МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы»

Студент В.И. Ралдугин
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент С.Ш. Палфёрова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ...3

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ 8

§1. Различные подходы к понятиям «уравнение» и «неравенство» в курсе алгебры и начал анализа..8

§2. Проблемы обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы...19

§3. Анализ содержания программ основного общего образования в курсе алгебры и начал анализа..27

Выводы по первой главе...38

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ...40

§4. Методика организации обобщающего повторения темы «Уравнения и неравенства» на примерах задач на составление уравнений............................40

§5. Методика изучения линейных неравенств 49

§6. Организация обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.......53

§7. Апробация методики организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства». 63

Выводы по второй главе...71

ЗАКЛЮЧЕНИЕ...72

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 75

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Понятия «больше» и «меньше», как и понятие «равенство», возникли в связи с необходимостью сравнивать различные величины и со счетом предметов. Уже древние греки пользовались понятиями неравенства. Границы числа указал Архимед. Ряд неравенств приводит Евклид в своем знаменитом трактате «Начал», где он доказывает, что среднее геометрическое двух чисел не больше их среднего арифметического. Современные знаки неравенства возникли только в VII–VIII вв. Знаки «<» и «>» ввел английский математик Т. Гарриот, а знаки «≤» и «≥» – французский математик П. Буге.

Уравнение – одно из важнейших понятий математики. В большинстве практических и научных задач, где какую-то величину нельзя непосредственно измерить или вычислить по готовой формуле, удается составить соотношение (или несколько соотношений), которым оно удовлетворяет. Так получают уравнения (или систему уравнений для определения неизвестной величины).

Проблема исследования состоит в разрешении *противоречия* между необходимостью в разработке научно-обоснованной методики организации обобщающего повторения темы «уравнение и неравенства, играющих важную роль в обучении математике, и практикой их использования в процессе обучения.

Учитывая актуальность решения данной проблемы, определена тема исследования: «Методика организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы».

Объектом исследования является процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования - методика организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» на уроках алгебры и начал анализа в общеобразовательной школе.

Цель исследования – выявление методических особенностей обучения теме «Уравнения и неравенства» в школьном курсе математики.

Гипотеза исследования - применение разработанной методики обучения решению уравнений и неравенств позволит учащимся решать уравнения и неравенства на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный метод, применять разные методы решения, в том числе те, которые не рассмотрены в школьных учебниках.

Исходя из актуальности, цели, объекта и предмета исследования были определены **задачи исследования:**

1. Изучить и проанализировать специальную литературу по проблеме исследования.
2. Проанализировать теоретические основы обучения теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.
3. Рассмотреть различные подходы к понятиям «уравнение» и «неравенство» в курсе алгебры и начал анализа.
4. Выявить проблемы обучения теме «неравенства» в курсе алгебры общеобразовательной школы.
5. Охарактеризовать содержание программ основного общего образования в курсе алгебры и начал анализа.
6. Провести исследования по методическим основам организации обобщающего повторения при обучении решению уравнений и неравенств.

Теоретико-методологическую основу исследования составили: М.И. Башмаков [7], Жафяров А.Ж. [14], А.Г. Мордкович [24], Стефанова Н.Л. [34], Хазанкин Р.Г. [39] и др. Основные положения, обозначенные в работах перечисленных авторов, являются настоящего исследования. Многие из них подчеркивали важность обучения школьников приемам решения уравнений и неравенств в связи с необходимостью подготовки учащихся к выполнению работ итоговой аттестации и различного рода конкурсных испытаний.

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Боровских А.В [6], Дорофеева Г.В. [13], Талочкина П.Б [36].

Для решения поставленных задач применялись такие **методы исследования**, как: анализ научной и учебно-методической литературы, школьных программ, учебников, учебных пособий, изучение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе.

Научная новизна исследования заключается в:

- представлении систематизации основных типов уравнений и неравенств; в классификации основных методов их решения и проведении системного анализа этих методов;

- предложении конкретной методики преподавания содержательно-методической линии темы «уравнения и неравенства » курсе математики общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования заключается в представлении теоретического материала по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы. Теоретически обоснована методика организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования: раскрыть методические особенности изучения уравнений и неравенств в курсе алгебры и начала анализа общеобразовательной школы и разработать методические материалы для работы учителей математики и студентов педагогических направлений подготовки в процессе педагогической практики.

Достоверность и обоснованнность результатов исследования обеспечивались:

- теоретическим и практическим методов исследования;

- анализом педагогической практики;

- личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в:

- постановке цели и задач исследования;

- организации и проведении сбора материалов исследования;

- анализе теоретических основ обучения теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы;

- проведении исследования по методическим основам организации обобщающего повторения при обучении решению уравнений и неравенств.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

- зональная педагогическая конференция «Эффективное использование профессионального потенциала педагога как важнейшее условие улучшение качества образования» (г. Ногинск, 2018 г.);

- научно-практической конференции «Проблемы современного математического образования» (г. Орехово-Зуево, 2018).

На защиту выносятся:

- построение процесса обучения учащихся решению уравнений и неравенств на основе рационального сочетания аналитических и графических видов учебных исследований обеспечивает полную реализацию их функций;

- разработанная методика изучения неравенств в школьном курсе математики является эффективным средством формирования исследовательских умений учащихся общеобразовательных школ.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 14 рисунков, 5 таблиц, список используемой литературы (50 источников). Основной текст работы изложен на 79 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Различные подходы к понятиям «уравнения» и «неравенство» в курсе алгебры и начал анализа

Решение уравнений и неравенств составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения и неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

Уравнения и неравенства уже сами по себе представляют интерес для изучения, так как именно с их помощью на символическом языке записываются важнейшие задачи, связанные с познанием реальной действительности. Этой ролью уравнений и неравенств в естествознании определяется и их роль в школьном курсе математики. Но дело не только в этом. При изучении любой темы уравнения и неравенства могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний, для развития творческой математической деятельности учащихся. Операции над числами и свойства этих операций, функции и свойства функций, метрические соотношения между элементами геометрических фигур, а также связанные с этими вопросами тождества и тождественные преобразования в процессе изучения сразу же могут находить отражение в упражнениях на решение уравнений и неравенств. Например, ознакомившись с распределительным законом умножения относительно сложения, учащиеся могут применить его к решению уравнений вида $(* + 5) \cdot 2 = 16$, $14* + 27x = 656$; в 7 классе решение вопроса: может ли уравнение $*^4 - 25*^3 + 13*^2 - 20* + 1 = 0$ иметь отрицательные корни? – не только потребует применения знаний свойств степеней рациональных чисел, но и будет способствовать развитию исследовательских способностей учащихся. Возможность разнообразить формы упражнений (решить заданное уравнение (неравенство); составить уравнение (неравенство) по заданному множеству его решений; решить задачу с помощью уравнения (неравенства); составить задачу по заданному уравнению (неравенству); составить два уравнения (неравенства), имеющие одно и то же множество решений и т. д.) способствует развитию сообразительности, находчивости и инициативы учащихся.

Графическое решение уравнений и неравенств раскрывает значение методов аналитической геометрии, играет большую роль в развитии пространственного воображения. Решение задач из разных разделов математики с помощью уравнений и неравенств формирует представление о единой математике и относительном характере ее расчленения на арифметику, алгебру, геометрию.

Значительна роль метода уравнений и неравенств в решении задач жизненного содержания. Решение задач, связанных с основами современного производства, экономикой народного хозяйства, со смежными дисциплинами может служить одним из эффективных способов осуществления принципа связи преподавания математики с жизнью, подготовки учащихся к свободному выбору будущей профессии.

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой Древнего мира. Как известно из истории математики, значительная часть задач математического характера, решаемых египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами-вычислителями (XX–VI вв. до н.э.), имела расчетный характер. Однако уже тогда возникали задачи, в которых искомое значение величины задавалось некоторыми косвенными условиями, требующими, фактически, составления уравнения или системы уравнений.

Первоначально для решения таких задач применялись арифметические методы. В дальнейшем начали формироваться первые алгебраические представления. Сначал был создан метод решения текстовых задач. Он послужил в дальнейшем основой для выделения алгебраического компонента и его независимого изучения. Это изучение осуществлялось в период VI–X вв. н.э. сначал арабскими математиками, выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду (приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменой знака), а затем европейскими математиками Возрождения. Именно они в итоге длительного поиска создали язык современной алгебры (использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т.д.).

На рубеже XVI–XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики. В этом процессе все яснее становилось, какую важную роль играет понятие уравнения в системе алгебраических понятий.

Открытие координатного метода (Р. Декарт, XVII в.), развитие аналитической геометрии позволили применить алгебру не только к задачам, связанным с числовой системой, но и к изучению различных геометрических фигур. Эта линия развития алгебры упрочила положение уравнения как ведущего алгебраического понятия, которое связываюсь теперь уже с тремя главными областями своего функционирования: 1) уравнение как средство решения текстовых задач; 2) уравнение как особого рода формула, которая служит в алгебре объектом изучения; 3) уравнение как формула, которой косвенно определяются числа или координаты точек плоскости (пространства), являющиеся его решением.

Таким образом, уравнение как общее систематическое понятие многоаспектно, при этом ни один из аспектов нельзя исключить из рассмотрения, особенно если речь идет о проблемах школьного математического образования.

Ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике математики организовано в содержательно-методическую линию – линию уравнений и неравенств. Здесь рассматриваются вопросы формирования понятий уравнения и неравенства, общих и частных методов их решения, взаимосвязи изучения уравнений и неравенств с числовой, функциональной и другими линиями школьного курса математики.

Выделенным областям возникновения и функционирования понятия уравнения в алгебре соответствуют три основных направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

- Прикладная направленность линии уравнений и неравенств раскрывается главным образом при изучении алгебраического метода решения текстовых задач. Этот метод широко применяется в школьной математике, так как он связан с обучением приемам, которые используются в приложениях математики. Прикладное значение уравнений, неравенств и их систем определяется тем, что они используются в математическом моделировании.

- Теоретико-математическая направленность линии уравнений и неравенств раскрывается в двух аспектах: во-первых, в изучении наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем и, во-вторых, в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом. Оба эти аспекты необходимы в курсе школьной математики.

- Для линии уравнений и неравенств характерна направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики.

Эта линия тесно связана с числовой линией. Все числовые области, которые рассматриваются в школьной алгебре и началх анализа, за исключением области всех действительных чисел, возникают в связи с решением каких-либо уравнений, неравенств, систем. Связь линии уравнений и неравенств с числовой линией двусторонняя. Обратное влияние проявляется в том, что каждая вновь введенная числовая область расширяет возможности составления и решения различных уравнений и неравенств. Например, введение арифметического квадратного корня из рациональных чисел позволяет записывать корни не только уравнений вида $x^1 = b$, где b – неотрицательное рациональное число, но и любых квадратных уравнений с рациональными коэффициентами и неотрицательным дискриминантом.

Линия уравнений и неравенств тесно связана также и с функциональной линией. Одна из важнейших таких связей – приложения методов, которые разрабатываются в линии уравнений и неравенств, к исследованию функций (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, их корней, промежутков знакопостоянства и т. д. С другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние на содержание линии уравнений и неравенств и на стиль ее изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем.

Необходимо отметить взаимосвязь линии уравнений и неравенств с алгоритмической линией. Само содержание понятия алгоритма может быть выделено на основе анализа процесса решения уравнений различных классов. Влияние же алгоритмической линии на линию уравнений и неравенств заключается в возможности использования ее понятий для описания алгоритмов решения уравнений, неравенств и систем различных классов.

- Трактовка понятия уравнения. Понятие уравнения относится к важнейшим математическим понятиям. Поэтому трудно дать его определение, одновременно и строгое с формальной точки зрения, и доступное для учащихся, которые приступают к овладению школьным курсом алгебры.

Приведем примеры некоторых определений.

Определение 1 (логико-математическое определение уравнения). Пусть на множестве М зафиксирован набор алгебраических операций, * – переменная на М тогда уравнением на множестве М относительно x называется предикат (т. е. предложение с переменной) вида a (x) = b (x), где a (x) и b (x) – термы (выражения) относительно заданных операций, в запись которых входит символ. (Аналогично определяется уравнение от двух переменных и т.д.).

Определение 2. Предложение с переменной, имеющее вид равенства между двумя выражениями с этой переменной, называется уравнением (Н.Я. Виленкин).

Анализируя приведенное математическое определение уравнения можно выделить в нем два компонента. Первый компонент (уравнение – это предикат) – смысловой, он важен для уяснения понятия корня уравнения. Второй компонент – шоковый (уравнение – это равенство, соединяющее два терма) – относится к формальным особенностям записи, изображающей уравнение. Он важен, когда запись уравнения подвергается различным преобразованиям: часто такие преобразования производятся чисто механически: без обращения к их смыслу.

Определение 3. Равенство с переменной называется уравнением. Значение переменной, при котором равенство с переменной обращается в верное числовое равенство, называется корнем уравнения (А.Н. Колмогоров).

В учебнике Ю.М. Колягина и др. «Алгебра. 7 класс» понятие уравнения вводится на материале текстовой задачи, которую мы рассмотрим позже.

После ее решения формулируется определение.

Определение 4. Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением. Здесь же вводятся понятия левой и правой частей уравнения и его корня. Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство. Этот способ введения соответствует еще одному компоненту понятия уравнения – прикладному.

Помимо выделенных компонентов понятия уравнения (смыслового, знакового, прикладного) в школьной математике большую роль играет компонент, при котором уравнение трактуется как равенство двух функции. Его роль проявляется в изучении графического метода решения уравнений.

Однако в большинстве действующих учебниках алгебры этот компонент нс кладется в основу определения уравнения.

Определение 5. Буквенное равенство, которое не обязательно превращается в верное численное равенство при допустимых наборах букв, называется уравнением (Д.К. Фаддеев). В основу этого определения положено противопоставление тождества и уравнения. Таким образом, при освоении понятия уравнения необходимо использовать термины «уравнение», «корень уравнения», «что значит решить уравнение».

Выбор одного из них влечет за собой различия в нахождении корней уравнения. Так, с термином «переменная» связана операция подстановки числа вместо буквы, поэтому в уравнение $a\ (x) = b$ (х) можно подставлять вместо x конкретные числа и находить среди них корни. Термин же «неизвестное» обозначает фиксированное число; подставлять число на место буквы, обозначающей неизвестное, поэтому нелогично. Нахождение корней уравнения a (x) = b (x) с этой точки зрения должно осуществляться с помощью действий, при которых это равенство рассматривают как верное и пытаются привести его к виду x = до, где xo – числовое выражение.

Мы будем в дальнейшем пользоваться термином неизвестное, который ближе с прикладной направленностью линии уравнений и неравенств.

Равносильное и логическое следование. Равносильность и логическое следование – это все логические средства, которые используются в процессе изучения уравнений и неравенств. Наиболее важным из них является понятие равносильности.

Определение. Уравнения называются равносильными, если равносильны соответствующие предикаты, то есть если выполнены условия: области определения уравнений одинаковы и множества их корней равны.

Имеются два пути установления равносильности уравнений:

1) Используя известные множества корней уравнений, убедиться в их совпадении; например, уравнения $x + 1 = x + 2$ идг $+ 1 = x^2 + 2$ равносильны, так как они не имеют корней.

2) Используя особенности записи уравнений, осуществить последовательный переход от одной записи к другой посредством преобразований, не нарушающих равносильности.

Для большинства заданий второй путь более характерен: равносильность в теории уравнений как раз и используется для того, чтобы указать конкретные правила для решения уравнений. Однако в преподавании ограничиваться им нецелесообразно, так как он относится только к практическому применению равносильности и требует первого для своего обоснования.

В отношении формирования понятия равносильности и его применения к решению уравнений учебные пособия по алгебре можно разделить на две группы. К первой относятся те пособия, в которых использование равносильных преобразований основано на явном введении и изучении понятия равносильности; ко второй – те, в которых применение равносильных преобразований предшествует выделению самого понятия. Методика работы над понятием равносильности имеет при указанных подходах отличия.

В связи с вопросом равносильности в изучении материала линии уравнений и неравенств можно выделить три основных этапа:

- первый этап охватывает начальный курс школьной математики и начало курса алгебры. Здесь происходит ознакомление с различными способами решения отдельных, наиболее простых классов уравнений. Используемые при этом преобразования получают индуктивное обоснование при рассмотрении конкретных примеров. По мере накопления опыта индуктивные рассуждения все чаще заменяются такими, где фактически используется равносильность, но сам термин не употребляется. Длительность этого этапа может быть различной в зависимости от методических установок учебника;

- на втором этапе происходит выделение понятия равносильности и сопоставление его теоретического содержания с правилами преобразований, которые выводятся на его основе. Длительность этого этапа незначительна, так как на нем происходит только выделение этого понятия и его использование на нескольких теоретических примерах;

- на третьем этапе на основе общего понятия равносильности происходит развертывание общей теории, и теории отдельных классов уравнений. Такой стиль характерен для курса алгебры и начал анализа. К числу неравносильных преобразований относится понятие логического следования.

Логическое следование начинает применяться значительно позже равносильности и осваивается как дополнение к нему. При решении уравнений при прочих равных условиях предпочтение отдается равносильному преобразованию; логическое следование применяется лишь тогда, когда равносильного преобразования найти не удается.

- Классификации преобразований уравнений, неравенств и их систем.

В методике математики выделяют три типа таких преобразований:

1) Преобразование одной из частей уравнения или неравенства.

2) Согласованное преобразование обеих частей уравнения или неравенства.

3) Преобразование логической структуры.

Преобразования 1-го типа используются при необходимости упрощения выражения, входящего в запись решаемого уравнения или неравенства. Например, решая уравнение $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = 1$, можно пытаться заменить выражение в левой части более простым. В данном случае имеем: $\sin x = 1$, это уравнение неравносильно исходному за счет изменения области определения. При изучении некоторых типов уравнений, например, тригонометрических или логарифмических при такой замене возможно получение уравнения, неравносильного исходному уравнению ($\log_2 (x + 1) + +\log_2 (x + 3) = 3 \Rightarrow \log_2 (x + 1)(x + 3) = 3$.

Преобразование одной из частей уравнения используют раньше всех других преобразований уравнений, это происходит еще в начальном курсе математики. Прочность владения навыком преобразований этого типа имеет большое значение для успешности изучения других видов преобразований.

Преобразования 2-го типа состоят в согласованном изменении обеих частей уравнения или неравенства в результате применения к ним арифметических действий или элементарных функций. Преобразования 2-го типа многочисленны. Они составляют ядро материала, изучаемого в линии уравнений и неравенств.

Приведем примеры преобразований этого типа.

1) Прибавление к обеим частям уравнения (неравенства) одного и того же выражения.

2а) Умножение (деление) обеих частей уравнения на одно и то же выражение.

2б) Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только положительные значения.

2в) Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только отрицательные значения и изменение знака неравенства на противоположный.

3а) Переход от уравнения $a = b$ к уравнению $f(a) =f(a)$, где f – некоторая функция, или обратный переход.

3б) Переход от неравенства $a > b$ к неравенству $f(a) > f(a)$, где a – возрастающая функция, или обратный переход.

3в) Переход от неравенства $a > b$ к неравенству $f(a) < f(a)$, где a – убывающая функция, или обратный переход.

Среди преобразований 2-го типа преобразования неравенств образуют сложную в изучении, обширную систему. Этим в значительной степени объясняется то, что навыки решения неравенств формируются медленнее навыков решения уравнений и не достигают у большинства учащихся такого же уровня.

К 3-му типу преобразований относятся преобразования уравнений, неравенств и их систем, изменяющие логическую структуру заданий. В каждом задании можно выделить элементарные предикаты – отдельные уравнения или неравенства. Под логической структурой понимается способ связи элементарных предикатов посредством логических связок конъюнкции или дизъюнкции.

§2. Проблемы обучения теме «неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы

Понятия «больше» и «меньше», как и понятие «равенство», возникли в связи с необходимостью сравнивать различные величины и, конечно, со счетом предметов.

Так как неравенства в школьной программе по математике раскрывают многочисленные связи со смежными дисциплинами, то при изучении неравенств есть возможность овладеть широким спектром методов решения математических задач, освоить способы моделирования, выявить проблемы прикладных исследований. Изучение линии неравенств связано с изучением функциональной линии, так как исследование функции элементарными средствами требует навык решать их.

В Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования сказано, что предметные результаты должны отражать овладение приемами решения неравенств и систем неравенств [35].

Тема «Неравенства» – одно из первых мест в серии тем, которые с трудом понимаются учениками. Хотя об этом написаны сотни учебников и методических разработок, результат не улучшается. Школьники рассматривают проблемы с неравенством как специально изобретенный лабиринт, в котором вы никогда не знаете, куда идти, и где невозможно выйти простому человеку, у которого нет определенного дара. Учителя честно следуют указаниям многочисленных методологий, «как дать материал темы», но почему-то ученики не берут этого «давания», и если они берут его, это происходит не из-за методов, а из-за того, что им каким-то образом объяснили это по-другому или дома мама и папа, или интеллектуальный летний лагерь, или математический кружок. Таким образом, можно утверждать, что в методике преподавания темы «Неравенства» есть проблемы, которые еще не были выявлены и не стали предметом специального педагогического рассмотрения.

А.В. Боровских, В.Е. Веревкина в статье «Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики» тема «Неравенства» выделяют в первую очередь проблему изменения представления о неравенстве, которая никак не отражается в методике, но которая играет очень важную роль во всех случаях с этим объектом[6]. Начав тему в 7-м классе, учитель обычно вообще не думает о том, что стоит в понятиях учеников за термином «неравенство». И за этим стоит конкретная ситуация, которая была прочно освоена в начальной школе – когда нужно было сравнить два числа.

Школьники приводили к абстрактному математическому действию сравнения величин в виде чисел. Сначал целое, потом дробное. Но самое главное, само равенство фиксировало результат сравнения, это был «ответ на вопрос, что больше». И с этой точки зрения неравенство $2<3$ либо ничего не значит, либо означает, что ученик допустил ошибку.

В 7-м классе появляется неравенство вида: $x + 2 >5$. Что значит эта запись? Учитель явно видит условие на переменную x. И школьники смотрят на это неравенство с позиции, которую они узнали в начальной школе: неравенство является результатом сравнения. Им трудно понять, что значит «решить» результат сравнения.

Есть еще несколько проблем. Первая из них связана с переходом от работы с числом к работе с переменными величинами. В начальной школе также был «х», но это означало определенное конкретное число, которое нужно было найти. Та же буква в теме «Неравенства» означает переменное значение, которое может принимать любое значение. Чтобы овладеть произвольностью объекта, вам нужно создать особую обучающую ситуацию, в которой один человек (ученик или учитель) может сделать с этим объектом то, что он хочет (например, изменить значение х), а другой – выстроить свои действия таким образом, чтобы от этого не зависело (например, преобразовать многочлен в более простую форму).

Таким образом, построенные действия будут гарантированно ссылаться на произвольный объект в теоретическом смысле этого слова. Поскольку ученик привык действовать как «произвол» объекта и в роли «преодоления этого произвола», после объединения этих ролей он развивает умение «играть с самим собой»: «а если я начну менять объект, как я хочу, будет ли верно мое доказательство?». В то же время социальные роли покидают сознание, оставив только интеллектуальную схему работы с произвольным объектом, к которому мы привыкли, который можно использовать в дальнейшем обучении, не прибегая к социальным формам этой схемы. Ведь именно в 7-м классе, когда появляются только произвольные объекты, такого рода «социальные» формы умственной деятельности оказываются наиболее эффективными и необходимыми.

Вторая проблема связана со словом «решить уравнение». В начальной школе ученики уже сформировали очень определенную идею о том, что значит «решать». Решать – выполнять действия по определенному известному алгоритму. Тупик состоит в том, что алгоритмы решения неравенств становятся более сложными по мере развития математики, и после изучения квадратных уравнений и неравенств они становятся настолько огромными и разнообразными, что их нельзя ни запомнить, ни использовать. «Решить» – это упростить условие, опираясь на определенные правила.

Важным этапом при решении неравенств является правильное определение ОДЗ. Его очень часто забывают, поэтому ответ может быть неверным. В.И. Рыжик в статье «В который раз про ОДЗ и не только...» [30, с. 36–38] рассматривает эту проблему . Он считает, что при объяснении ученикам решение неравенств и систем неравенств, важно отметить, что ответ получается из последней строки, а само неравенство (система неравенств) в первой строке. Здесь нужно математически доказать, что полученной множество действительно является решением данного неравенства. Например, для проверки корней уравнения можно подставить полученные результаты в исходное уравнение. Здесь не требуется поиск ОДЗ. Конечно, корни могут быть громоздкими, тогда это неудобно. А для неравенств такой вариант не работает. Можно аккуратно следить за равносильностью всех преобразований.

В.И. Рыжик считает, что нахождение ОДЗ и ее использование – вещь неформальная. Все зависит от примера и осведомленность решатель в данной теме. Автор хочет обратить внимание на многолетние и безуспешные попытки авторов вразумить в столь малом содержательном вопросе [30, с. 36–38]. Раньше люди решали разные сложные уравнения и неравенства, при этом не использовали ОДЗ. Во многих учебниках алгебры для школы нет никаких следов ОДЗ. В.И. Рыжик предлагает вернуться к старой школе и равносильным переходам.

В журнале «Математика» учитель математики Д.Э. Шноль рассматривает устные упражнения и их понимание школьниками [41, с. 33–36]. Часто учитель сталкивается с рассеянным вниманием своих учеников. Ошибки по этой причине делают все ученики: как слабые, так и самые сильные. Учителя, как правило, кроме совета «будь внимателен» ничем помочь не могут. Что значит быть внимательным, сосредоточенным, как увидеть свою собственную ошибку при проверке работы, как этому всему научиться? Ответы на эти вопросы остаются в стороне. Но, мало кто знает, что внимательности можно и, самое главное, нужно учиться!

Решение задач в уме от решения задач на бумаге отличается тем, что ученик ни в коем случае не может отвлечься. Иначе решение придется начать снова, ведь все промежуточные результаты утеряны, забыты, когда на листке можно просто просмотреть ход решения и вернуться к тому пункту, где ее обнаружили. Дмитрий Эммануилович считает, что школьники на уроке могут что-то бездумно писать, списывать с доски, делая вид, что решают задачу, при этом параллельно вести переписку с друзьями. При устной работе, учитель может видеть глаза всех учеников и «прочитать» в них, кто, что и насколько понимает. Множество типичных заданий из любого учебника средний ученик может решить устно. Конечно, решать сложные неравенства устно в обычном классе практически невозможно, но решать «обратную задачу» полезно и довольно увлекательно.

Пример: задать неравенство, решение которого изображено на Рис. 1.

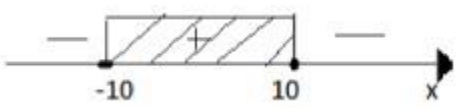

Рис. 1.

Разумеется, здесь возможны разные варианты. Все предложения учеников лучше выписать на доску, а потом начать их разбирать. Как правило, некоторые неравенства могут оказаться неверными. Где-то ученики забудут про закрашенные точки, где-то про систему. Это даже хорошо, так как это поможет разобрать типичные ошибки. По словесным описаниям учеников нужно построить лучи, изображающие решение тех неравенств, которые оказались ошибочными.

Таким образом, по мнению Д. Шноль, вместо призывов «стать внимательнее» учитель создает на уроке ситуацию, которая позволяет ученику приобрести навык произвольной внимательности. А также устные упражнения позволяют собрать класс в начале урока, задать рабочий ритм.

В статье «О разумных и неразумных требованиях к выполнению письменной экзаменационной работы» авторы С.В. Буфеев и И.С. Буфеев дают ответ на вопрос, какие требования к выполнению работы на экзамене можно считать обоснованными, а какие нельзя [7, с. 3–5]. Вообще, здесь речь может идти не только о ЕГЭ или ОГЭ. Во многих школах есть переводные экзамены и, конечно, итоговые контрольные работы, где так же включены письменные задания. В том числе есть задания по решению неравенств. Современное школьное математическое образование сводится к тому, что методисты создают «совершенные» образцы оформления конкретных задач. На самом деле, это нужно, чтобы ученик давал более полный и, конечно, развернутый ответ. В определенной степени – это помощь ученикам усвоить рассуждения, которые являются особо важными при выполнении определенных конкретных заданий. Это вызывает проблемы при проверке работ.

Постоянно ведутся споры, что же все-таки обязательно должно быть в работе ученика, а что является его непосредственным желанием. Зачастую, на определенном этапе работы, учитель ждет от ученика какого-то особого пояснения, при этом, не понимая, зачем это нужно, если смысл решения от этого не меняется. Но многие учителя «на всякий случай» оценивают работу, проверяя не только правильность решения, но и то, соответствует ли структура решения учеником задачи образцу. В этой статье рассмотрены некоторые заблуждения.

С.В. Буфеев и И.С. Буфеев в своей статье рассматривают метод интервалов, который применяется для неравенств

$$\frac{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots\left(x-a_p\right)^{k_p}}{(x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}\dots\left(x-b_q\right)^{n_q}}>0$$

Лишними этапами выполнения решения с математической точки зрения математики являются этапы:

- рассуждения на тему, что обе части неравенства можно умножить на знаменатель при условии, что он больше нуля для любого значения переменной;
- введение функции;
- указание ее ОДЗ с дополнением, что делить на нуль нельзя;
- отдельное нахождение самих нулей функции;
- пояснение на словах, что функция сохраняет знак в любом из промежутков, так как она монотонна в любой точке области определения;
- демонстрация выявления знака функции в любой точке каждого промежутка (совсем все плохо, если показывается на бумаге проверка знака в каждом промежутке. Это говорит о неумении решать неравенства данным методом);
- пояснение того, что знаки находятся «используя метод интервалов», и, что в знаменателе корень во второй степени, а значит знак в этой точке остается прежним;
- до написания ответа запись ответа уже присутствует в той же или другой форме.

С.В. Буфеев и И.С. Буфеев хотят сказать, что при применении метода интервалов ученик не должен каждый раз обосновывать данный метод, а только пользоваться им при решении конкретного примера [7, с. 3–5]. Суть метода – уметь чередовать знаки дробно-рационального неравенства на конкретных промежутках, тут можно использовать исключительно алгебраические соображения.

Таким образом, при изучении опыта работы учителей по определенной теме можно избежать некоторых ошибок на уроках математики, выделить главное и уделить больше времени отработке определенных этапов. Учителя, опираясь на педагогический опыт своих коллег, изучают условия и средства успешного решения проблем учебно-воспитательного характера. В их опыте можно выделить элементы новизны, творчества, оригинальности.

§3. Анализ содержания программ основного общего образования в курсе алгебры и начал анализа

Представим содержание примерной программы основного общего образования по учебным предметам (математика).

Ученик имеет возможность научиться в 7–9 классах, чтобы обеспечить возможность успешно продолжить образование *на базовом уровне:*

- действовать с помощью понятий: числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;
- проверять правильность числовых уравнении и неравенств;
- решать линейные уравнения и неравенства и простые неравенства, сводящиеся к ним;
- решать системы простых линейных уравнений неравенств;
- проверять, является ли конкретное число корнем уравнения и неравенства;
- представлять решения систем неравенств и самих неравенств на координатной прямой.

Выпускник получает возможность научиться в 7–9 классах для благополучного продолжения обучения *на углубленном уровне:*

- применять различные методы решения уравнений и неравенств и систем неравенств, иметь навык выбирать метод решения и аргументировать свой выбор;
- применять метод интервалов для решения разных видов уравнений и неравенств, в том числе дробно-рациональных и неравенств, включающих в себя иррациональные выражения;
- находить корни алгебраических уравнений и неравенств с параметрами и их систем графическим и алгебраическим методами;

- применять разные методы доказательства различных уравнений и неравенств;

- изображать множества, задаваемые неравенствами и их системами, на плоскости.

В ежедневной жизни и при изучении иных предметов:

- формулировать и решать уравнения и неравенства, их системы в решении задач других академических дисциплин;

- давать оценку правдивости результатов, которые получили при нахождении корней разных видов неравенств и их систем в решении задач других академических дисциплин;

- составлять и находить корни неравенств, содержащих параметр, при решении задач других предметов;

- составлять неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты.

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) отмечается, что в процессе изучения темы «уравнения и неравенства» учащиеся 10–11 классов должны научиться:

- решать основные виды рациональных уравнений с одной переменной, системы двух уравнений с двумя переменными;

- понимать уравнение как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций, решать текстовые задачи алгебраическим методом;

- решать логарифмические и показательные уравнения вида loga (bx + +c) = d, a bx + c = d (где d можно представить в виде степени с основанием a) и неравенства вида loga x < d, a x < d (где d можно представить в виде степени с основанием a);

- приводить несколько примеров корней тригонометрического уравнения вида sin x = a, cos x = a, tg x = a, ctg x = a, где a — табличное значение соответствующей тригонометрической функции;

- применять графические представления для исследования уравнений, исследования и решения систем уравнений с двумя переменными.

- понимать и применять терминологию и символику, связанные с отношением неравенства, свойства числовых неравенств;

- решать линейные неравенства с одной переменной и их системы; решать квадратные неравенства с опорой на графические представления;

- решать несложные рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и их системы, простейшие иррациональные уравнения и неравенства;

- использовать методы решения уравнений: приведение к виду «произведение равно нулю» или «частное равно нулю», замена переменных.

- составлять уравнения и неравенства по условию задачи;

Выпускник получит возможность научиться:

- овладеть специальными приемами решения уравнений и систем уравнений; уверенно применять аппарат уравнений для решения разнообразных задач из математики, смежных предметов, практики;

- применять графические представления для исследования уравнений, систем уравнений, содержащих буквенные коэффициенты;

- разнообразным приемам доказательства неравенств;

- уверенно применять аппарат неравенств для решения разнообразных математических задач и задач из смежных предметов, практики;

- применять графические представления для исследования неравенств, систем неравенств, содержащих буквенные коэффициенты.

Для анализа содержания теоретического материала темы «Уравнения и неравенства» были выбраны учебники из федерального перечня учебников, рекомендуемых при реализации обязательной части основной образовательной программы, «Алгебра и начал математического анализа, 11 класс»: С.М. Никольский; «Алгебра и начал математического анализа, 10–11 класс»: А.Г. Мордкович, П.В. Семенов; «Алгебра и начал математического анализа 10–11 класс». Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин (Таблица 1).

Таблица 1

Содержание тем учебника «Алгебра и начал математического анализа, 11 класс», С.М. Никольский

11 класс (48 ч.) **Содержание темы:**
ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ § 7. Равносильность уравнений и неравенств 7.1. Равносильные преобразования уравнений 7.2. Равносильные преобразования неравенств § 8. Уравнения-следствия 8.1. Понятие уравнения-следствия 8.2. Возведение уравнения в четную степень 8.3. Потенцирование логарифмических уравнений 8.4. Другие преобразования, приводящие к уравнению-следствию 8.5.Применение нескольких преобразований, приводящих к уравнению следствию § 9. Равносильность уравнений и неравенств системам 9.1. Основные понятия 9.2. Решение уравнений с помощью систем 9.3. Решение уравнений с помощью систем (продолжение) . 9.4*. Уравнения вида f(a (x)) = /»(P (x)) 9.5. Решение неравенств с помощью систем 9.6. Решение неравенств с помощью систем (продолжение) . 9.7*. Неравенства вида /(a (x)) > f($ (x)) § 10. Равносильность уравнений на множествах 10.1. Основные понятия 10.2. Возведение уравнения в четную степень 10.3*. Умножение уравнения на функцию 10.4*. Другие преобразования уравнений 10.5*. Применение нескольких преобразований 10.6*. Уравнения с дополнительными условиями § 11. Равносильность неравенств на множествах 11.1. Основные понятия 11.2. Возведение неравенства в четную степень 11.3*. Умножение неравенства на функцию

Продолжение Таблицы 1

11 класс (48 ч.) **Содержание темы:**
11.4*. Другие преобразования неравенств 11.5*. Применение нескольких преобразований 11.6*. Неравенства с дополнительными условиями 11.7*. Нестрогие неравенства § 12. Метод промежутков для уравнений и неравенств 12.1. Уравнения с модулями 12.2. Неравенства с модулями 12.3. Метод интервалов для непрерывных функций § 13*. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств 13.1*. Использование областей существования функций .... 13.2*. Использование неотрицательности функций 13.3*. Использование ограниченности функций 319 13.4*. Использование монотонности и экстремумов функций 13.5*. Использование свойств синуса и косинуса § 14. Системы уравнений с несколькими неизвестными 14.1. Равносильность систем 14.2. Система-следствие 14.3. Метод замены неизвестных 14.4*. Рассуждения с числовыми значениями при решении систем уравнений § 15*. Уравнения, неравенства и системы с параметрами 15.1*. Уравнения с параметром 15.2*. Неравенства с параметром 15.3*. Системы уравнений с параметром 15.4*. Задачи с условиями

В первом параграфе «Тема «Показательные уравнения и неравенства» в курсе «Алгебры и начал анализа» 10–11 класса» проведен анализ школьных учебников и нормативно-правовых документов, на основании которых выяснено, что в ходе изучения материала учащиеся должны овладеть следующими знаниями и умениями: свойства показательной функции; основные теоремы; строить график показательной функции; решать простейшие показательные уравнения; приводить обе части уравнения к одинаковому основанию; пользоваться свойством монотонности показательной функции; делать замену переменной в более сложных показательных уравнениях; решать системы показательных уравнений.

Тема «Показательные уравнения и неравенства» может изучаться как в

10, так и в 11 классах исходя из выбора УМК. На базовом уровне на изучение 5 темы отводится от 3 до 5 часов согласно тематическому планированию во всех учебных пособиях, но на профильном уровне количество часов, отводимых на изучение данной темы увеличивается от 4 до 8 часов. УМК С.М. Никольского и др. предназначен для работы на двух уровнях: базовом и профильном, задания разбиты таким образом, что предусмотрена и дифференциация задачного материала. Можно выделить несколько профилей, на которых может осуществляться работа по этому учебнику: физико-математический; социально-экономический; химико-биологический; информационно-технический.

Во втором параграфе «Логико-дидактический анализ темы «Показательные уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа (на примере УМК С.М. Никольского и др.)», рассматривается построение курса по теме и приведено тематическое планирование изучения темы «Показательные уравнения и неравенства» в 10 классе в соответствии с УМК автора С.М. Никольский и др. для класса физико-математического профиля. При рассмотрении построения курса «Показательные уравнения и неравенства» по УМК С.М. Никольский и др., можно сказать, что курс основан на дедуктивном подходе, то есть степень сложности уравнений и неравенств и их решения постепенно усиливается. Приведенный анализ позволил сделать следующий вывод, что задачный материал по теме разбит на следующие основные блоки в соответствии с теоретическим материалом: отработка основных понятий, связанных с простейшими показательными уравнениями, уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного, простейшие показательные неравенства и неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного.

В третьем параграфе проведен анализ заданий на решение показательных уравнений и неравенств в материалах ЕГЭ по математике.

Автором проанализированы изменения в заданиях с 2015 по 2018 годов. Проведенный анализ позволил сделать следующий вывод, что в базовом ЕГЭ предлагают решить простейшее показательное уравнение, а на профильном – более сложные показательное уравнение или уравнения, сводящиеся к показательным. Следует отметить, что уравнения и неравенства, встречающиеся в ЕГЭ по математике, могут быть комбинированными, то есть быть и показательным, и рациональным, и иррациональным, тригонометрическим и логарифмическим.

«Алгебра и начал математического анализа, 11 класс»: С.М. Никольский. В параграфе учебника рассматриваются задачи с параметрами. В первом пункте параграфа изучается основной принцип решения уравнений, содержащих параметр – разбиение области изменения параметра на участки. Отдельно для каждого участка находятся корни уравнения, выраженные через значение параметра. Ответ задачи состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого участка всех корней уравнения. После подробно разобранных уравнений с параметром приводятся задания, которые необходимо решить и найти для каждого значения параметра. Автор подчеркивает, что сложность задач с параметром заключается в том, что, как правило, вместе с изменением параметра меняются не только коэффициенты, но и ряд других характеристик, связанных с параметром. Это приводит к тому, что при разных значениях параметра приходится использовать различные методы решения. Во втором пункте рассматриваются решения неравенств с параметром. Вводится понятие, что значит решить неравенство с параметром и указывается, что при решении используются те же методы, как и при решении уравнений с параметром.

Данное учебное пособие состоит из двух частей: учебника и задачника (Таблица 2).

В I части данного учебного пособия материал, касающийся иррациональных уравнений и неравенств, изучается в последней VIII главе «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств», завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа. Здесь уравнения и неравенства рассматриваются с самых общих позиций. Это, с одной стороны, своеобразное подведение итогов и, с другой стороны, некоторое расширение и углубление знаний.

Таблица 2

Содержание тем учебника «Алгебра и начал математического анализа, 10–11 класс», А.Г. Мордкович, П.В. Семенов

10 класс (10 ч.) **Содержание темы:**
Глава 4. Тригонометрические уравнения §22. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства. 1. Первые представления о простейших тригонометрических уравнениях. 2. Решение уравнения cos t = a. 3. Решение уравнения sin t = a. 4. Решение уравнений tg x = a, ctg x = a. 5. Простейшие тригонометрические уравнения.
§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений. 1. Метод замены переменной. 2. Метод разложения на множители. 3. Однородные тригонометрические уравнения.
11 класс (20 ч.) **Содержание темы:**
§ 26. Равносильность уравнений § 27. Общие методы решения уравнений § 28. Равносильность неравенств § 29. Уравнения и неравенства с модулями § 30. Иррациональные уравнения и неравенства §31. Доказательство неравенств § 32. Уравнения и неравенства с двумя переменными § 33. Системы уравнений § 34. Задачи с параметрами

В первых трех параграфах этой главы подведены итоги изучения в школе уравнений, неравенств. Использованы следующие термины:

- равносильность уравнений, равносильность неравенств;

- следствие уравнения, следствие неравенства;

- равносильное преобразование уравнения, неравенства;

- посторонние корни (для уравнений);

- проверка корней (для уравнений).

Сформулированы теоремы: - о равносильности уравнений; - о равносильности неравенств.

Даны ответы на четыре главных вопроса, связанных с решением уравнений:

1) как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием;

2) какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие;

3) как сделать проверку, если она сопряжена со значительными трудностями в вычислениях;

4) в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Перечислены возможные причины расширения области определения уравнения, одна из которых – освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени; указаны причины, по которым может произойти потеря корней при решении уравнений.

Выделены четыре общих метода решения уравнений:

1) замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$;
2) метод разложения на множители;
3) метод введения новых переменных;
4) функционально-графический метод.

Что касается иррациональных уравнений, то им в данном учебном пособии уделено достаточно большое внимание.

На примере иррационального уравнения показано как решение любого уравнения осуществляется в три этапа: технический, анализ решения, проверка.

Также на примере иррационального уравнения показано, как сделать проверку, если проверка корней с помощью их подстановки в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями.

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

Метод замены уравнения h(f(x))=h(g(x)) уравнением f(x)=g(x) применятся при решении иррациональных уравнений для перехода от уравнения к уравнению.

Метод введения новой переменной также разобран и на примере решения иррационального уравнения.

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2 \end{cases}$$

Отдельный пункт посвящен иррациональным неравенствам. В первом случае иррациональное неравенство заменяется равносильной системой неравенств во втором – равносильной совокупностью систем неравенств

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > \left(g(x)\right)^2 \end{cases}$$

Система задач во II части данного учебного пособия изложена в той же последовательности, что и соответствующий материал в I части.

Учебное пособие «Алгебра и начал математического анализа 10–11 класс» (Ю.М. Колягин и др.) рассматривает тему решение задач с параметрами в параграфе «Уравнения и неравенства с двумя переменными, содержащие параметры». В первом пункте параграфа разбираются квадратные уравнения с параметром (Таблица 3).

Таблица 3

Содержание тем учебника «Алгебра и начал математического анализа, 10–11 класс», Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин

10 класс (43 ч.)
Содержание темы:
Глава V. Системы уравнений § 20. Способ подстановки § 21. Способ сложения § 22. Решение систем уравнений различными способами § 23. Решение задач с помощью систем уравнений Глава VII. Тригонометрические уравнения § 37. Уравнение cosx = a § 38. Уравнение sinx = a § 39. Уравнение tgx = a § 40. Уравнение ctgx= a.
§ 41. Уравнения, сводящиеся к квадратным § 42. Уравнения, однородные относительно sinx и cosx § 43. Уравнение, линейное относительно sinx и cosx; § 44. Решение уравнений методом замены неизвестного § 45. Решение уравнений методом разложения на множители § 46. Различные приемы решения тригонометрических уравнений § 47. Уравнения, содержащие корни и модули § 48. Системы тригонометрических уравнений § 49. Появление посторонних корней и потеря корней тригонометрического уравнения
11 класс (7 ч.)
Глава VIII. Уравнения и неравенства с двумя переменными § 1. Линейные уравнения и неравенства с двумя переменными § 2. Нелинейные уравнения и неравенства с двумя переменными § 3. Уравнения и неравенства с двумя переменными, содержащие параметры

Проанализировав вышеизложенные учебные пособия по алгебре и началм математического анализа для подготовки к ЕГЭ, можно заявить, что все три учебника предлагают подробное изучение материала, а именно предлагает параметр как для углубленного изучения пройденных тем, как для изучения непосредственно самого параметра.

Выводы по первой главе

Итак, теоретические основы линий уравнений и неравенств в школьном курсе математики: ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике математики организовано в содержательно-методическую линию уравнений и неравенств. Здесь рассматриваются вопросы формирования понятий уравнения и неравенства, общих и частных методов их решения, взаимосвязи изучения уравнений и неравенств с числовой, функциональной и другими линиями школьного курса математики. Выделенным областям функционирования понятия уравнения в алгебре соответствуют три основных направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

1. Прикладная направленность линии уравнений и неравенств раскрывается при изучении алгебраического метода решения текстовых задач. Этот метод применяется в школьной математике, так как он связан с обучением приемам, используемым в приложениях математики. Сегодня ведущее положение в приложениях математики занимает математическое моделирование. Используя это понятие, можно сказать, что прикладное значение уравнений, неравенств и их систем определяется тем, что они являются основной частью математических средств, используемых в математическом моделировании.

2. Теоретико-математическая направленность линии уравнений и неравенств раскрывается в двух аспектах: а) в изучении наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем; б) в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом. Оба эти аспекта необходимы в курсе школьной математики. Основные классы уравнений и неравенств связаны с простейшими и одновременно наиболее важными

математическими моделями. Использование обобщенных понятий и методов позволяет логически упорядочить изучение линии в целом, т.к. они описывают то общее, что имеется в процедурах и приемах решения, относящихся к отдельным классам уравнений, неравенств, систем. В свою очередь, эти общие понятия и методы опираются на основные логические понятия: неизвестное, равенство, равносильность, логическое следование, которые также должны быть раскрыты в линии уравнений и неравенств.

Для линии уравнений и неравенств характерна направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики. Эта линия тесно связана с числовой линией. Основная идея, реализуемая в процессе установления взаимосвязи этих линий, – это идея последовательного расширения числовой системы. Все числовые области, рассматриваемые в школьной алгебре и началах анализа, за исключением области всех действительных чисел, возникают в связи с решением каких-либо уравнений, неравенств, систем. Например, числовые промежутки выделяются неравенствами или системами неравенств. Области иррациональных и логарифмических выражений связаны соответственно с уравнениями (k-натуральное число, большее 1). Связь линии уравнений и неравенств с числовой линией двусторонняя: а) влияние уравнений и неравенств на развертывание числовой системы; б) обратное влияние проявляется в том, что каждая вновь введенная числовая область расширяет возможности составления и решения различных уравнений и неравенств.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§4. Методика организации обобщающего повторения темы «Уравнения и неравенства» на примерах задач на составление уравнений

Наиболее интересной для методики организации обобщающего повторения темы «уравнения и неравенства» представляется Технология обучения математике на основе решения задач Р.Г. Хазанкина [36] .

Цель технологии: развитие индивидуальных способностей учащихся и их увлечение математикой с помощью ключевых задач, которые формируются применительно к каждой изучаемым темам.

Прогнозируемый результат: успешное усваивание материала всеми группами учащихся с учетом уровневой дифференциации.

Для достижения целей данной технологии основным моментом являются ключевые задачи по каждой из изучаемых тем. Эти задачи обеспечивают успешное обучение на уровне стандарта всеми группами учащихся. Основана технология на разработанной системе из восьми типов уроков:

- урок-лекция, которая раскрывает новую тему крупным блоком;
- урок-решение ключевых задач, среди которых выделяют решение системы задач различными методами, олимпиадных задач;
- урок-решение обучающих задач;
- урок-консультация, когда учащиеся готовят вопросы и задачи, вызвавшие затруднение;
- зачетный урок, когда повторяется целая тема с привлечением старшеклассников;
- урок анализа зачетного занятия;

- контрольный урок, который проводится в письменной форме;

- урок анализа контрольной работы.

Проанализируем обобщающие теоретические основы и ключевые задачи для повторения, рассмотрение которых предполагается в рамках данной технологии на примерах задач на составление уравнений.

Текстовые задачи, предусматривающие составление уравнений, систем уравнений, условно можно подразделить на несколько стандартных основных групп.

Общим для них можно считать такой алгоритм:

- вводятся неизвестные переменные для величин, которые необходимо непосредственно найти, исходя из условия задачи, или которые позволяют найти требуемые величины. Обычно для этих переменных используют общепринятые обозначения: x, y, v, u, t, s, a, b, …,

- используя эти переменные вместе с условиями поставленной задачи, записывают соответствующие уравнения и соотношения, которые являются алгебраической формой записи исходных данных задачи. В результате, формируется уравнение или система алгебраических уравнений, неравенств, количество которых, как правило, совпадает с числом неизвестных,

- в результате решения составленных алгебраических зависимостей находят неизвестные величины, оставляя в качестве ответа только те из них, которые подходят по смыслу задачи.

Некоторые особенности для каждой из групп задач.

При решении чисто математических задач на движение, его считают равномерным, т.е. с постоянной линейной скоростью вдоль прямой, когда за равные промежутки времени проходят одинаковое расстояние.

$$s = vt, v = \frac{s}{t}$$

Если меняется направление движения, то непосредственно это изменение происходит мгновенно. Реальная скорость тела v равна сумме относительной скорости $v_{\text{отн}}$ и переносной скорости u:

$$v = v_{\text{отн}} + u$$

с учетом их соответствующих направлений с помощью знаков +/-.

При решении задач, в которых выполняется некоторая работа A за время t, считается, что

$$A = Wt, W = \frac{A}{t}$$

где W – это мощность, в задачах с физическим уклоном или, производительность труда, в задачах с экономическим уклоном. Если из логики задачи следует, что W не зависит от объема (количества) выполняемой (совершаемой) работы A, то эту величину можно считать равной 1, и тогда:

$$W = \frac{1}{t}, .$$

При совместной работе:

$$W_1 = \frac{1}{t_1}, W_2 = \frac{1}{t_2}, W_{\text{совм}} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}, t_{\text{совм}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

В задачах физико-химического уклона, где присутствуют растворы, сплавы, смеси, предполагается, что все они однородные, и 1 литр в объеме, как правило, равен 1 литру в количестве вещества. Если некоторое вещество имеет массу m и оно состоит из, например, трех веществ массами m_1, m_2, m_3:

$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

то их концентрации (или процентное содержание) равны:

$$p_i = \frac{m_i}{m}, i = 1; 2; 3.$$

Соответственно:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 100\%, \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = 1.$$

В задачах на натуральные числа, форма записи, например, трехзначного числа выглядит так:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

При этом, a, b и c – это цифры от 0 до 9, однако, $a \neq 0$. Также следует учитывать, что если для натуральных чисел m, n выполняется:

$$m > n,$$

то существует единственная пара натуральных чисел q, r, такая что:

$$m = qn + r.$$

Перед решением отдельных, более сложных задач, полезно разобрать стандартную ключевую задачу, технология решения которой необходима также для многих других задач.

Задача 1. Между двумя причалами на реке расстояние 14 км. Моторная лодка проходит это расстояние за 2 часа, а против течения за 2 часа 48 минут. Вычислите скорости течения реки и моторной лодки в стоячей воде (Таблица 4).

Таблица 4

Анализ условия задачи 1

Деятельность учителя	*Деятельность ученика*
О чем идет речь в задаче?	О движении моторной лодки по реке между двумя причалами.
В каком направлении происходит движение?	Вначале движение лодки происходит по течению реки, а затем – против течения.
Что известно из условия задачи?	А) Что расстояние между причалами 14 км. Б) По течению лодка двигалась 2 часа. В) Против течения лодка двигалась 2,8 часа.
Что нужно узнать в задаче?	Скорость течения реки и скорость моторной лодки в стоячей воде.

Схематическая запись задачи.

Лодка по течению: расстояние - 14 км, время -2 часа , $v_{\text{по течению}}$.

Лодка против течения: расстояние - 14 км, время - 2,8 часа, $v_{\text{против течения}}$.

Исследование: поиск решение или выдвижение плана решения задачи.

Вопрос: Что нужно узнать в задаче?

Ответ: Скорость течения реки и скорость моторной лодки в стоячей воде.

Вопрос: Что для этого нам необходимо знать?

Ответ: Время, за которое река перенесет лодку с выключенным мотором между причалами и время, необходимое лодке, если бы течения не было.

Вопрос: Что нам известно? Известно ли расстояние?

Ответ: да, расстояние равно 14 км.

Вопрос: Известно ли нам время движения в каждую сторону?

Ответ: да, известно, 2 часа и 2,48 часа.

Вопрос: Что мы можем сказать о скорости лодки при движении по течению?

Ответ: Скорость лодки по течению равна сумме искомых скоростей, т.к. река «помогает» движению.

Вопрос: Что мы можем сказать о скорости лодки при движении против течения?

Ответ: Скорость лодки против течения равна разности искомых скоростей, т.к. река «мешает» движению.

Вопрос: Как математически описать эти зависимости?

Ответ: Если скорость лодки принять за x км/ч, а скорость течения реки y км/ч, то

$$v_{\text{по течению}} = x + y,$$

$$v_{\text{против течения}} = x - y.$$

Вопрос: Как найти время, зная скорость и весь путь?

Ответ: $t = \frac{s}{v}$.

Вопрос: Как найти скорость лодки по течению и против течения?

Ответ: Надо разделить расстояние между пристанями на соответствующее время движения.

Вопрос: Как найти скорость течения реки?

Ответ: надо вычесть из скорости лодки по течению скорость лодки в стоячей воде.

Формализация: процесс решения.

$$x + y = \frac{14}{2} = 7 \text{ км/ч};$$

$$x - y = \frac{14}{2{,}8} = 5 \text{ км/ч}.$$

Решаем полученную систему из двух уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Решаем систему методом сложения:

$$x + y + x - y = 7 + 5 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Далее, из первого уравнения следует:

$$y = 7 - x = 7 - 6 = 1\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Проверка решения задачи.

Выполним проверку. Зная скорости, можно найти время на обратный путь. Скорость против течения равна:

$v_{\text{против течения}} = v_{\text{лодки}} - v_{\text{реки}} = 6 - 1 = 5 \text{ км/ч}.$

Тогда, время в пути составит:

$$t = \frac{14}{5} = 2{,}8 \text{ часа} = 2 \text{ часа } 48 \text{ минут}.$$

Время на путь по течению равно:

$v_{\text{по течению}} = v_{\text{лодки}} + v_{\text{реки}} = 6 + 1 = 7 \text{ км/ч}.$

Тогда, время в пути составит:

$$t = \frac{14}{7} = 2 \text{ часа}.$$

Ответ: Скорость лодки в стоячей воде равна 6км/ч, скорость течения реки равна 1 км/ч.

Не углубляясь в дидактические особенности, рассмотрим не совсем стандартную, но весьма полезную для обобщающего повторения, текстовую задачу.

Задача 2. Неизвестное трехзначное число начинается с цифры 1. Если эту цифру стереть и дописать в конце, то новое, полученное трехзначное число больше искомого на величину

$$9a^{3/\lg a^3}.$$

Найти исходное неизвестное число.

Решение.

Для начал рассмотрим данное в условие выражение и определим, чему оно равно при различных значениях a. Учащиеся самостоятельно определяют область допустимых значений:

$$a > 0, a \neq 1$$

и при этих значениях a вычисляют, последовательно используя свойства логарифма:

$$9a^{3/\lg a^3} = 9a^{3/3\lg a} = 9a^{1/\lg a} = 9a^{\log_a 10} = 9 \cdot 10 = 90$$

Переходя непосредственно к решению задачи, записываем исходное трехзначное число в виде:

$$\overline{1xy} = 1 \cdot 100 + x \cdot 10 + y$$

После перестановки число запишется в виде:

$$\overline{xy1} = x \cdot 100 + y \cdot 10 + 1$$

Теперь учащиеся могут записать уравнение для решения задачи:

$$\overline{xy1} - \overline{1xy} = (x \cdot 100 + y \cdot 10 + 1) - (x \cdot 100 + y \cdot 10 + 1) = 90$$

Отсюда следует:

$$90x + 9y - 99 = 900$$

$$10x + y = 21$$

В этом уравнении два неизвестных, поэтому, требуются дополнительные равенства. Акцентируем внимание учащихся на том, что по смыслу задачи x и y – целые неотрицательные числа меньшие чем 10, причем, $x \neq 0$. Это означает:

$$y \geq 0 \implies 21 - y \leq 21 \implies 10x \leq 21 \implies x = 1 \text{ или } x = 2$$

Проверяя поочередно, получаем, что:

При $x = 1$: $y = 11$ – не подходит.

При $x = 2$: $y = 1$.

Таким образом, искомое число:

$$\overline{1xy} = 121.$$

Ответ: $121,$ при $a > 0, a \neq 1$.

Еще одна весьма познавательная задача для обобщающего повторения.

Задача 3. Есть 100гр. 99-процентного водного раствора спирта. Сколько воды необходимо выпарить для получения 98-процентного раствора?

Решение.

Стоит заметить, что в подавляющем большинстве случаев быстрый ответ на поставленный вопрос составляет 1гр., следуя логике:

$$99\% - 98\% = 1\%.$$

Основная ценность подобного рода задач заключается, конечно же, в том, что есть возможность разъяснить учащимся необходимость строго следовать установленным алгоритмам решения и не допускать ошибочных суждений, даже при их внешней кажущейся очевидности.

Действительно, 99-процентный водный раствор означает наличие 99гр. воды в 100гр. раствора, а 98-процентный водный раствор означает наличие 98гр. воды в 100гр. раствора. Но ведь воду то выпарили! Это означает, что вес раствора уменьшился, и теперь 98% надо брать не от 100 гр., а от некоторого, меньшего количества раствора, которое и стоит обозначить через x.

Для составления правильного уравнения необходимо выяснить, что есть общего у исходного 99-процентного и полученного 98-процентного растворов. Общим является количество спирта, которое как было:

$$(100\% - 99\%) \cdot 100\text{гр.} = 1\text{гр.}$$

так и осталось в новом растворе. Но, 1гр. спирта в новом растворе – это уже 2% от нового объема:

$$100\% - 98\% = 2\%.$$

Получаем уравнение:

$$1\text{гр.} = \frac{x}{100} \cdot 2\%,$$

откуда и следует ответ:

$$x = 50.$$

§5. Методика изучения линейных неравенств

Неравенства появляются еще в начальной школе, где неизвестной величиной служит один из компонентов четырех арифметических действий. Как правило, задание может иметь вид $x-2>6$, $x+3<7$. Или может быть сформировано в виде вопроса: «Какие натуральные числа меньше 12?». Все такие неравенства в начальной школе решаются методом подбора. Ребята просто перечисляют числа, которые могут являться решением предлагаемых неравенств. В основной школе понятие «линейные неравенства» вводят в 7-8 классах.

А.Я. Блох отмечает: как правило, способность решения всех неравенств, кроме квадратных, складываются на более низком уровне, чем уравнения тех же классов [5]. Это свойство носит объективный характер: теория неравенств более сложна, чем теория уравнений. Так же считают и авторы статьи Ладошкин М.В., Фролова И.С.: Изучение линейных неравенств является логическим продолжением изучения линейных уравнений [17]. Можно представить интервал для будущих преобразований, связанных с неравенствами разных типов. Чтобы изучить эту тему, учащиеся должны уметь определять тип линейного уравнения, иметь возможность решать линейное уравнение с одной переменной, знать числовые промежутки (луч, открытый луч, отрезок, интервал, полуинтервал), все свойства числовых неравенств. В первую очередь мы можем вспомнить формулу линейного уравнения, что значит корни линейного уравнения, число корней линейного уравнения, свойства числовых неравенств и уравнений, так как мы применяем это при решении линейных неравенств. Далее можно дать определение линейного неравенства с одной переменной.

Линейные неравенства – неравенства вида $ax+b>0$ ($ax+b<0$), где a, b – любые числа, $a \neq 0$ [18. с. 198].

В учебнике дается три правила для решения линейных неравенств:

Можно каждый член неравенства перенести из одной части неравенства в другую часть через знак неравенства с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.

Обе части неравенства одновременно можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не меняя при этом знак неравенства.

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, меняя при этом знак неравенства на противоположный данному.

В учебнике Макарычева Ю.Н. те же правила, но последние два объединены в одно: если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство: если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство [19, с. 187].

Решить неравенство – значит найти каждое его решение, или доказать, что решений неравенство не имеет.

Алгоритм решения линейного неравенства алгебраическим способом (т.е. с помощью правил и свойств):

- упростить обе части неравенства (раскрыть скобки, избавиться от дробей);

- перенести в левую часть слагаемые, содержащие переменные, а в правую остальные;

- привести подобные слагаемые в каждой части;

- разделить обе части неравенства на коэффициент при переменной;

- изобразить графически решение неравенства;

- в ответе указать числовой промежуток, который является решением неравенства.

Для решения этих неравенств достаточно знать элементарные свойства, которые могут быть использованы в определенной части решения данного неравенства. Следующие примеры, хотя н очень простые, являются основой для дальнейшего изучения темы.

Рассмотрим примеры из источников 8. 17. 36.

Пример 1.

$2c - \frac{c+1}{2} \leq \frac{c-1}{3}$.

Мы используем правило умножения обеих сторон неравенства на общий знаменатель дробей, получаем: $12c - 3(c+1) \leq 2(c-1)$.

Раскроем скобки, получим: $12c - 3c - 3 \leq 2c - 2$.

Воспользуемся правилом перенесения слагаемых из одной части неравенства в другую. получим: $12c - 3c - 2c \leq -2 + 3$. Приводим подобные слагаемые: $7c \leq 1$.

Воспользуемся правилом 2 и разделим обе части неравенства на коэффициент при переменной.

Изобразим решение неравенства графически (Рис. 2).

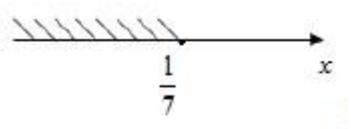

Рис. 2

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right]$

Пример 2.

$$\frac{4-3y}{2} - \frac{8y+1}{6} < 15y - 6.$$

Для начал избавимся от дробей, домножая обе части неравенства на общий знаменатель всех дробей: *3(4-3y) – (8y+1) < 6(15y-6);*

$$12 - 9y - 8y - 1 < 90y - 36;$$

$$-9y - 8y - 90y < -36 - 12 + 1;$$

$$-107y < -47.$$

Разделим обе части неравенства на отрицательное число – 47, при этом изменив знак неравенства на противоположный по правилу (3): $y > \frac{47}{107}$ (Рис. 3).

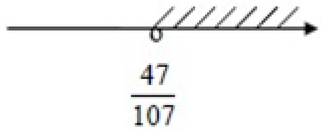

Рис. 3

Ответ: $y \in \left(\frac{47}{107}; +\infty\right)$

§6. Организация обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы

Обучению решения уравнений и неравенств посвящены практически все ступени образовательного процесса в курсе математики средней школы. Обобщающее повторение темы «уравнения и неравенства» позволяет систематизировать знания, полученные на всех этапах обучения, привить навыки самоконтроля, обобщить понятия «уравнения», «неравенства» и их систем.

Несмотря на очевидную прикладную значимость этих понятий, в том числе и для изучения других школьных предметов естественнонаучной направленности, встречается мнение, что следует ограничить «сложность» изучаемых задач, сосредоточившись на упрощенных вопросах алгебры и даже полностью исключить из обучения начал анализа. Подкрепляют это мнение тем, что школьники не до конца усваивают «сложные» задачи, и, поэтому, обучение превращается в пустую формальность. Все это лишний раз указывает на необходимость улучшения методологических подходов к организации также и обобщающего повторения темы «уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа, что является просто обязательным для успешного окончания общеобразовательной школы.

В экспериментальной части затрагиваются вопросы технологии обобщающего повторения темы «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа в рамках экспериментальной программы. Приведены темы экспериментальной программы и рассмотрена технология обучения с помощью ключевых задач. Выделены основные моменты одной из тем и рассмотрены способы доступного изложения задач для учащихся.

На основе проведенного теоретического исследования мы провели педагогический эксперимент, который состоял из трех этапов: констатирующий, формирующий и контрольный.

Чтобы апробировать экспериментальную программу, был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками теоретических основ решения уравнений и неравенств различного типа.

Разработанная программа применялась на практике в период с 15 марта 2019 года по 26 апреля 2019 года. Программа и соответствующая технология проведения занятий была рассчитана на 14 часов (2 часа в неделю) для учащихся старших классов.

Место проведения исследовательской работы: Апробация экспериментальной программы «Обобщающее повторение по теме «Уравнения и неравенства» осуществлялась на базе муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения «Тимковская основная общеобразовательная школа № 59».

В апробации были задействованы учащиеся 10–11-х классов, изъявившие желание получить базовые и дополнительные знания в рамках экспериментальной программы «Обобщающее повторение по теме «Уравнения и неравенства» – 20 учеников.

В основу курса были взяты учебники по алгебре и началм математического анализа для 10 и 11 класса авторского коллектива С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. В данных учебниках приведены все основные разделы, в которых изучаются уравнения и неравенства, а также необходимые начальные знания как для учащихся базовой школы, так и для профильных школ или для классов с углубленным изучением математики.

В Таблице 5 представлен фактический план занятий по экспериментальной программе «Обобщающее повторение по теме «Уравнения и неравенства». В рамках программы было проведено 8 занятий по 2 академических часа каждое.

Первая часть в каждом занятии была посвящена теоретическому материалу и проводилась в лекционной форме. Вторая часть проводилась в форме практического занятия и была посвящена анализу предыдущего домашнего задания, а также решению типовых задач в рамках нового материала текущего занятия.

Методику организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы решали на основе программы из 8 занятий (Таблица 5).

Таблица 5

План занятий по экспериментальной программе

«Обобщающее повторение по теме «Уравнения и неравенства»

№ занятия	*Тема*
1	Обобщение теоретических основ решения уравнений и неравенств. Простейшие примеры. Уравнения и тождественные преобразования. Рациональные уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств
2	Иррациональные и тригонометрические уравнения, неравенства и системы уравнений.
3	Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы уравнений.
4	Задачи на составление уравнений и неравенств. Нестандартные задачи. Прогрессии.
5	Уравнения с функциями. Уравнения в началх анализа (производная, интеграл) и их применение.
6	Использование уравнений в геометрии. Особенности уравнений применительно к физическим задачам.
7	Зачетное занятие. Контрольная в письменной форме.
8	Завершающее занятие, обобщение изученного материала.

На констатирующий этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования были заданы вопросы:

1. Какие темы вам представляются наиболее сложными для учащихся?

2. Считаете ли вы обоснованным разделение тем с учетом уровневой дифференциации учащихся?

3. Как следует перераспределить темы между занятиями для лучшей усваиваемости?

4. Насколько следует изменить комплекс задач для домашних заданий?

5. Наблюдается ли вы повышение интереса у обучающихся по ходу занятий?

6. Какие общие рекомендации по улучшению элективного курса вы можете дать?

В целом, преподаватели отметили живой интерес учащихся (около 80%) к обобщающим занятиям в рамках данной программы. Наиболее сложными оказались темы № 4 и № 5, уровень правильного решения задач по эти темам оказался не очень высоким (примерно 50%). В целом, преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

Учащимся, по завершении обучения на констатирующем этапе экспериментальной работы были заданы следующие вопросы:

1. Были ли лекционные занятия интересны для вас?

2. Что на практических занятиях вам давалось более легко?

3. Какой материал вызвал у вас наибольшее затруднения?

4. Какой материал оказался наиболее интересным? Что было для вас более «скучным»? По какой причине?

5. При решении какого типа задач можно применить полученные во время курса знания?

6. Считаете ли вы полезным для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?

В большинстве учащиеся посчитали курс интересным и познавательным для себя (около 85%). Учащиеся также испытывали затруднения в изучении тем № 4 и № 5 (примерно 60%).

Цель формирующего этапа проведенного исследования состояла в апробации конкретного теоретического материала и ряда типовых задач в рамках экспериментальной программы.

В результате данного этапа экспериментального исследования была апробирована программа «Обобщающее повторение по теме «Уравнения и неравенства» технологии обучения математике с помощью ключевых задач.

Цель технологии: развитие индивидуальных способностей учащихся и их увлечение математикой с помощью ключевых задач, которые формируются применительно к каждой из изучаемых тем.

Прогнозируемый результат: успешное усваивание материала всеми группами учащихся.

Для достижения целей данной технологии основным моментом являются ключевые задачи по каждой из изучаемых тем. Эти задачи обеспечивают успешное обучение на уровне стандарта всеми группами учащихся.

Каждое из восьми занятий в рамках данной программы имеет длительность в два академических часа. Занятие включает:

1. Урок в виде лекция, который раскрывает новую изучаемую тему крупным блоком,
2. Урок в виде практического занятия, посвященный решению ключевых задач различного уровня сложности.

Среди заключительных занятий элективного курса:

3. Урок в виде консультации, когда учащиеся готовят вопросы и задачи, вызвавшие затруднение,
4. Урок в виде зачета (коллоквиума), когда повторяется тема целиком, излагаемая, преимущественно, самими старшеклассниками,

5. Контрольный урок, который проводится в письменной форме,

6. Завершающий урок, посвященный анализу и обобщению всего пройденного материала.

Для примера, приведем краткое содержание теоретического материала и решение ключевых задач по одной из тем второго занятия предлагаемой программы «Иррациональные уравнения, неравенства и системы уравнений».

Некоторые обходимые теоретические сведения.

Иррациональные неравенства, фактически, сводятся к двум видам:

$$\sqrt{f(x)} > h(x), \sqrt{f(x)} < h(x).$$

Для решения таких неравенств рассмотрим три области:

$$\Omega = \{x \in R: f(x) \geq 0\};$$

$$F = \{x \in \Omega: h(x) < 0\};$$

$$G = \{x \in \Omega: h(x) \geq 0\}.$$

Приведенные неравенства можно заменить эквивалентными:

$$\sqrt{f(x)} > h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in F \\ \sqrt{f(x)} > h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in G \\ \sqrt{f(x)} > h(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{f(x)} < h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in F \\ \sqrt{f(x)} < h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in G \\ \sqrt{f(x)} < h(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Очевидно, что первое неравенство далее можно заменить эквивалентным:

$$\sqrt{f(x)} > h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in F \\ \sqrt{f(x)} > h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in G \\ \sqrt{f(x)} > h(x) \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in F \\ \begin{cases} x \in G \\ f(x) > h^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением будет объединение двух множеств: множества F и множества H, которому принадлежат все решения системы:

$$\begin{cases} x \in G \\ f(x) > h^2(x) \end{cases}$$

Аналогично, и для второго исходного неравенства:

$$\sqrt{f(x)} < h(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in F \\ \sqrt{f(x)} < h(x) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in G \\ \sqrt{f(x)} < h(x) \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ \begin{cases} x \in G \\ f(x) < h^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \iff \begin{cases} x \in G \\ f(x) < h^2(x) \end{cases}$$

Каждая из полученных систем:

$$\begin{cases} x \in G \\ f(x) > h^2(x) \end{cases}, \begin{cases} x \in G \\ f(x) < h^2(x) \end{cases}$$

решается с помощью метода интервалов.

Приведем ключевые задачи к данной теме второго занятия. При решении неравенств учащиеся должны четко уяснить алгоритмы для решения соответствующего типа задач.

Задача 1. Решить неравенство:

$$\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x.$$

Для решения задачи воспользуемся приведенным выше алгоритмом:

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0 \iff (x - 5)(x + 2) \geq 0\,;$$

$$x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty).$$

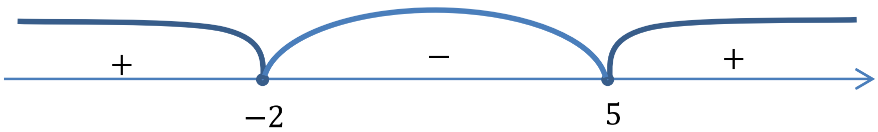

Рис. 4

$$\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x \iff \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty) \\ 8 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (8 - x)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (5; 8] \\ x^2 - 3x - 10 < (8 - x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (5; 8] \\ 13x < 74 \end{cases}$$

Рис. 5

Получаем ответ: x ∈ $(-\infty; 2] \cup [5; 74/13)$.

Задача 2. Решить неравенство:

$$\sqrt{5x - x^2 - 6} \geq 2{,}5 - x.$$

Для решения задачи вновь воспользуемся стандартным алгоритмом:

$$5x - x^2 - 6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(x-3) \leq 0\,.$$

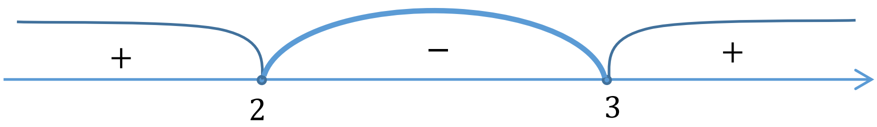

Рис. 6

$$\sqrt{5x - x^2 - 6} \geq 2{,}5 - x \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in [2; 2{,}5) \\ \begin{cases} x \in [2{,}5; 3] \\ 5x - x^2 - 6 > (2{,}5 - x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [2; 2{,}5) \\ \begin{cases} x \in [2{,}5; 3] \\ 2x^2 - 10x + 12{,}25 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [2; 2{,}5) \\ \begin{cases} x \in [2{,}5; 3] \\ \left(x - \dfrac{10 - \sqrt{2}}{4}\right)\left(x - \dfrac{10 + \sqrt{2}}{4}\right) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [2; 2{,}5) \\ \begin{cases} x \in [2{,}5; 3] \\ x \in \left(\dfrac{10 - \sqrt{2}}{4}; \dfrac{10 + \sqrt{2}}{4}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

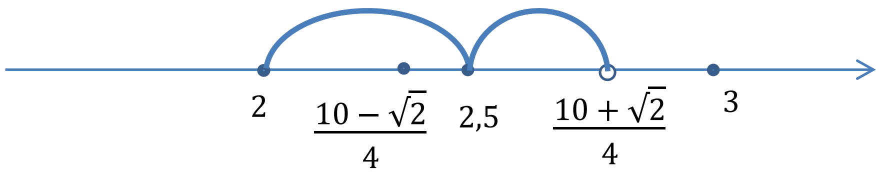

Рис. 7

Получаем ответ: $x \in \left[2; \frac{10+\sqrt{2}}{4}\right)$ (Рис. 7).

Задача 3. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x}} = 2 - \sqrt{x+1+2\sqrt{x}}.$$

Для решения задачи избавимся от иррациональности, найдем численные решения и затем сделаем проверку.

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x}} = 2 - \sqrt{x+1+2\sqrt{x}} \Rightarrow \left(\sqrt{x+1-2\sqrt{x}} + \sqrt{x+1+2\sqrt{x}}\right)^2 = 4;$$

$$\left(x+1-2\sqrt{x}\right) + 2\sqrt{\left(x+1-2\sqrt{x}\right)\left(x+1+2\sqrt{x}\right)} + \left(x+1+2\sqrt{x}\right) = 4;$$

$$2x+2+2\sqrt{(x+1)^2-4x} = 4;$$

$$2x+2+2|x-1| = 4.$$

При $x \geq 1$:

$$2x+2+2|x-1| = 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1\,.$$

При $x < 1$:

$$2x+2+2(-x+1) = 4 \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow x \in (-\infty; 1)\,.$$

Область допустимых значений имеет вид:

$$x \geq 0.$$

И решение уравнения есть пересечение интервалов G и F:

$$G = [0; +\infty), F = (-\infty; 1].$$

Получаем ответ: $x \in [0; 1]$.

Задача 4. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = 6.$$

Для решения задачи вновь избавимся от иррациональности, найдем численные решения и затем сделаем проверку.

$$\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6 \Rightarrow \left(\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}\right)^2=36;$$

$$\left(x+6\sqrt{x-9}\right)+2\sqrt{\left(x+6\sqrt{x-9}\right)\left(x-6\sqrt{x-9}\right)}+\left(x-6\sqrt{x-9}\right)=36;$$

$$2x+2\sqrt{x^2-36(x-9)}=36 \Rightarrow x+|x-18|=18.$$

При $x \geq 18$:

$$x+|x-18|=18 \Rightarrow 2x-18=18 \Rightarrow x=18$$

При $x < 18$:

$$x+|x-18|=18 \Rightarrow x+(-x+18)=18 \Rightarrow 18=18 \Rightarrow x \in (-\infty; 18)$$

Область допустимых значений имеет вид:

$$\begin{cases} x-9 \geq 0 \\ x-6\sqrt{x-9} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x \geq 6\sqrt{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x^2-36x+324 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 9.$$

И решение уравнения есть пересечение интервалов G и F:

$$G=[9;+\infty), F=(-\infty;18].$$

Получаем ответ: $x \in [9;18]$.

§7. Апробация методики организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства»

Контрольный этап. Педагогический эксперимент

Предметом исследования является методика организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы, направленная на развитие умений решать уравнения и неравенства.

Объект исследования – процесс обучения математике.

Гипотеза эксперимента: если в процессе изучения материала использовать разработанную методику организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы, то это будет способствовать осознанному и качественному формированию умений решать уравнения и неравенства.

Цель: заключается в выявлении и обосновании возможности использования данной методики для формирования умений решать уравнения и неравенства.

В процессе исследования проблемы и проверки достоверности сформулированной гипотезы необходимо было решить следующие *задачи:*

1. Выявить роль уравнений и неравенств при обучении математике.
2. Разработать методику формирования умений решать уравнения и неравенства, направленную на развитие тригонометрических представлений.
3. Экспериментально проверить эффективность разработанной методики.

Для решения поставленных задач были использованы следующие *методы исследования*:

- анализ педагогической и методической литературы;

- теоретический метод;

- практический метод.

Ход эксперимента:

- диагностирующий этап;

- обучающий этап;

- контрольный этап.

База исследования: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Тимковская основная общеобразовательная школа № 59».

Диагностирующий этап эксперимента.

В качестве испытуемых 20 учеников 10-11-х классов. Среди учеников были хорошо успевающие и отстающие ученики.

Целью этапа является выявление уровня сформированности основных умений, необходимых для решения уравнений и неравенств.

Для реализации цели были использованы методы:

- контрольная работа;

- наблюдение.

Учащимся на диагностирующих этапах была предложена контрольная работа, состоящая из 4-х ключевых задач. Задания контрольной работы были выбраны в соответствии с умениями, необходимыми для решения уравнений и неравенств. Между диагностирующими этапами была проведена обучающая работа.

Результаты *диагностирующего эксперимента*.

1 задача (решить неравенство): справились 10 человек. И 10 человек экспериментируемых не справились с решением неравенства. (Результаты работы по решению задачи 1 на диагностирующем этапе представленные на Рис. 8).

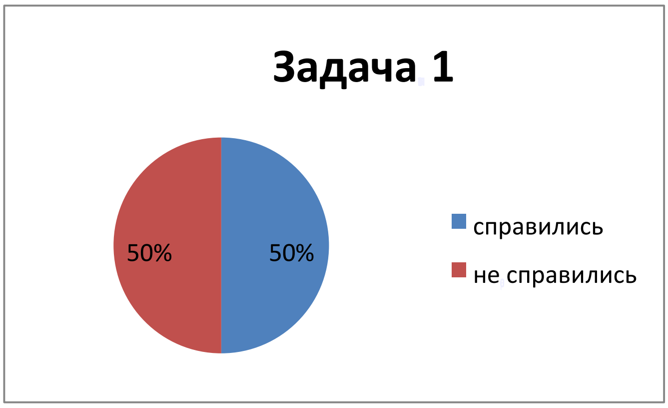

Рис. 8. Диаграмма результатов диагностирующего этапа (задача 1)

2 задача (решить неравенство): справились 8 человек из 20, участвующих в эксперименте. Те же результаты показали учащиеся и в решении 3 задачи (решить уравнение): справились 8 человек (Результаты работы по решению задач 2 и 3 на диагностирующем этапе представленные на Рис. 9).

Рис. 9. Диаграмма результатов диагностирующего этапа (задачи 2, 3)

Решение 4 задачи (решить уравнение) оказалось самым сложным для учащихся. С этой задачей справились всего 5 человек (Результаты работы по решению задачи 4 на диагностирующем этапе представленные на Рис. 10).

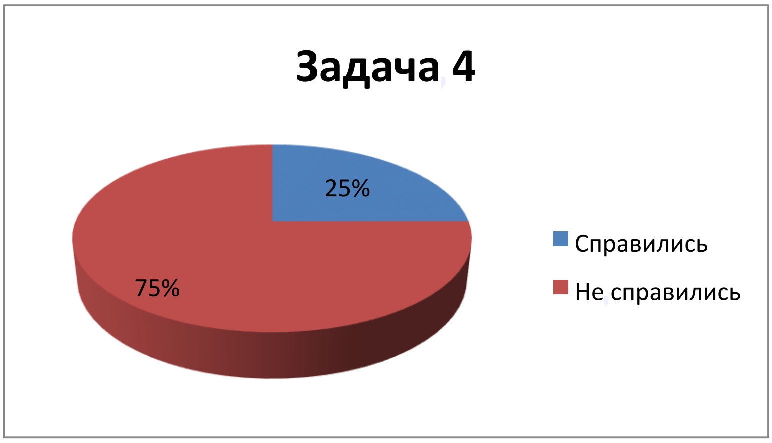

Рис. 10. Диаграмма результатов диагностирующего этапа (задача 4)

Это говорит о том, что при обучении учащихся решать уравнения и неравенства необходимо акцентировать внимание учеников на работу по обобщающему повторению по данной теме.

Обучающий эксперимент.

Целью данного этапа является формирование у учащихся умений решать уравнения и неравенства.

Для реализации поставленной цели сформулированы задачи:

1. В соответствии с результатами предыдущего этапа внести коррективы в разработанную методику формирования у учащихся решать уравнения и неравенства;

2. Применять данную систему задания на уроках и дополнительных занятиях со слабыми учащимися.

3. Организовать деятельность учащихся на занятиях, направленную на формирование умений решать неравенства и уравнения.

Для реализации данных задач были проведены уроки и дополнительные занятия по обобщающему повторению по теме «Уравнения и неравенства». Содержание этих занятий включало в себя теоретическую и практическую часть.

После чего был проведен контрольный этап исследования.

Контрольный эксперимент.

Целью данного этапа является определение эффективности разработанной методики.

Для реализации данной цели были сформулированы задачи:

1. Провести контролирующую самостоятельную работу, позволяющую определить уровень сформированности у учащихся умений решать уравнения и неравенства.

2. Сделать соответствующие выводы об использовании данной методики, ее корректировке.

Для решения данных задач была проведена контрольная работа, аналогичная работе, предложенной на подготовительном этапе.

1 задача (решить неравенство): справились 19 человек. Всего 1 ученик допустил ошибку по невнимательности. (Результаты работы по решению задачи 1 на контрольном этапе представлены на Рис. 11.)

Рис. 11 . Диаграмма результатов контрольного этапа (задача 1)

2 задача (решить неравенство): справились 15 человек из 20, участвующих в эксперименте. (Результаты работы по решению задачи 2 на контрольном этапе представлены на Рис. 12.)

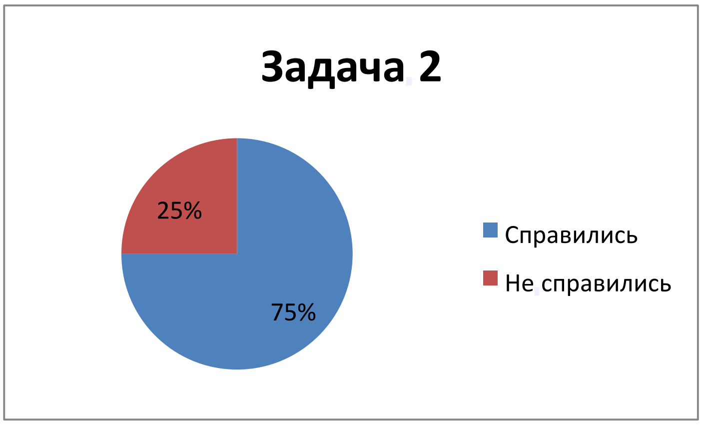

Рис. 11 . Диаграмма результатов контрольного этапа (задача 1)

Результаты учащихся в решении 3 задачи (решить уравнение): справились 18 человек, не справились – 2 ученика. (Результаты работы по решению задачи 3 на контрольном этапе представлены на Рис. 13.)

Решение 4 задачи (решить уравнение) также показало хорошие результаты после проведенного обучения. С этой задачей справились также 18 человек из 20, принимающих участие в эксперименте. (Результаты работы по решению задачи 4 на контрольном этапе представлены на Рис. 13.).

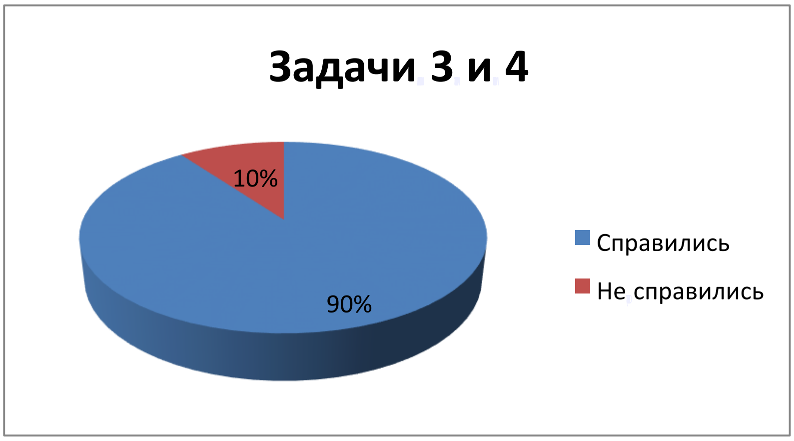

Рис. 13 . Диаграмма результатов контрольного этапа (задача 4)

После проведенного исследования можно сделать вывод, что процесс решения осуществляется классификаций уравнений (неравенств) по типам с последующим поиском решений каждого типа. Решение бесконечной совокупности уравнений и неравенств с учетом требования равносильности преобразований возможно при развитии достаточного уровня логического мышления. С другой стороны, формирование методов решения уравнений и неравенств обеспечивает значительный процесс в развитии математической культуры учащихся.

Развивающий характер уравнений и неравенств определяется их способностью реализовывать многие виды мыслительной деятельности учащихся:

- выработка определенных алгоритмов мышления;
- умение определить наличие и количество корней в уравнении;
- решение семейств уравнений, являющихся следствием данного;
- выражение одной переменной через другую;
- повторение большого объема формул при решении;
- значение соответствующих методов решения;
- широкое применение словесной и графической аргументации;
- развитие графической культуры учащихся.

Все вышесказанное позволяет говорить о необходимости организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Таким образом, контрольный этап исследования показал хорошие результаты проведенной работы:

1. Ученики более внимательно работают с решением задач, и приступают к решению уравнений и неравенств после рассмотрения условий применимости, необходимых для решения.

2. Сравнение результатов тестирования до и после эксперимента позволяет представить их в графической форме (Рис.14).

Итак, работа с учащимися по формированию осознанного и качественного научения решать уравнения и неравенства прошла успешно. Об этом свидетельствуют:

- Улучшение результатов проверочных работ;

- Отношение самих учащихся к проведенным занятиям: школьники с интересом принимали участие в процессе обучения.

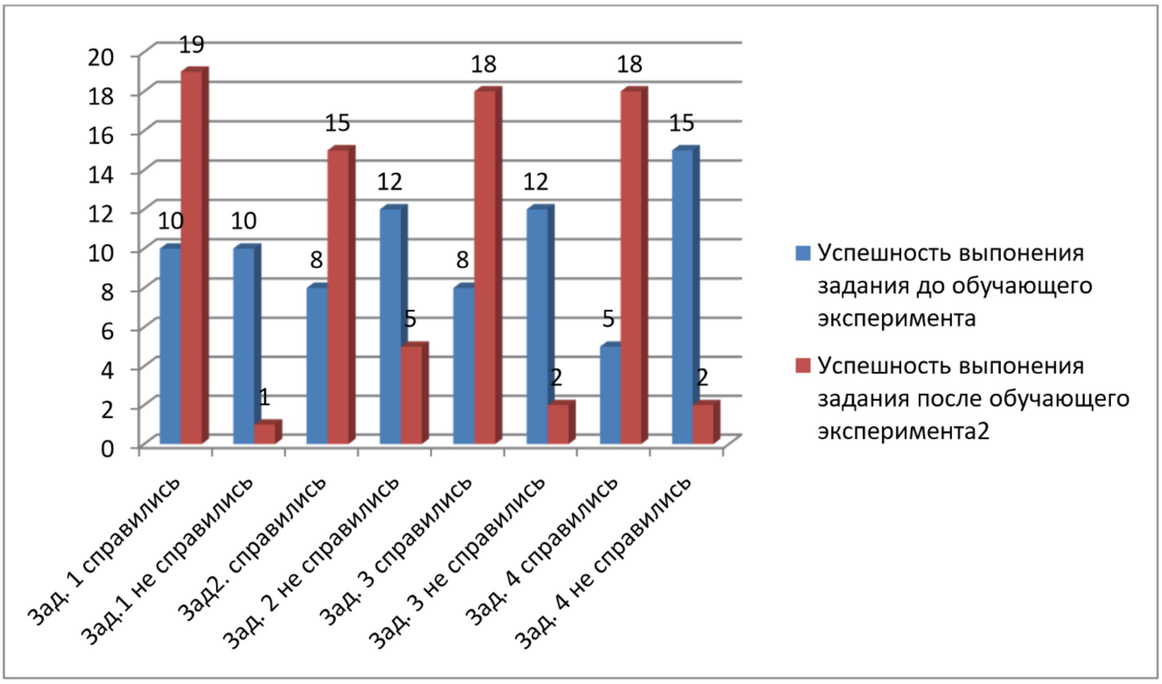

Рис. 14. Диаграмма результатов обучающего эксперимента

Таким образом, цель эксперимента достигнута. Его результаты удовлетворительны. Данная методика имеет возможность применения на занятиях по алгебре и началм анализа в общеобразовательной школе.

Из изложенного видно, что в технологии преподавания при обобщающем повторении по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа ключевым является объяснение учащимся техники использования существующих алгоритмов решения задач.

Выводы по второй главе

Данный эксперимент и обучающая методика организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы вызвали интерес у учащихся. Методика является эффективным дополнением в общей системе обучения решений уравнений и неравенств и подготовки к сдаче ЕГЭ. Учащиеся позитивно отнеслись к занятиям. Так как эксперимент состоял из меньшего количества часов, чем это заявлено в программе, но все-таки положительные сдвиги имеются. О них можно судить по результатам проведенного исследования.

1. По результатам второй главы можно заключить, что предложенная методическая идея позволит систематизировать и обобщить теоретический материал, посвященный решению различных видов алгебраических уравнений и неравенств за курс основной школы, актуализировать методы и приемы их решения, углубить и расширить знания, дополнить теоретический материал, изучаемый в старшей школе, и ориентировать на подготовку учащихся к освоению вузовского курса математики.

2. Методика может быть использована учителями математики в школе для учащихся 10-11 классов, изучающих математику как на базовом, так и на профильном уровнях. В рамках проведения опытно-экспериментальной работы среди учащихся 10-11 классов было установлено, что методика организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы является эффективным дополнением в общей системе подготовки к сдаче ЕГЭ.

Таким образом, обобщение и систематизация основных методов решения уравнений и неравенств в экспериментальной группе учащихся позволили повысить уровень математической подготовки учащихся в рамках содержательно-методической линии уравнений и неравенств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе речь шла о теоретических основах обучения теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы, особенностях их решения. Были рассмотрены уравнения и неравенства в школьном курсе математике, особенности решения уравнений и неравенств. Была разработана методика организации обобщающего повторения темы «Уравнения и неравенства» на примерах задач. Цель работы заключалась выявлении методических особенностей обучения теме «Уравнения и неравенства». Для достижения данной цели, была подобрана и изучена литература по данной проблеме, исследованы различные подходы к понятию «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа, проблемы обучения теме «неравенства» в курсе алгебры общеобразовательной школы, анализ содержания программ основного общего образования в курсе алгебры и начал анализа, представлены методические рекомендации к решению уравнений и неравенств.

Итак, проработав соответствующую педагогическую и методическую литературу по данному вопросу, можно сделать вывод о том, что умение и навыки решать уравнения и неравенства в школьном курсе алгебры и начал анализа являются очень важными, развитие которых требует значительных усилий со стороны учителя математики. Преподаватель сам обязан в достаточной мере владеть методиками формирования умений и навыков решать уравнения и неравенства. С учетом того, что уравнения и неравенства разделяются на несколько типов, то и методика для каждого типа различна.

Достичь поставленной цели с помощью только лишь средств и методов, предложенных авторами современных учебников, практически невозможно. Это связано с индивидуальными особенностями учащихся: в зависимости от уровня их базовых знаний по математике выстраивается линия возможностей изучения различных видов уравнений и неравенств на разных уровнях.

Процесс решения уравнений и неравенств синтезирует в себе практически все знания и умения, которые учащиеся приобретают при изучении элементов математики. Поэтому учитель сталкивается со сложной проблемой выделения тех идей изучаемого материала, которые лежат в основе способов решения рассматриваемых задач, с целью их последующего обобщения и систематизации. Это важно и для осознанного усвоения учащимися теории, и для овладения некоторыми общими способами решения математических задач. Решение уравнений и неравенств создает предпосылки для систематизации знаний учащихся, дает возможность установить действенные связи с изученным алгебраическим материалом (уравнение, равносильность уравнений, виды алгебраических уравнений, способы их решения, приемы преобразования алгебраических выражений и т.п.). В этом состоит одна из особенностей материала, связанная с организацией обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Другая особенность – в разнообразии таких уравнений, что влечет определенные трудности в их классификации; его следствием могут быть и затруднения в решении уравнений и неравенств, в частности, в выборе того приема, который целесообразно применить для получения искомого.

Указанные особенности должны быть учтены при разработке методики организации обобщающего повторения по теме «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Для решения уравнений и неравенств требуется умение мыслить логически: необходимо в каждый момент проведения решения отчетливо представлять себе, что уже сделано, что еще надо сделать, что означают уже полученные результаты. Изучение уравнений и неравенств в общеобразовательных школах дает учащимся большие возможности для анализа различных ситуаций, то есть показывает значимость этих понятий при решении многих практических задач. Именно с простейших практических задач и приложений математически постепенно формируется у школьников понимание значимости математики в жизни.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель исследования достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начал анализа. 11 кл.: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобр. учр. (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Л.И. Звавич, Т.А. Корешкова, Т.Н. Мишустина, А.Р. Рязановский, П.В. Семенов; под ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2017. – 264 с.
2. Алгебра и начал математического анализа: Уч-к для 10 класса / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2019 – 436 с.
3. Александрова Л. А. Алгебра и начал анализа. Самостоятельные работы 11 класс / под ред. А.Г. Мордковича. – 4-е изд. испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2017. – 100 с.
4. Беляева Э.С. Математика. Уравнение и неравенство с параметрами в 2 ч.: Уч. Пос./ Беляева Э.С., Потапов А.С., Титоренко С.А. – М.: Просвещение, 2019. – Ч. 1 – 480 с., Ч. 2 – 444 с.
5. Блох А.Ш. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Уч. пос. / А. Ш. Блох, Е.С. Канин и др. Сост. Е.С. Черкасов, А.А. Столяр. – URL: https://www.razym.ru/naukaobraz/disciplini/matem/201557-bloh-aya-gusev-va-dorofeev-gv-metodika-prepodavaniya-matematiki-v-sredney-shkole-chastnaya-metodika.html (дата доступа: 19.11.2019)
6. Боровских А.В., Веревкина В.Е. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства». – URL: http://elibrary.ru/download/elibrary_24852670_58842141.pdf. (дата доступа: 18.11.2019)
7. Башмаков М.И., Методическое пособие для НПО, СПО, Просвещение, 2017. – 21 с.

8. Буфеев С.В., Буфеев И.С. О разумных и неразумных требованиях к выполнению письменной экзаменационной работы. Математика в школе. – 2019. – № 4. – С. 3–5.

9. Вавилов В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – 13-е изд. – М.: Наука: 2017. – 240 с.

10. Васильева Г.Н. Методические аспекты деятельностного подхода при обучении математике в средней школе. – Пермь, 2019. – 136 с.

11. Далингер В.А., Пустовит Е.А. Различные способы решения неравенств вида |f(x)|+|g(x)|>|f(x)+g(x)| – URL: http://elibrary.ru/download /elibrary_18076619_11997811.pdf. (дата доступа: 18.11.2019)

12. Денищева Л.О., Корешкова Т.А. Алгебра и начал анализа. 10-11 классы. Тематические тесты и зачеты для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2017. – 72 с.

13. Дорофеев Г.В., Гуманитарно ориентированный курс — основа учебного предмета «Математика» в общеобразовательной школе// Математика в школе, 1970, с. 59—67.

14. Жафяров А.Ж. Профильное обучение математике старшеклассников: учебно-дидактический комплекс. – URL: http://www.iprbookshop.ru /65152.html.— ЭБС «IPRbooks» (дата доступа: 10.11.2019)

15. Зив Б.Г., Гольдич В.А. Дидактические материалы по алгебре. – 14-е изд. – С-Пб.: Петроглиф: Виктория плюс, 2018. – 136 с.

16. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начал математического анализа. 10-11 классы. – М.: Просвещение, 2017. – 336 с.

17. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. Алгебра 10-11 класс. – М.: Просвещение, 2018. – 387 с.

18. Крамор В.С. Задачи с параметром и методы их решения: Уч. пос. – М.: Оникс; Мир и Образование, 2017. – 416 с.

19. Ладошкин М.В., Фролова И.С. Изучение линейных неравенств и их систем в школьном курсе математики. – URL: http://elibrary.ru /download/elibrary_26188515_18357522.pdf. (дата доступа: 16.11.2019)

20. Лященко Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Уч. пос. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 223 с.: ил.

21. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феоктистов И.Е. Алгебра, 9 класс. – М.: Мнемозина, 2018. – 452 с.

22. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 2019. – 175 с.

23. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика: Уч. пос. – М.: Экзамен, 2019. – 288 с.

24. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1.: Уч-к для учащихся общеобр. учреждений. – 14-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2018. – 399 с.

25. Мордкович А.Г. Алгебра и начал анализа. 10–11 кл.: Уч-к для общеобр. учр. – М.: Мнемозина, 2017. – 336 с.: ил.

26. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики. М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2019. – 296 с.

27. Мордкович А.Г., Денищева Л.О., Корешкова Т.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Алгебра и начал анализа 11 класс. Задачник. – М: Мнемозина 2018. – 266 с.

28. Никольский С.М. Алгебра и начал математического анализа, 11 класс. – М.: Просвещение, 2017. – 468 с.

29. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник. – М.: Факториал, 2017. – 219 с.

30. Орлов В.В. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: Учеб. пос. для студентов матем. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. – М.: Дрофа, 2017. – 320 с.

31. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика. – М.: Просвещение, 2019 – 96 с.

32. Рыжик В.И. В который раз про ОДЗ и не только… – Математика в школе. – 2018. – № 8. – С. 36–38.

33. Садовничий Ю.В. ЕГЭ. Практикум по математике: Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. М.: Экзамен, 2019. – 128 с.

34. Стефанова Н.Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пос. для вузов / под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2018. – 416 с.

35. Суворова М.В. Повторительно-обобщающие уроки в курсе математики //Математика в школе. – 2019. – № 4. – С. 12–13.

36. Талочкин П.Б. Неравенства и уравнения. Упражнения и методические указания. Из опыта работы учителя / П.Б. Талочкин; под ред. Н.М. Матвеева. – 9-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 160 с.

37. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. – URL: https://fgos.ru/ (дата доступа: 11.11.2019)

38. ФГОС Среднее общее образование (10–11 класс). – URL: https://classinform.ru/fgos/1.4-srednee-obshchee-obrazovanie-10-11-class.html (дата доступа: 12.11.2019)

39. Хазанкин Р.Г. Технология обучения математике на основе решения задач. – URL: https://infourok.ru/tehnologiya-obucheniya-matematike-na-osnoveresheniya-zadach-764793.html (дата доступа: 10.10.2019)

40. Чулков П.В. Уравнения и неравенства в школьном курсе математики. – URL: https://www.studmed.ru/chulkov-pv-uravneniya-i-

neravenstva-v-shkolnomkurse-matematiki_5a74196548a.html. (дата доступа: 29.11.2019)

41. Шестаков С.А. Решаем неравенства / Математика. – 2019. – февраль. – С. 57.

42. Шестаков С.А. Решаем неравенства / Математика. – 2019. – март. – С. 53.

43. Шестаков С.А. Решаем неравенства / Математика. – 2019. – сентябрь. – С. 63–65.

44. Шноль Д.Э. Устные упражнения в старших классах / Математика. – 2018. – февраль. – С. 33–36.

45. Якимовская И.С. Знания и мышление школьников. URL: https://www.studmed.ru/yakimanskaya-is-znaniya-i-myshlenieshkolnikov_c751177506a.html (дата доступа: 23.11.2019)

46. Big Ideas Math: Algebra 1 Student Journal. – 2019. – 227 с.

47. Cvetkovski Z. Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems. -Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2018. – 455 с.

48. Herman J., Kucera R., Simsa J., Dilcher K. Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory. –2000. – 344 с.

49. Riasat S. Basics of Olympiad Inequalities. –2008. – 45 p.40.Zawaira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. – 360 с.

50. Wallace D. Parts of the Whole: Learn More, Learn Better. – United States, 2012.-350 с.