МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики»

Студент А.В. Тарасенко
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук О.А. Кузнецова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Настоящая тенденция развития общества вызывает необходимость у гражданина со средним общим образованием иметь достаточно широкие и глубокие математические знания. Такая необходимость обусловлена тем, что бывший ученик переходит в новый цикл своего развития – овладение бедующей профессией. Как известно, освоение фактически любой специальности требует явных математических умений и знаний. Поэтому Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) выделяет одну из основных задач в обучении математике в средней школе – это дать прочное и осмысленное овладение комплекса математических умений и знаний, которые необходимы каждому человеку не только в повседневной жизни, но и в его профессиональной деятельности [51].

Так же в ФГОС СОО при изучении математической науки кроится еще одна из основных задач – это сформировать, а затем развивать математическое мышление [51]. Решение учителем этой задачи дает возможность эффективно развивать у школьников математические способности, воспитывает у них стремление к творческой деятельности как в математике, так и в целом в общественной жизни.

Изучение в школе математики, помимо решения прочих основных задач, которые раскрывает ФГОС СОО, позволяет нам также сформировать устойчивое развитие интереса у учащихся к предмету, ориентацию на специальности, с которыми связана математика, подготовку к дальнейшему обучению в высшей школе.

Актуальность данной темы заключается в том, что «Комплексные числа» относятся к тому разделу, который недостаточно исследован методистами, а его весомость в математической культуре учащихся является неоспоримой. Изучением темы «Комплексные числа» завершается одна из основных содержательных линий школьного курса математики – развитие понятия числа. Целостное завершенное представление о числе является важным шагом в процессе формирования научного мировоззрения учащихся. Комплексные числа находят применение как внутри самой математики, так и в других областях науки и практики: электротехнике, гидро- и аэромеханике, геодезии, картографии, физике и др. Однако прикладной аспект лишь иногда затрагивался при изучении комплексных чисел в школе, в результате чего у учащихся складывалось ошибочное представление о формальности их введения, связи с другими разделами курса математики и неприменимость в различных областях науки и техники.

Широкий круг применений комплексных чисел открывает значительные дидактические возможности для развития математических интересов учащихся. Ведь наличие комплексных чисел в образовательном арсенале учеников комплексных чисел расширяет их возможности при решении задач, обогащает представления о методах познания и прикладную функцию математики. Все это говорит об актуальности выбранной темы и ее значимости в школьном курсе математики.

Также следует подчеркнуть, что примерная основная образовательная программа среднего общего образования дает возможность изучение темы «Комплексные числа» в школьном курсе математики [39].

Методические аспекты обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики представлены в исследованиях Л.Ю. Сергиенко [40], Ю.А. Глазкова [15], А.Д. Нахмана [32], Г.А. Симоновской [41], М.В. Литвиненко [28], Л.И. Боженовой [8], Н.А. Данилова [18], Т.А. Зентиевой [19], С.И. Новоселова [34] и др.

Проблемы выявления методических особенностей обучения теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики рассмотрены в ряде диссертационных исследований. Так нами определено, что в диссертации О.С. Тамер (1999 г.) построена модель межпредметнонаправленного курса по теме «Комплексные числа», разработаны методические условия повышения эффективности обучения учащихся теме «Комплексные числа» на основе межпредметных связей [45]. Г.А. Симоновская (1997 г.) выявила современное значение факультативных курсов по математике в процессе обучения в школе на примере темы «Комплексные числа», определила методические особенности постановки факультативных курсов по математике в процессе обучения в школе на примере темы «Комплексные числа», разработала на основе методических особенностей факультативный курс «Комплексные числа» [41]. Ю.В. Котова (1996 г.) обосновала целесообразность изучения геометрических приложений комплексных чисел при обучении теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики, выявила особенности методики обучении теме «Комплексные числа», ориентированной на знакомство с их геометрическими приложениями, разработала методику изучения геометрических приложений комплексных чисел в школьном курсе математики [25].

Также актуальность темы данного исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием* между необходимостью обучения учащихся теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики в соответствии с требованиями ФГОС СОО и фактическим состоянием методики ее обучения учащихся в школьном курсе математики.

Приведенное противоречие позволило сформулировать **проблему исследования**: каковы должны быть методические основы эффективного обучения теме «Комплексные числа» в старших классах общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения математике старшеклассников общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики общеобразовательной школы и разработать методические материалы по теме исследования.

Гипотеза исследования состоит в том, что можно повысить качество математической подготовки старшеклассников, если:

– выявить методические особенности обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики общеобразовательной школы;

– разработать систему задач по теме «Комплексные числа»;

– разработать элективный курс «Комплексные числа».

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Исследовать исторические аспекты возникновения и развития комплексных чисел в математике.

2. Изучить различные подходы к введению понятия комплексного числа в школьном курсе математики.

3. Определить цели и задачи обучения теме «Комплексные числа».

4. Определить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Комплексные числа».

5. Провести анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Комплексные числа» в учебниках разных авторов.

6. Выделить методические особенности обучения теме «Комплексные числа» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы.

7. Разработать методические рекомендации по обучению теме «Комплексные числа» в курсе математики общеобразовательной школы.

8. Предложить систему задач по теме «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы.

9. Создать элективный курс «Комплексные числа».

10. Провести педагогический эксперимент и представить его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Ю.М. Колягина, А.Г. Мордковича, В.П. Покровского.

Базовыми для настоящего исследования явились также: диссертация О.С. Тамер «Технология обучения комплексным числам на основе осуществления межпредметных связей в системе непрерывного профессионального образования» [45]; Г.А. Симоновской «Факультативный курс «Комплексные числа и их приложения» для старших классов средней школы» [41]; Ю.В. Котова «Методические особенности изучения геометрических приложений комплексных чисел в классах с углубленным изучением математики» [25].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, методической и математической литературы, работ по истории математического образования и истории математики, школьных программ, учебных пособий и учебников; изучение опыта работы учителей математики; проведение педагогического эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017/18 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертация, анализ школьных учебников, нормативных документов, опыта работы общеобразовательной школы;

2 семестр (2017/18 уч.г.): определение теоретических и методических аспектов исследования по теме диссертации;

3 семестр (2018/19 уч.г.): разработка методики обучения учащихся 10-11-х классов теме «Комплексные числа» в курсе математики общеобразовательной школы;

4 семестр (2018/19 уч.г.): разработка системы задач по теме «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы и создания элективного курса «Комплексные числа», *5 семестр* (2019/20 уч.г.): оформление диссертации, корректировка раннее представленных результатов, описания результатов экспериментальной работы, формулирования выводов.

Опытно-экспериментальной базой исследования была кафедра высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также МБОУ «Петровская школа №1» с. Петровка, Красногвардейский район, Республика Крым.

Научная новизна исследования заключается в:

– созданииi системы задач по теме «Комплексные числа»;

– создании элективного курса «Комплексные числа».

Теоретическая значимость исследования заключается в:

– изучении исторических аспектов возникновения и развития комплексных чисел в математике;

– проведенном анализе различных подходов к введению понятия комплексного числа в школьном курсе математики;

– определении целей и задач обучения теме «Комплексные числа»;

– выявлении основных требований к знаниям и умениям учащихся по теме «Комплексные числа»;

– проведенном анализе содержания теоретического и задачного материалов темы «Комплексные числа» в учебниках разных авторов;

– рассмотрении методических особенностей обучения теме «Комплексные числа» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования заключается в предложении методических рекомендаций по обучению старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики общеобразовательной школы

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались:

– сочетанием теоретических и практических методов исследования;

– анализом педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в разработке методических рекомендаций, системе задач и элективного курса по теме исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на XXVI Международной научно-практической конференции «Современная психология и педагогика: проблемы и решения» (г. Новосибирск, сентябрь 2019 г.). Основные результаты исследования отражены в 4 публикациях [46-49].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению теме «Комплексные числа» в курсе математики общеобразовательной школы.

2. Система задач по теме «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы.

3. Элективный курс «Комплексные числа».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 21 рисунок, 4 таблицы, список используемой литературы (65 источников), 1 приложение. Основной текст работы изложен на 92 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§1. Исторические аспекты возникновения и развития комплексных чисел в математике

Исторически комплексные числа впервые были рассмотрены в связи с выведением формулы вычисления корней кубического уравнения $x^3 = px + q$.

Историческое развитие понятия числа относится еще к пифагорейцам, которые, кроме действительного ряда чисел, изучали так называемые фигурные числа. Частным случаем этих чисел для них были квадратные и кубические числа. Уже в то время им были известны треугольные числа $\frac{n(n+1)}{2}$, пятиконечные числа $\frac{n(3n-1)}{2}$, пирамидальные числа $\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$, которые они позаимствовали в «Началах» Евклида [1].

Еще Пифагор говорил, что все сущее есть числа. Числа окружают нас в жизни на каждом шагу. Они могут быть различными в своей основе не только такими, к которым мы привыкли. Еще до XVI века, вычисляя квадратные уравнения, математики иногда встречались с квадратным корнем отрицательных чисел, однако они не могли разъяснить, что являет собой квадратный корень отрицательного числа.

Если сначала алгебра носила геометрический характер, то необходимо отметить, что в I-II вв. н.э. в «Метрике» Герона алгебра уже носила не геометрический характер [9]. Заметное расширение алгебры было достигнуто индийским математиком Брахмагупта. Он рассматривал вычисления квадратных корней и работал над системами счисления. Дальнейшая арифметизация алгебры была развита в работе математика Абрахам бар Хийа (1070-1136 гг.) «Трактат об измерении и вычислении». Эта работа является наиболее ранней Арабской алгеброй, которая была написана и издана в Европе. Автор в своей работе дает законченное решение общего квадратного уравнения. Несколько позже Чуквет (1445-1488) во Франции издал трактат «Наука о числах», который является наиболее ранней Французской книгой по алгебре. В ней рассматриваются прогрессии, числовые системы, совершенные числа и др. [44]. Это был период, когда приближалось время открытия комплексных чисел, что означало переход от одномерных цифр к двумерным числам. В 1545 г. вышла в свет 67 книга Дж. Кардано «Великое искусство», в которой для решения системы уравнений $x + y = 10$, $XY = 40$ были введены комплексные числа [9].

В этот же период начался штурм решения кубических уравнений. В решение этой задачи определенный вклад внес Н. Тартаглии [9]. Выяснилось, что мнимые числа встречаются при решении кубических уравнений. Формулы для их решения известны под именами Кардана-Тартаглии.

Огромное значение для развития алгебры имеют работы Бомбелли [44]. По сути, он разработал в 1572 г. правила работы с мнимыми единицами. Его знаменитая «Алгебра» состояла из пяти частей. В этой книге Бомбелли изложил для комплексных чисел правила при умножении, а также вычитании и сложении. Расширяя знания о комплексных числах, Бомбелли улучшил формулы Кардана-Тартаглии для решения кубических уравнений. Считается, что «Алгебра» Бомбелли – это одно из важных достижений XVI в.

Интересной является оценка комплексных чисел Лейбница в 1702 г. Он назвал их «чудом анализа, чудовищем мира идей, амфибией между бытием и небытием» [17]. Отношение к мнимым величинам принципиально изменилось после работы Ж. Даламбера «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» (1752), где он записал уравнение в виде действительной и мнимой частей функции комплексной переменной [17]. В этой работе впервые появились так называемые условия Коши-Римана аналитической функции. Можно считать, что и алгебраический путь к векторам пролегал через задачи механики. Понятие вектор стало широко использоваться в

XVI в. Вектор применяется для представления таких физических величин как сила, скорость и другие, которые характеризуются значением и направлением. Изображение комплексных чисел в виде векторов на плоскости с четким геометрическим объяснением действий над комплексными числами впервые встречается в работе датского геодезиста и картографа К. Весселя «Опыт об аналитическом представлении направления и попытка его применения, преимущественно к решению плоских и сферических треугольников» (1799) [1]. Важнейшей особенностью этой работы было то, что наряду с векторами на плоскости, К. Вессель выдвинул идею векторов в пространстве и попытался достичь умножения этих векторов [17].

Мысли о геометрическом толковании операций над комплексными числами были высказаны также Ж.Р. Арганом в работе «Опыт некоторого способа представления воображаемых величин в геометрических построениях» (1806). Работы Ж.Р. Аргана особенно распространились после публикации «Курса алгебраического анализа» О. Коши и теории биквадратичных излишков Гаусса [16]. Это стало основой, после чего математики XIX века стали называть плоскость комплексной переменной «плоскостью Коши» или «плоскостью Гаусса». Все эти работы можно рассматривать как движение к построению пространственной числовой системы. И. Кант писал: «Трехмерность происходит, очевидно, от того, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния ... Из другого закона возникал бы сквозняк с другими свойствами и измерениями. Наука обо все эти возможные виды пространства, несомненно, представляла бы собой высшую геометрию, которую способен построить конечный ум ... Если возможно, чтобы существовали сквозняки с другими измерениями, то весьма вероятно, что они действительно размещены»[16].

Каждый из нас изучает обязательный курс по математике в обычной местной школе. Однако если человек желает связать свою судьбу с математикой, или с техникой, или просто любит все неизведанное, новое и стремится выйти за горизонт этого «обязательного» и достичь новых высот, тогда этому человеку будет тесно в рамках школьного курса математики.

Математика богата на различные неизведанные сокровища, которые просто должны быть найденными и изученными. Одним из таких «сокровищ» является раздел математики, изучающий комплексные числа. Комплексные числа – это числа, которые при подъеме к квадрату дают отрицательные значения.

Как же возникло комплексное число? Анализ истории математики показывает нам, что при вычислении алгебраических уравнений появились комплексные числа. Если, решая квадратное уравнение, мы имеем отрицательный дискриминант, то корни этого уравнения не относятся к действительным числам. Это же мы видим и при вычислении уравнений 3-ей и высших степеней, следовательно, назрела необходимость в пересмотре понятия числа.

С комплексными числами впервые встретились индийские математики, которые рассматривали отрицательные числа и квадратные корни. Однако они исходили из того, что не существуют квадратные корни отрицательных чисел, и, следовательно, не рассматривали такие уравнения с недействительными корнями.

В XVI веке значительный вклад в математику был сделан итальянскими математиками, которые вычислили уравнения 3-го и 4-го степеней. В частности, итальянский математик Джироламо Кардано (1501-1546 гг.) в 1545 году в опубликованной работе «Великое искусство» привел формула алгебраических решений кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$.

Важный такой момент: при условии, что все корни действительны и все коэффициенты данного уравнения действительны, а в промежуточные вычисления вовлечены мнимым числам. В связи с применением формулы Кардано, появились символы вида $a \pm (b > 0)$, которым сначала не придали никакого смысла, но ими оперировали в промежуточных выкладках, распространяя на них правила действий с действительными числами.

Другой итальянский математик Раффаэле Бомбелли (1530-1572 гг.) впервые изложил правила действий над комплексными числами почти в современном виде. Рене Декарт говорил, что мнимые числа остаются всегда воображаемыми, так как сравнивал действительные числа с отрезками координатной оси. Другие математики того периода соглашались с этим.

В XVII веке на допустимость геометрического толкования этих чисел в своем труде «Алгебра, исторический и практический трактат» указал английский математик Джон Валлис (1616-1703 гг.). Лишь в XVIII веке возникает необходимость в геометрической интерпретации мнимых чисел, это было связи с резким скачком развития науки, которая требовала решения новых задач геометрии, математического анализа и механики.

Математики Лейбниц и Бернулли положили начало применения комплексных чисел в интегральном и дифференциальном исчислении. Они еще в первой половине XVIII века просто формально применяли для интегрирования дробей с воображаемыми знаменателями логарифмы мнимых чисел.

Работа немецкого математика К.Ф. Гаусса «Теория биквадратных излишков», которая вышла в 1831 году однозначно закрепила в математике действия над комплексными числами и их геометрическое толкование. В ней ученый также заменил название «мнимые» на «комплексные» числа.

В 70-х годах XVIII века Эйлер и Лагранж применили понятие комплексной переменной к решению многих задач. Комплексные числа применяли в своих работах также д'Аламбер и Эйлер.

В «Математическом энциклопедическом словаре» 1988 г. сказано, что «комплексное число – число вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i = так называемая мнимая единица и квадрат которого равен –1; x называют действительной или вещественной частью комплексного числа z, а y – его мнимой частью (обозначение $x = Rez$, $y = Imz$). Действительные числа – частный случай комплексного числа, при у = 0. Комплексные числа, которые не являются действительными (то есть в $\neq$ 0), называют иногда мнимыми, а при $x = 0, y \neq 0$ – чисто мнимыми.

Как мы видим, комплексные числа обязаны своему становлению целиком реальной задаче решения уравнений 3-ей степени. Еще до XVI в., решая квадратные уравнения, математики иногда встречали квадратные корни из отрицательных чисел. Решение уравнений такого вида, как $x^2 + px + q = 0$, где q и p – действительные числа, по известной нам формуле могла привести к выражениям вида, где A – положительное число, а B – отрицательное. Но математики тогда не могли ответить на вопрос, что представляет собой «квадратный корень из отрицательного числа. Выход из этой ситуации нашли самый простой, то есть считали если выражение, где B – отрицательное, корней нет. Логичность это мнения было вполне объяснима. Однако когда перешли к решению кубических уравнений, то выяснилось, что уже нельзя обходиться без нахождения квадратных корней из отрицательных чисел. Свыше 450 лет назад итальянские математики вычислили уравнения 3-го порядка. В частности способ, итальянского математика Джироламо Кардано (1501-1546 гг.) изложенный в 1545 году в работе «Великое искусство» сводится к тому, что корни уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ можно вычислить по формуле (ее называют формулой Кардано): $x = +,$ где $D = (p / 3)\ 3 + (q / 2)\ 2.$

Так мнимые числа все настойчивее и сильнее стучались в двери науки. И в XVII – XVIII вв. математиками было установлено, что многие громоздкие и сложные решения возможно облегчить, если пользоваться мнимыми числами. Однако недоверие в тот период к этим числам оставалось.

В XVII – XVIII вв. одним из алгебраических вопросов, который возникал у ученых, был таков: сколько алгебраическое уравнение n-й степени имеет корней, т.е. уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ ... + a_{n-1}x + a^n = 0?$ Если оставаться в рамках действительных корней, то можно только говорить, что их не более n. Если же включить мнимые корни, то ответ однозначен: у такого уравнение всегда n корней.

В 1833 году ирландский математик У.Р. Гамильтон очень ясно, просто и логично разъясняет, что являет собой комплексное число. Представить его объяснения можно так. Рассмотрим взятые в определенной последовательности все возможные пары действительных чисел. Назовем комплексным числом все такие упорядоченные пары. Записать эту упорядоченную пару чисел можно по-разному, однако принято в математике записывать такая: $a + bi$. Символ i применяют лишь для того, чтобы обычное число отделить одно от другого. Знак «+» не подразумевает какую-то сумму, а лишь демонстрирует, что мы во что-то целое объединяем пару действительных числа. Чтобы отметить это обстоятельство, данную пару обозначаем одной буквой, в математике принято обозначать z так $z = a + bi$. Первое, вошедшее в эту пару число «а», является действительным числом и назовем его действительной частью числа z. Ее принято обозначать так: $Re\ z$. Второе действительное число «b» из пары считаем мнимой частью комплексного числа z. Ее обозначают так: $Im\ z$. Так, если $z = -7 + 5$ и, то $Re\ z = 7$; $Im\ z = 5$. Согласно этому определению, мнимая часть каждого комплексного числа – это некое действительное число.

Выяснено, что проблема изучения комплексных чисел и их приложений является актуальной, но не новой в теории и практике школьного математического образования. Как известно, комплексные числа возникли как чисто формальный математический результат при решении уравнений высших степеней. Впервые о комплексных числах упомянул Кардано в 1545 году в своей работе «Большое искусство или о правилах алгебры», хотя и называл их «чисто софистическими величинами». В школах обучение комплексных чисел началось значительно позже.

Проведенный историко-педагогический анализ свидетельствует, что до 1917 года в гимназиях и реальных училищах, хоть и не было стабильных программ и учебников по математике, однако как российские, так и зарубежные учебники и сборники задач для средних учебных заведений содержали раздел «Комплексные числа».

В период с 30-х по 60-е года тема «Комплексные числа» входила в обязательную программу по математике, но позже была исключена и рекомендована для изучения на факультативных занятиях. В связи с этим академик А. М. Колмогоров с беспокойством писал в 1967 году, что «большой жертвой, связанной с сокращением общего количества обязательных занятий по математике в старших классах, является исключение из обязательной программы комплексных чисел». С появлением профильных классов комплексные числа были включены в программу для этих классов с углубленным изучением математики. Соответствующие учебники, согласно с действующей программой, включают традиционную часть материала темы с небольшим количеством задач на геометрические применения комплексных чисел.

В зарубежной школе сложилась другая ситуация. В учебниках для классов математического направления таких стран, как Франция, Япония, США и других обязательно рассматривается прикладное направление темы «Комплексные числа» в разных его аспектах.

§ 2. Различные подходы к введению понятия комплексного числа в школьном курсе математики

Понятие числа является одним из основополагающих в математике, изучение любого раздела математической науки невозможно без использования тех или иных свойств числовых множеств, и знакомство с этими свойствами дает полное понимание структуры классических числовых систем, их взаимосвязи и взаимозависимости, что весьма необходимо любому студенту-математику [8].

Совсем нетрудно объяснить школьнику, что «все начинается с единицы». Любое натуральное число представляет собой, по сути своей, просто некоторое «собрание» – сумму – единиц (вспомним формулировку аксиомы индукции). На построенном нами числовом множестве мы можем безо всяких ограничений пользоваться двумя простейшими арифметическими действиями – сложением и умножением. А вот следующее действие – вычитание – мы можем себе позволить далеко не всегда. Чтобы избавиться от этого «неестественного» ограничения, нам приходится расширить наше представление о числе, перейдя от натуральных чисел к целым. Определяя целое число как разность двух натуральных (на самом деле, как целый класс разностей, но об этом можно поговорить позже), мы получаем возможность не только складывать и умножать, но и вычитать из целого числа целое число безо всяких ограничений. Теперь можно рассмотреть четвертую арифметическую операцию – деление. К сожалению, при делении целого числа на целое число мы слишком часто выходим за рамки уже построенного числового множества. Это вынуждает нас вновь расширить понятие числа, определив рациональное число как частное целого и натурального (как и ранее, на самом деле, как целый класс таких частных). На новом числовом множестве «действуют» без ограничений (не забудем только о невозможности деления на ноль) уже все четыре арифметических действия. Кроме того, пользуясь рациональными числами, мы можем найти числовое выражение любой величины с любой наперед заданной степенью точности. Однако проблемы теоретического плана остаются. Извлечение квадратного корня из рационального числа может вывести нас за пределы этого числового множества. Чтобы «закрыть проблему», мы строим действительные числа, определяя их как пределы чисел рациональных (более формально, как класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел).

Наконец, комплексные числа – как пары действительных – появляются при попытке позволить себе извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Собственно, все. Можно ли познакомить с указанным подходом школьников? Нужно ли владеть указанным подходом студентам – будущим учителям математики? Безусловно, причем на высоком теоретическом уровне [6].

Тема «Числовые системы», изучаемая старшеклассниками, предусматривает строгое аксиоматическое построение всех классических числовых конструкций: полукольца натуральных чисел, кольца целых чисел, полей рациональных, действительных и комплексных чисел. Тема полностью отвечает основной цели – формированию у старшеклассников понятия числа. При этом «попутно» тема решает множество других, вспомогательных (но важных) задач, систематизируя и обобщая уже имеющиеся у старшеклассников знания из различных разделов алгебры, математического анализа, теории чисел и геометрии [6]. Достаточно упомянуть о введении в рассмотрение неархимедовой p-адической метрики как естественной альтернативы единственно известному старшеклассникам способу измерения расстояния между числами: $d(x,y)=|x-y|$. Использование нового способа измерения степени «близости» двух рациональных чисел позволяет построить систему p-адических чисел вместо системы чисел действительных, то есть получить альтернативный числовой объект с совершенно необычными с точки зрения практических навыков свойствами. Более того, это расширяет общее представление обучающихся о методах измерения расстояний между объектами [7].

Однако формальный аксиоматический подход, безусловно необходимый профессиональному математику, невозможно реализовать при построении понятия числа в школьном курсе математики, и учителю приходится искать другие возможности. Отдавая должное классическим «практико-ориентированным» приемам, традиционно используемым в этой связи в школьных учебниках, мы хотим обсудить возможности и преимущества «исторического» подхода. Как показывает опыт, использование элементов историзма при построении различных числовых систем в школьном курсе математики позволяет не только повысить интерес к предмету, уровень общей математической культуры школьников, но и максимально способствует задаче сохранения фундаментальных математических принципов, лежащих в основе данного построения. По сути своей логический (формальный, аксиоматический) подход является отражением исторического процесса формирования первичных математических понятий, однако отражением, свободным от всего несущественного, нетипичного. В основном, в главном «…логическое совпадает с историческим…», как утверждает философия. Таким образом, продуманное использование исторического материала при формировании понятия числа на уроках математики позволяет сохранить научную строгость изложения без излишней формализации рассуждений, дает возможность использовать яркие запоминающиеся примеры для иллюстрации основополагающих арифметических понятий.

Проблема заключается в том, что при таком подходе к использованию элементов историзма учитель должен не только хорошо знать основные факты истории математики (и великих математиков), но и четко понимать историю развития основных математических идей. Формирование такого представления возможно только при комплексном изучении соответствующих вопросов, в частности, при дополнении курса «Числовые системы» курсами «История математики», а также специальными курсами, на которых изучаются те или иные числовые множества, в том числе и в контексте их исторического формирования и развития. С этой точки зрения, как показывает многолетний опыт обучения, трудно переоценить использование теории специальных чисел натурального ряда: фигурных, совершенных, дружественных, чисел Ферма, Мерсенна, Стирлинга, Каталана и др., и многолетний опыт их использования при обучении студентов [5].

Перед тем, как начать выполнять действия с комплексными числами, нужно узнать, что это такое. Приведём несколько формулировок понятий «Комплексное число», которые даны в школьных учебниках по алгебре:

- учебник Алимова А.Ш., Колягина Ю.М., Ткачева М.В. [2]: «Комплексными числами называют выражения вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – некоторый символ такой, что $i^2 = -1$»;

- учебник Колягина Ю.М., Ткачевой М.В., Федоровой Н.Е., Шабунина М.И. [24]: «Комплексными числами называют упорядоченные пары (a, b) действительных чисел a и b, для которых следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения»;

- учебник Мордковича А.Г. [30]: комплексным числом считают сумму чисто мнимого числа и действительного числа. В записи $z = a + bi$ число а – действительная часть, а число b – мнимая часть комплексного числа z.

Рассмотрим примеры комплексных чисел, в которых $b = 0$. Например, $z = 3 + 0i$. В таком случае мнимая часть обращается в ноль и $z = 3$. 3 – это действительное число, значит, можем сделать вывод, что множество действительных чисел является подмножеством комплексных.

Для наглядности представим множества в виде кругов Эйлера (Рис. 1).

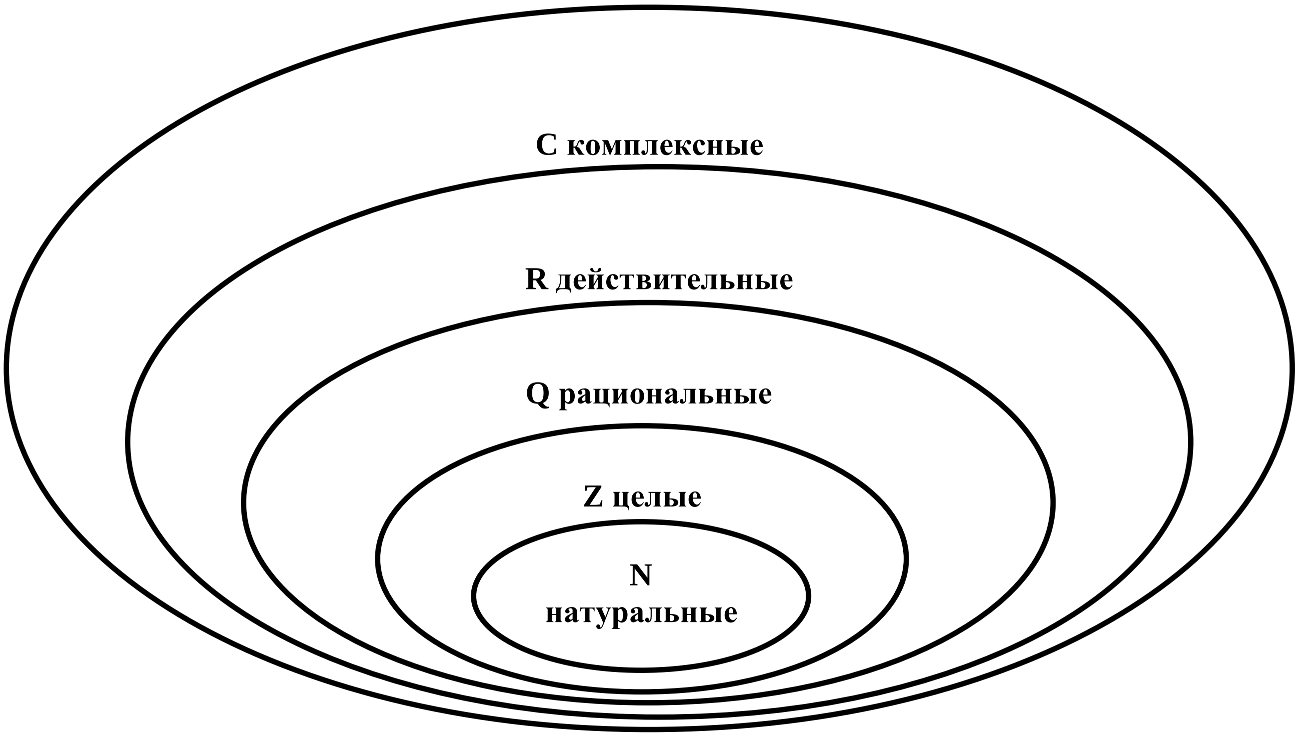

Рис. 1. Множества в виде кругов Эйлера

Записывают: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Действия с комплексными числами мало чем отличаются от обычной алгебры и не представляют особых сложностей. Давайте рассмотрим, как правильно выполнять действия с комплексными числами.

1. Сложение.

Чтобы сложить два комплексных числа, нужно сложить их действительные и мнимые части.

Например:

$2 + 6\mathrm{i} + 5 + 3\mathrm{i} = 2 + 5 + 6\mathrm{i} + 3\mathrm{i} = 7 + 9\mathrm{i}$.

2. Вычитание.

Чтобы вычесть два комплексных числа, нужно вычесть их действительные и мнимые части.

Единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака.

Например:

$(4 + 4\mathrm{i}) - (1 - 4\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i} - 1 + 4\mathrm{i} = 1 - 1 + 4\mathrm{i} + 4\mathrm{I} = 8\mathrm{i}$.

3. Умножение.

Умножение комплексного числа происходит аналогично правилу умножения двучлена на двучлен: чтобы умножить одно комплексное число на другое, нужно каждую часть первого числа умножить на каждую часть второго числа.

Например:

$(6 + 2\mathrm{i})(1 + 5\mathrm{i}) = 6 + 30\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 10\mathrm{i}^2 = -4 + 32\mathrm{i}$;

Мнимая единица в квадрате даёт -1. То есть $\mathrm{i}^2 = -1$.

4. Деление.

Деление комплексных чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Например:

$$\frac{6-8i}{16-13i}=\frac{(6-8i)(16+13i)}{(16-13i)(16+13i)}=\frac{96+78i-128i-104i^2}{256-169i^2}=\frac{200}{425}-\frac{50i}{425}=$$

$$=\frac{8}{17}-\frac{2i}{17}$$

5. Выведение формул сокращенного умножения для комплексных чисел.

Возведение в квадрат комплексного числа (аналогично формулам квадрата суммы и квадрата разности):

$$(a+bi)^2=(a+bi)(a+bi)=a^2+abi+abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2$$

$$(a-bi)^2=(a-bi)(a-bi)=a^2-abi-abi+(bi)^2=a^2-2abi-b^2$$

Данные формулы легко выводятся с помощью правил умножения многочлена на многочлен.

§3. Цели и задачи обучения теме «Комплексные числа»

Образование как организованный процесс рассматривается в двух аспектах: социальном и личностном, поэтому цели обучения математики в школе также зависят от актуальных потребностей общества, которое постоянно развивается, и нужд каждого человека в отдельности.

Существует две стороны применения математического образования:

- практическая (когда создаются и применяются математические знания, которые приносят человеку результат);

- интеллектуальная (когда человек, овладевая математическими знаниями, усваивает приемы преобразования действительности, т.е. развивает мышление).

Безусловно, что математика несет практическую пользу, поскольку каждый человек пользуется ею практически ежедневно, проводя простейшие математические исчисления и измерения, а также читая информацию в виде таблиц, графиков или диаграмм, продумывая вероятность ситуаций или составляя алгоритм действий. Без знаний математики невозможно понять устройство современной техники, невозможно развивать такие науки, как: информатика, кибернетика и т.д.

Современная личность не может развиваться без математики, поскольку она связывает смежные дисциплины, в первую очередь такие как: физика, химия, информатика, - хотя в ней нуждаются и другие предметы. Все больше становится школьников, для которых математика становится приоритетной наукой, поскольку связана с будущей профессией, а высшие учебные заведения требуют высокий уровень знаний по данному предмету.

Актуальной потребностью современного общества становится формирование математического мышления, т.е. учащиеся должны уметь анализировать и синтезировать, обобщать и конкретизировать, классифицировать и систематизировать, абстрагировать и проводить аналогии и т.д. Математические рассуждения помогают вырабатывать умения формулировать и доказывать суждения, логически обосновывать свои взгляды. На уроках формируются алгоритмы мышления, учащиеся действуют не только по заданным алгоритмам, но и открывают новые. Благодаря современным подходам в образовании учащиеся учатся мыслить творчески, уроки математики не являются исключением, поэтому, решая задачи или показывая проблемы, с которыми столкнулись ученые, и не давая решения, ученики сами делают открытия. Математика развивает воображение, а оно не имеет границ.

Культурное развитие человека неразрывно связано с математическим образованием, которое является его компонентом и дает представление о методе и предмете математики, о связи математики с действительностью, об особенностях применения этой науки для решения различных задач. Математическое воспитание также вносит свой вклад в эстетическое воспитание, поскольку приучает к изяществу математических рассуждений.

Основные задачи при изучении учебного материала темы «Комплексные числа» представлены на Рис. 2:

Образовательные:

- \- формирование умений объяснять понятия комплексно-сопряженного числа, модуля комплексного числа;
- \- формирование умений представлять комплексное число в алгебраической или тригонометрической форме;
- \- формирование умений и навыков выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел, записанных в алгебраической форме;
- \- формирование умений и навыков применения тригонометрической формы для выполнения операций умножения и деления комплексных чисел, а также для возведения комплексного числа в степень (формула Муавра) и извлечения корня n-й степени из комплексного числа;
- \- формирование умений изображать комплексные числа на комплексной плоскости;
- \- формирование умений решения алгебраических уравнений и, в частности, квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом;

Развивающие:

- \- развивать умения обобщать изучаемые факты, делать выводы;
- \- развивать внимание, память, речь через решение творческих задач;
- \- развивать креативные и коммуникативные способности через применение коллективной работы на уроках.

Воспитательные:

- \- формирование понимания того, что данная тема имеет важное практическое применения в физике и других областях науки и техники, где приходится оперировать величинами, которые можно представить в виде вектора;
- \- формирование у обучающихся навыков самоконтроля, самоанализа;
- \- формирование сознательной дисциплины и норм поведения учащихся;
- \- обеспечение условия для воспитания положительного интереса к изучаемому предмету;
- \- способствование формированию культуры умственного труда;
- \- способствование формированию умения критично соотносить начальный план работы с реальным процессом ее выполнения.

Рис. 2. Основные задачи при изучении учебного материала темы «Комплексные числа»

Историко-научные знания учащихся пополняются благодаря историческим справкам и сведениям об ученых и о становлении математики как науке, о появлении новых терминов и понятий. Это позволяет видеть вклад математики в развитие общества и вклад каждого ученого в эту науку. Кроме того, имена великих людей должен знать каждый культурный человек.

Современные требования общества к образованию человека ставят перед математикой следующие цели обучения:

- Мировоззренческие, которые связаны с восприятием мира как единого целого и направлены на метапредметные образовательные результаты; формирующие представления о математике как методе познания действительности и как части общечеловеческой культуры.

- Практические, которые направлены на овладение учащимися умениями применять математические знания в жизни; умениями пользоваться математическими инструментами; умениями для продолжения образования; развивающие математическое мышление.

- Обучающие в рамках предмета.

Основные цели при изучении темы «Комплексные числа»:

- расширить множество действительных чисел с целью решения алгебраических уравнений и, в частности, квадратных уравнений, при решении которых получается отрицательный дискриминант;

- научить отображать комплексное число в тригонометрической и алгебраической форме, осуществлять действия умножения, сложения, деления и вычитания над комплексными числами;

- изображать точками плоскости или с помощью векторов комплексные числа, а также извлекать корни из комплексных чисел.

В целом, обучение темы «Комплексные числа» наиболее эффективно через дополнения соответствующего содержания учебного материала прикладными задачами и задачами по межпредметным и внутрипредметным связям.

§4. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Комплексные числа»

В результате изучения раздела «Комплексные числа» учащиеся должны получить следующие знания и умения (Рис. 3):

знать (понимать):

- понятия комплексные числа, действительная и мнимая части;
- арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи;
- понятие комплексно-сопряженные числа;
- понятие модуль комплексного числа;
- геометрическую интерпретацию комплексных чисел;
- термин «аргумент комплексного числа»;
- алгебраическую и тригонометрическую формы записи комплексных чисел;
- формулу Муавра.

уметь:

- уметь выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел, записанных в алгебраической форме;
- представлять комплексное число в алгебраической и тригонометрической форме;
- изображать число на комплексной плоскости;
- уметь выполнять операции умножения и деления чисел, представленных в тригонометрической форме;
- уметь возводить комплексное число в натуральную степень (формула Муавра),
- уметь решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами,
- уметь извлекать корень из комплексного числа.

Рис. 3. Знания и умения учащихся результате изучения раздела «Комплексные числа» учащиеся

Как мы видим, основные требования к знаниям по теме «Комплексные числа» включают в себя следующее: определение комплексного числа, комплексно сопряженные числа, операции сложения комплексных чисел, операции вычитания комплексных чисел, операции умножения комплексных чисел, операции деления комплексных чисел, операции возведения в степень комплексных чисел, операции извлечение корня из комплексного числа, модуль комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа, геометрическая интерпретация комплексных чисел, квадратные уравнения с комплексными числами.

Для беспрепятственного усвоения учащимися знаний по теме «Комплексные числа» учителю необходимо руководствоваться следующими дидактическими принципами:

- От простого к сложному, то есть поэтапное усложнение заданий.

- Новизна, то есть каждая следующая задача должна содержать новый компонент знаний.

- Наследование, то есть решение следующей задачи должно вызывать необходимость к возращению уже полученным знаниям и умениям.

Добиться достижения высоких требований, которые предъявляются к знаниям и умениям учащихся по теме «Комплексные числа» возможно только при выполнении совокупности следующей деятельности:

1. Деятельность познавательная: определение критериев и требований для ранжирования, оценки, сопоставления и классификации объектов. Формирования гипотез с последующим доказательством, а также определение причинно-следственных зависимости.

2. Деятельность преобразующая: возможности поиска нестандартных путей решения, вопросов, обстоятельств в ситуации неточности.

3. Деятельность общеучебная: самосовершенствование и самодвижение, склонность к самостоятельному восприятию новых умений и знаний, взаимооценка, взаимообучение.

4. Деятельность самоорганизующая: формирование промежуточных целей для достижения конкретного результата, определение основной цели для формирования учебных задач, квантификация, самооценка, степень усвоения, самоконтроль.

На пути достижения учащимися знаний и умений по теме «Комплексные числа» учителю не следует забывать также и о главных целях, которые ставятся при усвоении математики, таких как общеобразовательные, развивающие и практические. Чтобы достичь выше упомянутые цели, необходимо руководствоваться следующими принципами:

1. Принцип системности. В процессе изучения темы «Комплексные числа» следует сформировать синхронную систему понятий в мышлении учащихся. Им необходимо видеть структуру темы «Комплексные числа», значение всех разделов и осознавать необходимости этих знаний в целом.

2. Принцип параллельности в изучении теоретической и практической части темы «Комплексные числа». Применение данного принципа приводит к тому, что при получении теоретических и практических знаний и умений по теме «Комплексные числа» необходимо параллельно сопоставлять их с фундаментальными полученными раннее знаниями.

3. Принцип взаимообучения и самообучения учеников. Современный субъект общества, применяющий информационные технологии, систематически сталкивается с необходимостью изучения новейших приемов и способов работы, а также новых понятий. Поэтому назревает острая необходимость обучать учеников методике взаимообучения и самообучения. Так необходимо научить учащихся применять справочную литературу, находить в ней искомую информацию, применять ресурсы Интернета для получения знаний и умений по теме «Комплексные числа», доносить найденные знания до слушателей.

Для достижения наибольшего педагогического эффекта при организации занятий школьников 11 класса по математике используются различные технологии, методы и формы обучения.

Основной формой организации деятельности школьников является урок. В обучении обучающихся используются разные типы уроков:

- урок изучения нового материала;
- урок контроля знаний;
- урок – практическая работа;
- обобщающий урок;
- урок – игра;

- урок – лекция;
- комбинированный урок.

Активизировать познавательную деятельность учащихся можно, внедряя электронные образовательные ресурсы или презентации, созданные к уроку.

При изучении материала раздела «Комплексные числа» применяются следующие методы, связанные с применением средств ИКТ:

- словесные (рассказ, объяснение, лекция, беседа);
- наглядные (демонстрация презентаций);
- практические (устные и письменные упражнения).

Сочетание различных форм организации учебной деятельности при изучении данного раздела позволяет учащимся как самостоятельно усваивать новые знания, формировать и развивать умения, так и оказывать помощь другим, развивая чувство ответственности за общий результат деятельности.

§5. Анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Комплексные числа» в учебниках разных авторов

В связи с тем, что тему «Комплексные числа» то включали, то исключали из программы, имеется незначительное количество учебников, в которые авторы включали эту тему для изучения учащимися.

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа» Н.Я. Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шварцбурда [12], который предназначен для математических классов, тему «Комплексные числа» предлагают изучать в 11 классе (во 2-м полугодии), после изучения в 10 классе раздела тригонометрии, а в 11 – интеграла и дифференциальных уравнений, показательной, логарифмической и степенной функции, многочленов. Авторы разбили на два параграфа освоение темы «Комплексные числа и операции над ними»: тригонометрическая форма комплексных чисел и комплексные числа в алгебраической форме.

Вводится понятие комплексного числа с постановки проблемного вопроса, то есть при решении квадратных уравнений, где дискриминант отрицательный, уравнений 3-ей и 4-ой степени в результате чего, демонстрируется необходимость введения «числа i». После этого раскрывается понятие комплексных чисел и демонстрируются действий над ними: рассматриваются особенности нахождение суммы, разницы, произведения и частного, которые доказывают, что при введении мнимого числа законы алгебры не нарушаются. И только после этого вводится строгое понятие комплексного числа. Затем рассматриваются сопряженные комплексные числа, а также их свойства, вопросы об извлечении квадратных корней и вычисление квадратных уравнений, которые содержат комплексные коэффициенты.

Изучение тригонометрической формы комплексного числа раскрывается в следующем параграфе. В нем объясняется, как геометрически изобразить комплексные числа; что такое тригонометрическая форма комплексных чисел и полярная система координат; какие действия можно производить с тригонометрической формы комплексного числа (деление, умножение, извлечение корня, возведение в степень); как применить комплексные числа к доказательству тригонометрических тождеств; как связаны геометрические преобразования и комплексные числа; какие у комплексного переменного функции.

Исходя из вышеперечисленного, мы можем сказать, что материал учебника рассчитан на значительное количество часов, а также включает в себя не только начальные знания по теме, но и некоторые углубления. Информация изложена логично и последовательно.

Тема «Комплексные числа» в учебнике «Алгебра и начала математического анализа» С.М. Никольского, Н.Н. Решетникова, М.К. Потапова, А.В. Шевкина [33] рассматривается как завершающая в 11 классе вслед за изучением всех тем, что очень логично, поскольку комплексные числа завершают систему чисел, которые дальше уже не расширяются. Информация представлена в трех параграфах: тригонометрическая форма комплексных чисел; алгебраическая форма и геометрическая интерпретация комплексных чисел; показательная форма комплексных чисел, корни многочленов.

Параграфы объемны, так как содержат много теоретических понятий и объяснений, теорем и определений, но в них ограниченное количество информации, ее хватает только для того, чтобы учащиеся поняли суть комплексного числа и овладели минимальными знаниями о них. В учебнике не раскрывает вопрос о формуле Муавра и возведении в степень комплексного числа. Кроме того, практическая часть слишком мала.

Тема «Комплексные числа» в учебнике «Алгебра и начала математического анализа» Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина [24] изучается в 11 классе вслед за изучением тем производной и интеграла. Материал разделен следующим образом: 9 параграфов (два из них со звездочкой, что обозначает сложность и необязательность изучения), раздел с исторической справкой и практической частью. В первом параграфе, который называется «Определение комплексных чисел» вводится понятие комплексного числа через решение уравнений или иных множеств. Второй параграф «Сложение и умножение комплексных чисел» описывает, какими свойствами обладают комплексные числа при сложении и умножении. Третий параграф «Модуль комплексного числа» раскрывает такие понятия, как модуль комплексного числа и сопряженное комплексное число. В четвертом параграфе, который называется «Вычитание и деление комплексных чисел» демонстрируются эти действия обратные сложению и умножению. В пятом параграфе, который называется «Геометрическая интерпретация комплексных чисел» раскрывается понятия комплексной плоскости, геометрический сущность модуля комплексного числа, а также модуля разности комплексных чисел, мнимая и действительная оси. В шестом параграфе «Тригонометрическая форма комплексного числа» рассматривается работа с тригонометрической формой записи комплексного числа и алгебраическими формами комплексного числа, переходом от одной формы к другой. Седьмой параграф «Свойства модуля и аргумента комплексного числа» не обязателен для изучения и обозначен звездочкой, в нем даны формула Муавра и в тригонометрической форме произведение и частное комплексных чисел. В восьмом параграфе, который называется «Квадратное уравнение с комплексными неизвестными» рассматриваются заявленные понятия и корень из отрицательного числа и изучаются квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами. Девятый параграф , который называется «Примеры решения алгебраических уравнений» отмечен звездочкой, в нем объясняются решения 4 типов задач. В итоге материал обобщается, что называется основной теоремой алгебры.

Делая общую характеристику, можно сказать, что информация в каждом параграфе изложена кратко, содержит несколько упражнений и несложных примеров, хотя присутствуют и задачи повышенной трудности, заданий для самостоятельного решения мало.

Тема «Комплексные числа» в учебнике «Алгебра и начала математического анализа» (10 класс профильный уровень) под редакцией А.Г. Мордковича [31] изучается во втором полугодии после изучения действительных чисел и тригонометрии для того, чтобы новые понятия легко усвоились после выученного. Тема «Комплексные числа» состоит из 5 параграфов.

Вводится понятие комплексного числа, когда возникают действия, невозможные для действительных чисел. Новые понятия, среди них и мнимое число, и действия, которые можно выполнить с числовыми множествами, представлены в виде таблице.

Далее рассматривается тема «Тригонометрическая форма записи комплексного числа», где представлены тригонометрическая форма записи комплексного числа, свойства модуля комплексного числа, значение аргумента комплексного числа, а потом решение квадратных уравнений, а также извлечение из комплексного числа квадратного корня. Обязательной темой для изучения является формула Муавра и порядок действия при извлечении из комплексного числа кубического корня. Теория наглядно иллюстрируется на примерах. А вот практика, то есть задачи, размещена в отдельном издании и разделена на уровни сложности.

В учебнике даны краткие исторические факты для расширения кругозора учащихся.

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа» М.И. Шабунина, А.А. Прокофьева, Т.А. Олейника, Т.В. Соколовой [55] «Комплексные числа» изучаются в последней главе. В данной книге задачи объединены в циклы, которые построены таким образом, чтобы сначала решать простые вопросы, потом переходить к более сложным заданиям, постепенно вводя новые понятия и свойства. А перед тем, как приступить непосредственно к задачам, необходимо ознакомиться с теорией, которая размещена перед ними в виде кратких сведений, формул, определений. Данный учебник можно использовать как для самообразования, так и для элективных курсов. Для наиболее трудных задач, отмеченных звездочками, в учебники даны вычисления. Тема «Комплексные числа» разделена на параграфы: Комплексная плоскость, Действия над комплексными числами, «Корни многочленов». Раскрывается новое понятие как развитие множества вещественных чисел. Так из параграфа «Действия над комплексными числами» учащиеся могут найти задания на нахождение обратного числа, сложение комплексных чисел, извлечение из комплексного числа квадратного корня. В следующем параграфе раскрывается понятие комплексной плоскости, аргумента и модуля комплексного числа; приводится тригонометрическая форма записи комплексного числа и, следовательно, деление и умножение, равенство комплексных чисел в этой форме, а также из единицы кубический, разложение с применением формулы Бинома Ньютона, корень формула Муавра. В параграфе «Корни многочленов» представлена основная теорема алгебры и вытекающие из этого понятия. Теоретического и практического материала представлено очень много, но все изложено кратко, конкретно и полно.

Тема «Комплексные числа» в учебнике А.П. Киселева «Алгебра (часть вторая)» [22] изучается после логарифмов и исследований уравнений, она разделена на шесть пунктов: Комплексные числа, Мнимые числа, Геометрическое изображение комплексного числа, Действия над комплексными числами, Тригонометрическая форма комплексного числа, Действия выраженными в тригонометрической форме комплексными числами. Тему начинают с введения понятия «мнимое число» и его обозначения, ранее учащиеся уже встречались с ним в учебнике. Далее вводится понятие комплексных чисел, противоположных и сопряженных комплексных чисел. Следующим пунктом, обязательным для обучения, являются действия над комплексными числами (умножение, сложение, деление, вычитание, извлечение из комплексного числа квадратного корня и возведение в степень). Они объясняются с помощью нескольких наглядных примеров. Так в следующем пункте представлен только теоретический материал о понятие модуля комплексного числа и геометрическом изображении комплексного числа. В следующем разделе изучается аргумент и модуль комплексного числа, а также тригонометрическая форма записи комплексного числа. Последний пункт рассматривает действия над комплексными числами в тригонометрическом формате. В сносках находится информация с историческими сведениями. В учебнике представлено много задач и примеров для самостоятельного решения. Материал изложен полно и логично.

Обзор учебников по алгебре и началам математического анализа, содержащих тему «Комплексные числа» показал, что авторы стремились и стремятся дать в достаточном объеме представление о расширении понятия числа, о комплексных числах, действиях нам ними, их геометрическое истолкование и практическое применение.

§6. Методические особенности обучения теме «Комплексные числа» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы

Анализ зарубежного и отечественного опыта, существующих программ и методических подходов к изучению комплексных чисел и их приложений позволил выяснить, что генетически геометрический подход на основе исторического развития понятия комплексного числа с использованием близких ученикам геометрических образов, а также практических применений, что соответствует современному научному подходу и имеет ряд преимуществ перед другими.

Реализация идеи прикладной направленности темы «Комплексные числа» возможна через дополнения соответствующего содержания учебного материала прикладными задачами и задачами с межпредметными и внутрипредметными связями и включение их в достаточном объеме к курсу по выбору «Комплексные числа». Предлагаемый курс по выбору дает возможность не ограничиваться изучением основных понятий теории комплексных чисел и сосредоточиться на изучении данного раздела в непосредственной связи со многими темами школьного курса математики, а также, используя межпредметные связи, чтобы показать различные интересные применения комплексных чисел: при решении геометрических и физических задач, при доказательстве тригонометрических тождеств и вычислении тригонометрических сумм и многих других, без которых включение этой темы в программу школьного курса математики бы уже малоэффективным.

Учитывая результаты исследований, связанных с развитием личности старшеклассников, нужно опираться на следующие основные принципы организации обучения теме «Комплексные числа» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы:

- мотивация обучения должна строиться с учетом содержательных связей обучения математике с будущей деятельностью после окончания школы;

- учебная деятельность ведется на грани мыслительных возможностей учащихся, обеспечивается изложением материала на достаточно высоком научном уровне сложности, не дублируя при этом вузовской программы;

- выбор форм и методов обучения в направлении придания процессу обучения проблемного характера, большей самостоятельности учащихся в учебной деятельности и возможности проявлять творческий подход при выполнении заданий, ведь личность есть только там, где есть свобода и творчество;

- учет индивидуальных особенностей стиля мышления и памяти учащихся;

- активизация учебно-познавательной деятельности учащихся во всех ее аспектах.

Достаточно эффективным средством обучения теме «Комплексные числа» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы являются межпредметные познавательные задачи, для решения которых привлекаются знания по нескольким учебным предметам, их переноса и обобщения. Такие задачи способствуют развитию самостоятельности учащихся, умению обобщать знания из различных областей науки, формируют умение распознавать и применять соответствующие математические модели. Межпредметные задачи могут быть целенаправленны на достижение познавательной цели. При решении таких задач учащиеся не только учатся применять математические знания, но и получают новые сведения. Одновременно учащиеся приобретают полезные навыки работы со справочниками, учатся самостоятельно находить нужную информацию в дополнительной литературе.

Формирование навыков применения математики к решению прикладных задач является одной из главных целей обучения математике, а при изучении комплексных чисел учащимися 10-11-х классов общеобразовательной школы способствует формированию положительной мотивации изучения математики.

Особая роль в обучении математике отводится систематическому использованию исторического материала, который значительно повышает интерес к изучению данного предмета, рождает критическое отношение к фактам, стимулирует стремление к научному творчеству, раскрывает для учащихся представление об этой науке как важной и неотъемлемой составляющей общемировой человеческой культуры. На содержательных примерах необходимо раскрывать ученикам, какой эволюционный путь прошли математические понятия (в частности, понятие числа), теории и методы, знакомить их с именами и биографиями выдающихся математиков. При этом реализуется воспитательная, активизируются развивающая и познавательная функции обучения.

В личностно-ориентированном обучении особое значение приобретает создание ситуации успеха – субъективных психических состояний удовольствия учеников последствиями интеллектуального или морального напряжения.

В частности, обращение к созданию проблемных ситуаций и поиску их решения, что является основным принципом развивающего обучения, создается интеллектуально-волевое и эмоциональное напряжение, которое часто дополняется при использовании групповых форм работы моральным напряжением, превращая такую учебную деятельность в саморазвитие – обновление смыслов, приобретение субъектного опыта, выработку характера. Использование исследовательской работы как метода обучения способствует проведению сложной внутренней работы, соответствующей потенциальным возможностям учащихся профильных классов. При этом важную роль играет дидактический принцип обучения на высоком уровне научности. Реализовать его можно только в условиях уровневой дифференциации обучения.

Для обучения теме «Комплексные числа» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы естественным является высокий теоретический уровень учебного материала, изучение его быстрым темпом, осознание учениками важной роли теоретических знаний, направленных на формирование умений осуществлять определенную деятельность. В связи с этим особую роль приобретает лекционно-практическая система обучения, которая способствует решению проблемы рационального использования учебного времени и активной научной организации познавательной деятельности учащихся как в школе, так и дома.

Выводы по первой главе

1. Комплексные числа возникли как чисто формальный математический результат при решении уравнений высших степеней. Впервые о комплексных числах упомянул Кардано в 1545 году в своей работе «Большое искусство или о правилах алгебры», хотя и называл их «чисто софистическими величинами». В школы комплексные числа пришли значительно позже.

Проведенный историко-педагогический анализ свидетельствует, что до 1917 года в гимназиях и реальных училищах, хоть и не было стабильных программ и учебников по математике, однако как российские, так и зарубежные учебники и сборники задач для средних учебных заведений содержали раздел «Комплексные числа».

2. В период с 30-х по 60-е года тема «Комплексные числа» входила в обязательную программу по математике, но позже была исключена и рекомендована для изучения на факультативных занятиях. В зарубежной школе сложилась другая ситуация. В учебниках для классов математического направления таких стран, как Франция, Япония, США и других обязательно рассматривается прикладное направление темы «Комплексные числа» в разных его аспектах.

3. Основная цель темы «Комплексные числа» – расширить множество действительных чисел с целью решения алгебраических уравнений и, в частности, квадратных уравнений, при решении которых получается отрицательный дискриминант;

4. Реализация идеи прикладной направленности темы «Комплексные числа» возможна через дополнения соответствующего содержания учебного материала прикладными задачами и задачами с межпредметными и внутрипредметными связями и включение их в достаточном объеме в курсу по выбору «Комплексные числа».

5. Психолого-педагогические исследования и школьная практика свидетельствуют о том, что развитию личности ученика 10-11-х классов общеобразовательной школы, включая развитие математических способностей и удовлетворения его познавательных интересов, активно способствует построение учебного процесса по принципу развивающего обучения с использованием метода проблемного обучения в условиях лекционно-практической системы при целесообразном сочетании различных форм организации учебной деятельности старшеклассников.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§7. Методические рекомендации по обучению теме «Комплексные числа» в курсе математики общеобразовательной школы

Предусмотренный действующей программой углубленного изучения математики объем учебного материала по теме «Комплексные числа» обеспечивает достижения одной, бесспорно, важной, цели – определенного завершения процесса формирования целостного представления про числовую содержательную линию курса математики. Однако остается нераскрытым прикладной аспект этого раздела и нереализованным его образовательный потенциал.

В связи с дефицитом учебного времени, предусмотренного учебным планам, а также учитывая важность данной темы для повышения математической культуры учащихся, содержание этого раздела предлагается расширить и углубить за счет разработанного нами курса по выбору, который предусматривает ознакомление учащихся с приложениями комплексных чисел. Целью данного курса является расширение и углубление содержания курса математики профильного уровня. Практическая реализация может происходить по следующему плану:

1) изучение на основных занятиях по программе углубленного изучения математики в профильных классах запланированного учебного материала;

2) расширение и углубление изученного материала учащимися, которые заинтересовались им на занятиях курса по выбору, а именно: изучение различных применений как внутри самой алгебры, так и в других разделах науки: геометрии, тригонометрии, механике, электротехнике и др.

В старших классах общеобразовательной школы, где обучение осуществляется по программе академического уровня и математика углубленно не изучается, данный раздел предлагаем ученикам изучать как курс по выбору. Целью данного курса является повышение уровня изучения математики в профильной деятельности и удовлетворение познавательных интересов учащихся.

Рекомендуется вначале раскрыть алгебраическую форму записи комплексных чисел. Пусть x и y – произвольные вещественные числа. Следовательно, множеством комплексных чисел называют множество всевозможных пар (x, y) вещественных чисел, на котором определены операции сложения, вычитания и умножения по правилам, описанным ниже.

Множество комплексных чисел является расширением множества вещественных чисел, поскольку множество вещественных чисел содержится в нём в виде пар $(x, 0)$. Чисто мнимыми числами называют комплексные числа, заданные парами $(0, y)$.

Существует несколько форм записи для комплексных чисел: тригонометрическая форма записи, алгебраическая форма записи и экспоненциальная (показательная) форма записи.

Можно сказать, что алгебраическая форма – является такой формой записи комплексных чисел, при которой, заданное парой вещественных чисел (x, y), комплексное число z следует записывать как $z = x + yi$, где применен символ i, который называют мнимой единицей.

Число x называют вещественной частью комплексного числа $z = x + yi$ и записывают $Re\ z$. Число y называют мнимой частью комплексного числа $z = x + yi$ и записывают $Im\ z$. Комплексные числа, у которых $Im\ z = 0$, считаются вещественными числами. Комплексные числа, у которых $Re\ z = 0$, считаются чисто мнимыми числами.

Экспоненциальную и тригонометрическую формы записи комплексных чисел рекомендуется излагать чуть позже.

Рекомендуется рассмотреть сложение, вычитание и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме. Сложение и вычитание комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ осуществляется по правилам сложения и вычитания двучленов (многочленов) $x_1 + y_1 i$ и $x_2 + y_2 i$, т.е. в соответствии с формулами:

$$z_1 + z_2 = x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\, i,$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + y_1 i - (x_2 + y_2 i) = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)\, i.$$

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$, так же, как и операции сложения и вычитания, осуществляется по правилам умножения двучленов (многочленов), однако при этом учитывается важнейшее равенство, имеющее вид: $i^2 = -1$. По этой причине

$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2 =$
$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1 i) i.$

Следующим этапом рекомендуется рассмотреть комплексно сопряженные числа. Два комплексных числа $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$, у которых вещественные части одинаковые, а мнимые части отличаются знаком, называются числами комплексно сопряжёнными.

Операция трансформации от комплексного числа к комплексно сопряженному с ним числу называется операцией комплексного сопряжения, обозначается горизонтальной чертой над комплексным числом и удовлетворяет следующим свойствам:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2},$$

$$Re\, z = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$Im\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Модулем комплексного числа $z = x + yi$ называют вещественное число, обозначаемое | z | и определенное по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Для произвольного комплексного числа z справедливо равенство: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, а для произвольных комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы неравенства:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|,$$
$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Если z – вещественное число, то его модуль $| z |$ равен его абсолютной величине.

Деление комплексного числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ отличное от нуля комплексное число $z_2 = x_2 + y_2 i$ осуществляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

Используя обозначения модуля комплексного числа и комплексного сопряжения, частное от деления комплексных чисел можно представить в следующем виде:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Деление на нуль запрещено.

Затем рекомендуется рассмотреть изображение комплексных чисел радиус-векторами координатной плоскости. Рассматривается плоскость с заданной на ней прямоугольной декартовой системой координат Oxy и напомним, что радиус-вектором на плоскости называют вектор, начало которого совпадает с началом системы координат.

Назовем рассматриваемую плоскость комплексной плоскостью и будем представлять комплексное число $z = x + yi$ радиус-вектором с координатами $($x, y$)$ – Рис. 4.

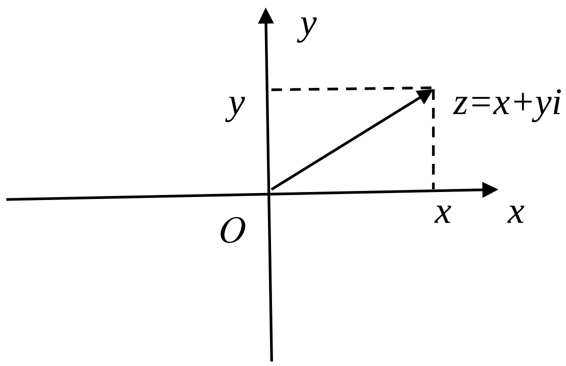

Рис. 4. Комплексная плоскость

Назовем вещественной осью ось абсцисс Ox, а мнимой осью – ось ординат Oy.

При данном представлении комплексных чисел следует сказать, что сумме комплексных чисел соответствует сумма радиус-векторов, а произведению комплексного числа на вещественное число соответствует произведение радиус-вектора на это число.

Далее рассматриваем радиус-вектор произвольного, но отличного от нуля, комплексного числа z.

Угол φ между радиус-вектором z и положительным направлением вещественной оси называют аргументом комплексного числа z.

Если поворот от положительного направления вещественной оси к радиус-вектору z происходит против часовой стрелки, то аргумент комплексного числа z считают положительным, а в случае поворота по часовой стрелке – отрицательным (Рис. 5).

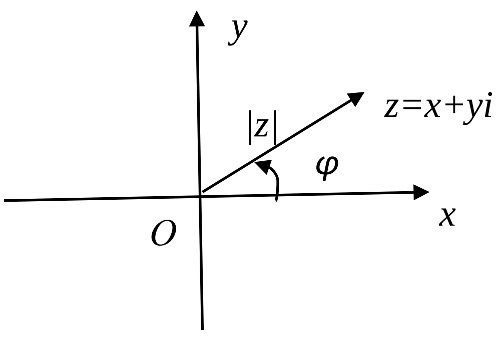

Рис. 5. Изменение комплексной плоскости

Считается, что аргумента не имеет комплексное число 0.

Так как аргумент любого комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k – произвольное целое число, то вводится, главное значение аргумента, обозначаемое arg z и удовлетворяющее неравенствам: $-\pi < arg\, z \le \pi$. Тогда оказывается справедливым равенство: $\varphi = arg\, z + 2k\pi, k \in Z$.

Если для комплексного числа $z = x + yi$ нам известны его модуль $r = |z|$ и его аргумент φ, то мы можем найти вещественную и мнимую части по формулам системы $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$.

Если же комплексное число $z = x + yi$ задано в алгебраической форме, т.е. нам известны числа x и y, то модуль этого числа, конечно же, определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а аргумент определяется в соответствии со следующей Таблицей 1. Для того, чтобы не загромождать запись, условимся, символом k обозначать в таблице 1 произвольное целое число.

Таблица 1

Формулы для определения аргумента числа $z = x + yi$

Расположение числа z	Знаки x и y	Главное значение аргумента	Аргумент
Положительная вещественная полуось	$x > 0$, $y = 0$	0	$\varphi = 2k\pi$
Первая четверть	$x > 0$, $y > 0$	$arctg\left\|\frac{y}{x}\right\|$	$\varphi = arctg\left\|\frac{y}{x}\right\| + 2k\pi$
Положительная мнимая полуось	$x = 0$, $y > 0$	$\frac{\pi}{2}$	$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
Вторая четверть	$x < 0$, $y > 0$	$\pi - arctg\left\|\frac{y}{x}\right\|$	$\varphi = \pi - arctg\left\|\frac{y}{x}\right\| + 2k\pi$
Отрицательная вещественная полуось	$x < 0$, $y = 0$	π	$\varphi = \pi + 2k\pi$
Третья четверть	$x < 0$, $y < 0$	$-\pi + arctg\left\|\frac{y}{x}\right\|$	$\varphi = -\pi + arctg\left\|\frac{y}{x}\right\| + 2k\pi$
Отрицательная мнимая полуось	$x = 0$, $y < 0$	$-\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
Четвертая четверть	$x > 0$, $y < 0$	$-arctg\left\|\frac{y}{x}\right\|$	$\varphi = -arctg\left\|\frac{y}{x}\right\| + 2k\pi$

Любое отличное от 0 комплексное число $z = x + yi$ может быть записано в виде $z = r$ (cos φ + i sin φ), где r и φ – аргумент и модуль этого числа, соответственно, причем модуль удовлетворяет неравенству $r > 0$.

Запись комплексного числа в форме $z = r$ (cos φ + i sin φ) называют тригонометрической формой записи комплексного числа.

Следующим этапом рекомендуется рассматривать экспоненциальную форму записи комплексного числа. В курсе «Теория функций комплексного переменного» доказывается важная формула, которая называется формулой Эйлера: $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Из тригонометрической формы записи комплексного числа и формулы Эйлера вытекает, что любое отличное от 0 комплексное число $z = x + y\,i$ может быть записано в виде $z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$, где r и φ – аргумент и модуль этого числа, соответственно, причем модуль удовлетворяет неравенству $r > 0$.

Запись комплексного числа в форме $z = r \cdot e^{i\varphi}$ называют экспоненциальной (показательной) формой записи комплексного числа.

Из формулы $z = r \cdot e^{i\varphi}$ вытекают, в частности, следующие равенства:

$$e^{2\pi i} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{\pi i} = -1, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i, \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i, 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}.$$

Так же мы видим, что модуль комплексного числа $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, то же самое, числа $e^{\mathrm{i}\varphi}$, при любом значении φ равен 1.

Затем рассматриваем умножение, деление и возведение в натуральную степень комплексных чисел, записанных в экспоненциальной форме. Очень удобна для выполнения операций возведения в натуральную степень, деления и умножения комплексных чисел экспоненциальная запись комплексного числа.

Действительно, умножение и деление двух произвольных комплексных чисел $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$, записанных в экспоненциальной форме, осуществляется по формулам:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} \cdot= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Таким образом, при перемножении комплексных чисел аргументы складываются, а их модули перемножаются.

При делении двух комплексных чисел аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя, а модуль их частного равен частному их модулей.

Что касается возведения комплексного числа $z = r\ e^{\ i\varphi}$ в натуральную степень, то оно осуществляется по формуле $z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}, n \in N$.

По-другому можно сказать, что при возведении комплексного числа в степень, являющуюся натуральным числом, аргумент умножается на показатель степени, а модуль числа возводится в эту степень.

Также рекомендовано рассмотреть извлечение корня натуральной степени из комплексного числа. Пусть $z_0 = r_0 \cdot e^{i\varphi_0}$ – любое комплексное число, отличное от 0. Корнем n-ой степени из числа z_0, где $n \in N, n\ \geq 2$, называют такое комплексное число $z = r\ e^{\ i\varphi}$, которое является решением уравнения $z^n = z_0$. Для того, чтобы решить это уравнение, перепишем его в виде $r^n e^{in\varphi} = r_0 e^{i\varphi_0}$ и заметим, что два комплексных числа, записанных в экспоненциальной форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а разность аргументов равна $2k\pi$, где k – произвольное целое число. По этой причине справедливы равенства системы $r^n = r_0$ и $n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in Z$, следствием которых являются равенства системы $r = \sqrt[n]{r_0}$, $\varphi = (1/n)(\varphi_0 + 2\pi k), k \in Z$. Следовательно, можно сделать вывод, что уравнение $z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$ имеет n различных корней $z_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i\varphi_k}$, где $\varphi = (1/n)(\varphi_0 + 2\pi k)$, $k = 0,1, \ldots, n-1$, причем на комплексной плоскости концы радиус-векторов z_k при $k = 0\ , \ldots\ , n - 1$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r_0}$ с центром в начале координат. Следует отметить, что в случае $n = 2$ уравнение имеет два различных корня z_1 и z_2, отличающихся знаком: $z_2 = -z_1$.

Поскольку комплексные числа органически связаны с действительными числами, то в основу построения методики формирования основных понятий теории комплексных чисел в профильных классах разработаны следующие положения:

- продолжение содержательных линий, начатых в основной школе (линия развития понятия числа, линия решения уравнений, линия прикладной направленности);

- использование символики и терминологии как одного из способов осуществления преемственности курсов математики средней школы и высшего образования;

- использование уровневой системы упражнений различного дидактического назначения как средства формирования основных понятий теории комплексных чисел;

- применение комплексных чисел к решению прикладных задач и задач по межпредметных и внутрипредметных связями.

Анализ отечественных и зарубежных программ и учебников позволил ответить на вопросы по содержанию курса по выбору «Комплексные числа и их применение», основными задачами которого являются:

- формирование представлений учащихся о комплексных числах и их применение в различных областях науки и техники;

- развитие математической культуры учащихся в связи с ознакомлением с методом комплексных чисел при решении задач;

- формирование устойчивых познавательных интересов к математике;

- формирование естественнонаучного мировоззрения на основе межпредметных связей;

- усиление прикладной направленности курса математики.

Прикладное наполнение программы курса по выбору соответствует компетентностному подходу к обучению, направленному на формирование системы соответствующих знаний, навыков, опыта, способностей, что позволяет обоснованно судить о применении математики в реальной жизни.

§8. Система задач по теме «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы

Задачи являются важнейшим средством, применяемым при формировании навыков, умений и знаний учащихся при обучении их математике.

Изложим сформированную систему задач по теме «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы.

Задача 1. Постройте точки $O(0;\ 0)$; $P(-3;\ 0)$; $Q(0;\ 2)$; $M(-2;\ 1)$. Какие комплексные координаты они будут иметь?

Решение. Если $O(0;\ 0)$; $P(-3;\ 0)$; $Q(0;\ 2)$; $M(-2;\ 1)$ – декартовы координаты данных точек, тогда их комплексные координаты: $z_O = 0 + i0$; $z_P = -3 + i0$; $z_Q = 0 + 2i$; $z_M = -2 + 1i$.

Возьмем на координатной плоскости (Рис. 6) вектор OZ в начале координат его начало и с точкой Z конце с координатами (a, b). Так комплексной координатой вектора OZ назовем комплексное число.

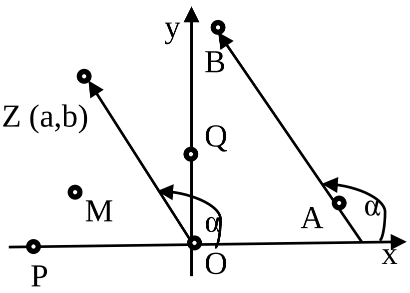

Рис. 6

Рассмотрим какой-нибудь прочий вектор AB, который равен вектору OZ.

Что означает равность данных векторов по длине, лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых и одинаково направлены.

Вектору AB сопоставим то же самое комплексное число z; и будем его называть *комплексной координатой вектора AB*.

Задача 2. Какие комплексные координаты имеют векторы KL, MN, PQ, ST, изображенные на Рис. 7?

Решение. $\overline{KL}$ (3, 1), $\overline{MN}$(4, 0), $\overline{PQ}$ (0, −2), $\overline{ST}$(−1, −3) − координаты в декартовой системе. Тогда данные векторы имеют следующие комплексные координаты: $z\overline{KL}$= 3 + 1·i; $z\overline{MN}$= 4 + 0·i; $z\overline{PQ}$= 0 −2·i; $z\overline{ST}$= −1 −3·i.

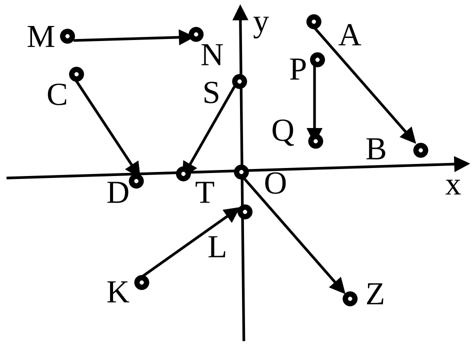

Рис. 7

Задача 3. Нарисуйте на координатной плоскости какие − либо векторы, начала которых не совпадают с началом координат и которые имеют такие комплексные координаты: i , 3 −i, −i − 3, − 2, $\frac{1}{2}-\frac{4}{3}i$.

Решение. Пусть векторы имеют следующие координаты:

$\bar{a}$ (0; 1); $\bar{b}$ (3 ; −1); $\bar{c}$ (−3 ; −1); $\bar{d}$ (−2 ; 0); $\bar{f}$ ($\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{3}$).

Построим эти векторы сначала от начала координат, а затем, используя параллельный перенос, распределим по плоскости *xOy* (Рис. 8).

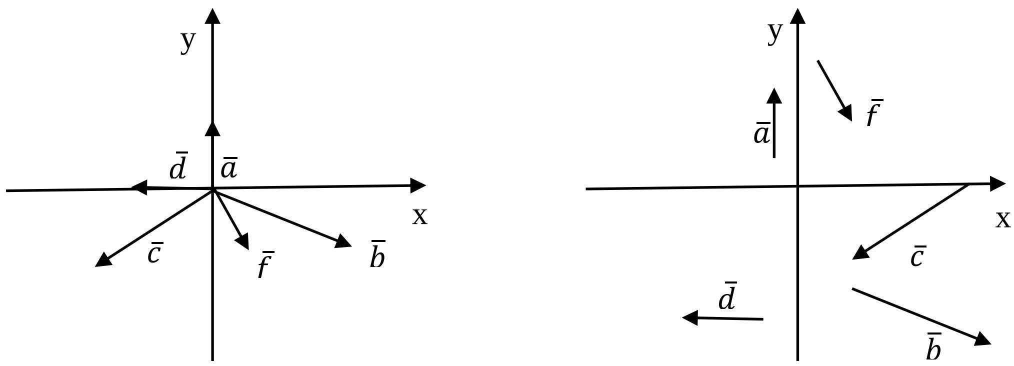

Рис. 8

Задача 4. Изобразите на плоскости *XOY* множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих условию $arqz = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Из понятия главного аргумента комплексного числа вытекает, что открытым лучом *Oz* (Рис. 9) является множество точек *z*, которые удовлетворяют этому соотношению, который имеет положительное направление оси Ох с угол $\frac{\pi}{3}$.

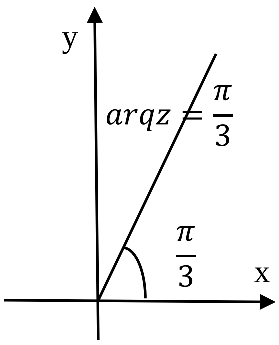

Рис. 9

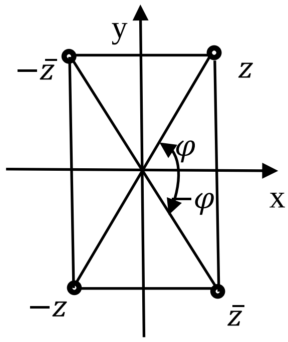

Рис. 10

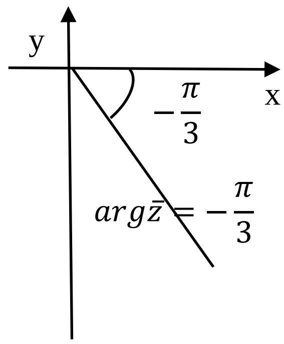

Рис. 11

Комплексно-сопряженным или сопряженным комплексному числу $z = x + iy$ является $\bar{z} = x - iy$. Очевидно, что сопряжено числу $\bar{z}$ число z. Симметричны относительно оси x точки $M(z)$, $M_1(\bar{z})$ (Рис. 10-11).

Задача 5. Найдите аргумент чисел $-2+3i$ и $-3-4i$.

Решение. При решении данной задачи необходимо использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа.

Воспользуемся формулами

$$cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

из которых можно найти угол α.

Для первого числа аргумент находится в промежутке от 0 до π следовательно записать его можно как арккосинус:

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}\right) = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Для второго числа аргумент расположен в третьей четверти, а значения арккосинуса и арксинуса не могут быть больше π, поэтому воспользуемся формулой арктангенса: $\alpha = \pi + arctg\frac{4}{3}$.

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha, \\ \cos x + \cos y = \cos \alpha. \end{cases}$$

Решение. Данная система элегантно решается, используя комплексные числа.

Первое уравнение, умножив на i, затем сложив со вторым имеем:

$$(\cos x + i \sin x) + (\cos y + i \cos y) = \cos \alpha + i \sin \alpha .$$

Пусть $z = (\cos x + i \sin x)$, $w = (\cos y + i \cos y)$, а $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Тогда получаем равенство в виде $z + w = a$.

$|z| = |w| = |a| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$,

то есть все точки лежат на единичной окружности (Рис. 12).

Параллелограмм $Ozaw$ – ромб, у которого длина диагонали равна длине стороны, а значит углы

$$\angle aOz = \angle aOw = \frac{\pi}{3} .$$

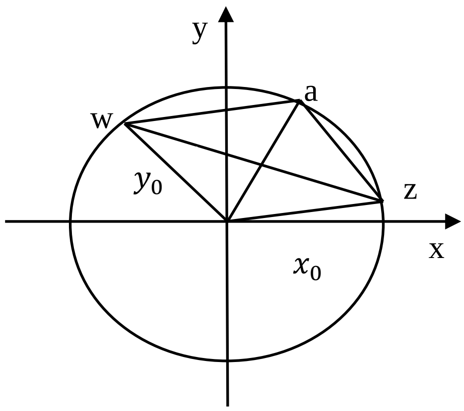

Рис. 12

Иначе говоря, так как x_o и y_o являются главными аргументами чисел z и w, следовательно,

$$\alpha - x_o = \frac{\pi}{3} \text{ и } y_o - \alpha = \frac{\pi}{3}$$

и решение данной системы может быть записано в виде:

$$x = x_0 + 2k\pi = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2k\pi , \; y = y_0 + 2n\pi = \alpha + \frac{\pi}{3} + 2n\pi (k, n \in Z).$$

Ответ: $x = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = \alpha + \frac{\pi}{3} + 2n\pi (k, n \in Z)$.

Задача 7. Покажите множество точек комплексной плоскости, которые удовлетворяли бы условию: $|z-2+i|\geq 5$.

Решение. Точки z, которые мы ищем, отстоят от точки $A(2-i)$ на расстояние ≥ 5, так ка $|z-2+i|=|z-(2-i)|$.

Следовательно, данное множество точек лежит на окружности и вне ее с центром в точке (2;−1) и радиусом 5.

Задача 8. Покажите множество точек комплексной плоскости, которые удовлетворяли бы условию: $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right)\geq 1$.

Решение. Возьмем $z=x+yi$, следовательно, $\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}=\frac{1}{x+iy}+\frac{2}{x-iy}=\frac{3x+iy}{(x+iy)(x-iy)}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}$. Неравенство $\frac{y}{x^2+y^2}\geq 1$ при $x^2+y^2\neq 0$ соответствует неравенству $x^2+y^2-y\leq 0$ или $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$

Конечное неравенство формирует круг с радиусом 0,5 и центром в точке (0; 0,5), включая границу этого круга. Точка (0; 0) не принадлежит данному множеству в результате ограничения $x^2+y^2\neq 0$ (Рис. 13).

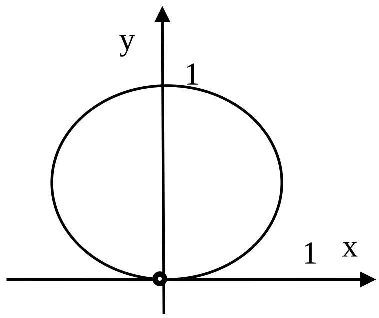

Рис. 13

Задача 9. Решите уравнения: а) $x^2-4x+5=0$; б) $z^2+3+4i=0$.

Решение. а) $D = 16 - 4\cdot1\cdot5 = -4 < 0$, уравнение имеет мнимые корни

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}\cdot i}{2a}=\frac{4+2i}{2}=2+i;\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}\cdot i}{2a}=\frac{4-2i}{2}=2-i.$$

б) $z^2+3+4i=0$; $z^2=-3-4i$;

$$z^2=(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2ab\cdot i.$$

Получим систему: $\begin{cases}a^2-b^2=-3\\2ab=-4\end{cases}$ или $\begin{cases}b^2-a^2=3\\ab=-2\end{cases}$

У данной системы два решения: $\left[\begin{array}{l}a=1\\b=-2\end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l}a=-1\\b=2\end{array}\right.$

Ответ: а) $2 \pm i$; б) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -1 + 2i$

Задача 10. Покажите множество точек комплексной плоскости, которые удовлетворяли бы условию: $\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$.

Тогда $(1-i)z - i = (x+iy)(1-i) - i = (x+y) + (y-x-1)i$;

$|(x+y)+(y-x-1)i| = \sqrt{(x+y)^2 + (y-x-1)^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + 1}$.

Из условия, $\sqrt{2} < \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + 1} < 2\sqrt{2}$, отсюда

$2 < 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + 1 < 8$; $1 < x^2 + y^2 + x - y + 0{,}5 < 4$;

$1 < (x + 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 < 4$.

Правая часть данного неравенства формирует круг с радиусом 2 и центром в точке K(–0,5; 0,5), а левая часть задает область, находящийся вне круга с радиусом 1 и центром в точке K.

Задача 11. Какие комплексные числа заданы выражениями: $e^{i \cdot 0}$; $e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$; $e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$; $e^{i \cdot (-\frac{\pi}{4})}$?

Решение. Используя тригонометрическую запись комплексного числа и формулу Муавра, получим:

$e^{i \cdot 0} = cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1$; $\quad e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i$;

$e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $\quad e^{i \cdot (-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

Задача 12. Представьте в показательной форме число $3-4i$.

Решение. Найдем модуль числа $z = 3-4i$: $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Следовательно, $z = 5\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5} i\right)$, при этом среди углов φ, удовлетворяющих двойному неравенству $0 \le \varphi < 2\pi$, существует, и при том только единственный, такой угол φ, что $\frac{3}{4} = Coo\varphi$, а $-\frac{4}{5} = Sin\varphi$, и поэтому

$z = 5(Coo\varphi + i \cdot Sin\varphi\ ) = 5e^{-i\varphi}$, где $\varphi = -\arcsin\frac{4}{5}$.

Значит z = $5e^{i \cdot \arcsin\frac{4}{5}}$.

Задача 13. z_1 и z_2 являются комплексные координаты двух точек, которые находятся на окружности с центром в начале координат и радиусом R, α и β аргументы этих чисел, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Проверьте справедливость следующего тождества:

$$z_1 - z_2 = |z_1 - z_2| \cdot e^{i \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot i\ .$$

Решение. Так как $z_1 - z_2 = R\,e^{i\alpha} - R\,e^{i\beta}$,

то $\dfrac{z_1 - z_2}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \dfrac{1}{i} R \cdot \left(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}} \right) = 2R \cdot \sin\dfrac{\beta-\alpha}{2} > 0$.

Отсюда $|z_1 - z_2| = 2R \cdot \sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

Значит $z_1 - z_2 = |z_1 - z_2| \cdot e^{i \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot i$.

Задача 14. Выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность. Необходимо через диагонали четырехугольника выразить сумму произведений противоположных сторон.

Решение.

Доказательство с помощью тригонометрической записи комплексного числа. Будем считать, что центр окружности взят в качестве начала координат и что мы последовательно видим вершины A_1, A_2, A_3, A_4 при обходе против часовой стрелки окружности. Точку O выберем

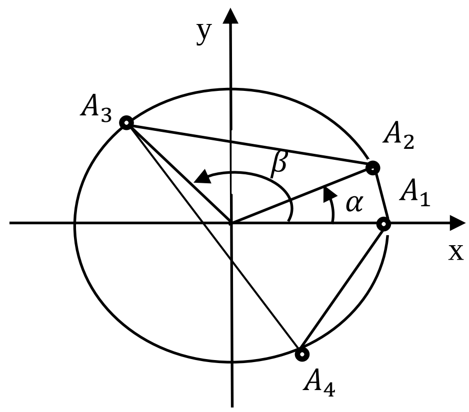

Рис. 14

за начало координат. Повернем четырехугольник так, чтобы вершина A_1 принадлежала положительному лучу оси абсцисс (Рис. 14). Вершины A_2, A_3, A_4 теперь можно рассматривать как комплексные числа x, y, z, модули которых равны R, а главные аргументы соответственно α, β, γ; комплексное число R – вершина A_1.

Необходимо доказать равенство $A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 = A_2A_4 \cdot A_1A_3.$

Его можно переписать в виде

$$|x-R|\cdot|y-z|+|z-R|\cdot|y-x|=|y-R|\cdot|z-x|$$

$$|x-R|=|R\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)-R|=R\cdot|(\cos\alpha-1)+i\cdot\sin\alpha|=R\cdot\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}=$$

$=R\cdot\sqrt{2-2\cos\alpha}=2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, и аналогично $|y-R|=2R\cdot\sin\frac{\beta}{2}$, $|z-R|=2R\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

Далее: $|z-y|=\left|z\cdot(\frac{y}{z}-1)\right|=|z|\cdot\left|\frac{\cos\beta+i\cdot\sin\beta}{\cos\gamma+i\cdot\sin\gamma}-1\right|=$

$$=R\cdot|\cos(\beta-\gamma)+i\cdot\sin(\beta-\gamma)-1| = 2R\cdot\sin\frac{\gamma-\beta}{2},$$

и аналогично $|y-x|= 2R\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, $|z-x|= 2R\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$.

Так равенство теперь принимает вид:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

и для доказательства необходимо применить формулу синуса разности:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2})+\sin\frac{\gamma}{2}==(\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2})=$$

$$=\sin\frac{\beta}{2}\cdot(-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2})= \sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Задача 15. Может ли произведение диагоналей выпуклого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ быть большей, чем сумма произведений противоположных сторон.

Решение. Воспользуемся тождеством, верным для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и z_4:

$$(z_2-z_3)\cdot(z_4-z_3)+(z_3-z_2)\cdot(z_4-z_1)=(z_4-z_2)\cdot(z_3-z_1).$$

Опираясь на свойства модулей комплексных чисел, получим:

$|z_4-z_2|\cdot|z_3-z_1|\le|z_2-z_1|\cdot|z_4-z_3|+|z_3-z_2|\cdot|z_4-z_1|$, то есть всегда

$A_1A_3 \cdot A_2A_4 \leq A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4.$

Получили, что в каждом четырехугольнике произведение диагоналей не больше суммы произведений его противоположных сторон.

Задача 16. Векторы $\overline{KL}$ и $\overline{MN}$ содержит комплексные координаты z и w, при этом $w = 3iz$. Изобразите вектор $\overline{KL}$ и вектор $\overline{KL'}$, сформированный при помощи этого преобразования (Рис. 15).

Решение. Вектор $\overline{KL}$ необходимо повернуть вокруг K на угол $\frac{\pi}{2}$ радиан ($\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$), а также растянуть с коэффициентом 3 ($|3i| = 3$) имеем вектор $\overline{KL'} = \overline{MN}$.

При этом важен тот момент, когда $|c| = 1$. При этом комплексное число c (имеет вид $e^{i\alpha}$) являет собой оператор поворота.

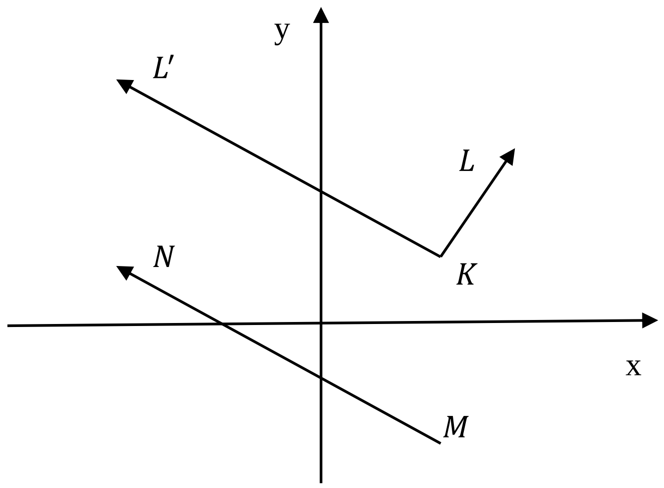

Рис. 15

Задача 17. Пусть $OABC$ − квадрат (Рис. 16). Вектор $\overline{OA}$ имеет комплексную координату $z = 3 - i$. Определить комплексную координату вектора $\overline{AC}$ (обозначим − w_2) и вектора $\overline{OB}$ (обозначим − w_1).

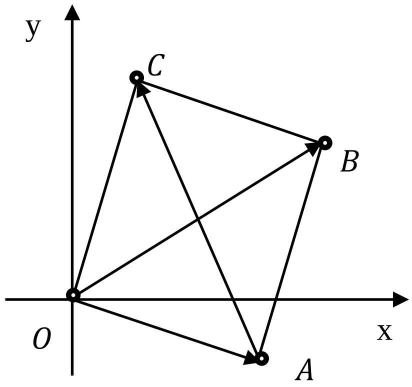

Рис. 16

Решение. Получить вектор $\overline{OB}$ можно повернув $\overline{OA}$ на угол $+\frac{\pi}{4}$ радиан и растянуть после с коэффициентом растяжения $\sqrt{2}$.

$$w_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right) \cdot z = (1+i)(3-i) = 4 + 2i .$$

Если в положительном направлении повернуть $\overline{OB}$ на 90°, то имеем вектор $\overline{OB}^1 = \overline{AC}$.

$$w_2 = iw_1 = i \cdot (4 + 2i) = -2 + 4i .$$

Ответ: $\overline{OB}$ $(4 + 2i)$, $\overline{AC}$ $(-2 + 4i)$.

Задача 18. При вершине O (O − начало координат) ромба $OZ_1Z_2Z_3$ острый угол равен 45° (Рис. 17)., вершина Z_1 содержит комплексную координату z_1= $2\sqrt{2} + i$ (так вершины O, Z_1, Z_2 и Z_3 идут против часовой стрелки). Определите у остальных вершин ромба комплексные координаты.

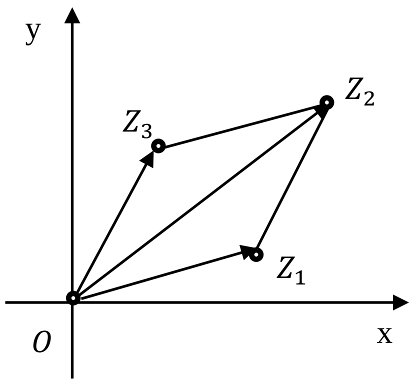

Рис. 17

Решение. Комплексные координаты вершин ромба Z_1, Z_2, Z_3 обозначим z_1, z_2, z_3. Вершина $O(0;\,0)$ содержит комплексную координату 0.

Вектор $\overline{O}\overline{Z}_1$ поворачивается на угол 45° ($+\dfrac{\pi}{4}$ радиан).

Следовательно имеем:

$$z_3 = z_1 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2}+i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$\overline{O}\overline{Z}_2=\overline{O}\overline{Z}_1+\overline{O}\overline{Z}_3$, то имеем

$$z_2 = z_1 + z_3 = (2\sqrt{2}+i)+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Ответ: $Z_2\left(\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, $Z_3\left(\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

Задача 19. На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ построены квадраты (Рис. 18), которые с треугольником не имеют общие внутренние точки, и их центры B_1, B_2 и B_3. Определите справедливо ли соотношения: $B_1B_2 = A_3B_3$, $B_1B_2 \perp A_3B_3$.

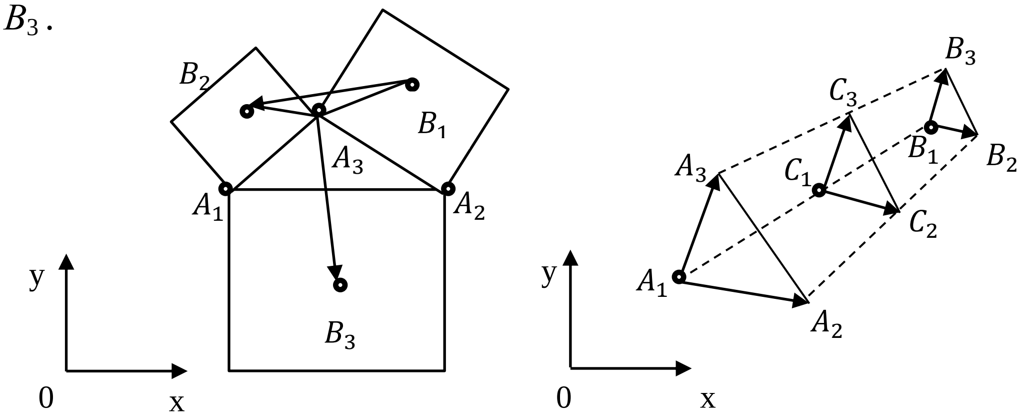

Рис. 18

Решение. Выберем в плоскости треугольника декартову систему координат XOY, обозначим комплексные координаты точек и векторов следующим образом:

$A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_3(a_2)$, $B_1(b_1)$, $B_2(b_2)$, $B_3(b_3)$, $\overline{B}_1\overline{B}_2(z)$, $\overline{A}_3\overline{B}_3(w)$.

Тогда $z = b_2 - b_1$, $w = b_3 - a_3$.

Для того, чтобы найти b_2, отметим середину $C_2(c_2)$ отрезка A_1A_3.

Тогда $c_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$.

Вектор $\overline{C_2}\,\overline{A_3}$ содержит комплексную координату

$a_3 – c_2 = a_3 - \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{1}{2}(a_3 - a_1)$.

Вектор $\overline{C_2}\,\overline{B_2}$ формируется из вектора $\overline{C_2}\,\overline{A_3}$ поворотом на $+\frac{\pi}{2}$ радиан и, следовательно, комплексная координата вектора $\overline{C_2}\,\overline{B_2} = \frac{1}{2}(a_3 - a_1)\cdot i$.

Применяя решение предыдущей задачи получаем:

$b_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} + i \cdot \frac{a_3 - a_1}{2}$.

Заменяя индексы, получим:

$$b_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} + i \cdot \frac{a_1 - a_2}{2}; \qquad b_1 = \frac{a_2 + a_3}{2} + i \cdot \frac{a_2 - a_3}{2}.$$

Подсчитаем значение комплексных координат z и w:

$z = \frac{a_1 - a_2}{2} + i \cdot \frac{2a_3 - a_1 - a_2}{2}$; $\quad w = \frac{a_2 + a_1 - 2a_3}{2} = i \cdot \frac{a_1 - a_2}{2}$.

Отсюда получаем, что $w = z \cdot i$.

Это обозначает, что при повороте на 90^0 вектора $\overline{B_1}\,\overline{B_2}$ против часовой стрелки, имеем вектор, который равный вектору $\overline{A_3}\,\overline{B_3}$.

Но в таком случае $B_1 B_2 = A_3 B_3$ и $B_1B_2 \perp A_3 B_3$.

Следовательно, изложенная система задач по теме «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы содержит задачи на: №1, №2, №3 – рассматривается связь комплексных чисел с координатами векторов, вводятся новые понятия комплексной координаты точки и комплексной координаты вектора; №4 – рассматривается тригонометрическая форма записи комплексного числа, геометрическая интерпретация противоположных и сопряженных комплексных чисел, вводится уравнение окружности, записанное при помощи комплексных чисел; №5, №6 – связаны с расположением комплексных чисел на плоскости, используя основные определения и факт, что расстояние между двумя точками z и w равно расстоянию между 0 и $z-w$, т.е. $|z-w|$; №7, №8 – задачи, в которых необходимо изобразить множество комплексных чисел, заданных в виде обыкновенного или двойного неравенства; №9, №10 – направлены на умения выполнять преобразования комплексных чисел и решать простые квадратные и кубические уравнения, содержащие комплексные числа; №11, №12, №13 – представление комплексных чисел показательной форме формула Эйлера, формула Муавра; №14, №15 – рассматривается доказательства теоремы Птолемея при помощи показательной записи комплексного числа и при помощи тригонометрической записи числа; №16 – рассматривается комплексное число как оператор поворота и растяжения; №17, №18, №19 – задачи на формулы перемещения для квадрата, ромба и центров квадратов, построенных на сторонах произвольного треугольника.

§9. Элективный курс «Комплексные числа»

Была разработана программа элективного курса «Комплексные числа». Элективный курс «Комплексные числа» предназначен для учащихся 11 профильных классов.

Курс является межпредметным (алгебра + геометрия). Данная программа направлена на: углубление знаний и умений учащихся; обобщение понятия числа; знакомство с гиперкомплексными числами (кватернионами). Для реализации программы достаточно знаний и умений, полученных в основном курсе математики 10 класса.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями. Она:

1. Расширяет, обобщает и интегрирует знания учащихся по теме «Комплексные числа».

2. Готовит учащихся к более осмысленному пониманию теоретических сведений.

3. Способствует повышению общего уровня математической культуры и расширению кругозора.

Цель элективного курса: формирование у учащихся системы знаний о понятиях, связанных с комплексными числами, их приложениями в геометрии, расширение понятия комплексного числа – знакомство с кватернионами.

Задачи элективного курса:

− показать практическое применение комплексных чисел в алгебре и геометрии;

− расширить понятие числа и ознакомить с новой числовой системой (системой кватернионов);

− вооружить учащихся специальными и общенаучными знаниями, позволяющими им самостоятельно добывать информацию, необходимую для результативной деятельности;

− активизировать познавательную и творческую деятельность обучающихся.

Программа элективного курса рассчитана 34 часа (2 ч. в неделю).

Форма занятий:

- урок − лекция,

- урок − практикум,

- комбинированный урок, который включает в себя как теоретический материал, так и решение задач, урок самостоятельного решения задач, урок защиты проектов.

Тематическое планирование элективного курса «Комплексные числа» представлено в Таблице 2.

Таблица 2

Тематическое планирование элективного курса «Комплексные числа» (34 часа)

№ занятия	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
1-6	Геометрическая интерпретация комплексных чисел.	6	Урок-лекция Комбинированные уроки Урок-практикум
7-12	Использование комплексных чисел для решения задач и доказательств теорем геометрии	6	Урок-лекция Комбинированный урок
13-18	Классификация перемещений плоскости с использованием комплексных чисел (комплексный множитель как оператор поворота и растяжения (или сжатия)). Моделирование функций комплексной переменной	6	Урок-лекция Комбинированные уроки
19-24	Основная теорема алгебры и ее следствия. Применение основной теоремы алгебры для нахождения корней многочлена.	6	Урок-лекция Комбинированные уроки Урок-практикум
25-30	Кватернионы. Скалярные и векторные кватернионы. Связь кватернионов с векторами в трехмерном евклидовом пространстве.	6	Комбинированный урок Урок-практикум
31	Контрольная работа.	1	Урок самостоятельного решения задач
32-34	Защита проектов. Итоговое занятие.	3	Урок защиты проектов

Отличительные особенности данного элективного курса:

– преемственность между основными понятиями базового (числовые операции, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел) и элективного (алгебраические операции, комплексные числа и кватернионы) курсов математики;

– разнообразие задач на доказательство;

– взаимосвязь алгебры и геометрии;

– использование информационно-коммуникативных технологий;

– расширение множества комплексных чисел до множества кватернионов.

Опишем содержание элективного курса «Комплексные числа»:

1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел (6 ч.).

Изображение точек, имеющих комплексные координаты, на плоскости. Изображение векторов с комплексными координатами на плоскости. Изображение множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих заданными условиями (представленных в виде равенств, неравенств, двойных неравенств; а также в случаях, когда комплексное число дано в виде своей мнимой, действительной части или как аргумента числа). Критерий принадлежности трех точек плоскости одной прямой.

Основная цель – показать, как комплексные числа могут быть изображены точками и векторами плоскости.

2. Использование комплексных чисел для доказательств теорем и решения задач геометрии (6 ч.).

Доказательство свойства отрезка, построенного на серединах диагоналей произвольного четырехугольника. Задача Птолемея. Доказательство одного из признаков прямоугольника и свойство диагоналей произвольного четырехугольника. Критерий принадлежности четырех точек окружности. Нахождение координаты точки пересечения секущих единичной окружности. Нахождение координаты точки пересечения двух касательных к единичной окружности. Теорема Ньютона. Теорема Гаусса.

Основная цель – демонстрация применения комплексных чисел для доказательства теорем, касающихся четырехугольников, прямых линий и окружностей.

3. Классификация перемещений плоскости с использованием комплексных чисел (6 ч.).

Тождественное отображение ($z \to z$). Осевая симметрия ($z \to \bar{z}$). Параллельный перенос ($z \to z+b$). Поворот на угол α. Скользящая симметрия (композиция осевой симметрии и поворота ($z \to \bar{z}+b$).

Комплексная функция комплексного переменного. Моделирование функций комплексной переменной.

Основная цель – показ применения комплексных чисел, как оператора поворота и растяжения.

4. Основная теорема алгебры и ее следствия. Применение основной теоремы алгебры для нахождения корней многочлена (6 ч.).

Корни многочлена с целыми коэффициентами. Необходимое условие существования рациональных корней. Решение неполных кубических уравнений с действительными коэффициентами (случай трех действительных корней, случай одного комплексного и пары комплексно сопряженных корней, применение метода разложения на множители). Формулы Кардано. Теорема Декарта о действительных корнях многочлена.

Основная цель – применение теории комплексных чисел для решения уравнений.

5. Кватернионы (6 ч.).

Историческая справка. Триплеты. Скалярные и векторные кватернионы. Связь алгебраических операций над комплексными числами с алгебраическими операциями над кватернионами. Связь кватернионов с векторами в трехмерном пространстве. Модуль кватерниона. Особенности деления кватернионов.

Основная цель – ознакомление учащихся с дальнейшим расширением понятия числа – гиперкомплексными числами и действиями с ними.

6. Контрольная работа (1 ч.).

Основная цель – проверка знаний и умений учащихся по данной теме.

7. Защита индивидуальных и групповых проектов (3 ч.).

Ниже представлена тематика исследовательской работы учащихся в рамках элективного курса «Комплексные числа». Темы исследовательских работ предлагаются учащимся для выполнения групповых или индивидуальных проектов или в качестве индивидуальных научно - исследовательских работ.

В начале изучения программы выдаются темы. Защита работ или проектов проходит в рамках научно - исследовательской конференции. На школьную конференцию учащихся отбираются лучшие работы.

1. Происхождение понятия комплексного числа и его развитие.

План работы:

1. Происхождение понятия комплексного числа. Развитие в XVI − XVII вв.

2. Комплексные числа в XVIII в. Труды Даламбера, Муавра и Эйлера.

3. Новый взгляд на комплексные числа в XIX веке.

4. Современный взгляд на комплексные числа (Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин и др.).

2. Происхождение понятия кватерниона и его развитие. Триплеты.

План работы:

1. От комплексных чисел к триплетам. Труды У.Р. Гамильтона.

2.От триплетов к кватернионам.

3. Работы Г. Грассмана, Б. Пирса, А. Кели и Г. Фробениуса.

4. Современный взгляд на кватернионы.

3. Свойства комплексных чисел и кватернионов.

План работы:

1. Доказательство свойств комплексных чисел.

2. Свойства кватернионов.

3. Отличительные особенности свойств двух числовых систем.

4. Умножение точек на плоскости.

План работы:

1. Как умножаются точки на прямой.

2. Определение умножения на плоскости.

3. Можно ли определить умножение в пространстве?

4. Точки как комплексные числа.

5. **Пары чисел и действия с ними.**

План работы:

1.Уравнение $ax-by=c$ в целых числах.

2.Пары чисел.

3. Уравнение $x^2-dy^2=1$ в целых числах.

4. Замечательное тождество и композиция Виета.

5. Комплексные числа $a+bi$ как пары.

6. Композиции перемещений плоскости при заданном комплексном операторе *z*.

План работы:

1.Композиции двух поворотов, двух параллельных переносов.

2. Композиция двух осевых симметрий.

3. Композиция двух косых симметрий.

4. Композиция осевой симметрии и поворота.

7. Комплексные числа и кривые второго порядка.

План работы:

1.Функция $w= z^2$ −функция комплексного переменного.

2.Образы координатных четвертей и плоскостей и координатной сетки.

3.Прообразы прямых.

4.Концентрические окружности плоскости z.

8. Стереографическая проекция на комплексную плоскость.

План работы:

1. Что такое стереографическая проекция. Примеры (http://video.yandex.ru).

2. Сфера. Экваториальная плоскость. Полюса.

3. Сфера Римана.

4. Конечная комплексная плоскость.

Ниже представлено содержание элективного курса «Комплексные числа» по основным блокам.

Блок 1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Основная цель – систематизация знаний учащихся об основных понятиях темы «Комплексные числа».

Комплексные координаты точек и векторов.

На первом занятии рассматривается связь комплексных чисел с координатами векторов, вводятся новые понятия комплексной координаты вектора и комплексной координаты точки.

Возьмем на плоскости декартову систему координат xOy.

Пусть Z − некоторая точка на плоскости. Положение ее находится двумя действительными числами − ее декартовыми координатами (a, b).

Сопоставим точке Z комплексное число $z = a + ib$.

Назовем *комплексной координатой точки* Z это комплексное число.

Каждому комплексному числу z соответствует на декартовой плоскости xOy вполне определенная точка Z, комплексной координатой которой является именно это число z. Причем, на оси Oy откладываем коэффициент при i (действительное число), но отметке 1 на оси Oy соответствует число i.

Модуль и аргумент комплексного числа.

На втором занятии рассматривается тригонометрическая форма записи комплексного числа, геометрическая интерпретация противоположных и сопряженных комплексных чисел, вводится уравнение окружности, записанное при помощи комплексных чисел.

Если число $z = a + ib$ − комплексная координата вектора AB, то длина r этого вектора называется *модулем числа* z (обозначается $|z|$).

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Угол α (отсчитываемый в положительном направлении, то есть против часовой стрелки) наклона вектора AB к оси Ox называется *аргументом числа* z (обозначается $Arg\ z$).

$\varphi = arg\ z$.

У каждого комплексного числа z имеется бесконечно много аргументов, если $z \neq 0$, то аргументы отличаются на кратное 2π, а аргумент 0 произволен.

Изображение комплексных чисел при помощи точек на плоскости позволяет представить число $a + bi$ в другом виде, а именно в так называемой тригонометрической форме. Пусть точка М изображает комплексное число $a + bi$ (Рис. 19). Тогда $OA = a$; $AM = b$. Из прямоугольного треугольника OAM имеем: $a = r \cdot cos\alpha$, $b = r \cdot sin\alpha$. Подставив в число найденные выражения, имеем $a + bi = r \cdot (cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$. Это и есть тригонометрическая форма комплексного числа.

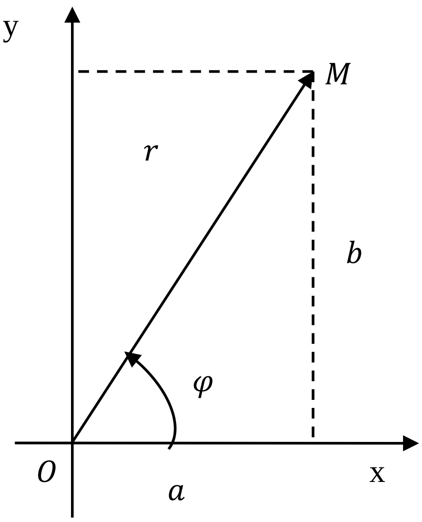

Рис. 19

Расположение комплексных чисел.

Занятие 3 посвящено решению задач, связанных с расположением комплексных чисел на плоскости, используя основные определения и факт, что расстояние между двумя точками z и w равно расстоянию между 0 и $z-w$, т.е. $|z-w|$.

Изображение комплексных чисел, заданных своей мнимой или действительной частью.

На данном занятии рассматриваются простейшие изображения комплексных чисел. Учащиеся могут выполнять самостоятельно задания, с последующей проверкой.

Изображение множества точек комплексной плоскости, заданных в виде неравенств.

На пятом занятии рассматриваются задачи, в которых необходимо изобразить множество комплексных чисел, заданных в виде обыкновенного или двойного неравенства.

Изображение множества точек комплексной плоскости, заданных в виде частного.

Для решения задач на пятом занятии необходимы умения выполнять преобразования комплексных чисел и решать простые квадратные и кубические уравнения, содержащие комплексные числа. В начале занятия можно решить несколько несложных квадратных или кубических уравнений:

Блок 2. Использование комплексных чисел для решения задач и доказательств теорем геометрии.

Основная цель – демонстрация применения комплексных чисел для доказательства теорем и решения задач геометрии.

Показательная форма записи комплексных чисел

Для последующего решений нам необходимо представление комплексных чисел показательной форме.

Формулу $e^{i\varphi} = cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ называют **формулой Эйлера**.

Формулу $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ − **формулой Муавра**.

Более распространена другая запись формулы Муавра:

$(cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = cosn\varphi + i \cdot \sin n\varphi$

Формула Эйлера позволяет каждое комплексное число записать компактно в виде $z = r\, e^{i\varphi}$, где φ − аргумент числа, а r −его модуль.

Следствия:

1. При умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а модули перемножаются.

2. Пусть даны два комплексных числа

$z_1 = e^{i\varphi} = cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$

и $z_2 = e^{-i\varphi} = cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi) = cos\varphi - i \cdot \sin\varphi$.

Выразим тригонометрические функции через показательную форму комплексных чисел (складывая и вычитая эти числа):

$$2cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}, \ 2\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}.$$

Откуда $cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ и $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$.

Использование показательной формы записи комплексных чисел для доказательства задачи Птолемея.

На девятом занятии рассматривается два доказательства теоремы Птолемея: при помощи показательной записи комплексного числа и при помощи тригонометрической записи числа. Доказательство следствия этой задачи можно предложит учащимся выполнить самостоятельно.

Блок 3. Классификация перемещений плоскости с использованием комплексных чисел.

Основная цель – показ практического применения комплексных чисел внутри школьной математики (в том числе, как оператора поворота и растяжения).

Перемещения плоскости.

Определение: Перемещение плоскости – это такое отображение плоскости на себя, при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами.

Выберем на плоскости систему координат. Тогда перемещение f каждому комплексному числу z ставит в соответствие некоторое число $f(z)$, и при этом расстояние между двумя различными точками z и t равно расстоянию между их образами $f(z)$ и $f(t)$. Согласно геометрическому смыслу разности комплексных чисел, расстояние между z и t равно $|z-t|$, а расстояние между образами – $|f(z)-f(t)|$. Таким образом, отображение f обладает следующим свойством: для любых $z, t \in C$

$$|f(z)-f(t)| = |z-t|.$$

Это свойство и есть фактически определение перемещения на языке комплексных чисел. Функция комплексного переменного $f(z)$ в действительности имеет достаточно простой вид.

Теорема: Если перемещение плоскости f имеет две неподвижные точки 0 и 1, то f либо тождественное отображение $z \to z$, либо отображение $z \to \bar{z}$.

Доказательство: Так как функция имеет неподвижные точки, то выполняются следующие равенства: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Рассмотрим такую точку $z_0 \in C$, для которой $f(z_0) \neq z_0$. По условию выполняются равенства $|f(z_0) - 0| = |z_0 - 0|$, $|f(z_0) - 1| = |z_0 - 1|$. Эти равенства означают, что каждая из точек 0 и 1 равноудалена от точек z_0 и $f(z_0)$. Следовательно, прямая, проходящая через 0 и 1 , т.е. ось абсцисс, является серединным перпендикуляром отрезка, соединяющего точки z_0 и $f(z_0)$. Иначе говоря, точки z_0 и $f(z_0)$ симметричны относительно оси абсцисс, а это означает, что $f(z_0) = -z_0 = \bar{z}$.

Таким образом, если $f(z) \neq z$, то $f(z) = \bar{z}$, т.е. при отображении f всякая точка z либо остается на месте, либо переходит в свою сопряженную.

При тождественном преобразовании все точки плоскости неподвижны, при осевой симметрии − неподвижные точки составляют прямую – ось симметрии.

Отображения $f(z) = z + b$ и $f(z) = \bar{z} + b$, при $b \neq 0$ задают параллельный перенос на вектор $b = \overline{O}b$. Параллельный перенос не имеет неподвижных точек.

Комплексный множитель как оператор поворота и растяжения.

На этом занятии рассматривается комплексное число как оператор поворота и растяжения. Это возможно используя тригонометрическую (или показательную) запись комплексного числа. Модуль числа рассматривается как оператор растяжения или сжатия, а аргумент как угол поворота. В конце занятия можно акцентировать внимание, что с помощью комплексного множителя можно описывать и повороты плоскости.

Комплексное число можно толковать как точку и как вектор.

Применение перемещений для решения задач.

На этом занятии рассматриваются три задачи, в которых используются формулы перемещения для квадрата (угол между диагоналями равен 90^0, ромба (один из углов которого равен 45^0 и центров квадратов, построенных на сторонах произвольного треугольника (квадраты Наполеона).

Функции комплексной переменной. Линейная функция.

Комплексные числа нашли значительное применение при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Давайте приведем пример. Так же комплексные числа нашли свое применение в самолетостроении. Когда появились самолеты, потребовалась теория обтекания крыла самолета потоком воздуха. Выяснилось, что самым естественным языком описания подобного процесса, т.е. языком аэродинамики, является теория функций комплексного переменного. Поэтому, когда вы видите современный авиалайнер, знайте, что его сделали гений конструкторов, инженеров, рабочих и …комплексные числа.

Пусть G – некоторое множество комплексной плоскости и каждому $z \in G$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w , это говорит нам, что на G определена функция комплексного переменного z. При этом w называют значением функции в точке z и записывают $w= f(z)$, или $\begin{cases} w = f(x), \\ z = x + iy, w = U + iV. \end{cases}$

Многочлены, которые мы подробнее рассмотрим в блоке 4, это целые рациональные функции, являющиеся частным видом комплексной функции, зависящие от комплексного аргумента.

Рассмотрим отображение, осуществляемое простейшие аналитической функцией − линейной, которая имеет вид: $w= ax + b$ ($a \neq 0$).

При a = 1 отображение : w= x + b является параллельным переносом на вектор b (Рис. 20).

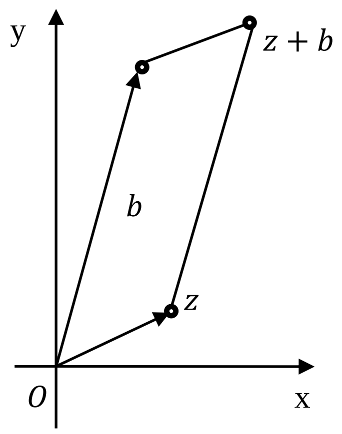

Рис. 20

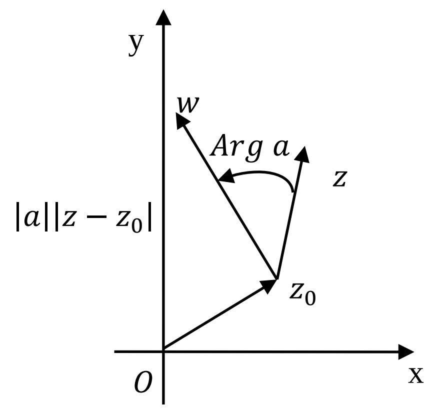

Рис. 21

Пусть теперь $a \neq 1$. Тогда уравнение $z = az + b$ имеет единственное решение: $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$. Вычитая из обеих частей w= $ax + b$, полученное решение имеем: $w - z_0 = a(z - z_0)$. Итак, вектор $w - z_0$ получается из $z - z_0$ умножением на a, т. е. поворотом вектора $z - z_0$ на угол $Arg\ a$ и растяжением его в $|a|$ раз (Рис. 21). Как это сделать было рассмотрено выше.

В результате изучения программы настоящего элективного курса ученикам необходимо:

– правильно употреблять уже знакомые понятия: комплексные числа, действительная и мнимая части комплексного числа, сопряженные числа; и новые термины: кватернионы, скалярная и векторная части кватернионов;

– уметь производить арифметические действия с комплексными числами и кватернионами;

– уметь доказывать свойства и теоремы, относящиеся к основным понятиям и решать типовые задачи, иллюстрирующие основные положения элективного курса.

Для анализа эффективности проводимых занятий по элективному курсу «Комплексные числа» используются следующие значения:

– степень помощи учителя, то есть чем реже помощь, тем выше самостоятельность проявляет ученик, а следовательно, и выше становиться развивающий эффект занятий;

– черты действий учеников на уроке, то есть уровень их заинтересованности, активности;

– итоги выполнения заданий, в результате которых используются задания, уже сделанными учениками, но отличающиеся по своему внешнему оформлению, тем самым выявляется уровень усвоения этих типа заданий.

Основными формами подведения результатов применения данного элективного курса «Комплексные числа» являются контрольная работа и защита индивидуальных и групповых проектов.

Основное содержание курса «Комплексные числа» соответствует современным тенденциям развития школьного курса алгебры и начал математического анализа, идеям дифференциации, углубления и расширения знаний учащихся.

Изучение темы «Комплексные числа» позволяет раскрыть способности учащихся, которые имеет более высокую степень математической подготовки, что даст им возможность не только проанализировать свои способности, но и сделать рациональный выбор дальнейшего обучения и будущей профессии.

§10. Результаты педагогического эксперимента

С целью доказательства эффективности применения разработанного элективного курса «Комплексные числа» и системы задач по теме «Комплексные числа» был проведен педагогический эксперимент. Педагогический эксперимент проводился на базе МБОУ «Петровская школа № 1» с. Петровка, Красногвардейский район, Республика Крым.

Цель педагогического эксперимента – это выявить у учащихся умения решать задания по теме «Комплексные числа» и оценить уровень сформированности познавательных универсальных учебных действий в рамках результата обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики.

Для того, чтобы мы могли определить, на каком уровне учащиеся усвоили тему «Комплексные числа» им была дана письменная контрольная работа (Приложение А).

По результатам проведенной контрольной работы мы пришли к выводу, что степень обученности старшеклассников теме «Комплексные числа» равна 100%, то есть можно сказать, что все, кто посещал элективный курс, выполнили контрольную работу на достаточно высоком уровне (79%).

Из первого задания видно, что 86% старшеклассников освоили вычисления арифметических операции над комплексными числми – это их умножение, сложение, деление, вычитание и возведение в степень. Следует отметить, что в основном ошибки связаны с содержанием (7%), то есть плохо усвоены предыдущее знания (например, формулы сокращенного умножения), а также невнимательность учеников (7%) (например, ученик не учитывая знаки при умножении на «-*i*» получает вместо «-*i*» «*i*»).

Из второго задания видно, что 86% старшеклассников освоили понятие равенства комплексных чисел. Следует отметить, что в основном ошибки связаны с неглубоким применением понятия (7%), то есть, перенося из правой в левую часть комплексное число, приведя подобные, учащийся затем только мнимую и действительную часть приравнял к 0 (поздно применил равенства комплексных чисел, то есть не на первом шаге вычисления), а также ошибки связаны с содержанием (7%), то есть плохо усвоены предыдущее знания (например, решая систему из 2-х линейных уравнений ученик применил метод подстановки, а следовало применять метод сложения уравнений системы).

Из третьего задания видно, что 79% старшеклассников освоили как вычислять квадратные уравнения с любым дискриминантом, так и разложить многочлены на множители. Следует отметить, что в основном ошибки связаны с трудностью определения необходим для вычисления признаков (7%), то есть ученики при поиске корней уравнения не замечали простого решения, а применяли тригонометрическую форму комплексного числа, однако это громоздко и нерационально, а также ошибки связаны с тем, что ученики не использовали сокращенную формулу определения дискриминанта, а применяли общую, то есть выходили на сложное вычисление (14%).

Из четвертого задания видно, что 86% старшеклассников освоили изображение на плоскости комплексных чисел, а также их составных частей. Следует отметить, что в основном ошибки связаны с невнимательностью учеников (7%), то есть, правильно изобразив на плоскости комплексное число, не обозначили точку или не отразили ее координаты при оформлении, а также ученики путали действительную и мнимую оси (7%), то есть относительно другой оси отображали множество точек.

Из пятого задания видно, что 65% старшеклассников усвоили, как переводить из алгебраической в тригонометрическую формы комплексные числа, а также как их перемножать. Следует отметить, что в основном ошибки связаны с тем, что ученики не глубоко владеют определением величины угла по его значению косинуса и синуса (14%), а также не довели решение до конца (14%), то есть забыли про модуль комплексного числа, не записывая тригонометрическую форму комплексного числа. Остывшие 7% учеников из-за не внимательности произвели решение не по алгоритму, поставленному в задании, то есть в задании описывалось последовательность вычисления, а ученики сразу перемножили комплексные числа и полученный результат привели в тригонометрическую формы.

Из проведенного анализа ошибок, допущенных учениками при выполнении контрольной работы, мы выделили следующие их типы:

1. Логические (21%) – не определяют существенных признаков понятий, а также связей между ними.

2. По содержанию (42%) – неверно применяют основные формулы, понятия, соглашения.

3. Процессуальные (49%) – нерациональное и невнимательное решение из-за формального отношения к вычислению.

Логические ошибки, допущенные в работе, свидетельствуют о недостаточном развитии глубины мышления учащихся. То, что ученики невнимательны и не вчитываются в задание, доказывает большой процент процессуальных ошибок. Особенно тревожным является наличие ошибок по содержанию, потому что в старших классах учащиеся должны более внимательно и осознано использовать основные понятия и формулы.

В общем, анализируя уровень знаний и исследуя ошибки по теме «Комплексные числа», можно сказать, что ученики выполнили успешно контрольную работу, а значит, элективный курс «Комплексные числа» и система задач по этой теме разработаны эффективно.

В рамках требований ФГОС ООО к результатам обучения старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики выделим следующие познавательные универсальные учебные действия:

1) познавательные общеучебные УУД – определение изучаемого понятия, выделение его свойств, перевод информации из текстового представления в графическое или символьное, и наоборот, решение задачи разными способами и выделение наиболее оптимального, формулирование вывода;

2) познавательные логические УУД – сравнение объектов по существенным признакам, установление причинно-следственных связей, построение цепочек логических рассуждений, структурирование учебной информации [51].

В процессе поиска новых оценочных средств и создания эффективного инструментария, позволяющего не только оценивать уровень сформированности познавательных УУД, но и отслеживать его динамику в процессе обучения, были сформулированы специальные требования к оценочным средствам.

Оценочное средство должно:

1) быть удобно применимым в различных ситуациях, понятным и легко доступным как учителю математики, так и обучающемуся;

2) способствовать экономии учебного времени;

3) основываться на базовом математическом содержании, что способствует более «чистому» проявлению УУД;

4) давать результаты, которые легко обрабатывать, анализировать, систематизировать и хранить [51].

На основе анализа перечня адекватных умений, определённого структурой и содержанием УУД, были сформулированы критерии и описаны показатели сформированности познавательных УУД обучающихся 11-х классов МБОУ «Петровская школа №1».

Исходя из того, что каждый возрастной период школьника обуславливает основной или ведущий тип учебной деятельности, была проведена конкретизация показателей сформированности познавательных УУД этой категории обучающихся с учётом их возрастных особенностей, содержания и объёма учебного материала.

При описании показателей каждого из критериев сформированности познавательных универсальных учебных действий были соблюдены требования чёткости, лаконичности, однозначности формулировок и их понятности каждому участнику образовательного процесса.

Для диагностики уровня сформированности каждого познавательного универсального учебного действия разработан конструктор заданий, представленный критериями сформированности действия, «определяющих слов» и шаблонов заданий (Табл. 3). На основании данного конструктора применен банк соответствующих заданий по различным тематическим линиям школьного курса математики 11-х классов МБОУ «Петровская школа №1» с. Петровка, Красногвардейский район, Республика Крым в рамках результатам обучения старшеклассников теме «Комплексные числа». Проведена оценка валидности и надёжности каждого задания.

Таблица 3

Конструктор заданий для диагностики уровня сформированности познавательных универсальных учебных действий (фрагмент)

Универсальное учебное действие	Критерий сформированности	Определяющие слова	Шаблон задания
умение определять изучаемое понятие, выделять его свойства	умеет определять изучаемое понятие по его признакам	установите соответствие между понятиями и их характеристиками, свойствами или признаками	Установите соответствие между понятиями и их определениями. А) 1) Б) 2) В) 3) Ответ: А Б В

При выявлении уровня сформированности следует учитывать полноту усвоения компонентов познавательных универсальных учебных действий как комплекса соответствующих знаний, умений.

В данной работе в зависимости от степени проявления критериев сформированности определены уровни сформированности познавательных универсальных учебных действий: низкий, средний, высокий. Описанный подход позволил создать валидный, надёжный инструментарий, который позволяет как оценивать уровень сформированности познавательных универсальных учебных действий, так и отслеживать его динамику в процессе обучения математике, который удобно применять и легко адаптировать к различным учебно-методическим комплексам и условиям. Для каждого познавательного универсального учебного действия определены критерии и показатели сформированности, а содержание контрольной работы представлено в приложении А (Табл. 4).

Таблица 4

Показатели уровня сформированности познавательных универсальных учебных действий (фрагмент)

Критерий сформированности УУД	Показатель	Баллы	Уровень сформированности УУД
умеет определять изучаемое понятие по его признакам	установлены все соответствия (показатель проявился полностью)	2	высокий
	установлены 1-2 соответствия (показатель проявился частично)	1	средний
	не установлено ни одного соответствия (показатель не проявился)	0	низкий

Для проведения оценки уровня сформированности познавательных универсальных учебных действий разработанные диагностические задания были интегрированы в состав контрольной работы в контексте их математического содержания, для выполнения которых востребованы соответствующие познавательные умения в рамках результата обучения.

Оценивание познавательных универсальных учебных действий происходило на основании критериально-уровневого подхода. В целом, показано, что предложенная система задач по теме «Комплексные числа» и элективный курс «Комплексные числа» для учащихся позволил повысить их уровень познавательных универсальных учебных действий.

Выводы по второй главе

Анализ отечественных и зарубежных программ и учебников позволил ответить на вопросы по содержанию курса по выбору «Комплексные числа и их применение», основными задачами которого являются:

- формирование представлений учащихся о комплексных числах и их применение в различных областях науки и техники;

- формирование устойчивых познавательных интересов к математике;

- развитие математической культуры учащихся в связи с ознакомлением с методом комплексных чисел при решении задач;

- формирование естественнонаучного мировоззрения на основе межпредметных связей, осознаются в процессе решения прикладных задач и задач с межпредметных и внутрипредметных связями;

- усиление прикладной направленности курса математики.

Была разработана система задач по теме «Комплексные числа» и элективный курс «Комплексные числа» для учащихся старших классов. Элективный курс «Комплексные числа» предназначен для учащихся 11 профильных классов. Курс является межпредметным (алгебра + геометрия).

Данная программа направлена на: углубление знаний и умений учащихся; обобщение понятия числа; знакомство с гиперкомплексными числами (кватернионами). Для реализации программы достаточно знаний и умений, полученных в основном курсе математики 10 класса.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями. Она:

1. Расширяет, обобщает и интегрирует знания учащихся по теме «Комплексные числа».

2. Готовит учащихся к более осмысленному пониманию теоретических сведений.

3. Способствует повышению общего уровня математической культуры и расширению кругозора.

Цель элективного курса: формирование у учащихся системы знаний о понятиях, связанных с комплексными числами, их приложениями в геометрии и ознакомить с расширением понятия комплексного числа – кватернионами.

Показано, что предложенная система задач по теме «Комплексные числа» и элективный курс «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы позволил повысить их уровень познавательных универсальных учебных действий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комплексные числа возникли как чисто формальный математический результат при решении уравнений высших степеней. Впервые о комплексных числах упомянул Кардано в 1545 году в своей работе «Большое искусство или о правилах алгебры», хотя и называл их «чисто софистическими величинами». В школы комплексные числа пришли значительно позже.

Проведенный историко-педагогический анализ свидетельствует, что до 1917 года в гимназиях и реальных училищах, хоть и не было стабильных программ и учебников по математике, однако как российские, так и зарубежные учебники и сборники задач для средних учебных заведений содержали раздел «Комплексные числа».

В период с 30-х по 60-е года тема «Комплексные числа» входила в обязательную программу по математике, но позже была исключена и рекомендована для изучения на факультативных занятиях. В зарубежной школе сложилась другая ситуация. В учебниках для классов математического направления таких стран, как Франция, Япония, США и других обязательно рассматривается прикладной направление темы «Комплексные числа» в разных его аспектах.

Реализация идеи прикладной направленности темы «Комплексные числа» возможна через дополнения соответствующего содержания учебного материала прикладными задачами и задачами с межпредметными и внутрипредметными связями и включение их в достаточном объеме к курсу по выбору «Комплексные числа». Предлагаемый курс по выбору дает возможность не ограничиваться изучением основных понятий теории комплексных чисел и сосредоточиться на изучении данного раздела в непосредственной связи со многими темами школьного курса математики, а также, используя межпредметные связи, чтобы показать различные интересные применения комплексных чисел: при решении геометрических и физических задач, при доказательстве тригонометрических тождеств и вычислении тригонометрических сумм и многих других, без которых включение этой темы в программу школьного курса математики бы уде малоэффективным.

Была разработана система задач по теме «Комплексные числа» и элективный курс «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы. Элективный курс «Комплексные числа» предназначен для учащихся 11 профильных классов. Курс является межпредметным (алгебра + геометрия).

Данная программа направлена на: углубление знаний и умений учащихся; обобщение понятия числа; знакомство с гиперкомплексными числами (кватернионами). Для реализации программы достаточно знаний и умений, полученных в основном курсе математики 10 класса.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями. Она:

1. Расширяет, обобщает и интегрирует знания учащихся по теме «Комплексные числа».

2. Готовит учащихся к более осмысленному пониманию теоретических сведений.

3. Способствует повышению общего уровня математической культуры и расширению кругозора.

Цель элективного курса: формирование у учащихся системы знаний о понятиях, связанных с комплексными числами, их приложениями в геометрии и ознакомить с расширением понятия комплексного числа − кватернионами.

Показано, что предложенная система задач по теме «Комплексные числа» и элективный курс «Комплексные числа» для учащихся старших классов общеобразовательной школы позволил повысить их уровень познавательных универсальных учебных действий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеева А.А. История возникновения комплексных чисел и их влияние на развитие математики / А.А. Авдеева, И.Н. Росляков, Л.И. Рослякова // Молодежь и XXI век. – Курск: Юго-Зап. гос. ун-т., ЗАО «Университетская книга». – 2016. – С. 47-49.

2. Алимов А.Ш. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Базовый и углубленный уровни. Учебник. / А.Ш. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

3. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел. / И.К. Андронов. – М.: Просвещение, 1975. – 158 с.

4. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов / В.И. Арнольд. – М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2002. – 40 с.

5. Аршинов М.Н. Грани алгебры / М.Н. Аршинов, Л.Е. Садовский. − М.: Факториал Пресс, 2008. − 328 с.

6. Ашманов С. Числа и многочлены / С. Ашманов //Квант. –1980. – № 2. – С. 17-20.

7. Балк М.Б. Реальные применения мнимых чисел / М.Б. Балк, Г.Д. Балк, А.А. Полухин. – К.: Рад. шк., 1988. – 255 с.

8. Боженов Л.И. Введение понятия комплексных чисел при обучении учащихся классов естественно-математического профиля курсу алгебры и началам математического анализа / Л.И. Боженова, Д.В. Капитонов // Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования. – 2014. – С. 84-95.

9. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Выш. школа, 1979. – 368 с.

10. Вагутен Н. Сопряженные числа / Н. Вагутен // Квант.– 1980.– № 2. – С.26-32.

11. Васильев Н.Б. Пары чисел и действия с ними / Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер // Квант. – 1985. – № 1. – С. 19-24.

12. Виленкин Н.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень). / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – 18-е изд. – М.: Мнемозина, 2014. – 312 с.

13. Гайдукова Н.Н. Формирование межпредметных связей на курсах по подготовке к ЕГЭ по математике / Н.Н. Гайдукова // Наука XXI века: новый подход. – 2015. – С. 72-76.

14. Гиндикин С. О пользе чисел «поистине софистических» / С. Гиндикин // Квант. – 1983. − № 6. – С. 10-17.

15. Глазков Ю.А. Комплексные числа. 9–11 классы / Ю. А. Глазков, И.К. Варшавский, М.Я. Гаиашвили. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 157 с.

16. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX-X кл. Пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

17. Глейзер Г.И. История математики в школе: VII-VIII кл. Пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1982 – 340 с.

18. Данилова Н.А. К вопросу введения комплексных чисел в школьный курс математики / Н.А. Данилова, И.Л. Мирошниченко // Фундаментальные проблемы науки. – 2016. – С. 108-110.

19.Зентиева Т.А. Комплексные числа в курсе математики средних учебных заведений / Т.А. Зентиева // Некоторые вопросы анализа, алгебры геометрии и математического образования. – 2016. – № 4. – С. 81-82.

20. Кантор И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. − М. : Наука, 1973. – 144 с.

21. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А.П. Карп. – М. : Просвещение, 1995. – 176 с.

22. Киселев А.П. Алгебра. Ч. II. / А.П. Киселев. – М.: Физматлит, 2014. – 248 с.

23. Козиоров Ю.Н. Комплексные числа и тригонометрические функции / Ю.Н. Козиоров // Математика в школе. – 1995. – № 2. – С. 57-61.

24. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни. / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – М. : Просвещение, 2015. - 384 с.

25. Котова Ю.В. Методические особенности изучения геометрических приложений комплексных чисел в классах с углубленным изучением математики : дис. ... канд. пед. наук. / Ю.В. Котова. – М., 1996. – с. 186.

26. Кузмин Р.О. Алгебра и арифметика комплексных чисел. / Р.О. Кузмин, Д.К. Фадеев. – Л.: Изд. Наркомпроса РСФСР, 1939. – 188 с.

27. Куланин Е.Д. Комплексные числа и кривые второго порядка / Е.Д. Куланин, Г.Л. Луканкин // Математика в школе. – 1991. − № 2. – С. 50-53.

28. Литвиненко М. В. Некоторые вопросы преподавания темы «Комплексные числа» в старшей школе / М. В. Литвиненко, А. И. Мельникова // Физико-математическое и естественное образование: наука и школа. – 2018. – С. 120-123.

29. Мищенко А. Кватернионы / А. Мищенко, Ю. Соловьев // Квант. – 1983. – № 9. – С. 9-14.

30. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник в 2-х частях. Базовый и углубленный уровни. / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2019. – 511с.

31. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Ч. 2. Задачник учащихся для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). / А.Г. Мордкович. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.

32. Нахман А.Д. Комплексные числа и элементарные функции комплексного переменного: Метод. пособие. / А.Д. Нахман. – Тамбов: ТОПКРИО, 2007. – 43 с.

33. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.

34. Новоселов С.И. О комплексных числах в курсе 10 класса / С.И. Новоселов // Математика в школе. – 1968. – № 1. – С. 38–39.

35. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб.-метод. пособие / В.П. Покровский; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: ВлГУ, 2014. – 143 с.

36. Понтрягин Л.С. Комплексные числа /Л.С. Понтрягин // Квант. – 1982.– № 4. – С. 16–19.

37. Понтрягин Л.С. Обобщение чисел / Л.С. Понтрягин // Квант. – 1985.– № 3. – С. 2–5.

38. Понтрягин Л.С. Обобщение чисел / Л.С. Понтрягин //Квант. – 1985.– № 2. – С. 6–11.

39. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования: Решение федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол от 28.06.2016 № 2/16-3 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgosreestr.ru/registry/primernaya-osnovnaya-obrazovatelnaya-programma-srednego-obshhego-obrazovaniya/ (дата обращения 25.10.2019).

40. Сергиенко Л.Ю. Методика изучения комплексных чисел и их приложений в курсе математики средних специальных учебных заведений : дис. ... канд. пед. наук. / Л.Ю. Сергиенко. – М., 1981. – с. 159.

41. Симоновская Г.А. Факультативный курс «Комплексные числа и их приложения» для старших классов средней школы : дис. ... канд. пед. наук. / Г.А. Симоновская. – М., 1997. – с. 172.

42. Синкевич Г.И. История геометрических представлений комплексных чисел / Г.И. Синкевич // История науки и техники. – 2017. – № 4. – С. 15-30.

43. Смирнова Н.Ю. Психолого-педагогические особенности восприятия темы «Комплексные числа» в старших классах / Н.Ю. Смирнова // Университетское образование: культура и наука. – 2012. – С. 114-115.

44. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1990. – 256 с.

45. Тамер О.С. Технология обучения комплексным числам на основе осуществления межпредметных связей в системе непрерывного профессионального образования : дис. ... канд. пед. наук. / О.С. Тамер. – Тольятти, 1999. – с. 130.

46. Тарасенко А.В. Введение понятия комплексных чисел при обучении учащихся старших классов естественно-математического профиля курсу алгебры и началам математического анализа [Электронный ресурс]/ А.В. Тарасенко //Студенческий: научный журнал. – 2019. – № 33. – С. 25-27. – Режим доступа: https://sibac.info/journal/student/77/154888. – Последнее обновление 04.12.2019.

47. Тарасенко А.В. Исторические аспекты возникновения и развития комплексных чисел в математике [Электронный ресурс]/ А.В. Тарасенко //Студенческий: научный журнал. – 2019. – № 30. – С. 82-85. – Режим доступа: https://sibac.info/journal/student/74/152989. – Последнее обновление 04.12.2019.

48. Тарасенко А.В. Психолого-педагогические особенности восприятия старшеклассниками темы «Комплексные числа» в школьном курсе математики [Электронный ресурс]/ А.В. Тарасенко // Современная психология и педагогика: проблемы и решения. – 2019. – № 9. – С. 30-34. –

Режим доступа: https://sibac.info/conf/pedagogy/xxvi/153209. – Последнее обновление 04.12.2019.

49. Тарасенко А.В. Формирование межпредметных связей при обучении старшеклассников теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики [Электронный ресурс]/ А.В. Тарасенко //Студенческий: научный журнал. – 2019. – № 34. – С. 79-88. – Режим доступа: https://sibac.info/journal/student/78/154950. – Последнее обновление 04.12.2019.

50. Толковый словарь Ушакова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://gufo.me/dict/ushakov (дата обращения 25.10.2019).

51. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: Приказ Минобрнауки России от 15.05.2012 № 413 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://base.garant.ru/70188902/8ef641d3b80ff01d34be16ce9bafc6e0/ (дата обращения 25.10.2019).

52. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/ (дата обращения 25.10.2019).

53. Федеральный перечне учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования: Приказ Минпросвещения России от 28.12.2018 № 345 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://base.garant.ru/70649798/53f89421bbdaf741eb2d1ecc4ddb4c33/ (дата обращения 25.10.2019).

54. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень. Методическое пособие для 10 класса. / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 448 с.

55. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень. Задачник для 10-11 классов. / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. - 477 с.

56. Brown James Ward Complex variables and applications / James Ward Brown, Ruel V. Churchill.—8th ed. – New York: McGraw-Hill, 2009. – 482 p.

57. Burton David M. The History of Mathematics (3rd ed.) / David M. Burton. – New York: McGraw-Hill, 1995. – 294 p.

58. Corry L. A Brief History of Numbers. Oxford University Press. / L. Corry. – Oxford University Press, 2015. – 336 p.

59. Hardy G.H. An Introduction to the Theory of Numbers / G.H. Hardy, E.M. Wright. – Oxford: At the Clarendon Press, 1971. – 421 p.

60. Kasana H.S. Complex Variables: Theory And Applications (2nd ed.) / H.S. Kasana. – New Delhi : PHI Learning Pvt. Ltd, 2005. – 248 p.

61. Katz Victor J. A History of Mathematics / Victor J. Katz. – Addison-Wesley, 1998. – 864 p.

62. Mejlbro L. Real Functions in One Variable Complex Numbers Examples Calculus / L. Mejlbro. – Ventus Publishing Aps, 2007. – 97 p.

63. Nahin Paul J. An imaginary tale : The story of √-1 / Paul J. Nahin. – Princeton (N. J.) : Princeton univ. press, 1998. - 257 p.

64. Sveshnikov A. G. The theory of functions of a complex variable / A. G. Sveshnikov, A. N. Tikhonov. – M. : Mir publishers, 1982. – 320 p.

65. Waerden, B. L. van der A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin, Heidelberg / B. L. van der Waerden. – New York, Tokyo: Springer Verlag, 1985. – 271 p.

Приложение А

Контрольная работа

1 вариант

1. Выполнить действия:

$(0{,}2 + 0{,}1i) + (0{,}8 - 1{,}1i)$, $(5 + 3i)(2 - 5i)$,

$\dfrac{(1 - 2i) \cdot (2 + i)}{3 - 2i}$, $i^5 \cdot (1 - i^3)$.

2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел: $3 + 4ix + 5yi = 12i + 5x - 2y$.

3. Решить уравнение: $x^2 + 6x + 18 = 0$.

4. Построить: $|z| \le 3$; $|z - 3i| \ge 3$.

5. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и перемножьте их: $z_1 = i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$.

2 вариант

1. Выполнить действия:

$(2 - 3i) + (5 + 6i) + (-3 - 4i)$, $(-2 - i)(1 + i)$,

$\dfrac{2 + 3i}{(4 + i) \cdot (2 - 2i)}$, $i \cdot (1 - i^{23})$.

2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел: $(2 + i)x - (1 - i)y = 1 + 3i$.

3. Решить уравнение: $x^2 + 4x + 5 = 0$.

4. Построить: $|z| \ge 1$; $|z - 2i| \le 2$.

5. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа и перемножьте их: $z_1 = i$; $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$.