга Б.И. Аргунова, М.Б. Балка, «Элементарная геометрия» [4]. Тема «Многогранники» изложена во 2 главе «Многоугольники, многогранные углы, многогранники». Материал по правильным многогранникам содержится §17 главы. В параграфе изложено определение правильного многогранника, рассмотрены 5 типов правильных многогранников. Формула Эйлера раскрыта на примере рассмотренных многогранников. Так же параграф содержит описание свойств правильных многогранников.

В пособии В.Н. Литвиненко «Задачи на развитие пространственных представлений» [19] представлены основные определения, аксиомы и теоремы школьного курса геометрии. На основе системно изложенного теоретического материала разобраны подходы к решению соответствующих задач.

В статье Л.С. Сагателова «Ортогональное проектирование и решение задач на объемы многогранников» [30] представлены подробные разборы решений задач по рассматриваемой теме, а также приведены аналоги разобранных задач для проработки читателем.

Статья Рыжика «Новые тесты по геометрии» [28] содержит подробные рекомендации для школьных учителей по составлению тестов, в том числе по рассматриваемой в работе теме «Многогранники».

Статья Ходота А.Ю. «Как сделать геометрическую иллюстрацию наглядной» [42] посвящена нюансам построения изображений геометрических фигур и их сечений.

В статье С.В. Буфеева «Вычисление площади сечения многогранника разными способами» [9] рассмотрены подробные решения соответствующих задач.

Статья Крайнева Л. Б. «Построение правильных многогранников с использованием куба» подробно описывает построение тетраэдра, октаэдра, икосаэдра, додекаэдра с использованием куба [18].

В книге [11] Г.И. Глейзера «История математики в школе» приведены интересные исторические факты и задачи, рассмотрение которых можно использовать для создания неформальной обстановки на уроке геометрии в процессе рассмотрения темы, а также в рамках внеурочной деятельности.

Книга [43] «Хрестоматия по истории математики» под ред. А.П. Юшкевича содержит материал по истории развития математической мысли и практических опытах, способствовавших конкретным открытиям.

Рассмотрим разновидности опорных задач по теме правильные многогранники, которые предлагаются в рассмотренной литературе.

1. Даны величины площади боковой поверхности правильной четырехугольной призмы и площади всей поверхности призмы. Найти: высоту призмы (либо периметр основания).

2. Дана площадь сечения, проходящего через средние линии оснований правильной треугольной призмы. Найти: площадь боковой грани (поверхности).

3. Дана площадь большего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы. Найти площадь боковой поверхности призмы.

4. Даны величины бокового ребра и угла между боковым ребром и основанием в правильной четырехугольной пирамиде. Найти: расстояние от центра основания пирамиды до ближайшей к нему точки бокового ребра.

5. Существует ли сечение параллелепипеда в форме правильного пятиугольника? Обосновать ответ.

Таким образом, вся рассмотренная выше литература в рамках темы «Многогранники» и «Правильные многогранники» подразумевает рассмотрение таких ключевых блоков, как введение понятия многогранник, изучение выпуклых и правильных многогранников, подробное рассмотрение

с выполнением заданий частных случаев правильных многогранников (как правило, призмы и пирамиды). Вместе с тем, существенно отличается расстановка приоритетов в зависимости от профиля обучения. Так, программа математического профиля предлагает тщательную проработку темы с доказательством и подробным теоретическим обоснованием всех утверждений, выводов, изучаемых свойств и зависимостей. Учебный материал для гуманитарного профиля, напротив, содержит готовые выводы, формулы и определения. При этом следует отметить, что исходя из общей концепции ориентации программы гуманитарного профиля «на прекрасное вокруг нас» в ней предусмотрено изучение звездчатых многогранников. Общеобразовательная программа представляет собой нечто среднее между двумя описанными выше подходами. Несмотря на рамки и ориентиры, задаваемые школьной программой, у преподавателя всегда есть возможность расставить приоритеты в изучении темы исходя из интересов учащихся и уровня их подготовки, в том числе за счет диверсификации заданий и рассмотрения дополнительного материала в рамках внеурочных занятий.

§5. Методические особенности обучения теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы»

Программа геометрии общеобразовательной школы предусматривает построение изучения темы «правильные многогранники» на базе изученных ранее понятий: точка, прямая, отрезок, плоскость, угол и так далее. Перечисленные понятия дают возможность определить расположение объекта не только на плоскости, но и в пространстве, а значит перейти от рассмотрения плоских фигур к пространственным телам. Наиболее доступными для понимания школьников и вместе с тем интересными для изучения пространственными телами являются многогранники, поэтому первыми из объемных фигур, как правило, рассматривают их.

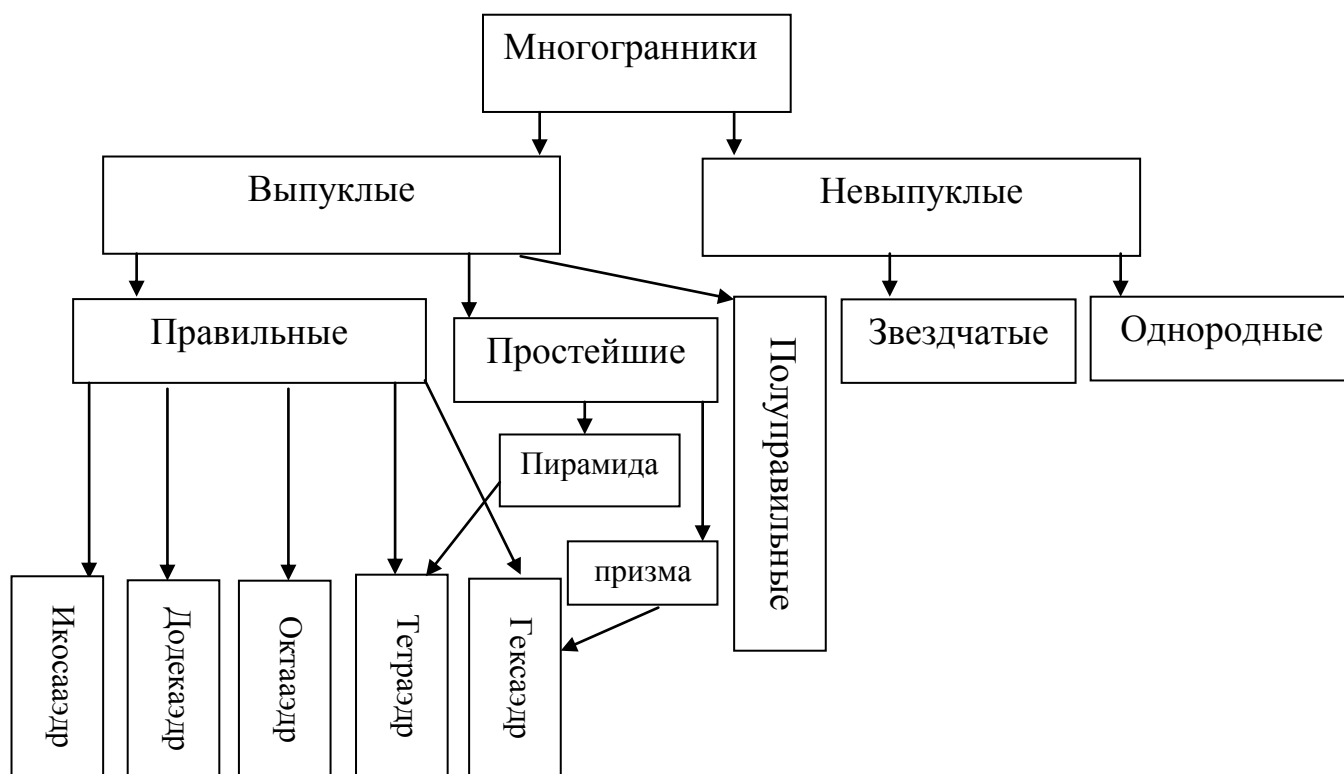


Рис 2. Классификация многогранников.

Методологические особенности обучения теме «Многогранники» в целом можно определить как рассмотрение древовидной структуры, основанной на классификации многогранников и предполагающей более детальное или напротив - поверхностное изучение различных ветвей структуры (Рис.2).

Так, при рассмотрении многогранников из них выделяют выпуклые и невыпуклые. Впоследствии процесс обучения направлен на более глубокое исследование выпуклых многогранников. Среди выпуклых многогранников в школьной программе обозначаются группы правильных (с подробным рассмотрением пяти возможных видов), полуправильных и простейших (пирамида и призма). Задания, рассматриваемые в рамках изучения темы «правильные многогранники», в основном нацелен на проработку материала по простейшим их видам и их частным случаям гексаэдра (куба) и тетраэдра. Такой выбор обусловлен относительной простотой свойств и характеристик

пирамиды и призмы относительно других видов выпуклых многогранников, что обуславливает доступность материала по их изучению для большинства учащихся общеобразовательных школ. Ключевыми рассматриваемыми параметрами являются такие, как: длина ребер, периметр и площадь граней, площадь поверхности многогранника, градусная мера углов, симметрия многогранников. Посредством проработки практических заданий закрепляется рассмотренная теория по теме.

В конечном итоге изучение темы «правильные многогранники» направлено на формирование у учащихся устойчивой системы знаний о видах многогранников их основных свойствах и взаимных зависимостях. Рассматриваемый набор знаний включает в себя способность формулирования определений основных изученных видов многогранников с раскрытием их отличительных и аналогичных свойств, пониманием доказательства (запоминанием выводов) основных простых теорем и знания формул, определяющих взаимосвязь элементов многогранника и зависимости между взаимосвязанными фигурами.

Поскольку программа школьного курса геометрии построена таким образом, что изучение последующих тем основано на знаниях сформированных в процессе освоения предыдущих, то простые понятия (точка, прямая, отрезок, плоскость, угол) являются базой для введения в тему пространственных фигур через изучение многогранников, а тема «Многогранники», в свою очередь, является базой для дальнейшего более глубокого изучения пространственных понятий.

Правильные многогранники благодаря своим свойствам, в том числе симметрии, являются очень удобными для рассмотрения достаточно объемного массива относительно простых заданий, предлагаемых для решения учащимся в рамках рассматриваемой темы. Многие простые пространственные задачи по теме элементарным образом сводятся к рассуждениям на плоскости, таким образом, отрабатывается навык

проводить аналогии между объемными и плоскими фигурами, то есть объединять понятия из раздела стереометрии с имеющимися знаниями из планиметрии. Многие из задач имеют по несколько способов решения - когда «правильных» решений может быть несколько, в зависимости от направления мыслей учащегося и имеющейся у него базы знаний, таким образом, у учащихся формируется способность мыслить свободно и искать доступные варианты решений. Кроме того, правильные многогранники являются оптимальным объектом для выработки навыков построения логических цепочек рассуждений в ходе доказательства теорем, так как теоремы, изучаемые в рамках темы, относительно просты и частично выражаются через формулы.

Вернемся к методологии изучения темы «Многогранники», предложенной в учебниках, рассмотренных в рамках 4 параграфа.

В учебнике Л.С. Атанасяна «Геометрия: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений» [5] изучение рассматриваемой темы предусмотрено на протяжении 12 академических часов. Итоговым видом контроля является зачет по теме и контрольная работа. Следует отметить, что на рассмотрение разновидностей призмы и пирамиды, включая изучение их свойств и элементов, отводится по 4 часа, после чего в рамках одного урока обобщается понятие «Правильный многогранник».

Подготовка к введению в тему «Многогранники» начинается с рассмотрения на протяжении 5 академических часов параллелепипеда и тетраэдра, являющихся простейшими из выпуклых многогранников. На примере простейших многогранников учащиеся нарабатывают элементарные навыки построения сечений пространственных фигур. В процессе изображения объемных тел и их сечений происходит практическое рассмотрение частных случаев взаимного расположения объектов (в том числе точек, прямых и плоскостей) в пространстве. Такой подход обеспечивает хорошее усвоение дальнейшего теоретического материала, так

как подача теории происходит на базе имеющихся практических знаний учащихся. Решение практических задач наполняется необходимыми «правильными» определениями и понятиями, ссылками на используемые теоремы и аксиомы.

Таким образом, подходя к изучению понятия многогранника через его частный случай - призму учащиеся знакомы с частным случаем призмы – параллелепипедом, а также изучили тетраэдр. Они умеют строить и показывать на чертежах и физических моделях изображение и сечения изученных фигур, могут дать их описательное определение, знают свойства элементов (ребер, граней), а также диагоналей параллелепипеда и тетраэдра. Понятие многогранника как класса объемных фигур дается в рассматриваемой программе через многоступенчатый подъем от частного к общему – теоретические знания формируются на основе наглядных представлений в наиболее доступной для учеников форме.

На примере физических моделей тетраэдра и параллелепипеда рассматривается их строение (состав элементов: грани, ребра, вершины) и их взаимное расположение, а так же упоминаются диагонали тел и их граней. Полученные в процессе рассмотрения моделей представления обеспечат базу знаний, необходимую для успешного выполнения заданий по теме. На основе обобщения свойств рассмотренных моделей формулируется определение выпуклого многогранника, а также описываются свойства, достаточные для отнесения тела к категории не выпуклых многогранников.

На примере физических моделей призмы рассматриваются ее виды: наклонная, прямая, правильная, а также разновидности по количеству углов и форме оснований. Здесь же демонстрируются вновь модели параллелепипеда и куба, свойства которых описываются уже с точки зрения того, что данные многоугольники являются частными случаями четырехугольной призмы. В процессе исследования свойств призмы рассматривается доказательство теоремы «О площади боковой поверхности прямой призмы».

На примере физических моделей пирамиды рассматриваются ее виды и элементы. Обсуждаются разновидности оснований пирамиды (треугольник, четырехугольник, пятиугольник) и варианты углов наклона боковых сторон. В процессе рассмотрения модели правильной пирамиды выделяются ее ключевые свойства, и на основе свойств формулируется описательное определение – «пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а высота пирамиды соединяет ее вершину с центром основания». В процессе исследования свойств правильной пирамиды рассматривается доказательство теоремы «О площади боковой поверхности правильной пирамиды».

Через построение сечения пирамиды, плоскость которого параллельна плоскости основания, вводится определение усеченной пирамиды – «часть пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию пирамиды образует усеченную пирамиду». Рассматривается правильная усеченная пирамида с выделением ее отличительных особенностей – оба основания такой пирамиды являются правильными многоугольниками, подобными друг другу, а боковые грани – равными равнобедренными трапециями. При этом вводится определение апофемы, как высоты боковой грани пирамиды. В процессе исследования свойств правильной усеченной пирамиды выводится формула площади ее боковой поверхности.

Подведением итогов рассмотрения конкретных видов многогранников в данной программе является рассмотрение общего понятия правильного многогранника с доказательством существования только пяти его видов и обсуждения понятия симметрии в пространстве, включающего в себя понятия плоскости симметрии объемного тела, центра симметрии, симметричности точек относительно точки, прямой или плоскости.

В учебнике приведены развертки поверхности правильных многогранников, на основании которых преподаватель может дать учащимся

индивидуальные (групповые) задания по самостоятельному изготовлению моделей изученных тел.

Из обзора программы рассмотренного учебника Л.С. Атанасяна видно, что понятие многогранника как отдельного вида объемных фигур дается здесь через многоступенчатый подъем от частного к общему – теоретические знания формируется на основе наглядных представлений в наиболее доступной для учеников познавательной форме и построен на практических упражнениях. Объектом изучения в основном являются разновидности призмы и пирамиды. Доказательства теорем рассмотрены на конкретных примерах и изложены простым языком. Резолютивная часть теорем представлена в виде формул, что удобно для запоминания и практического использования. Полученные формулы и рассмотренные понятия закрепляются в процессе решения задач.

Учебник И.М. Смирновой **Смирновой И.М. «Геометрия: учебное пособие для 10-11 кл. гуманитарного профиля»** [31], так же, как и рассмотренный выше учебник Л.С. Атанасяна, предполагает изучение темы «Многогранники» на протяжении 12 академических часов. Однако внутреннее содержание темы и распределение времени на изучение отдельных блоков выстроено иное. Количественно это выглядит следующим образом: раздел «Выпуклые многогранники» (2 часа), раздел «Теорема Эйлера» (2 часа), раздел «Приложения теоремы Эйлера (2 часа), раздел «Правильные многогранники» (2 часа), раздел «Топологически правильные многогранники» (1 час), раздел «Полуправильные многогранники» (2 часа) и раздел «Звездчатые многогранники» (1 час).

В рассматриваемой программе теоретический материал сокращен в пользу увеличения часов на обсуждение исторического и культурного аспектов. В связи с тем, что гуманитарный профиль предполагает в первую очередь развитие общего мировоззрения и формирование культуры личности, в данном учебнике понятие многогранника вводится через общее

понятие пространственной фигуры. Наравне с рассматриваемыми традиционно в рамках темы «Многогранники» фигурами: призма, в том числе прямая; параллелепипед, в том числе прямоугольный, в том числе куб; пирамида, в том числе правильная пирамида, здесь представлен материал и по более сложным и «красивым» многогранникам, в том числе правильным, полуправильным и звездчатым.

Большое внимание в данной программе уделено прикладным заданиям по изготовлению моделей. Для практического знакомства с конкретными примерами многогранников учащимся предлагается самостоятельное изготовление моделей многогранников. Для выполнения задания предлагается использовать развертки, а так же геометрический или магнитный конструкторы, средства компьютерной графики, 3-d моделирование.

Понятие выпуклого многогранника в рассматриваемом учебнике раскрыто через условие, что такой многогранник вместе с любыми двумя своими точками целиком обязательно содержит отрезок, соединяющий данные точки. После рассмотрения свойств выпуклых многогранников доказывается теорема Эйлера и прикладные задачи на ее применение.

Учебник **Александрова А.Д. «Геометрия для 10-11 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики»** [3] предполагает изучение темы «Многогранники» на протяжении 19 академических часов. Материал составлен с учетом потребности профильного обучения в глубоком освоении большого объема теоретических знаний по теме, в том числе понятия основных изучаемых многогранников определяются двумя альтернативными способами и доказывается равносильность приведенных определений.

Поурочный план рассматриваемой программы предлагается следующий: «Обобщение понятия многоугольника. Многогранник» (2 часа), «Призма, параллелепипед» (3 часа), «Пирамида. Виды пирамид» (5 часов),

«Выпуклые многогранники» (3 часа), «Теорема Эйлера. Развертка выпуклого многогранника» (3 часа) и «Правильные многогранники» (3 часа).

Следует отметить ряд особенностей построения рассматриваемой программы в части подхода к рассмотрению многогранников. Первой особенностью является то, что здесь изучению темы «Многогранники» предшествует рассмотрение круглых тел, что обусловило использование в материале элементов сферической геометрии. Кроме того, материал по многогранникам в рассматриваемом учебнике тесно переплетен с материалом по многоугольникам, что дает возможность несколько варьировать последовательность изучения отдельных блоков материала по этим связанным объектам на плоскости и в пространстве.

Стиль подачи материала в учебнике отличается строгими научными формулировками, в связи с чем не всегда прост для усвоения, однако, как раз благодаря точным математическим терминам понятия определяются исчерпывающе и формулировки не допускают двусмысленного толкования. Для школьной программы учебник является нестандартным, так как содержит подробное изложение теории по теме, зачастую граничащее по содержанию с учебниками для высших учебных заведений. Для повышения теоретической подготовки учащихся отдельные блоки материала могут использоваться и преподавателями общеобразовательных школ для изучения в рамках дополнительных занятий с учащимися, проявляющими живой интерес к теме в адаптированном для уровня своих учеников виде или в формате первоисточника.

Таким образом, преподаватель математики общеобразовательной школы имеет возможность разнообразить учебную программу за счет использования блоков материала из учебников других профилей, дополняя информацию, имеющуюся в основном используемом учебнике, интересными сведениями и заданиями из учебников других программ. Помимо непосредственно учебников можно использовать вспомогательные

материалы (наглядные пособия), карточки с наборами формул, описывающих зависимости элементов многогранников и взаимосвязи отдельных видов многогранников между собой, схемы и классификации многогранников. Такие компактные и в то же время емкие пособия способствуют лучшему запоминанию конкретных блоков материала и удобны для использования при выполнении заданий в качестве справочных пособий.

Изложение темы «Правильные многогранники» в рассмотренных программах дает возможность для использования различных способов, приемов и методов подачи учебного материала. Для повышения эффективности учебного процесса каждому преподавателю нужно взвешенно подходить к выбору формы работы с учащимися на каждом этапе изучения темы и насколько это возможно, избегать фронтальной формы взаимодействия с учащимися. Оптимизировать работу каждого ученика в классе (группе) помогает дифференцированный подход и использование интерактивных методов в процессе учебной деятельности. Смена форм обучения на протяжении времени урока позволяет избежать статичности процесса и делает восприятие учащихся более острым, способствует активизации мыслительных процессов и памяти учеников. Организация работы учащихся в группах (парах) дает хороший психологический эффект – повышает самооценку учащихся, позволяет им почувствовать себя в процессе обучения не ведомым, а ведущим, самостоятельно планировать процесс выполнения задания (это может быть подготовка короткого сообщения по теме, подготовка к обсуждению вопроса или индивидуальная работа по выполнению заданий с последующей взаимной проверкой и работой над ошибками). Самостоятельная работа по формированию навыков и освоению новой информации повышает для учащегося ценность добытых знаний и стимулирует его к фиксации полученного результата, постановке и достижению новых целей. Организация работы, подразумевающая разбивку класса на группы (метод «Мозаики») позволяет организовать более

неформальную обстановку изучения материала, чем при работе со всем классом одновременно, и «уплотнить» процесс усвоения материала. Однако при выборе этого метода преподаватель должен тщательно продумать эффективную занятость каждой группы учащихся на протяжении всех частей урока, а так же предусмотреть время для контроля и обсуждения общих и индивидуально достигнутых результатов по итогам урока или каждого его этапа.

Следует отметить, что на пути поиска новых форм взаимодействия с учащимися, новых методов подачи материала и проверки знаний нельзя останавливаться. Стремительное развитие технологий и изменение психологии учеников приравнивает остановку развития к неизбежному отставанию.

Выводы по первой главе

По результатам рассмотрения материала, представленного в первой главе настоящей работы, можно сформулировать следующие выводы.

1. Тема «Правильные многогранники» является одной из самых интересных в школьной программе. В процессе изучения темы происходит переход от рассмотрения объектов на плоскости к исследованию пространственных фигур. Таким образом, материал, изучаемый в рамках темы, закладывает основу для дальнейшего изучения стереометрии.

2. Описаны основные подходы к определению понятия правильного многогранника. Многогранник может быть определен как тело, как поверхность или как тело, поверхность которого обладает определенными свойствами. Выделяют описательный (дискриптивный) и конструктивный способы определения многогранника. Причем каждый из вариантов определения имеет свое право на жизнь. Выбор варианта определения понятия зависит от степени подготовки учащихся и целей обучения на конкретном этапе.

3. Рассмотрены основные цели обучения школьников рассматриваемой теме: общие, прямые, развивающие. Определены группы задач, решаемых для достижения соответствующих выявленных целей: образовательные, развивающие, воспитательные. Описаны используемые для решения задач средства (инструменты) – наглядные пособия (модели), практические задания.

4. Определены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме. В общем виде требования к знаниям можно описать как формулировка определений, описание понятий, свойств и зависимостей, доказательство теорем. Требования к умениям в основном включают в себя работу с изображениями многогранников и их сечений, включая выполнение построений, выполнение заданий по теме.

5. Проведен анализ содержания теоретического и задачного материала темы в учебниках разных авторов. В частности рассмотрены учебники для различных профилей обучения: Л.С. Атанасян и др. [5], А.Д. Александрова [3], И.М. Смирновой [31].

6. Выявлены методические особенности обучения теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы. Рассмотрение темы строится в основном на теоретическом материале и практических заданиях по следующим направлениям: изучение классификации многогранников, их общих и отличительных свойств, взаимосвязей между различными видами фигур, а так же нахождение неизвестных параметров элементов многогранников исходя из заданных в условии. Как правило, вычислительные практические задания основаны на свойствах простейших видах многогранников. При многообразии доступных инструментов, форм и методов обучения преподаватель может повышать эффективность обучения за счет комбинирования элементов учебного процесса, усиливая тем самым интерес учащихся к предмету и результатам обучения.

ГЛАВА II. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ»

§6. Методические рекомендации по обучению теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы

В данной части выпускной работы будут рассмотрены основные аспекты методики обучения школьников теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы.

В школьном курсе математики правильный многогранник определяется как «...пространственная фигура, поверхность которой состоит из определенного количества многоугольников, равных между собой, которые являются гранями многогранника. Стороны этих многоугольников являются ребрами многогранника, а вершины многоугольников – вершинами многогранника, причем в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер». Теоретический материал, изучаемый в рамках темы, а так же выполняемые практические задания направлены на исследование и доказательство данного утверждения. Так же в рамках рассматриваемой темы изучаются взаимные зависимости элементов многогранника между собой и с другими фигурами, связанными с многогранником тем или иным образом (двойственные многогранники, вписанная и описанная сферы).

Приступая к методическому планированию изучения темы «Правильные многогранники» преподаватель изначально должен выстроить структуру рассмотрения темы, запланировать контрольные точки и определить набор заданий и время для повторения изученного ранее материала, продумать использование дифференцированных форм обучения для поддержания интереса учащихся к учебному процессу. Большую роль при изучении темы «Правильные многогранники» играют наглядные пособия (физические и 3D-модели). Живой интерес у учащихся вызывает

традиционное в рамках изучения рассматриваемой темы задание по самостоятельному изготовлению из подручных материалов (как правило, картон или плотная бумага). Задание на изготовление моделей по готовым разверткам поверхности лучше предлагать учащимся на начальном этапе изучения различных видов многогранников для формирования практического представления об объекте изучения с тем, чтоб при рассмотрении теоретического материала учащиеся уже имели наглядное представление о предмете изучения и его свойствах.

На изучение темы «Правильные многогранники» в программе школьного курса геометрии отводится, как правило, от 12 до 19 академических часов (в зависимости от профиля обучения).

Остановимся на материале по изучению темы «Многогранники» по программе, предложенной авторами Смирнова И.М., Смирнов В.А. в учебнике «Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни)» [32].

Тема в учебнике разделена на следующие блоки:

1. Выпуклые многогранники (2 часа).
2. Теоремы Эйлера (2 часа).
3. Приложение теоремы Эйлера (2 часа).
4. Контрольная работа №1 (1 час).
5. Правильные многогранники (2 часа).
6. Топологические правильные многогранники (1 час).
7. Полуправильные многогранники (2 часа).
8. Звездчатые многогранники (1 час).
9. Контрольная работа №2 (1 час).

Рассмотрим ключевые моменты каждого блока.

Блок 1. Выпуклые многогранники (2 часа).

Основной целью данного блока материала является ознакомление учащихся с понятием выпуклости и свойствами выпуклых многогранников, рассмотрение основных видов выпуклых многогранников.

Понятию выпуклого многогранника предшествует рассмотрение понятия выпуклого угла, которое закладывает основу понятия выпуклости. Согласно приведенному в учебнике определению «многогранник называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок». Здесь полезно рассмотреть примеры выпуклых и невыпуклых многоугольников и провести от них аналогию к многогранникам. В учебнике приведены наглядные изображения таких фигур. Закрепление понятия выпуклого многогранника произведено через два его основных свойства. Одно из свойств «Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками» является описательным и довольно просто для понимания. Второе: «Любой выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника. свойства выпуклых многогранников» относится к категории конструктивных и является более сложным для понимания учащихся, однако, тем оно и интересно, что требует включения воображения. Для простоты восприятия можно использовать наглядное пособие в виде 6 правильных четырехугольных пирамид, дающих при соответствующем сопоставлении куб. При обсуждении указанных свойств полезно рассмотреть такие фигуры, как параллелепипед, в том числе прямоугольный, призму, в том числе прямую и правильную, пирамиду, в том числе правильную. Рассматривается теорема о том, что сумма всех плоских углов многогранного угла всегда составляет менее 360° .

Для оживления материала можно заслушать заранее подготовленный краткий доклад учащихся о представлениях древнегреческих ученых о

многогранниках. При постановке задачи на подготовку доклада следует указать определить условие на наглядные иллюстрации и раскрытие теории о связи природных стихий с определенными видами многогранников. (Пифагор и его ученики считали, что все состоит из атомов, имеющих форму правильных многогранников. В частности, атомы огня имеют форму тетраэдра, земли - гексаэдра, воздуха – октаэдра, воды – икосаэдра, вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра). Таким образом будет раскрыто древнегреческое происхождение названий правильных многогранников. В переводе с греческого: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окто" - восемь; "Икоси" - двадцать, "Додека" - двенадцать. "Эдра" - грань.

Блок завершается выполнением небольшой самостоятельной работы на выполнение заданий по изученному материалу.

Блоки 2,3. Теорема Эйлера (2 часа). Применение теоремы Эйлера (1 час).

Основной целью данного блока материала является рассмотрение с учащимися теоремы Эйлера и ее доказательства, изучение следствий из данной теоремы и их практического применения для решения задач.

В данном разделе рассматривается теорема Эйлера и ее приложения. Перед доказательством теоремы учащимся предлагается заполнить таблицу со значениями количества ребер, вершин и граней конкретных примеров изученных видов многогранников на основе данных таблицы формулируется **Теорема Эйлера** для многогранников, устанавливающая связь между числами вершин, ребер и граней для многогранников, топологически эквивалентных сфере: «Сумма числа граней и вершин = числу ребер, увеличенному на 2».

В качестве примеров приложений рассматриваются задача о трех домиках и трех колодцах, проблема четырех красок, вводится понятие графа.

В конце работы обучающимся предлагается выполнение самостоятельной работы, рассчитанной на 10-15 минут.

Несмотря на проведение локального контроля по итогам завершения изучения каждого блока, рассчитанного на 1-2 урока после изучения 3 и 5 блоков программой предусмотрены объемные контрольные точки (контрольные работы), на выполнение которых отведено время полного академического часа. Контроль (как локальный, так и масштабный) позволяет оценивать результаты усвоения материала и корректировать в зависимости от результатов форму и способы обучения.

4. Контрольная работа №1. (1 час).

Цель: «проверить и закрепить знания, умения и навыки учащихся в применении формул для различных видов вычислений выпуклых многогранников, а также применения теоремы Эйлера и его приложений»

Перед тем, как перейти к изучению темы «Правильные многогранники», требуется повторить определение понятия «многогранник», его основные элементы и свойства, формулы для нахождения площадей и объемов. Для выполнения данной работы может быть выбрана произвольная форма (семинар, тестирование или комбинированная форма урока).

5. Правильные многогранники (2 часа).

Основная цель данного блока материала - рассмотрение понятия правильного многогранника, и основные виды правильных многогранников».

Выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Рассматриваются пять видов правильных многогранников:

- **куб** - составлен из 6 квадратов. Каждая его вершина является вершиной трех квадратов. Сумма плоских углов при каждой вершине = 270° . Таким образом, куб имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер;

- **тетраэдр** – составлен из 4 равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Сумма плоских углов при

каждой вершине = 180° . Таким образом, тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер;

- **октаэдр** - составлен из 8 равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине = 240° . Таким образом, октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер;

- **икосаэдр** - составлен из 20 равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной 5 треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине = 300° . Таким образом, икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер;

- **додэкаэдр** - составлен из 12 равносторонних пятиугольников. Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине = 324° . Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер.

При рассмотрении понятия правильного многогранника и его разновидностей есть возможность окунуться вместе с учащимися «в глубину веков» и провести небольшие экскурсии в труды Платона, Евклида, Кеплера, рассмотреть посвященные многогранникам работы Леонардо да Винчи.

Целесообразно провести небольшую проверочную работу по выполнению в группах простых заданий на доказательство свойств многогранников, в том числе двойственности анализ представленных примеров разверток поверхностей различных фигур.

6. Топологические правильные многогранники (1 час).

Основная цель данного блока - ознакомить учащихся с понятием топологически правильных многогранников и их свойствами.

Выпуклый многогранник называется топологически правильным, если его гранями являются многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. К примеру, все треугольные пирамиды являются топологически правильными

многогранниками, эквивалентными между собой. Все параллелепипеды также являются эквивалентными между собой топологически правильными многогранниками. Четырехугольные пирамиды не являются топологически правильными многогранниками. Показывается, что топологически правильных многогранников, эквивалентных уже известным правильным, не существует.

В конце работы обучающимся стоит предложить самостоятельную работу, которая рассчитана на 10-15 минут.

7. Полуправильные многогранники (2 часа).

Основная цель данного раздела - «ознакомить учащихся с понятием выпуклости и свойствами выпуклых многогранников, рассмотреть теорему Эйлера и ее приложения к решению задач, сформировать представления о правильных, полуправильных и звездчатых многогранниках».

Выпуклый многогранник называется полуправильным, если его гранями являются правильные многоугольники, возможно, с разным числом сторон, и все многогранные углы равны, причем один из них в другой можно перевести движением самого многогранника.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n -угольные призмы, все ребра которых равны и антипризмы с равными рёбрами. Существует две большие группы полуправильных многогранников - Архимедовы и Каталоновы тела. Главные отличия между этими двумя группами полуправильных многогранников, которые стоит запомнить: у Каталановых тел все грани одинаковы, но не все они являются правильными многоугольниками, в то же время у Архимедовых тел наоборот грани не одинаковы, при этом все грани являются правильными многоугольниками двух или более типов.

В завершение рассмотрения блока обучающимся можно предложить выполнение групповых заданий по теме в форме проверочной работы, после которой организовать небольшое обсуждение итогов.

8. Звездчатые многогранники (1 час).

Основная цель блока – рассмотреть понятие, виды и свойства звездчатых многогранников.

Правильные звёздчатые многогранники (или же тела Кеплера-Пуансо) получают с помощью продления рёбер или несмежных граней Платоновых тел до пересечения друг с другом: малый звёздчатый додекаэдр, большой звёздчатый додекаэдр, большой додекаэдр, большой икосаэдр. Рассматривается доказательство гипотезы Пуансо Огюстеном Луи Коши, которая гласит о том, что существуют только четыре единственно возможных правильных звёздчатых многогранника.

В рамках рассмотрения материала можно заслушать подготовленные учащимися сообщения о данных видах тел с историческими справками, а в завершение рассмотрения блока обучающимся можно предложить выполнение групповых заданий по теме в форме проверочной работы, после которой организовать небольшое обсуждение итогов.

9. Контрольная работа №2 (1 час)

Данное контрольное мероприятие проводится с целью проверить и закрепить знания, умения и навыки учащихся в применении формул для различных видов вычислений правильных и топологически правильных, полуправильных, а также звездчатых многогранников.

Таким образом, рассмотрению теоретического материала по каждому из блоков по теме сопутствует большое количество разнообразных заданий доказательного, вычислительного, графического и конструктивного характера, что дает возможность на практике применять изучаемый материал и способствует наиболее полному усвоению материала.

§7. Система задач по теме «Правильные многогранники» для учащихся старших классов общеобразовательной школы

Разработанная система задач представляет собой структурированный набор заданий, сгруппированных в пять блоков: на построение, на вычисление, для исследования, на доказательство, сборные задания. Решение задач, включенных в систему, позволяет учащимся отработать навыки решения простейших задач, а затем, используя полученные знания научиться решать более сложные, в том числе комплексные задачи. (Решения и ответы приведенных в системе заданий рассмотрены в приложении А данной работы).

Основой геометрической работы с любыми объемными телами, в том числе с правильными многогранниками является их пространственное представление. Именно поэтому первый блок задач в нашей системе представлен задачами на построение.

1) Задачи на построение

В зависимости от уровня подготовки учащихся задачи могут выполняться на заранее подготовленном изображении (элементах изображения) условия задачи или задача по построению условия и решения полностью возлагается на учащегося.

Задача 1. Постройте сечение куба в форме: а) треугольника, б) четырехугольника, в) пятиугольника, г) шестиугольника.

Задача 2.

а) Постройте сечение треугольной призмы, проходящее через ребро при основании.

б) Выполните дополнительные построения (построение) не повторяя построение, выполненное при выполнении задания «а)» для изображения всех видов многоугольников, форму которых будет принимать сечение

призмы, при вращении вокруг ребра. Перечислите виды многогранников, форму которых будет принимать сечение.

Задача 3. Вершинами какого многогранника являются центры граней куба? Выполните схематичное построение фигур.

Задача 4. Вершинами какого многогранника являются центры граней октаэдра? Выполните схематичное построение фигур.

Задача 5. Вершинами какого многогранника являются середины ребер тетраэдра? Выполните схематичное построение фигур.

Задача 6. Вершинами какого многогранника являются центры граней тетраэдра? Выполните схематичное построение фигур.

Задача 7. Создайте два изображения одной и той же пирамиды, одно с наиболее видимыми ребрами, другое с наименьшим количеством видимых ребер.

Задача 8. Выполните построение изображения многогранника, имеющего 9 ребер.

После того, как в процессе решения задач на построение у учащихся сформированы навыки пространственного мышления и построения изображений многогранников и их сечений можно перейти к работе с задачами на вычисление. В процессе решения которых необходимы навыки построения многогранников и их элементов, а так же знание теоретических основ взаимосвязи элементов многогранников, свойств двойственных многогранников и основных теорем и аксиом стереометрии.

2) Задачи на вычисление.

Перед решением задач на соотношение элементов куба полезно вспомнить *формулы для вычисления основных элементов куба со стороной a (рис.3.):*

Диагональ грани $d = a\sqrt{2}$;

Диагональ куба $D = a\sqrt{3}$;

Площадь грани $s = a^2 = \frac{d^2}{2}$;

Площадь поверхности куба $S_n = 6a^2$;

Объем куба $V = a^3 = D^3/(3\sqrt{3})$;

Радиус вписанной сферы $r = a/2$;

Радиус описанной сферы $R = (a\sqrt{3})/2$.

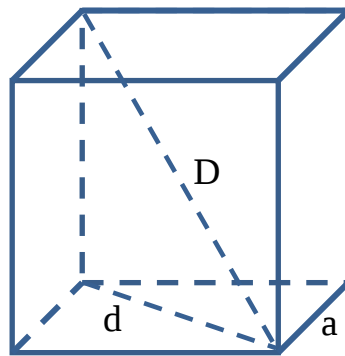


Рис. 3.

Задача 9. Известна длина ребра куба. Она равна 2. Необходимо найти:

- а) длину диагонали грани;
- б) длину диагонали куба;
- в) периметр основания;
- г) площадь грани;
- д) площадь диагонального сечения;
- е) площадь поверхности куба;
- ж) периметр и площадь сечения, проходящего через концы трех ребер, выходящих из одной и той же вершины;
- з) объем куба;
- и) радиус вписанной сферы;
- к) радиус описанной сферы.

Задача 10. По рис. 3. на основании обозначений, введенных перед задачей 9 и данных в табл. 6. значений элементов куба найти остальные элементы куба.

Таблица 6. Таблица значений элементов куба и связанных с кубом фигур

	a	d	D	s	S_n	V	r	R
а)	5							
б)		$3\sqrt{2}$						
в)			$8\sqrt{3}$					
г)				196				
д)					24			
е)						64		
ж)							3	
з)								$5\sqrt{3}$

Задача 11. Ребро куба равно 4. Найдите ребро двойственного октаэдра (вписанного в куб).

Задача 12. Ребро октаэдра равно 3. Найдите ребро двойственного куба, вписанного в октаэдр.

Задача 13. Высота правильной пирамиды относится к ребру пирамиды, выходящему из вершины, как 1 к 2. Найти величину угла между указанным ребром и основанием пирамиды.

Задача 14. В правильной треугольной пирамиде, изображенной на рисунке 4: a - сторона основания, b – боковое ребро, k – апофема. Обозначим через P - периметр основания, S_1 - площадь боковой поверхности, S_2 – площадь основания пирамиды, S - площадь пирамиды.

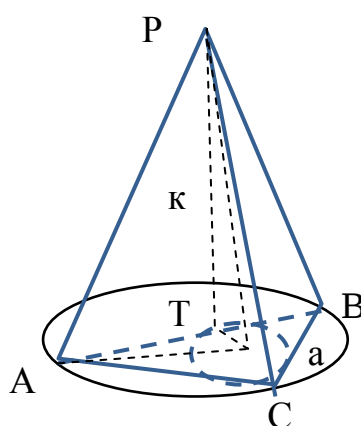


Рис. 4.

Вспомогательные формулы:

$$S_1 = Pk/2$$

$$P = 3a$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$S_2 = (a^2 \sqrt{3})/4$$

Заполните Таблицу 7.

Таблица 7

Значения элементов пирамиды

№	a	k	P	S_1	S
а)	5			75	
б)		24	24		
в)		18		297	
г)			45	315	
д)				$198\sqrt{3}$	$202\sqrt{3}$

3) Задачи для исследования.

Задача 15. Расположите изображение куба так, чтобы ни одна грань не была расположена вертикально. Имеет ли такой куб грани, расположенные горизонтально?

Задача 16. Можно ли разложить поверхность куба с длиной ребра 7 мм на прямоугольный лист бумаги размеры которого 21 мм на 14 мм?

Задача 17. Изобразите многоугольники, используя которые можно составить развертку прямоугольного параллелепипеда и опишите их количество и свойства, в том числе взаимные.

Задача 18. Имеется ли разновидность призмы с 43 ребрами? 36 ребрами?

Задача 19. Дана призма, количество граней которой равно $(n+2)$. Сколько углов и сторон имеет многоугольник, являющийся основанием призмы?

Задача 20. Дана пирамида. Количество углов при основании пирамиды равно n . укажите количество вершин, ребер и граней заданной пирамиды.

Задача 21. Рассмотрите понятия «правильная треугольная пирамида» и «правильный тетраэдр», выполнив их сравнение. Есть ли отличия между указанными геометрическими телами либо они определяют один вид многогранников?

Попробовав себя в качестве исследователей и проверив свои силы в поиске доказательств некоторых геометрических фактов, учащиеся готовы закрепить сформированный навык решением задач для доказательства.

4) Задачи для доказательства.

Задача 22. В параллелепипеде диагонали основания равны между собой, а боковое ребро образует с двумя смежными сторонам основания угол в 90° . Докажите, что заданный параллелепипед является прямоугольным.

Задача 23. Докажите, что число ребер призмы кратно 3.

Задача 24. Докажите, что сумма двугранных углов любого из боковых краев четырехугольной призмы равна 360° .

Задача 25. Дана призма, у которой 18 граней. Доказать, что основание заданной призмы 16-угольник.

Задача 26. Отрезки NE, NF и NK являются диагоналями граней куба, исходящими из вершины N. Точки EFK соединены отрезками (рис. 5.). Докажите, что многогранник NEFK, образованный заданными диагоналями куба и отрезками, соединяющими точки EFK, является правильным тетраэдром.

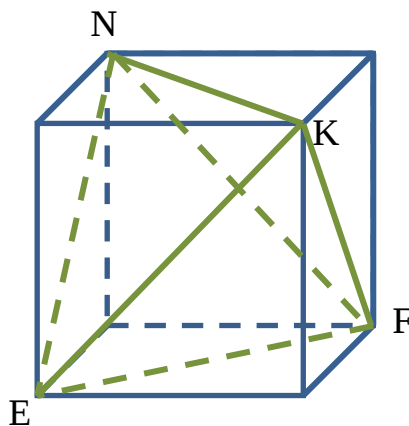


Рис. 5.

Задача 27. Докажите, что если две боковые грани треугольной призмы образуют угол в 90° , то сумма квадратов их площадей равна квадрату площади третьей боковой грани (рис. 6).

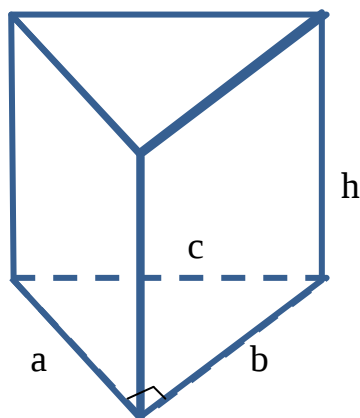


Рис. 6.

Задача 28. Докажите, что сечение параллелепипеда не может быть правильным пятиугольником.

Задача 29. Дана правильная треугольная пирамида $ABCT$. Ее высота TH равна стороне основания $AB = AC = CB$. Верно ли, что угол между ребром AT и плоскостью основания ABC равен 60° ?

Задача 30. «Пирамида является правильной, при условии равенства всех ее ребер». Докажите, что приведенное выражение верно.

Задача 31. Можно ли построить правильную четырехугольную пирамиду с боковым краем, равным 6, если за основание пирамиды возьмем квадрат, длина стороны которого равна $8\sqrt{2}$.

Последний блок заданий представляет собой набор задач, решение которых требует развитого пространственного воображения и знания свойств правильных многогранников. Однако вместе с тем завершающий блок демонстрирует красоту и изящество правильных многогранников. Сборные задания в нашей системе задач выполняют роль релаксирующего элемента, когда есть возможность обсудить и обобщить изученный материал по теме, а

так же поговорить о достижении поставленных в начале изучения темы целей.

5) Сборные задания.

Задача 32. На рисунке 7 изображен многогранник – «звезда Кеплера», полученный путем взаимопроникновения двух тетраэдров. Какой многогранник является общей частью (пересечением) этих тетраэдров?

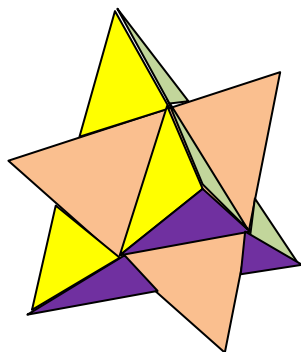


Рис. 7.

Задача 36. Какое минимальное число красок потребуется для окраски граней фигур (без использования получения новых цветов путем смешения красок), при условии, что соседние грани должны быть разных цветов:

- а) тетраэдра;
- б) куба;
- в) октаэдра;
- г) икосаэдра;
- д) додекаэдра.

Таким образом, в системе задач по теме «Правильные многогранники», направленной на проработку учащимися общеобразовательных школ графического и вычислительного материала по теме задания сгруппированы в 5 блоков:

1. Задачи на построение;
2. Задачи на вычисление;
3. Задачи для исследования;
4. Задачи на доказательство;

5. Сборные задачи.

Приведенная система заданий позволяет учащимся в интересной и доступной форме знакомиться с новым материалом, изучать его и закреплять полученные знания. Решения и ответы приведенных в системе заданий рассмотрены в приложении А данной работы.

§8. Результаты педагогического эксперимента

Базой эксперимента стал 10 класс Чикчинской СОШ имени Х.Х.Якина

На констатирующем этапе эксперимента с целью исследования формирования представлений о правильных многоугольниках и многогранниках в школьном курсе геометрии произведено наблюдение за деятельностью учащихся, посещение и анализ уроков, опросы, констатация фактов.

Для установления уровня знаний учащихся к моменту обучающего эксперимента была проведена проверочная тестовая работа. При подготовке заданий проверочной работы учитывались программные требования, а также нормы оценки письменного тестирования для 10 классов.

В предложенную учащимся проверочную работу вошли следующие задания:

Вариант А1.

1. Дан правильный восьмиугольник. Найдите градусную меру его углов.

2. Длина стороны правильного треугольника равна 4.

Найдите:

- а) периметр треугольника;
- б) площадь треугольника;
- в) радиус описанной окружности;
- г) радиус вписанной окружности.

3. Ребро куба равно 6.

Найдите:

- а) площадь грани;
- б) радиус описанной сферы;
- в) радиус вписанной сферы.

4. Ребро куба, вписанного в сферу, равно 2. Найдите площадь поверхности куба, описанного около этой же сферы.

5. Дан правильный треугольник, длина стороны которого равна 3. В данный треугольник вписана окружность, в которую в свою очередь вписан правильный шестиугольник. Найдите площади перечисленных в условии геометрических фигур.

Вариант А2.

1. Дан правильный девятиугольник. Найдите градусную меру его углов.

2. Длина стороны правильного треугольника равна 7.

Найдите:

- а) периметр треугольника;
- б) площадь треугольника;
- в) радиус описанной окружности;
- г) радиус вписанной окружности.

3. Ребро куба равно 4.

- а) площадь грани;
- б) радиус описанной сферы;
- в) радиус вписанной сферы.

4. Ребро куба, вписанного в сферу, равно 3. Найдите сумму длин ребер куба, описанного около этой же сферы.

5. Правильный треугольник и правильный шестиугольник вписаны в одну окружность. Найдите площади этих фигур, если радиус вписанной окружности треугольника равен 4.

Вариант А3.

1. Дан правильный шестиугольник. Найдите градусную меру его углов.
2. Длина стороны правильного треугольника равна 8.

Найдите:

- а) периметр треугольника;
- б) площадь треугольника;
- в) радиус описанной окружности;
- г) радиус вписанной окружности.

3. Ребро куба равно 6.

Найдите:

- а) площадь грани;
- б) радиус описанной сферы;
- в) радиус вписанной сферы.

4. Сумма длин ребер куба, вписанного в сферу, равна 24. Найдите ребро куба, описанного около этой же сферы.

5. Правильный треугольник со стороной 5 описан около окружности, в которую вписан правильный шестиугольник. Найдите площади этих фигур.

Результаты каждого учащегося оцениваются на основе общепринятых норм оценки (Таблица 8).

Таблица 8

Критерии оценки констатирующего этапа исследования

Баллы	Показатели оценки
1	2
1	Правильно выполнено менее чем на 2 балла
2	Правильно выполнено не менее 20% заданий
3	Правильно выполнено не менее 30% заданий
4	Правильно выполнено не менее 40% заданий
5	Правильно выполнено не менее 50% заданий
6	Правильно выполнено не менее 60% заданий
7	Правильно выполнено не менее 70% заданий
8	Правильно выполнено не менее 80% заданий
9	Правильно выполнено не менее 90% заданий
10	Правильно выполнены все задания

Результаты проведенной работы представлены в таблице 9.

Таблица 9

Результаты констатирующего эксперимента в 10 классе

номер	Номер задания										Балл
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+	6
2.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	10
3.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	10
4.	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+	5
5.	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	6
6.	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	8
7.	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	7
8.	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	5
9.	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	8
10.	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	8
11.	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	3
12.	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	8
13.	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	8
14.	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+	6
15.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	10
16.	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	7
17.	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	4
18.	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	7
19.	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+	5
20.	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	8
21.	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	9
22.	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	9
23.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	10

Результаты проведенной проверочной работы дают возможность оценить степень развитости пространственного мышления и умение на основании этого находить и использовать доказанные геометрические зависимости. Обозначим три условных уровня качества подготовки учащихся:

Низкий уровень – учащиеся слабо владеют навыками пространственного мышления. Не способны увидеть и сформулировать даже самые основные признаки объектов в результате их сопоставления (не владеют навыком эмпирического сравнения).

Средний уровень – учащиеся имеют основные навыки пространственного мышления. Способны увидеть и сформулировать основные признаки объектов в результате их сопоставления (владеют навыком эмпирического сравнения), на основе предложенного преподавателем плана способны исследовать предложенные к изучению геометрические объекты, корректируя свою деятельность по указанию преподавателя.

Высокий уровень - учащиеся имеют развитые навыки пространственного мышления. Способны самостоятельно представить на основе описания предложенные геометрические объекты и выполнить построение их изображения. На основе понимания свойств и зависимостей предложенных геометрических объектов учащийся самостоятельно планирует свою деятельность по исследованию предложенных к изучению геометрических объектов, самостоятельно корректируя свою деятельность.

В 10 классе количество испытуемых составило 23 учащихся.

Из них выполнили задание без ошибок (высокий уровень) 4 учащихся (17%), допустили 2-3 ошибки (средний уровень) 11 учащихся (48%), допустили 4-5 ошибок (низкий уровень) допустили 8 учащихся (35%) (Рис. 8).

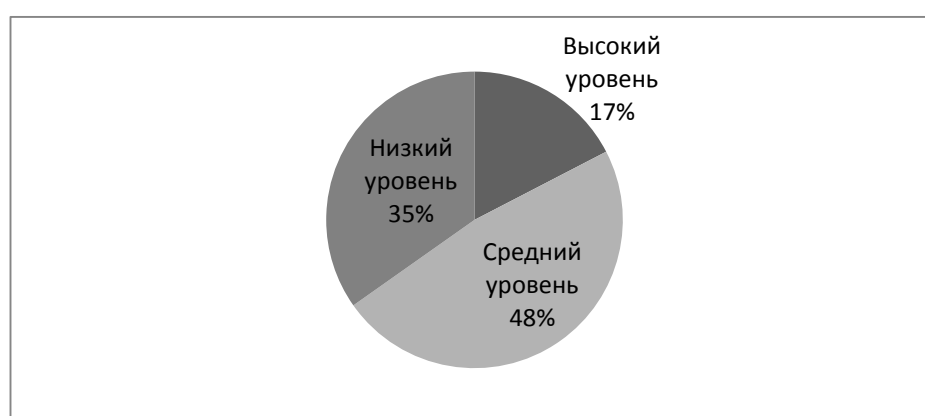


Рис. 8. Диаграмма анализа ошибок учащихся

Был также проведён анализ уровня сформированности представлений о правильных многогранниках в школьном курсе геометрии. Результаты исследования приведены на Рис. 9.

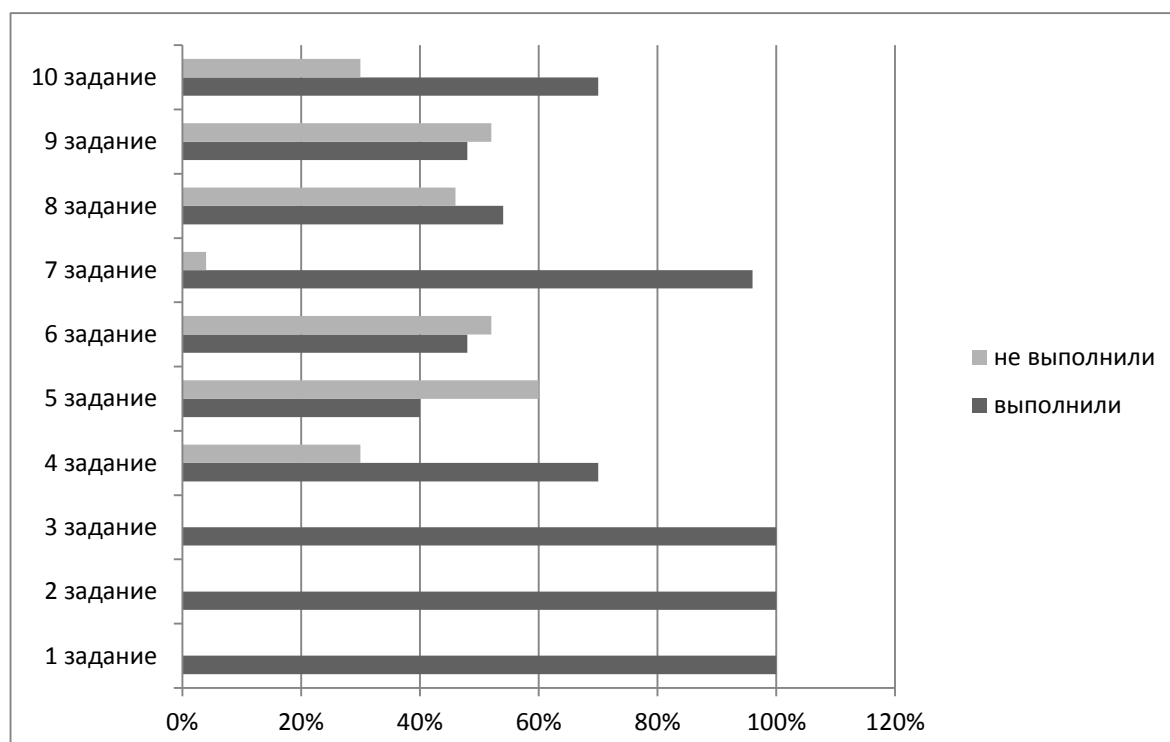


Рис. 9. Диаграмма результатов исследования

Таким образом, результаты проведенного анализа показали необходимость работы над формированием представлений о правильных многогранниках в школьном курсе геометрии.

На поисковом этапе эксперимента проведена апробация разработанной системы задач, которая представлена в 8 параграфе.

После проведения апробации составленной системы заданий было установлено, что уровень представлений о правильных многогранниках в школьном курсе геометрии у учащихся повысился.

Выводы по второй главе

По итогам реализации методики обучения решению типовых задач по теме «Правильные многогранники» в школьном курсе геометрии можно сформулировать следующие выводы:

1. Каждый блок материала, изучаемый в рамках рассматриваемой темы, с целью практического понимания необходимо закреплять выполнением заданий, построенных на изученной теории. Задания должны быть разного уровня сложности для того, чтоб в процессе выполнения заданий была возможность двигаться «от простого к сложному».

2. Разработанная система задач по теме, которую можно условно разделить на пять разделов: задачи на построение, на вычисление, для исследования, на доказательство, сборные задачи показала свою эффективность по результатам апробации на поисковом этапе эксперимента.

3. По результатам констатирующего этапа эксперимента, нацеленного на исследование уровня знаний учащихся о многоугольниках их свойствах и взаимозависимости элементов, была установлена необходимость работы над формированием представлений о правильных многоугольниках и их пространственных аналогах - многогранниках в школьном курсе геометрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам проведенного исследования получены результаты, основные из которых можно сформулировать следующим образом:

1. Подходы к определению понятия правильного многогранника, выделяют следующие: Многогранник может быть определен как тело, как поверхность или как тело, поверхность которого обладает определенными свойствами. Кроме того, существуют описательный (дискриптивный) и конструктивный способы определения многогранника. Каждый из подходов к определению имеет свое право на жизнь. Выбор варианта определения понятия зависит от степени подготовки учащихся и целей обучения на конкретном этапе. Следует учитывать так же то обстоятельство, что как правило изучение темы «Правильные многогранники» является одним из этапов по переходу от рассмотрения объектов на плоскости к исследованию пространственных фигур.

2. Рассмотрены основные цели обучения школьников рассматриваемой теме: общие, прямые, развивающие. Определены группы задач, решаемых для достижения соответствующих выявленных целей: образовательные, развивающие, воспитательные. Описаны используемые для решения задач средства (инструменты) – наглядные пособия (модели), практические задания.

3. Определены основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме. В общем виде требования к знаниям можно описать как формулировка определений, описание понятий, свойств и зависимостей, доказательство теорем.

4. Проведен анализ содержания теоретического и задачного материала темы в учебниках разных авторов. В частности рассмотрены учебники для различных профилей обучения: Л.С. Атанасяна и др. [5], А.Д. Александрова [3], И.М. Смирновой [31], [32].

5. Выявлены методические особенности обучения теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы. При многообразии доступных инструментов, форм и методов обучения преподаватель может повышать эффективность обучения за счет комбинирования элементов учебного процесса, усиливая тем самым интерес учащихся к предмету и повышая результаты обучения.

6. Сформулированы методические рекомендации по обучению теме «Правильные многогранники» в курсе математики общеобразовательной школы. Каждый блок материала, изучаемый в рамках рассматриваемой темы, с целью практического понимания необходимо закреплять выполнением заданий, построенных на изученной теории. Задания должны быть разного уровня сложности для того, чтоб в процессе выполнения заданий была возможность двигаться «от простого к сложному».

7. Разработана система задач по теме, которую можно условно разделить на пять разделов: задачи на построение, на вычисление, для исследования, на доказательство, сборные задачи. Система заданий показала свою эффективность по результатам апробации на поисковом этапе эксперимента.

8. По результатам констатирующего этапа эксперимента, нацеленного на исследование уровня знаний учащихся о многоугольниках их свойствах и взаимозависимости элементов, была установлена необходимость работы над формированием представлений о правильных многоугольниках и их пространственных аналогах - многогранниках в школьном курсе геометрии. Разработанная система задач по теме показала свою эффективность по результатам апробации на поисковом этапе эксперимента.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдулгалимов, Г.Л. Методика формирования системы базовых знаний по геометрии с использованием компьютерных технологий как основы обучения решению задач: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. — Махачкала, 2004.-164 с.
2. Александров, А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия : учеб. для 11 кл. с углубл. изучением математики. -4-е изд. - М.: «Просвещение», 2000.- 319 с.
3. Александров, А.Д. Геометрия для 10-11 классов: Учеб. Пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. Математики [Текст] / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1992. – 464 с.
4. Аргунов, Б.И., Балк М.Б., Элементарная геометрия. - «Просвещение», М., 1966
5. Атанасян, Л.С. Геометрия: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. [Текст] / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кодомцев и др. – М.: Просвещение, 1998. – 207 с.
6. Бескин, Л.Н., Стереометрия. – «Просвещение», М., 1971
7. Боженкова, Л.И. Методика формирования УУД при обучении геометрии. – М.: БИНОМ, 2013. -189 с.
8. Болтянский, В.Г. Выпуклые многоугольники и многогранники [Текст] / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом // Математика в школе. – 1966. – № 3. – С. 66– 71.
9. Буфеев, С.В. Вычисление площади сечения многогранника разными способами [Текст] / С.В. Буфеев // Математика в школе. – 2008. - № 9.
10. Глаголев, Н.А. Геометрия: Стереометрия [Текст] / Н.А. Глаголев, А.А. Глаголев. – М.: Педагогическая литература, 2001 – 258 с.
11. Глейзер, Г.И. История математики в школе, М., 1983.

12. Гусев, В.А., Василенко, А.В. Развитие пространственного мышления учащихся как одна из основных задач школьного математического образования // Школа будущего. 2013. №3. С.65-70.

13. Гусев, В.А., Малинина, И.С. Исследовательские умения учащихся при решении геометрических задач // Математика в современном мире: Материалы Международной конференции, посвященной 150-летию Д.А. Граве. Вологда, 2013. С. 73-80.

14. Гутников, А. Интерактивные методики обучения [Электронный ресурс]/ А. Гутников. – Режим доступа: <http://law.edu.ru/script/cntsource.asp?cntID=100013631>. Последнее обновление: 29.12.2018.

15. Жук, Л.В. Реализация дидактического принципа наглядности в обучении геометрии средствами информационных компьютерных технологий // European Social Science Journal. 2014. №4-1 (43).С.157-160.

16. Киселев, А.П. Геометрия: Учебник для 9-10 классов средней школы. / А.П. Киселев. - М.: Учпедгиз, 1956.

17. Киселев, А.П. Элементарная геометрия. Книга для учителя. М: Издательство Editorial URSS, 2016, 288 с.

18. Крайнева, Л.Б. Построение правильных многогранников с использованием куба [Текст]// Математика в школе. – 1994. - № 2.

19. Литвиненко, В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений: кн. для учителя. — М., Просвещение, 1991. - 127 с.

20. Люстерник, Л.А., Выпуклые фигуры и многогранники. - М.,1956.

21. Мехтиев, М.Г. Методика обучения геометрии в 10-11 кл. общеобразовательной школы с использованием компьютера: дисс. докт. пед. наук: 13.00.02. Махачкала, 2002. - 282 с.

22. Митенева, С.Ф. Нестандартные задачи как средство развития творческих способностей учащихся// В мире научных открытий. - 2015. - №3.1(63). - С.706-715.

23. Митенева, С.Ф. Принципы методической системы обучения геометрии // Современные исследования социальных проблем (электронный научный журнал). – 2016. - №1 (57). - с. 3-11 – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/v/printsipy-metodicheskoy-sistemy-obucheniya-geometrii>. Последнее обновление: 14.11.2019.

24. Монахова, Н.И. Из опыта обучения геометрии в старших классах (10 кл). – М.: Просвещение, 1981

25. Ольбинский, И.Б. Методика обучения учащихся старших классов рефлексивному исследованию математических задач: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - Москва, 2002.-222 с.

26. Погорелов, А.В. Геометрия [Текст]: учебник для 7-9 классов, 2-е изд. / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

27. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 10 – 11 классы / Е.А. Седова, С.В. Пчелинцев, Т.М. Мищенко и др.; под общ. Ред. М.В. Рыжакова. – М.: Вентана-Граф, 2012. – 136 с.

28. Рыжик, В.И. Новые тесты по геометрии [Текст] / В.И. Рыжик // Математика в школе. – 2007. - № 8.

29. Саакян, С.М. Изучение темы «Многогранники» в курсе 10 класса [Текст] / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов// Математика в школе. – 2000. – № 2. – С. 44.

30. Сагателова, Л.С. Ортогональное проектирование и решение задач на объемы многогранников [Текст] / Л.С. Сагателова // Математика в школе. – 2007. - № 10.

31. Смирнова, И.М. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для 10-11 кл. гуманитар. профиля / И.М. Смирнова. – М.: Просвещение, 1997. – 159 с.

32. Смирнова, И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). — М.: Мнемозина, 2003. - 232 с.

33. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Базовый уровень, <http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19814>.
34. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Профильный уровень, <http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19812>.
35. Стройк, Д.Я. Краткий очерк Истории математики [Текст] / Д.Я. Стройк. – М.: Издательство «Наука», 1996 – 286 с.
36. Торопова, З.В. Обучение старшеклассников проектированию математического объекта в курсе геометрии: дис. канд. пед. наук:13.00.02 Спб, 2012.- 193 с.
37. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки от 17 мая 2012 г. № 413): <https://normativ.kontur.ru>.
38. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – М.: Омега-Л, 2014. – 134 с.
39. Хевсокова, М.Ю. Методика обучения геометрическим преобразованиям пространства учащихся старшей школы в условиях профильной дифференциации: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - Москва, 2011.- 238 с.
40. Ходеева, Т.В. Методика изучения многогранников в средней школе на основе фузионистской концепции: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - Москва, 2001.-220 с.
41. Ходеева, Т.В. Свойства многогранников [Текст] / Т. Ходеева // Математика. – 2002. – № 11. – С.20 – 26.
42. Ходот, А.Ю. Как сделать геометрическую иллюстрацию наглядной [Текст] / А.Ю. Ходот // Математика в школе. – 2007. - № 8. – С. 21-26.
43. Хрестоматия по истории математики/ под ред. А.П. Юшкевича. М., «Просвещение», 1977.
44. Черняева, А.Р. реализации деятельностного подхода в процессе формирования пространственного мышления учащихся при обучении

построению сечений многогранников: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. — Москва, 2004.-155 с.

45. Шаламова, И.Н. Система задач для повышения уровня знаний учащихся старших классов общеобразовательной школы по теме «Правильные многогранники» // Вестник магистратуры. -2019. - № 12 (99).

46. Шереметьева, О.В. Обучение решению стереометрических задач с учетом взаимосвязи образного и логического компонентов мышления: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. -М., 1997. - 126 с.

47. Щепин, О.Н. Наглядно-конструктивный подход к изучению стереометрии в старших классах средней школы: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - М., 1999. - 126 с.

48. Geometry of the Moment Map for Representations of Quivers?may 2011, William Sawley-Boevey, Compositio Mathematica 126: 257-293, <https://www.cambridge.org/core/>

49. Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space A.YU. Vesnin, A.A. Egorov. Cornell University. arXiv:1909.11523v1 [math.GT] 25 Sep 2019. 20 с. <https://arxiv.org/pdf/1909.11523.pdf>

50. Launching Mathematica 10 with 700+ New Functions and a Crazy Amount of R&D, July 9, 2014 – Stephen Wolfram, <https://blog.wolfram.com/2014/07/09/launching-mathematica-10-with-700-new-functions-and-a-crazy-amount-of-rd/>

51. Padberg M.W., Rinaldi G.A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems // SIAM Review. 1991. Vol. 33, no. 1. P. 60–100. doi: 10.1137/1033004 <http://journal.imm.uran.ru/2018-v.24-2-pp.235-242>.

52. ProofWithoutWords: How Did Archimedes Sum Squares in the Sand?, 2016, K.Kamin, Mathematical Association of America, <http://www.jstor.org>.

Приложение А

Ответы и решения к задачам, представленным в §7

Задача 1. Постройте сечение куба в форме: а) треугольника, б) четырехугольника, в) пятиугольника, г) шестиугольника.

Решение: а) построение сечения куба в форме треугольника

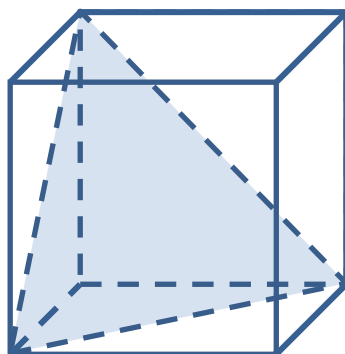


Рис.10.

Решение: б) построение сечения куба в форме четырехугольника

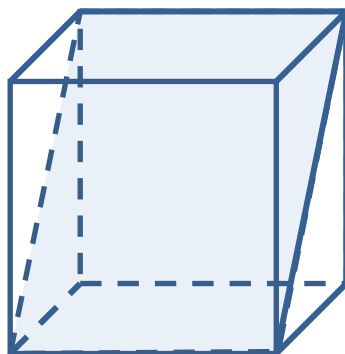


Рис.11.

Решение: в) построение сечения куба в форме пятиугольника

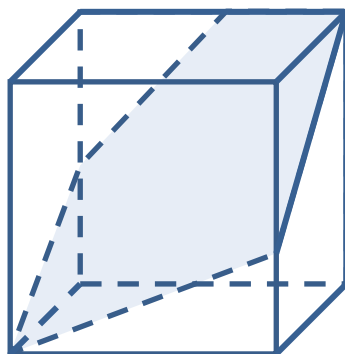


Рис.12.

Продолжение Приложения А

Решение: г) построение сечения куба в форме шестиугольника

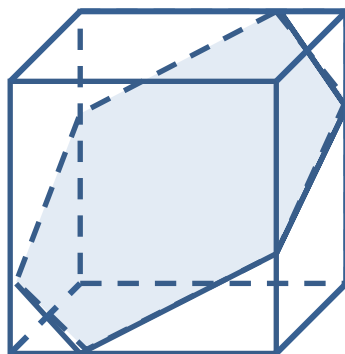


Рис. 13.

Задача 2. а) Постройте сечение треугольной призмы, проходящее через ребро при основании. б) Выполните дополнительные построения (построение) не повторяя построение, выполненное при выполнении задания «а)» для изображения всех видов многоугольников, форму которых будет принимать сечение призмы, при вращении вокруг ребра. Перечислите виды многогранников, форму которых будет принимать сечение.

Решение:

а)

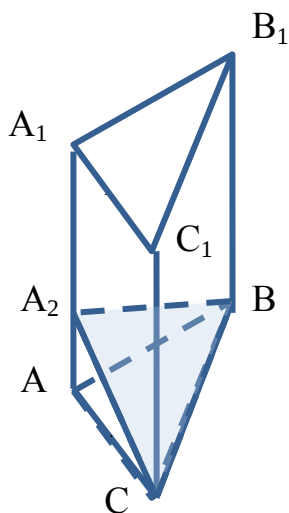


Рис.14.

б)

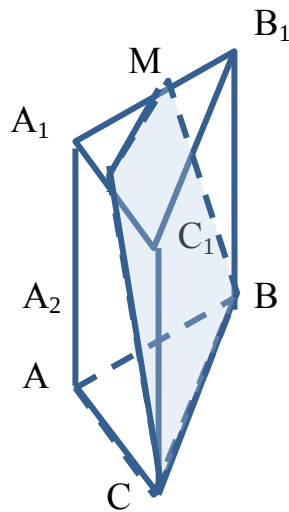


Рис.15.

Ответ: при вращении сечение будет принимать форму треугольника или трапеции.

Задача 3. Вершинами какого многогранника являются центры граней куба? Выполните схематичное построение фигур.

Решение:

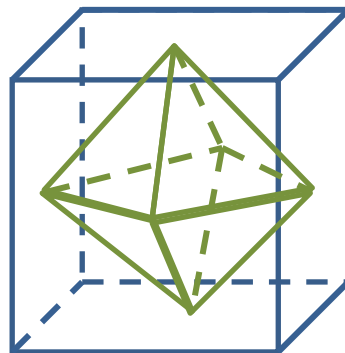


Рис.16.

Ответ: Октаэдр.

Задача 4. Вершинами какого многогранника являются центры граней октаэдра?

Продолжение Приложения А

Решение:

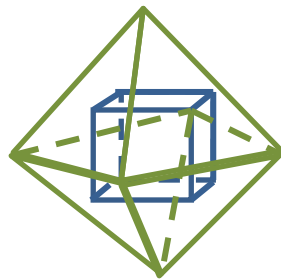


Рис.17.

Ответ: Куб.

Задача 5. Вершинами какого многогранника являются середины ребер тетраэдра?

Решение:

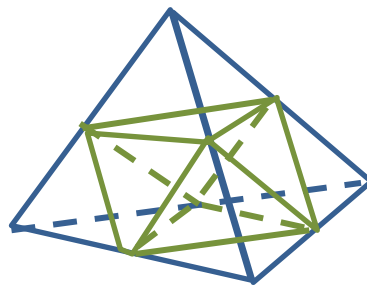


Рис.18.

Ответ: Октаэдр.

Задача 6. Вершинами какого многогранника являются центры граней тетраэдра?

Решение:

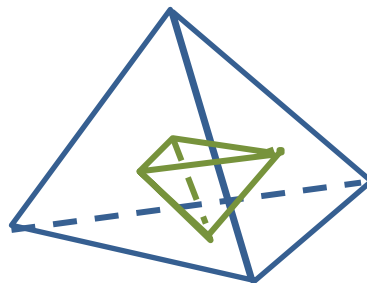


Рис.19.

Ответ: Тетраэдра.

Продолжение Приложения А

Задача 7. Создайте два изображения одной и той же пирамиды, одно с наиболее видимыми ребрами, другое с наименьшим количеством видимых ребер.

Решение:

Изображение пирамиды с наиболее видимыми ребрами - вид сверху (все ребра видны)

Изображение пирамиды с наименьшим количеством видимых ребер – вид со стороны основания (видны только края основания).

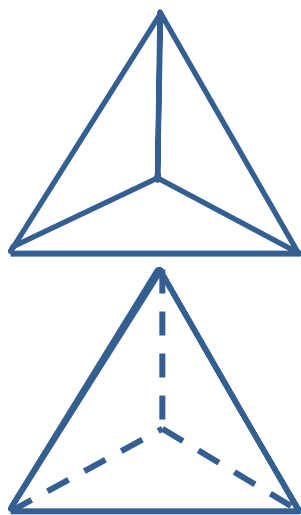


Рис.20.

Задача 8. Выполните построение изображения многогранника, имеющего 9 ребер.

Решение: построим треугольную пирамиду АВСТ, имеющую 6 ребер (АВ, ВС, СА, АТ, ВТ,СТ.) Далее изобразим сечение пирамиды плоскостью – например, вертикальной относительно основания, хотя горизонтально расположенное сечение относительно основания тоже подойдет – тогда будет отсекается вершина Т. На рисунке отсечена вершина С - добавлены 3 новых вершины: Р, N и К и, соответственно, 3 ребра: PN, NK, КР. Всего получится 9 ребер: АВ, BN, NK, КА, АТ, ВТ,РТ, NP и РК.

Продолжение Приложения А

Задача 9. Известна длина ребра куба. Она равна 2. Необходимо найти:

- а) длину диагонали грани;
- б) длину диагонали куба;
- в) периметр основания;
- г) площадь грани;
- д) площадь диагонального сечения;
- е) площадь поверхности куба;
- ж) периметр и площадь сечения, проходящего через концы трех ребер, выходящих из одной и той же вершины;
- з) объем куба;
- и) радиус вписанной сферы;
- к) радиус описанной сферы.

Решение:

Для представления данных и искомых величин выполним построение изображения куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и искомых элементов (рис.23.)

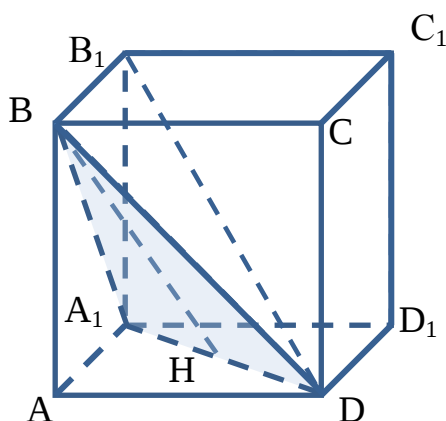


Рис. 23.

а) Диагональ грани $ABCD$ - отрезок BD . Гранями куба являются квадраты, следовательно треугольник ABD - прямоугольный, где BD -гипотенуза. По теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4+4 = 8$. $BD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Продолжение Приложения А

б) Диагональ куба DB_1 – гипотенуза в прямоугольном треугольнике DBB_1 . По теореме Пифагора $DB_1^2 = BD^2 + BB_1^2 = 4 + 8 = 12$. $DB_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

в) Периметр основания AA_1D_1D (основание куба – квадрат) равен сумме ребер, то есть периметр квадрата $AA_1D_1D = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

г) Площадь грани $ABCD$ (грань куба – квадрат) равна произведению сторон, то есть площадь квадрата $ABCD = 2 * 2 = 4$.

д) Площадь диагонального сечения куба – квадрата $BDD_1B_1 = BD * DD_1 = 2\sqrt{2} * 2 = 4\sqrt{2}$.

е) Площадь поверхности куба является суммой площадей всех его граней. Все грани куба равны между собой. Количество граней в кубе равно 6. Отсюда площадь поверхности куба = площадь грани (например $ABCD$) * 6 = $4 * 6 = 24$.

ж) Сечение BDA_1 , проходит через вершины BDA_1 – концы трех ребер AB , AD , AA_1 , выходящих из вершины A . Таким образом, сечение BDA_1 , соответствует условия задания и является искомым сечением. BDA_1 – равносторонний треугольник, сторонами которого являются диагонали соответствующих граней. Периметр треугольника $BDA_1 = BD * 3 = 2\sqrt{2} * 3 = 6\sqrt{2}$. Для нахождения площади треугольника BDA_1 найдем высоту $BH^2 = BD^2 - \frac{1}{2} * A_1D = (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2} / 2)^2 = 8 - 2 = 6$. $BH = \sqrt{6}$. Площадь треугольника $BDA_1 = \frac{1}{2} * BH * BD = \frac{1}{2} * \sqrt{6} * 2\sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

з) объем куба $2 * 2 * 2 = 8$; и) радиус вписанной сферы $2/2 = 1$;

к) радиус описанной сферы $(2\sqrt{3})/2 = \sqrt{3}$.

Ответ: а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 8; г) 4; д) $4\sqrt{2}$; е) 24; ж) $2\sqrt{3}$; з) 8; и) 1; к) $\sqrt{3}$.

Задача 10. По рис. 22. на основании обозначений, введенных перед задачей 9 и данных в табл. 10. значений элементов куба найти остальные элементы куба.

Продолжение Приложения А

Таблица 10

Таблица значений элементов куба и связанных с кубом фигур для заполнения

	a	d	D	s	S _n	V	r	R
а)	5							
б)		$3\sqrt{2}$						
в)			$8\sqrt{3}$					
г)				196				
д)					24			
е)						64		
ж)							3	
з)								$5\sqrt{3}$

Решение: используя *формулы для вычисления основных элементов куба со стороной a* находим искомые значения. Ответы: см. таблицу 11.

Таблица 11

Таблица значений элементов куба и связанных с кубом фигур с ответами

	a	d	D	s	S _n	V	r	R
а)	5	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{3}$	25	150	125	2,5	$25\sqrt{3}$
б)	3	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$	9	54	27	1,5	$1,5\sqrt{3}$
в)	8	$8\sqrt{2}$	$8\sqrt{3}$	64	384	512	4	$4\sqrt{3}$
г)	14	$14\sqrt{2}$	$14\sqrt{3}$	196	1176	2744	7	$7\sqrt{3}$
д)	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	24	8	1	$\sqrt{3}$
е)	4	$4\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	16	96	64	2	$2\sqrt{3}$
ж)	6	$6\sqrt{2}$	$6\sqrt{3}$	36	216	216	3	$3\sqrt{3}$
з)	10	$10\sqrt{2}$	$10\sqrt{3}$	100	600	1000	5	$5\sqrt{3}$

Задача 11. Ребро куба равно 4. Найдите ребро двойственного октаэдра (вписанного в куб).

Решение: Для представления данных и искомых величин выполним построение изображения куба и двойственного ему октаэдра (рис.24.)

Решение:

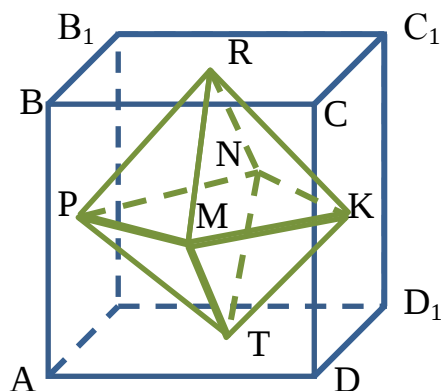


Рис.24.

Вершины двойственного октаэдра $PNKMRT$, вписанного в куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ являются центрами граней куба. Следовательно, ребра двойственного октаэдра (например RM и MT), лежат в одной плоскости, параллельной граням $ABB_1 A_1$ и $DCC_1 D_1$. Таким образом, задачу дальше можно решать относительно проекции рассматриваемых ребер $R_1 M_1$ и $M_1 T_1$ на грань куба $ABB_1 A_1$. (рис.25.).

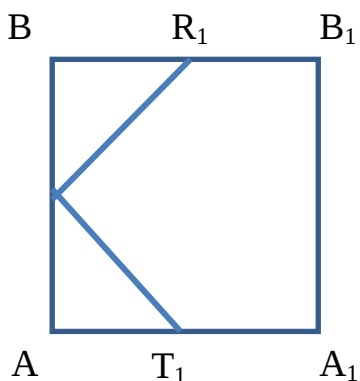


Рис.25.

Продолжение Приложения А

Имеем два равных между собой прямоугольных треугольника R_1BM_1 и M_1AT_1 , где катеты равны половине длины ребра куба. $R_1B = \frac{1}{2} \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$. Искомая величина длина ребра октаэдра R_1M_1 является гипотенузой прямоугольного треугольника R_1BM_1 . $R_1M_1^2 = R_1B^2 + BM_1^2 = 4 + 4 = 8$. $R_1M_1 = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$

Задача 12. Ребро октаэдра равно 3. Найдите ребро двойственного куба, вписанного в октаэдр.

Решение: Для представления данных и искомых величин выполним построение изображения октаэдра и двойственного ему куба (рис.26.)

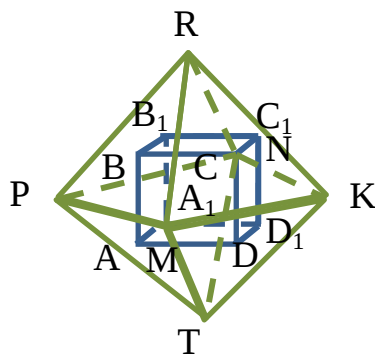


Рис.26.

На рисунке видно, что вершины вписанного в октаэдр $PNKMRT$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, лежат на центрах граней октаэдра и одновременно лежат на поверхности сферы, вписанной в октаэдр. Для дальнейшего решения обратимся к формуле зависимости радиуса сферы, вписанной в октаэдр от ребра октаэдра: $r = (a\sqrt{6})/6$, где:

r - радиус сферы, вписанной в октаэдр;

a - ребро октаэдра.

Для нашей задачи получаем $r = (3\sqrt{6})/6 = \sqrt{6}/2$, а диаметр сферы

$$D = r \cdot 2 = \sqrt{6}/2 \cdot 2 = \sqrt{6}.$$

Продолжение Приложения А

Исходя из условия нашей задачи видно, что описанная в октаэдр сфера одновременно является сферой, описанной возле куба. Так как из решенных ранее задач нам известно, что диаметр сферы, описанной возле куба равен диаметру куба (D). Используя формулу $D = b\sqrt{3}$, где:

D - диаметр куба;

b – ребро куба.

Выражаем $b = D/\sqrt{3} = \sqrt{6}/\sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 13. Высота правильной пирамиды относится к ребру пирамиды, выходящему из вершины, как 1 к 2. Найти величину угла между указанным ребром и основанием пирамиды.

Решение: Для представления данных и искомых величин выполним построение изображения пирамиды (рис.27.)

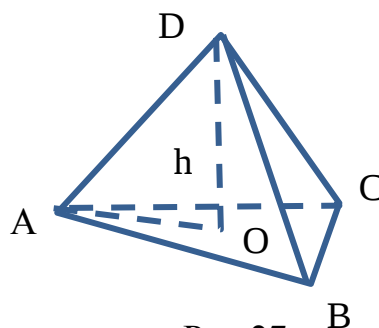


Рис.27.

Исходя из заданного соотношения величины DO к AD , равного $1/2$, имеем $\sin \angle DAO = 1/2$, следовательно $\angle DAO = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

Задача 14. В правильной треугольной пирамиде, изображенной на рисунке 28 a - сторона основания, b – боковое ребро, k – апофема. Обозначим через P - периметр основания, S_1 - площадь боковой поверхности, S_2 – площадь основания пирамиды, S - площадь пирамиды.

Продолжение Приложения А

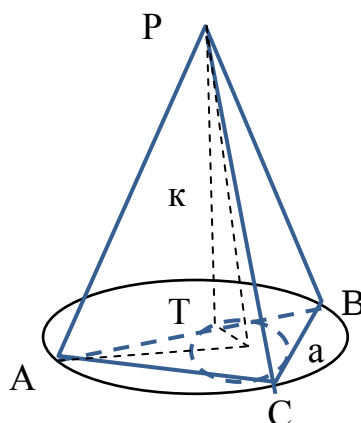


Рис.28.

Вспомогательные формулы:

$$S_1 = Pk/2$$

$$P = 3a$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$S_2 = (a^2 \sqrt{3})/4$$

Заполните таблицу 12.

Таблица 12

Таблица значений элементов пирамиды для заполнения

№	a	k	P	S_1	S
а)	5			75	
б)		24	24		
в)		18		297	
г)			45	315	
д)				$198\sqrt{3}$	$202\sqrt{3}$

Решение: используя **формулы для вычисления основных элементов правильной треугольной пирамиды** находим искомые значения.

Ответы: см. таблицу 13.

Таблица значений элементов пирамиды с ответами

№	a	k	P	S_1	S
а)	5	10	15	75	$75+25\sqrt{3}/4$
б)	8	24	24	288	$16\sqrt{3}+288$
в)	11	18	33	297	$121\sqrt{3}/4+297$
г)	15	14	45	315	$225\sqrt{3}/4+315$
д)	4	$8\sqrt{3}/3$	12	$198\sqrt{3}$	$202\sqrt{3}$

На основе отработанных уже навыков на построение и вычисление учащиеся могут попробовать свои силы в качестве исследователей. Для этих целей подготовлен блок заданий для исследований.

3) Задачи для исследования.

Задача 15. Расположите изображение куба так, чтобы ни одна грань не была расположена вертикально. Имеет ли такой куб грани, расположенные горизонтально?

Решение:

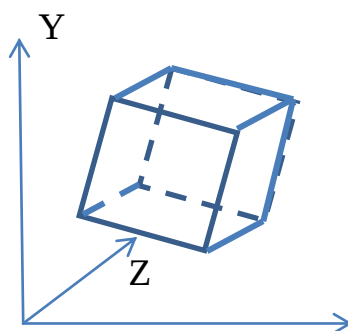


Рис.29.

Изобразим оси координат трехмерного пространства и построим в данной системе куб таким образом, чтоб боковые грани не были расположены вертикально. В связи с тем, что в кубе все ребра параллельны или вертикальны (расположены под прямым углом) по отношению друг к другу при условии не параллельности боковых граней оси Y грани нижнего и верхнего оснований не будут параллельны оси X (не будут расположены в горизонтальной плоскости). Ответ - нет.

Задача 16. Можно ли разложить поверхность куба с длиной ребра 7 мм на прямоугольный лист бумаги размеры которого 21 мм на 14 мм?

Решение. Так как заданный куб имеет длину ребра 7 мм, то его грань является квадратом с размерами $7 * 7$ мм. Размеры заданного листа бумаги позволяют расположить на нем 2 квадрата указанных размеров вдоль меньшей стороны ($14 / 7 = 2$) и 3 квадрата вдоль большей стороны ($21 / 7 = 3$), то есть всего получаем 6 квадратов ($2 * 3 = 6$). Квадрат имеет 6 граней, следовательно, на заданном прямоугольном листе бумаги размером 21 мм на 14 мм можно разложить поверхность куба с длиной ребра 7 мм

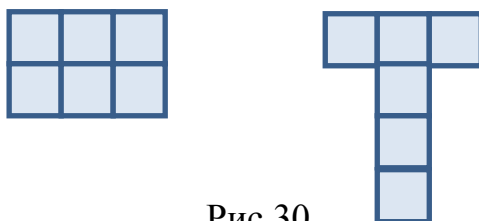


Рис.30.

Ответ – да.

Задача 17. Изобразите многоугольники, используя которые можно составить развертку прямоугольного параллелепипеда и опишите их количество и свойства, в том числе взаимные.

Решение. Для составления развертки прямоугольного параллелепипеда необходимо 6 прямоугольников (рис. 31.). Это должны быть два одинаковых комплекта, состоящих из трех видов прямоугольников: 1 вид прямоугольников - основания размером a (ширина) и b (длина), 2 вид прямоугольников - боковые грани, смежные с ребром a , будут иметь размеры a (ширина) и c (высота), 3 вид прямоугольников - боковые грани, смежные с ребром b , будут иметь размеры b (длина) и c (высота).

Продолжение Приложения А

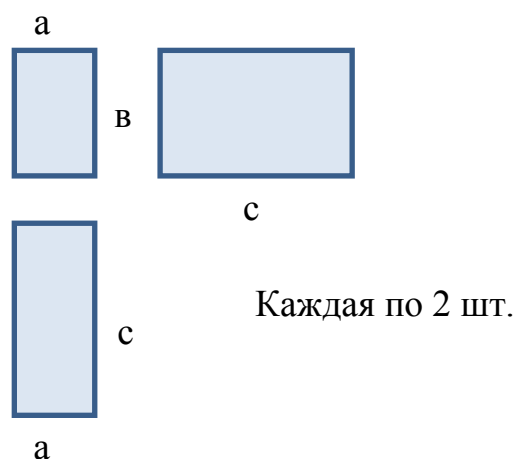


Рис.31.

Задача 18. Имеется ли разновидность призмы с 43 ребрами? 36 ребрами? Решение. Рассмотрим призму с наименьшим количеством ребер (треугольную). У треугольной призмы 9 ребер (по 3 у каждого основания и 3 боковых ребра). При добавлении одного угла в основание призмы количество ребер увеличивается на 3 (по одному у каждого основания и одно боковое) и становится равным 12 и так далее. Следовательно, n -угольная призма имеет $3n$ ребер. Исходя из вышеизложенного, призмы с 43 ребрами быть не может. Разновидностью призмы, имеющей 36 ребер является 12-угольная призма ($36 / 3 = 12$).

Задача 19. Дана призма, количество граней которой равно $(n+2)$. Сколько углов и сторон имеет многоугольник, являющийся основанием призмы? *Решение.* Так как любая призма имеет два основания и боковые грани, количество которых зависит от вида многоугольника, являющегося основанием призмы, то исходя из обозначений, введенных в условии задачи, количество боковых граней заданной призмы равно $(n + 2 - 2 = n)$. Количество ребер призмы, являющихся сторонами основания призмы, равно числу боковых граней призмы, то есть n . Таки образом, основание заданной призмы является n -угольником, имеющим n сторон.

Продолжение Приложения А

Задача 20. Дана пирамида. Количество углов при основании пирамиды равно n . укажите количество вершин, ребер и граней заданной пирамиды.

Решение. Так как в пирамиде помимо вершин при основании имеется еще только одна, то количество вершин заданной пирамиды равно $n + 1$.

Так как в пирамиде количество ребер при основании равно количеству углов при основании, и каждый угол при основании соединен с вершиной пирамиды ребром, то количество ребер пирамиды вдвое больше количества углов при основании, то есть количество ребер заданной пирамиды равно $n * 2$. Так как в пирамиде количество боковых граней равно количеству ребер при основании и основание так же является гранью, то количество граней заданной пирамиды равно $n + 1$. *Ответ:* количество вершин заданной пирамиды равно $n + 1$; количество ребер заданной пирамиды равно $n * 2$; количество граней заданной пирамиды равно $n + 1$.

Задача 21. Рассмотрите понятия «правильная треугольная пирамида» и «правильный тетраэдр», выполнив их сравнение. Есть ли отличия между указанными геометрическими телами либо они определяют один вид многогранников? Решение. Рассмотрим определения понятий, которые нужно сравнить: «Правильная треугольная пирамида» - это пирамида, основанием которой является правильный треугольник, а вершина проецируется в центр основания. «Тетраэдр» - это правильный многогранник (правильная треугольная пирамида) у которой все грани являются правильными треугольниками. Любой многогранник, удовлетворяющий определению тетраэдра по определению является правильной треугольной пирамидой. Вместе с тем, в случае с пирамидой боковые грани являются равнобедренными (но не обязательно равносторонними) треугольниками, следовательно, не каждая правильная треугольная пирамида является тетраэдром.

4) Задачи для доказательства.

Задача 22. В параллелепипеде диагонали основания равны между собой, а боковое ребро образует с двумя смежными сторонам основания угол в 90° . Докажите, что заданный параллелепипед является прямоугольным.

Доказательство: Равенство диагоналей основания указывает на то, что основание параллелепипеда является прямоугольником. Угол в 90° между боковым ребром и двумя смежными сторонам основания обозначает перпендикулярность бокового ребра плоскости основания, так как смежные одному боковому ребру стороны основания задают плоскость основания. Все боковые стороны параллелепипеда параллельны друг другу, следовательно, все они перпендикулярны основанию. Таким образом, основание заданного параллелепипеда – прямоугольник и боковые стороны перпендикулярны основанию. Перечисленные признаки однозначно указывают на то, что заданный параллелепипед является прямоугольным. Что и требовалось доказать.

Задача 23. Докажите, что число ребер призмы кратно 3.

Доказательство: Рассмотрим для примера призму с наименьшим количеством ребер (треугольную). У треугольной призмы 9 ребер (по 3 у каждого основания и 3 боковых ребра). При добавлении одного угла в основание призмы количество ребер увеличивается на 3 (по одному у каждого основания и одно боковое) и становится равным 12 и так далее. Следовательно, n -угольная призма имеет $3n$ ребер. Что и требовалось доказать.

Задача 24. Докажите, что сумма двугранных углов любого из боковых краев четырехугольной призмы равна 360° .

Продолжение Приложения А

Доказательство: Боковыми гранями четырехугольной призмы являются четырехугольники. Сумма углов n -угольника $S_n = 180^\circ (n - 2) = 360^\circ$. Сумма углов четырехугольника равна $S_4 = 180^\circ (4 - 2) = 180^\circ * 2 = 360^\circ$. Что и требовалось доказать.

Задача 25. Дана призма, у которой 18 граней. Доказать, что основание заданной призмы 16-угольник.

Доказательство: Исходя из того, что из общего количества граней призмы (n) 2 грани являются основаниями, то количество боковых граней равняется $(n - 2)$. Количество боковых граней призмы соответствует количеству сторон основания призмы. Количество сторон основания призмы соответствует количеству углов основания призмы. В заданной призме количество боковых граней равно $18 - 2 = 16$. Таким образом, количество сторон и углов основания равно 16. Основанием призмы является 16-угольник. Что и требовалось доказать.

Задача 26. Отрезки NE, NF и NK являются диагоналями граней куба, исходящими из вершины N. Точки EFK соединены отрезками (рис. 32.). Докажите, что многогранник NEFK, образованный заданными диагоналями куба и отрезками, соединяющими точки EFK, является правильным тетраэдром.

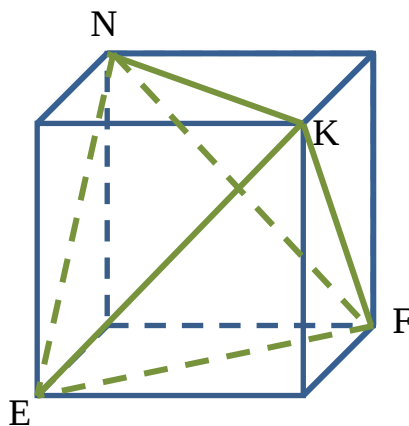


Рис.32.

Продолжение Приложения А

Доказательство: Так как в кубе каждая из граней является квадратом и все грани равны между собой, то и диагонали граней равны между собой. Таким образом, все ребра многогранника NEFK равны между собой. Следовательно, в многограннике NEFK каждая грань является правильным треугольником и общее количество граней равно 4. Фигура, поверхность которой состоит из четырех правильных треугольников является правильным тетраэдром. Что и требовалось доказать.

Задача 27. Докажите, что если две боковые грани треугольной призмы образуют угол в 90° , то сумма квадратов их площадей равна квадрату площади третьей боковой грани (рис. 33).

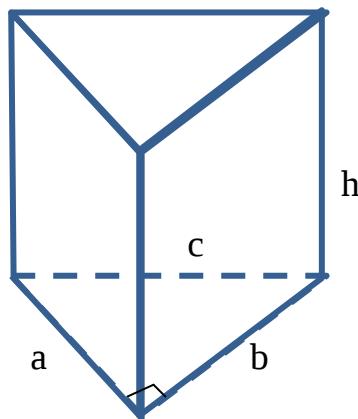


Рис.33.

Доказательство: По условию a перпендикулярна b , то есть треугольник, образованный сторонами a , b , c -прямоугольный. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. В призме боковые грани – параллелепипеды. Площадь параллелепипеда равна произведению стороны на высоту, проведенную к ней. Для нашей призмы имеем площади боковых сторон $a \cdot h$, $b \cdot h$, $c \cdot h$. Рассмотрим соотношение квадратов площадей боковых сторон призмы.

Имеем $(a \cdot h)^2 + (b \cdot h)^2 = (c \cdot h)^2$, преобразуем $h^2 \cdot (a^2 + b^2) = c^2 \cdot h^2$. Сокращая h^2 , получаем $a^2 + b^2 = c^2$. Так как выше доказано полученное равенство верно. Что и требовалось доказать.

Задача 28. Докажите, что сечение параллелепипеда не может быть правильным пятиугольником.

Доказательство: Параллелепипед имеет три пары параллельных между собой граней (2 основания, 2 боковых стороны и 2 стороны, являющихся передней и задней). Следовательно, любое из сечений параллелепипеда будет иметь как минимум две параллельные между собой стороны (рис.34). Так, на рисунке 25.в) попарно параллельны отрезки АК и ВС, а так же АВ и ТК, как принадлежащие параллельным граням параллелепипеда. Учитывая тот факт, что у правильного пятиугольника не может быть параллельных сторон, ни одно из сечений параллелепипеда не может быть правильным пятиугольником. Что и требовалось доказать.

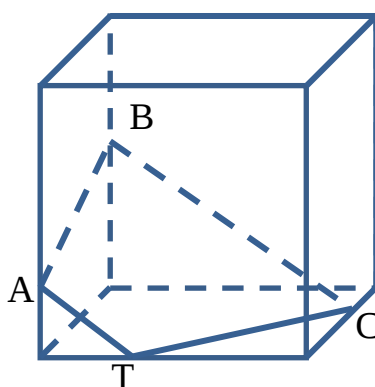


Рис.34.а.

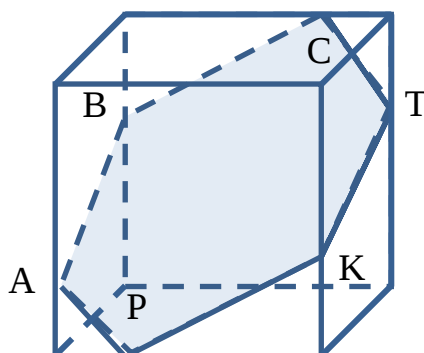


Рис. 34.б.

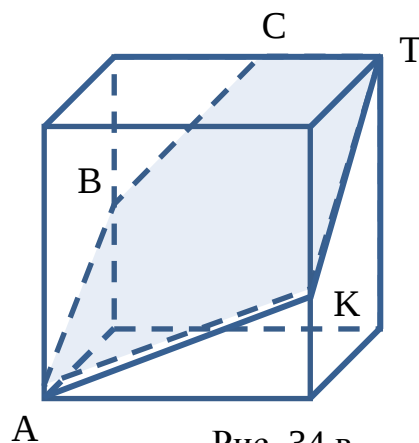


Рис. 34.в.

Задача 29. Дана правильная треугольная пирамида $ABCT$. Ее высота $ТН$ равна стороне основания $AB = AC = CB$. Верно ли, что угол между ребром AT и плоскостью основания ABC равен 60° ?

Доказательство. Точка $Н$ является центром окружности, описанной у основания пирамиды $ABCT$, $АН$ – радиус описанной вокруг основания окружности, $ТАН$ – рассматриваемый угол. Треугольник $АТН$ – прямоугольный (Рис.35.).

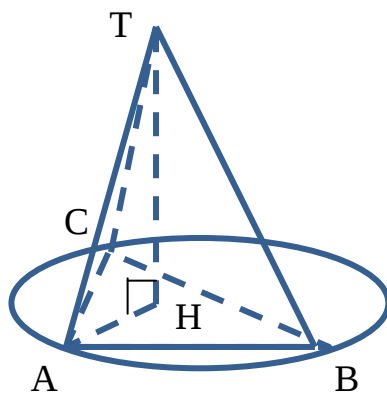


Рис.35.

Продолжение Приложения А

В соответствии с формулой радиуса окружности, описанной вокруг правильного треугольника $АН = АВ/\sqrt{3}$. Так как по условию $ТН = АВ$, получаем $АН = ТН$, тогда $\operatorname{tg} \angle ТАН = ТН / АН = ТН / ТН / \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Значение $\operatorname{tg} \angle \alpha = \sqrt{3}$ соответствует значению угла в 60° . Следовательно, утверждение о том, что рассматриваемый угол равен 60° , верно. Что и требовалось доказать.

Задача 30. «Пирамида является правильной, при условии равенства всех ее ребер». Докажите, что приведенное выражение верно.
Доказательство: При условии равенства всех ребер пирамиды любая из его граней является правильным треугольником. Таким образом, основание пирамиды также является правильным треугольником. Равенство боковых ребер обеспечивает соблюдение условия о том, что высота, проведенная к основанию, соединяет вершину, из которой она проведена с центром основания. Приведенных выводов достаточно, чтоб подтвердить тот факт, что пирамида является правильной. Что и требовалось доказать.

Задача 31. Можно ли построить правильную четырехугольную пирамиду с боковым краем, равным 6, если за основание пирамиды возьмем квадрат, длина стороны которого равна $8\sqrt{2}$.

Доказательство: построим изображение правильной четырехугольной призмы (рис.36.)

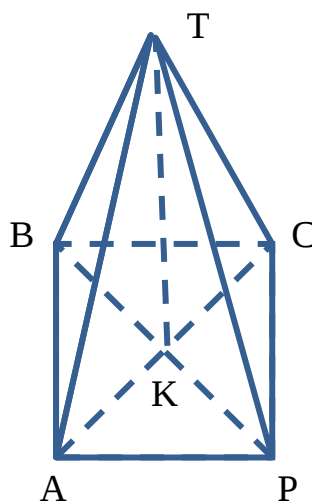


Рис.36.

Продолжение Приложения А

Используя теорему Пифагора, найдем длину диагонали указанного квадрата AC , являющейся гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 256$. $AC = 16$. Известно, что точка пересечения диагоналей квадрата делит их пополам, значит точка K – середина отрезка AC , отсюда AK равен половине AC . $AK = 16/2 = 8$. Сопоставив полученную длину катета AK (8) в прямоугольном треугольнике AKT с предложенной в условии длиной гипотенузы AT (6) получаем, что длина катета прямоугольного треугольника больше гипотенузы. Такое соотношение невыполнимо. Таким образом, построить правильную четырехугольную пирамиду с боковым краем, равным 6, взяв за основание пирамиды квадрат, длина стороны которого равна $8\sqrt{2}$ нельзя. Что и требовалось доказать.

5) Сборные задания.

Задача 32. На рисунке 37. изображен многогранник – «звезда Кеплера», полученный путем взаимопроникновения двух тетраэдров. Какой многогранник является общей частью (пересечением) этих тетраэдров?

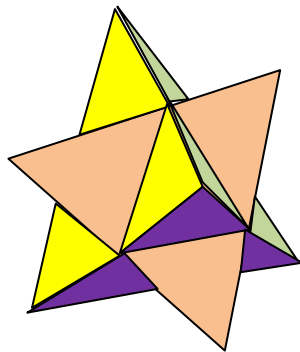


Рис.37.

Ответ: Октэдр.

Продолжение Приложения А

Задача 36. Какое минимальное число красок потребуется для окраски граней фигур (без использования получения новых цветов путем смешения красок), при условии, что соседние грани должны быть разных цветов:
а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра.

Ответ: а) тетраэдра - 4; б) куба - 3; в) октаэдра - 2; г) икосаэдра - 3;
д) додекаэдра - 4.