МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения старшеклассников решению геометрических задач с применением инверсии»

Студент В.В. Коломыцина
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор С.Н. Дорофеев
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Геометрические задачи, предполагающие использование инверсий в качестве способа решения, не относятся к разряду стандартных, которые изучаются в базовом курсе геометрии в средней школе. Вместе с тем, развитие у учащихся способностей к использованию нетривиальных подходов к решению задач неоспоримо является одной из важных задач, стоящих в процессе преподавания геометрии, да и математики в целом. В современном мире именно способность к поиску оригинальных подходов для решения проблем, возникающих в профессиональной деятельности, и умение использовать нестандартные пути для преодоления каждодневных сложностей является важным навыком, которым должны обладать выпускники средней школы. Несмотря на мнение части исследователей, которые в своих работах проводят мысль, что преподаванию инверсии в школе не стоит уделить пристального внимания, мы считаем, что следует выдержать разумный баланс для нестандартных методов решения, которые являются незаменимыми для развития кругозора и широты взглядов у учащихся средней школы. Необходимо обратить внимание и на важность наглядности излагаемого материала. Для учащихся разного склада мышления наглядность будет являться незаменимым компонентом для лучшего усваивания материала.

Этим и обусловлена особая актуальность и значимость настоящего исследования. Именно поэтому в педагогической науке и практике методика обучению нестандартным подходам и, в том числе, методу инверсии занимает особое место.

Конечно, для формирования навыков и умений к использованию оригинальных способов решения задач используются не только курсы математики и геометрии, но, традиционно, именно при изучении этих предметов вырабатываются стройные логические основы нестандартного мышления.

Актуальность и научная значимость исследования в настоящее время вызвана еще и тем, что потребность в знаниях нетривиальных методов и способов становится все меньше на фоне проведения экзаменов в форме тестирования, повышая, тем самым, значимость методики преподавания непосредственно в процессе обучения в довузовских учебных заведениях. Можно констатировать, что методика преподавания инверсии является весьма актуальной в качестве инструмента как при обучении просто решению задач по геометрии, так и для развития у школьников способностей к глубокому анализу и разносторонним оценкам задач.

Анализ базовой и дополнительной учебной литературы в целом показывает, что методика обучения инверсии, как и другим специфическим подходам в геометрии, отнесена на второй план, как не имеющее самостоятельной ценности и как нечто дополнительное к другим знаниям. При этом, объем представлений о методах решения задач по геометрии весьма невелик и ограничивается достаточно узким спектром методологических подходов. Выявляется **противоречие** между: современными требованиями к уровню развития интеллектуальных способностей личности и недостаточно высоким уровнем возможностей для этого, предусмотренных как в базовом, так и профильном курсах геометрии и математики в целом. Отмеченное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявить методические особенности организации элективного курса по теме «Инверсия» для учащихся общеобразовательной школы при обучении математике

На текущий момент можно выделить несколько групп научных работ, посвященных проблеме методики обучения решению задач по рассматриваемой теме:

- изучение инверсии в средней школе как одного из методов решения задач на построение;

- исследование способностей к усваиванию материала в условиях профильной дифференциации;

- обучение геометрии в старших классах школы с использованием различных компьютерных программ;

- обучение старшеклассников логическому мышлению при выборе способов решения задач.

Вопрос нельзя считать достаточно подробно изученным и потребность в новых методологических подходах к преподаванию темы решения задач с использованием инверсии сохраняет свою актуальность, как одного из важных для развития кругозора и широты взглядов у учащихся средней школы.

Объект исследования – процесс обучения геометрии в основной школе.

Предмет исследования – методика обучения школьников применению инверсии к поиску решений геометрических задач как на вычисление и доказательство, так и задач на построение.

Цель исследования – систематизация и анализ методических подходов к обучению старшеклассников методам инверсии при решении задач в общеобразовательном курсе геометрии, в частности, планиметрии в рамках средней школы.

Гипотеза исследования заключается в том, что элективный курс по теме «Инверсия», реализующий компетентностный подход к обучению, будет способствовать развитию творческого мышления учащихся, повышению их уровня развития, расширению кругозора, а также на формирование ключевых компетенций и на повышение качества знаний по предмету, как в теоретическом, так и практическом аспектах.

Для достижения цели исследования, необходимо пошагово:

- провести анализ научно-практических работ по методологии преподавания нестандартных методов решения задач по геометрии,

- систематизировать нормативную базу, регулирующую методику преподавания геометрии, планиметрии в старших классах средней школы,

- исследовать типовые ошибки учащихся и основные затруднения при решении задач по геометрии, планиметрии, и, в том числе, при использовании нестандартных методов решения, включая инверсию,

- проанализировать с профессиональной педагогической точки зрения комплекс задач, используемых при преподавании геометрии, планиметрии, как в качестве базового, так и профильного и элективного предмета в школах разной профильной ориентации,

- сравнить учебно-методическую литературу, используемую для преподавания в средней школе и экзаменационных материалов за прошедшие годы по тематике данной работы,

- показать практическую значимость приведенных в работе результатов и выводов.

Задачи исследования:

1. Сравнение учебно-методических пособий различной профильной ориентации и материалов контрольных работ и внутренних экзаменов, используемых в образовательном процессе в средней школе.

2. Изучение специализированных научно-исследовательских работ, посвященных теме работы.

3. Анализ состояния методических рекомендаций, лежащих в основе процесса преподавания старшеклассникам метода инверсии и сопряженных преобразований плоскости в геометрии, планиметрии.

4. Изучение конкретного практического опыта преподавания инверсии в курсе геометрии в старших классах школ разного математического уровня,

5. Обобщение и анализ типовых сложностей и ошибок, с которыми сталкиваются учащиеся при решении геометрических задач с использованием инверсии.

6. Систематизация исследований по методике преподавания математических предметов в целом в средней школе и довузовских образовательных учреждениях.

Теоретико-методологическую основу исследования составили: основные положения личностно-ориентированного обучения С.Н. Дорофеева и дифференцированного обучения математике Р.А. Утеевой [20].

Базовыми для настоящего исследования явились также: основные положения теории и методики обучения решению геометрических задач В.А. Гусева, С.Н. Дорофеева, Г.И. Саранцева.

Методы исследования: анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта учителей математики по данной теме исследования; сравнительный анализ учебников и учебных пособий; систематизация и обобщение материала по теме.

Опытно-экспериментальная база исследования. Исследование проводилось на базе МКОУ «Харанжинская средняя общеобразовательная школа» в области применения инверсии в курсе геометрии.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017-2018 уч.г.): подготовка содержания диссертации и обзор основных подходов к ее написанию, анализ ранее выполненных исследований по теме работы, анализ школьных учебников по математике, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы базовой и профильной школы по данной теме.

2 семестр (2017-2018 уч.г.): определение теоретических и методических основ применения инверсии в курсе геометрии довузовских учебных заведений.

3 семестр (2018-2019 уч.г.): подборка системы задач для подготовки элективного курса по теме «Применение инверсии к решению геометрических задач».

4 семестр (2018-2019 уч.г.): разработка элективного курса и методики его преподавания.

5 семестр (2019-2020 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, формулирование выводов.

Научная новизна проведенного **исследования** заключается в том, что в нем предложены методические рекомендации по организации элективного курса «Применение инверсии к решению геометрических задач» в курсе геометрии общеобразовательной школы в рамках углубленного базового или профильного обучения.

Теоретическая значимость исследования:

- сформулированы теоретические основы обучения теме «Инверсия», проанализированы требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся;

- предложены рекомендации, как по форме организации элективного курса, так и по применению различных типов задач по геометрии для старшеклассников для развития учебно-познавательной учащихся.

Практическая значимость исследования состоит в том, что предложенный элективный курс по теме «Инверсия» может быть непосредственно применен на практике для старшеклассников в процессе изучения геометрии, а дидактические материалы, методические рекомендации, разработанные задания могут быть использованы в работе учителей математики, студентов педагогических вузов и колледжей.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались:

– достаточным количеством изученных и используемых источников;

– внедрением элективного курса по теме «Инверсия» в образовательный процесс при подготовке учащихся общеобразовательной школы к Основному Государственному Экзамену по математике.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в проектировании элективного курса по теме «Инверсия», разработке заданий, в апробации и внедрении результатов исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течении всего исследования.

Основные результаты исследования отражены в 1 публикации «Некоторые вопросы технологии обучения старшеклассников решению геометрических задач с применением инверсии» в научном журнале «Вестник магистратуры», 2019, №12 (99).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения теме «Инверсия» в курсе геометрии общеобразовательной школы.

2. Элективный курс «Применение инверсии к решению геометрических задач».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 54 рисунка, 1 таблицу, список используемой литературы (52 источника). Основной текст работы изложен на 78 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОНЯТИЯ «ИНВЕРСИЯ» В ГЕОМЕТРИИ

§1. История и основные направления развития понятия «инверсия» в геометрии

Появление и использование метода «инверсии» при решении тех или иных задач неразрывно связано с зарождением и развитием самой геометрии.

Задачами на геометрические построения занимались практически все известные древнегреческие математики: Пифагор, Евклид, Архимед, Аполлоний, Папп и другие. В эту эпоху возникли многие известные проблемы и классические задачи, такие как задачи о трисекции угла, квадратуре круга и другие.

В древние времена, когда отсутствовали измерительные приборы, приходилось решать теоретические и практические задачи, используя лишь циркуль и линейку. Именно к тем временам можно отнести возникновение класса задач, которые в наши дни принято называть «задачами на построение». Появилось огромное разнообразие задач, которое стало возможным решать, применяя простейшие инструменты и опираясь на постулаты Евклида:

– «от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию»,
– «ограниченную прямую можно непрерывно продолжать»,
– «из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг».

Стоит заметить, что «инверсия» была одним из основных методов решения задач на построение, хотя в качестве самостоятельного метода конструктивной геометрии «инверсию» стали рассматривать, лишь начиная с 30-х годов 19-го столетия.

В средние века развитие теории геометрических построений приостановилось, и даже решение некоторых известных древнегреческих задач было утеряно. Так, задача Аполлония была вновь решена лишь в 16-м веке известным французским математиком Виетом.

Импульс развитию конструктивной геометрии был придан в 17-18 веках, когда стали развиваться другие разделы математики.

Вклад в развитие этого направления геометрии внесли Декарт, Ферма, Эйлер, Гаусс и другие.

Приведем некоторые из задач, восходящих к Древней Греции, решение которых облегчается при использовании методов, которые впоследствии стали называть «инверсией».

Лемма Архимеда (ок. 300 – 200 гг. до н.э.).

Пусть даны две окружности, одна из которых касается другой в точке M и ее хорды KL в точке N.

Тогда, прямая MN делит дугу KL (не содержащую M) на две равные по длине части.

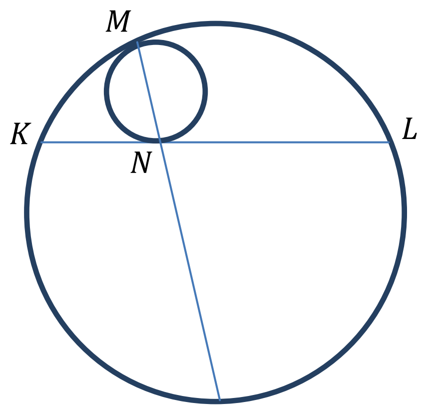


Рис. 1. Лемма Архимеда.

Задача Архимеда.

Возьмем точку M, которая принадлежит отрезку KN. Построим по одну сторону от KN три полуокружности на отрезках KM, MN и KN как на диаметрах.

Проведем перпендикуляр ML к MN. Этот перпендикуляр делит арбелос на две части, причем радиусы окружностей вписанных в них равны между собой.

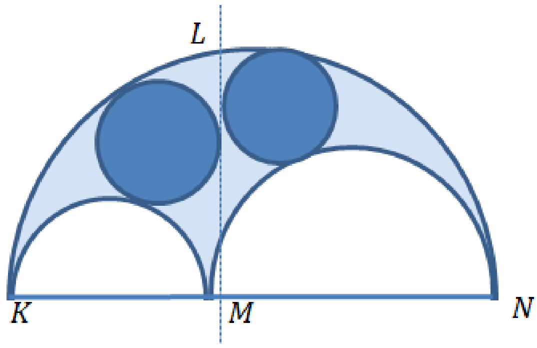


Рис. 2. Задача Архимеда

Задача Паппа (ок.250 – 300 гг. н.э.).

Даны три окружности образующие арбелос. Построим окружность, касающуюся всех трех окружностей и далее последовательность окружностей, каждая из которых касается предыдущей и большей и средней окружности арбелоса.

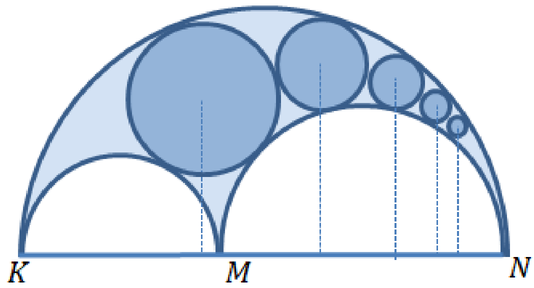


Рис. 3. Задача Паппа

Возьмем окружность под номером n, радиус которой обозначим как r_n. Тогда, расстояние d_n от ее центра до диаметра арбелоса равно:

$$\frac{d_n}{r_n} = 2n$$

Задача Аполлония (ок. 250 – 150гг. до н.э.) [36].

Даны три окружности. Построить четвертую окружность, которая касается заданных трех окружностей.

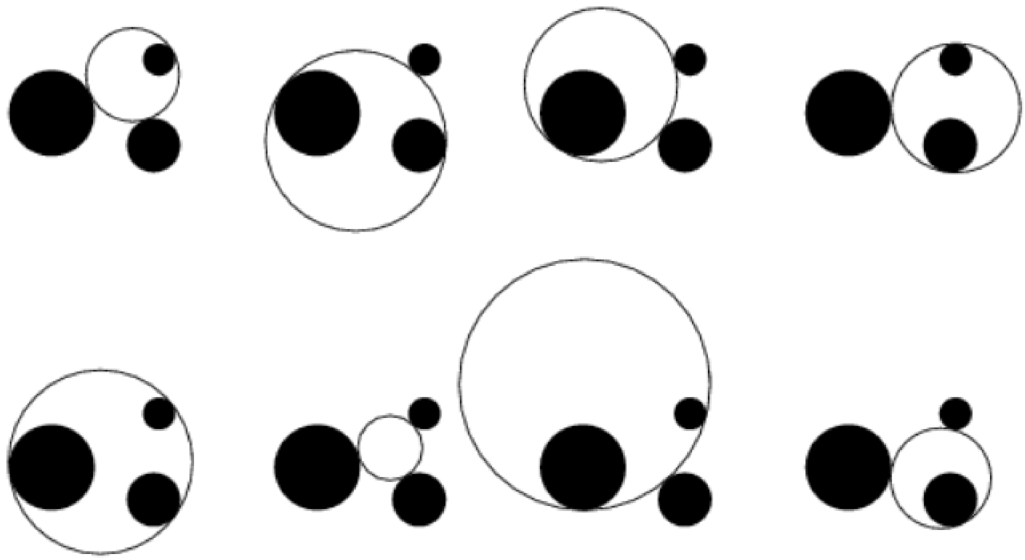


Рис. 4. Задача Апполония

Решение задачи Аполлония на рубеже перехода к средневековью было утрачено, и только в 16 веке решение было вновь найдено французом Ф. Виетом.

На рисунке представлено восемь различных вариантов для заданного расположения трех окружностей.

Дальнейшее развитие геометрические построения получили, уже начиная с 17-го века, преимущественно, в связи с развитием других разделов математики.

Сам термин «инверсия» был введен в 1830г. И примерно в это же время происходит возрождение интереса к инверсии, которое можно отнести и к первой половине 19-го века.

В британском журнале для мужчин появилась *«задача о бабочке»*, ныне считающаяся классической в планиметрии.

Пусть в данной окружности взята хорда PQ середину которой обозначим как M. Возьмем также еще две хорды AB и CD, которые пересекают PQ в точках X и Y. Тогда M — это середина XY.

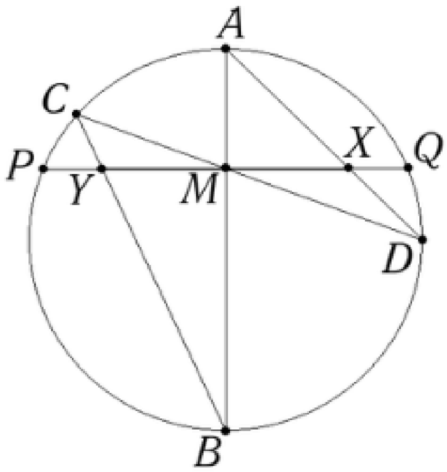


Рис. 5. Задача о бабочке.

Эта задача была решена большим количеством различных методов, но использование преобразования инверсии дает одно из наиболее простых и доступных для понимания решение.

Итальянский математик Мальфатти предложил **задачу о вписанных окружностях**.

Дан ΔABC. Необходимо вписать в этот треугольник три окружности так, чтобы каждая окружность касалась двух сторон ΔABC и двух вписанных окружностей. Стоит отметить, что изначально при постановке задачи автор преследовал цель максимизировать сумму площадей вписанных окружностей, которая, кстати, была решена неверно. Преобразование инверсии и здесь позволило сформулировать относительно простое решение задачи.

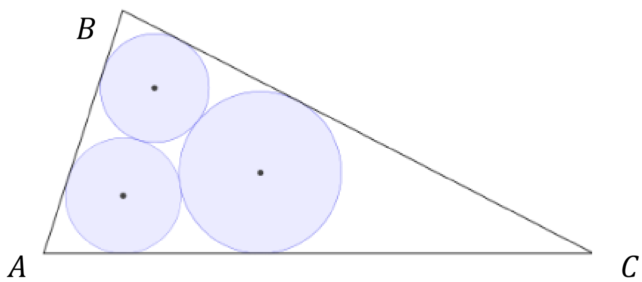


Рис. 6. Задача Мальфатти

Во второй половине 19-го века появились приборы, называемые инверсорами. Они позволяют без использования обычного инструментария построить линию, являющуюся образом заданной линии (инверсную линию).

Первым был прибор француза Поселье, созданный в 1864г. Логика прибора состоит в том, что если точка P описывает некую кривую линию l, то точка Q будет описывать линию l', являющуюся образом при инверсии с радиусом:

$$r^2 = |OA|^2 - |PA|^2$$

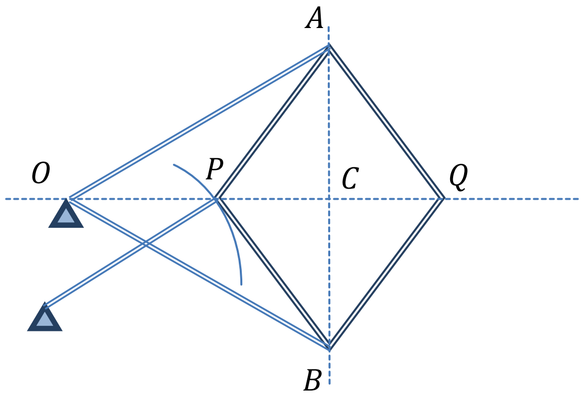


Рис. 7. Инверсор.

§2. Особенности применения инверсии в школьном курсе математики

Изучение планиметрии, геометрии, в школьном курсе математики, в значительной мере, ограничено применением свойств, простейших преобразований [2, 3, 4].

Такими преобразованиями являются: «подобие» (или «гомотетия») и «движение», в широком смысле этого понятия, когда расстояние между точками не меняется. Отличительной характеристикой этих преобразований является то, что геометрическая сущность фигур, в понимании Евклидовой геометрии, сохраняется, а именно:

- прямые линии преобразуются в прямые линии,

- окружности преобразуются в окружности.

Инверсия является более сложным для восприятия преобразованием геометрических фигур, при котором прямые линии и окружности переходят друг в друга.

Непосредственно, инверсия отличает решение целого класса задач, преподаваемых в базовом курсе планиметрии, геометрии, например, задач « на построение». При этом, решение таких задач без использования инверсии является более громоздким и сложным, требующим применения нестандартных подходов.

Под преобразованием в курсе планиметрии понимают правило, или закон, по которому каждой точке M плоскости ставится в соответствие точка M' этой же плоскости (образ точки M):

$$M' = \psi(M)$$

Если дана некоторая фигура F на плоскости и дано преобразование ψ этой плоскости, то совокупность образов точек, принадлежащих Ф называют образом Φ' фигуры Ф:

$$\Phi' = \varphi(\Phi)$$

Если при некотором преобразовании ε все точки плоскости переходят сами в себя, то такое преобразование называют тождественным:

$$M' = M = \varepsilon(M)$$

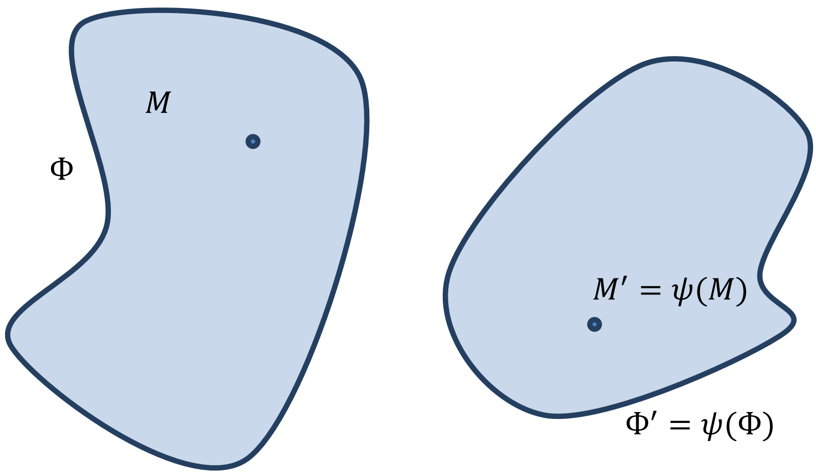


Рис. 8. Преобразование фигур

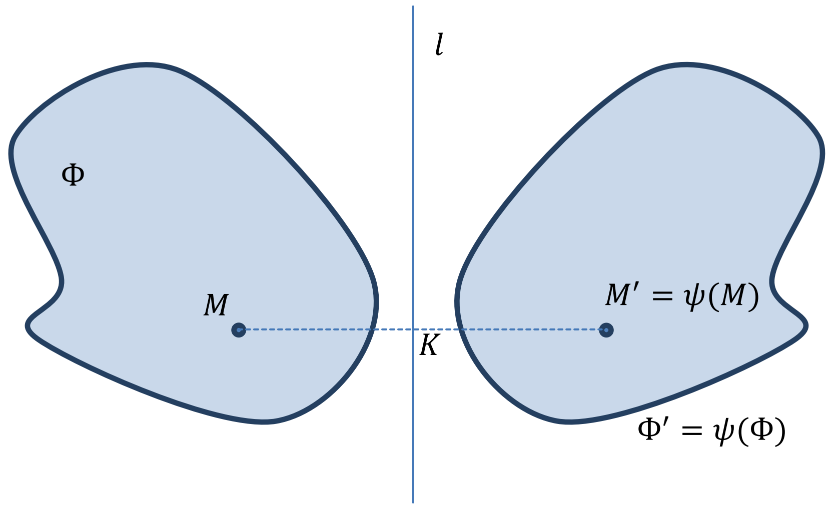
Если при преобразовании ψ некоторая точка O и ее образ совпадают, то такую точку называют «неподвижной точкой преобразования ψ». Если же некоторая фигура Ф совпадает со своим образом Φ', то такую фигуру называют инвариантной относительно преобразования ψ.

Перед тем, как изложить непосредственно преобразование инверсии, остановимся на простейших преобразованиях плоскости из базового курса планиметрии.

– Симметрия.

Это такое преобразование ψ, когда происходит отражение точек плоскости относительно некоторой прямой l.

Сама прямая l является инвариантом для ψ, так как точки, лежащие на l, переходят сами в себя и являются неподвижными точками для преобразования ψ.



$$|MK| = |KM'|, \qquad (MM') \perp l$$

Рис. 9. Преобразование симметрии

Очевидно, что инвариантами также будут все такие фигуры, для которых прямая l является осью симметрии.

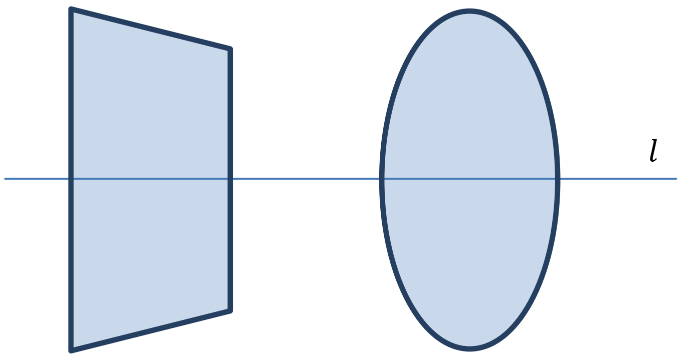


Рис. 10. Инварианты "симметрии"

– Параллельный перенос.

Этот вид преобразования определяется направляющим вектором:

$$\bar{a} = \overline{AB}$$

Каждая точка M имеет образ в виде точки M' так, что:

$$\overline{MM'} = \bar{a}$$

Очевидно, что это преобразование, которое носит характер сдвига на вектор $\bar{a}$, не имеет неподвижных точек, и все точки, лежащие на прямых, коллинеарных $\bar{a}$, являются инвариантами параллельного переноса. Инвариантами здесь также является бесконечный набор одинаковых фигур, когда одну фигуру можно получить из другой путем параллельного переноса на вектор $\bar{a}$. Заметим, что при $a = 0$ параллельный перенос превращается в тождественное преобразование.

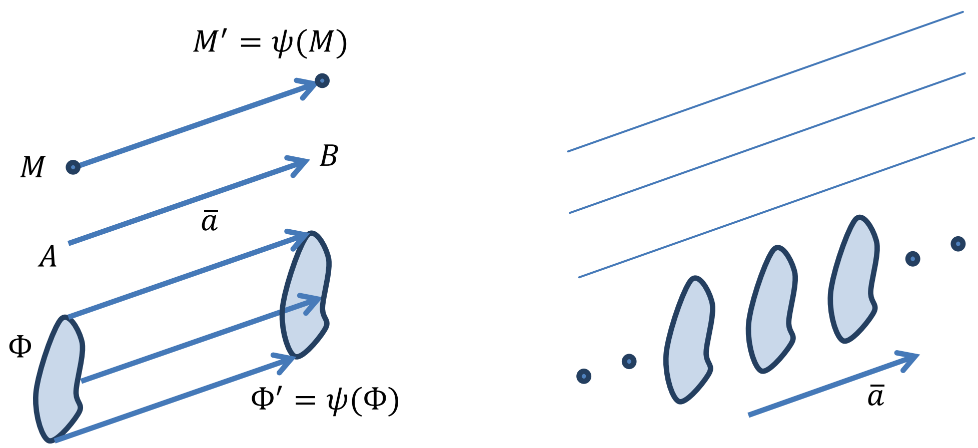


Рис. 11. Параллельный перенос и инварианты

– Вращение.

Данное преобразование представляет собой поворот плоскости вокруг некоторой неподвижной точки O, на заданный угол α.

Если соединить произвольную точку M с точкой O и повернуть отрезок OM на угол α (при $\alpha > 0$ это поворот против часовой стрелки или по часовой стрелке при $\alpha < 0$) получим отрезок OM', и образом точки M будет точка M'.

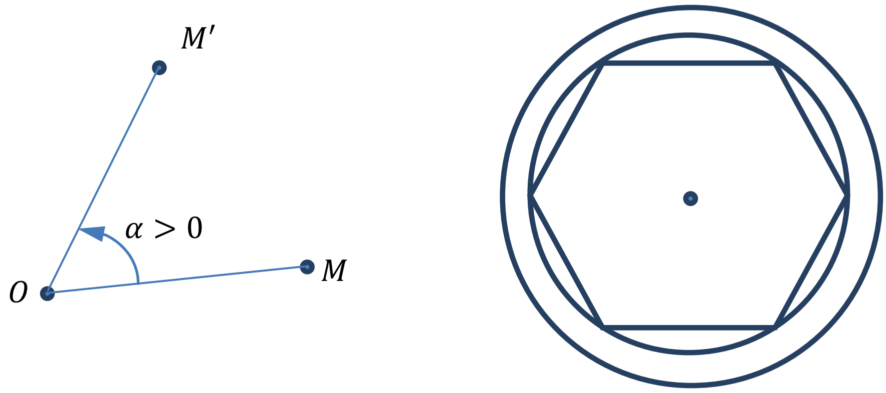


Рис. 12. Вращение и инварианты

При $\alpha = 0$ получим тождественное преобразование. Инвариантами вращения являются окружности, круги с центром в точке O. В случае, когда $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ инвариантами также будут правильные $n -$ угольники с центром в точке O.

Обобщенным названием приведенных преобразований плоскости является «движение».

Их особенностью является то, что при всех этих преобразованиях расстояние между точками не меняется, т.е. расстояние между точками фигуры Ф равно расстоянию между образами этих точек, принадлежащим фигуре Ф$'$. Можно утверждать, что любое движение плоскости сводится к одному или нескольким последовательно выполняемым преобразованиям, указанным ранее.

Еще одним преобразованием, широко представленным в школьном курсе планиметрии, является гомотетия. Гомотетия задается центром – неподвижной точкой O и коэффициентом k. Образом точки M при гомотетии является такая точка M', принадлежащая лучу OM, что

$$|OM'| = k|OM|$$

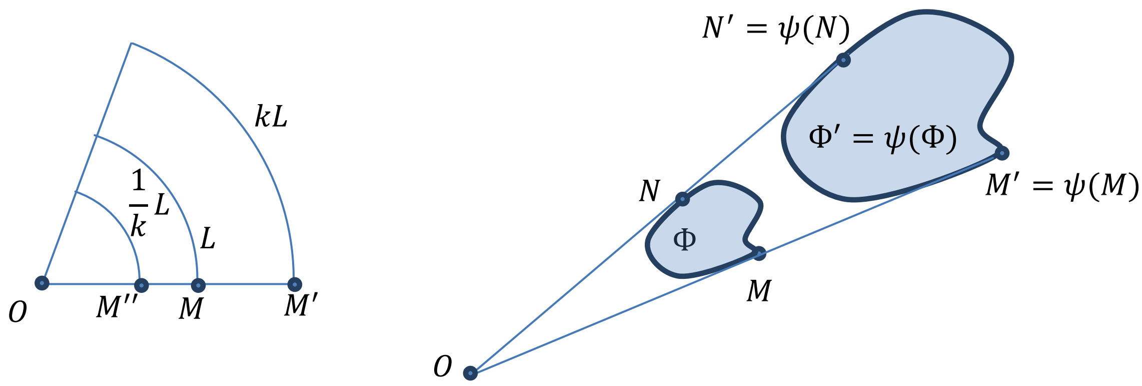


Рис. 13. Гомотетия

На Рисунке 13 показаны точка M и ее образы, точки M' и M'', при гомотетии с коэффициентами k и $1/k$ соответственно:

$$|OM'| = k|OM|, \qquad |OM''| = \frac{1}{k}|OM|, \qquad k > 1$$

Аналогично определяются образы фигур. При $k = 1$ преобразование является тождественным. Данные преобразования являются основополагающими для таких понятий базового курса планиметрии, как «равенство/конгруэнтность» и «подобие».

– Две фигуры Φ и Φ' называют равными, если одна из них может быть получена из другой с помощью последовательно использования преобразования движения.

– Две фигуры Φ и Φ' называют подобными, если одна из них может быть получена из другой с помощью последовательного использования преобразования движения и гомотетии.

Несколько более сложным для восприятия учащимися является преобразование «инверсии».

Возьмем на плоскости:

– окружность радиуса r с центром в точке O,
– точку M, лежащую внутри этой окружности,
– точку M', лежащую вне данной окружности на луче OM, такую что:

$$|OM| \cdot |OM'| = r^2$$

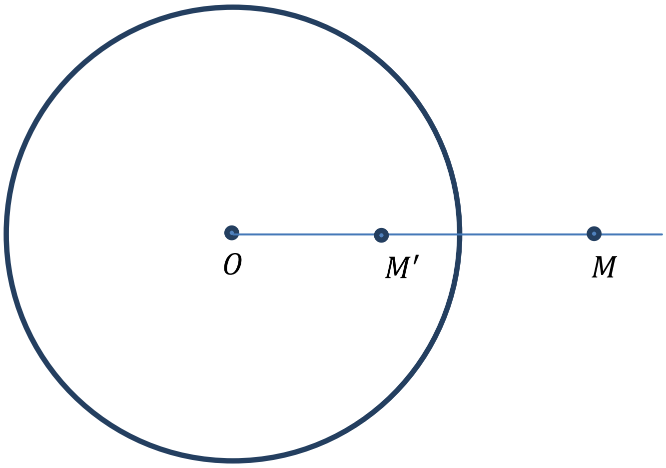


Рис. 14. Инверсия

Преобразование, которое ставит в соответствие точки М точку М$'$ и наоборот называются инверсией.

Очевидно, что если точка М принадлежит окружности, то и ее образ будет совпадать с точкой М.

$$|OM| = |OM'| = r$$

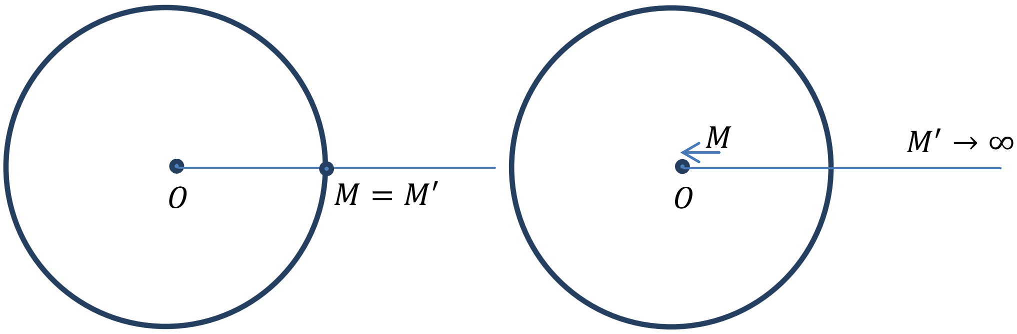


Рис. 15. Инвариант и бесконечность

Это означает, что все точки окружности являются неподвижными и сама окружность является инвариантом преобразования инверсии. Таким образом, точки, лежащие внутри окружности преобразуются в точки, лежащие вне окружности и наоборот, точки лежащие вне окружности, имеют своими образами точки, принадлежащие окружности.

Если точка M будет располагаться бесконечно близко к центру окружности O, то ее образ, точка M' будет бесконечно удаленной точкой луча OM. Следовательно, образом точки O можно считать бесконечно удаленную точку плоскости и наоборот.

Также очевидно, что если применить преобразование инверсии два раза, то

$$\mathrm{OM}'' = \mathrm{OM}$$

и точки M'' и M совпадают, тем самым справедливо утверждение: дважды последовательно выполненная одинаковая инверсия означает тождественное преобразование или, говоря иначе, при инверсии точки M и M' переходят друг в друга.

Приведем несколько основных свойств инверсии.

– Если инверсия переводит точки M и N в точки M' и N' соответственно, то треугольники OMN и $OM'N'$ подобны.

Действительно, по определению,

$$|OM| \cdot |OM'| = |ON| \cdot |ON'| = r^2$$

Это означает, что

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|ON'|}{|OM'|}$$

и треугольники OMN и $OM'N'$ с общим углом O подобны.

– При инверсии любая прямая, проходящая через инверсии O переходит сама в себя. Это утверждение является очевидным следствием определения инверсии.

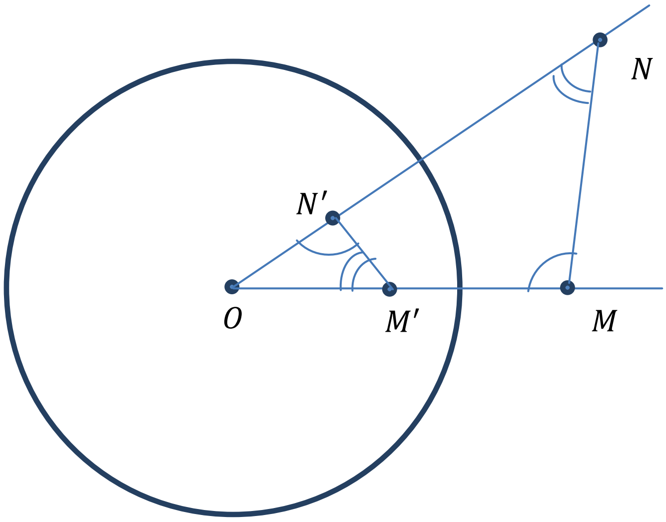


Рис. 16. Подобие при нверсии

– При инверсии прямая, которая не проходит через центр инверсии O, преобразуется в окружность, проходящую через O. Действительно, проведем из точки O прямую OM, перпендикулярно l. Теперь возьмем на прямой l, другую точку N, и найдем ее образ N'. Тогда:

$$\widehat{ON'M'} = \widehat{OMN} = \frac{\pi}{2}$$

Как известно, множество всех точек N', таких что, угол $ON'M'$ прямой, представляет собой окружность, построенную на отрезке OM', как на диаметре. Это доказывает, что указанная окружность будет образом прямой l при инверсии.

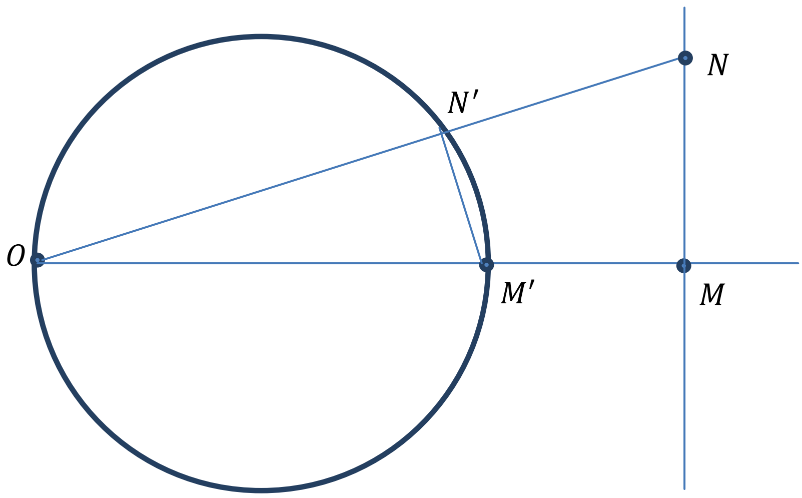


Рис. 17. Инверсия прямой

Можно показать обратное, что каждой точке на построенной окружности соответствует точка на прямой l.

Соответственно, верно следующее свойство.

– При инверсии окружность, проходящая через центр инверсии O, преобразуется в прямую l, не проходящую через центр инверсии, точку O.

Заметим, что последние два свойства позволяют построить образы прямой и окружности с помощью циркуля и линейки.

Для построения образа окружности, которая не проходит через центр инверсии, точку O, необходимо провести луч OO_1, который пересекает окружность по диаметру MN.

Затем, строим образы M' и N' полученных точек M и N.

На этих точках, как на диаметре $M'N'$, строим окружность, которая и будет образом исходной окружность при заданном преобразовании инверсии.

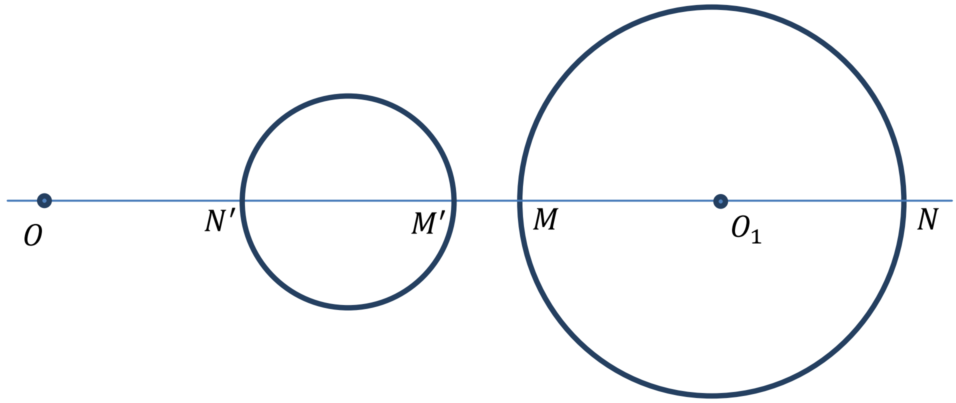


Рис. 18. Образ окружности

Для построения образа окружности, которая проходит через центр инверсии, необходимо провести луч OO_1, который пересекает окружность по диаметру OM.

Затем, строим образ точки M и прямую, проходящую через M' перпендикулярно OA. Эта прямая l и будет образом заданной окружности.

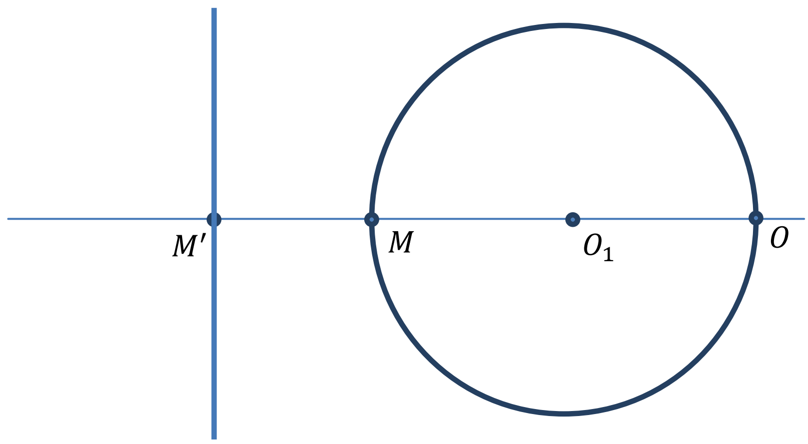


Рис. 19. Прямая – образ окружности

В двух частных случаях, образ можно построить проще:

- если заданная окружность, проходящая через центр инверсии, точку O, и пересекаются с окружностью инверсии в двух точках K и N, то образом заданной окружности будет прямая KN, проходящая через их общие точки,

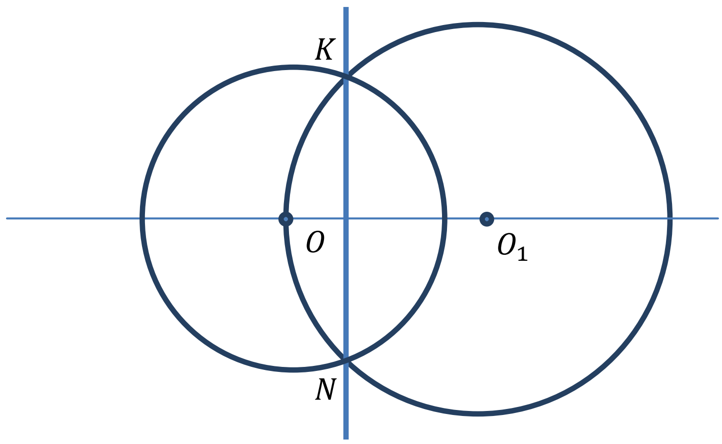


Рис. 20. Две общие точки

- если заданная окружность, проходящая через центр инверсии, точку O, касается окружности инверсии в точке K, то общая касательная двух окружностей в точке K и будет образом заданной окружности в результате преобразования инверсии.

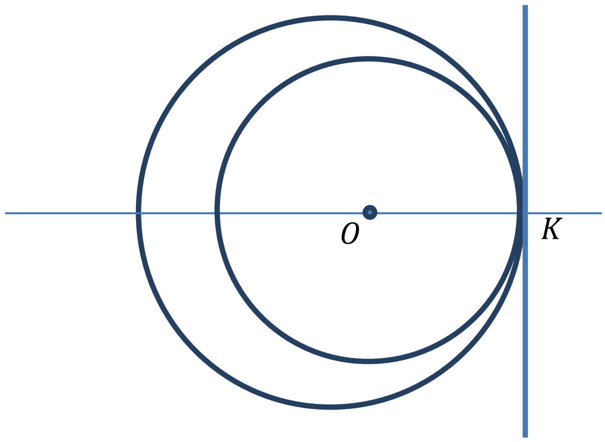


Рис. 21. Одна общая точка

– В результате инверсии, окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, также не проходящую через центр инверсии.

Действительно, проведем прямую OO_1, которая пересекает окружность в точках M и N.

Пусть M' и N' - образы точек M и N.

$$|OM| \cdot |OM'| = |ON| \cdot |ON'| = r^2$$

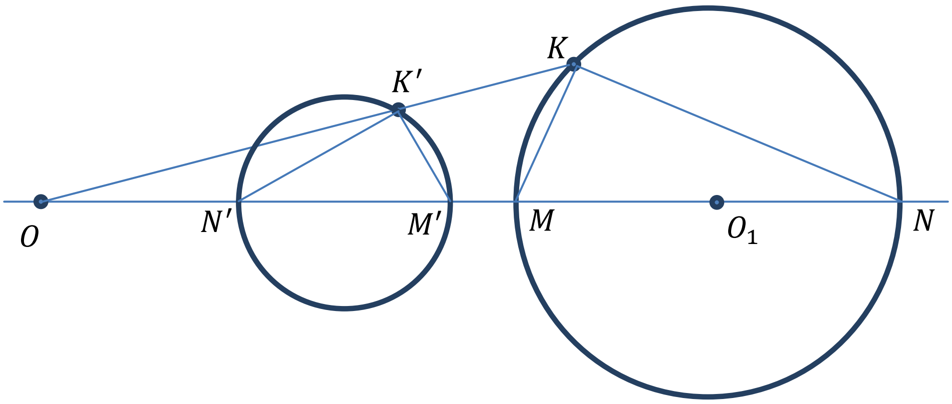


Рис. 22. Инверсия окружности

Возьмем на окружности произвольную точку K и найдем ее образ при инверсии, точку K'.

По первому свойству

$$\widehat{OM'K'} = \widehat{OKM}, \qquad \widehat{ON'K'} = \widehat{ONK}$$

Вычитая из второго равенства первое получим

$$\widehat{M'K'N'} = \widehat{MKN} = \frac{\pi}{2}$$

Это означает, что все множество точек K' представляет собой окружность, построенную на отрезке $M'N'$, как на диаметре.

Аналогично, можно показать, что образом произвольной точки K' на окружности диаметром $M'N'$ будет точка K, принадлежащая окружности диаметром MN.

Это означает, что обе построенные окружности являются образами друг друга.

– Угол между двумя прямыми при инверсии равен углу между их образами.

Рассмотрим различные варианты расположения прямых.

- Если прямые l_1 и l_2 проходят через центр инверсии, точку O, то их образы совпадают с самими прямыми и, соответственно, угол α между прямыми и их образами сохраняется.

$$l_1' = l_1, \qquad l_2' = l_2$$

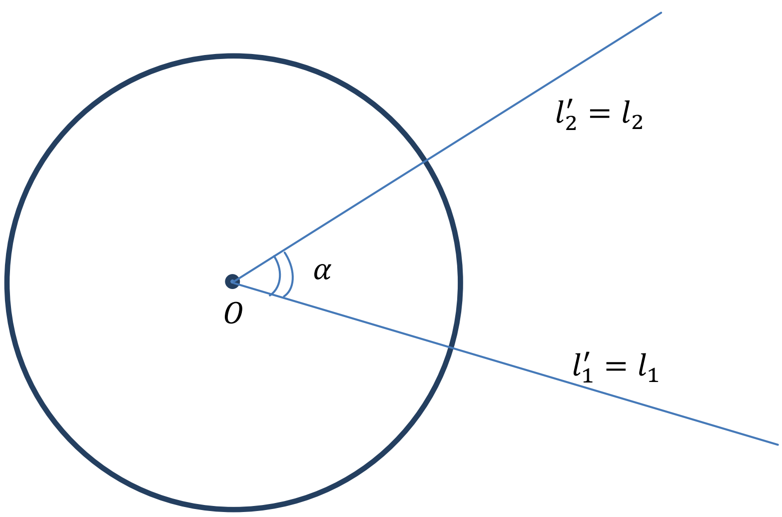


Рис. 23. Обе прямые – инварианты

- Если только одна из прямых l_1 проходит через центр инверсии, то и образом этой прямой будет сама прямая l_1.

$$l_1' = l_1$$

Образом прямой l_2, в этом случае, будет окружность, проходящая через O, причем, касательная n_2 к этой окружности в точке O, параллельна самой прямой l_2.

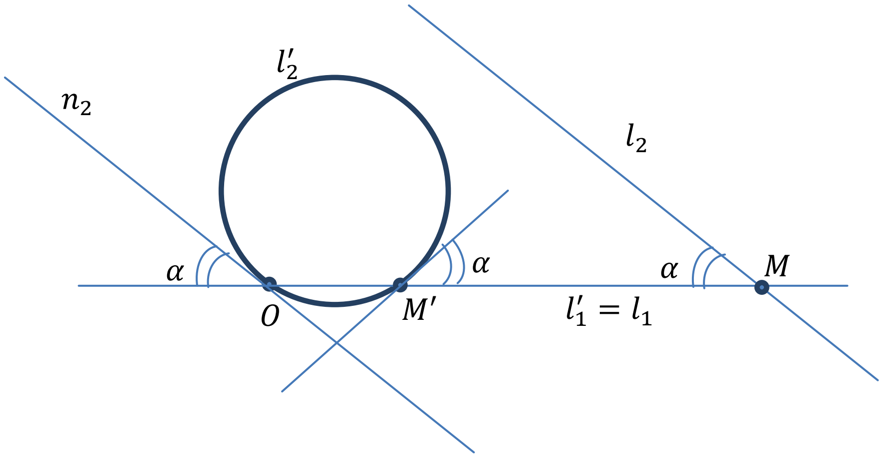


Рис. 24. Одна прямая – инвариант

Очевидно, что и в этом случае, угол между исходными прямыми и их образами (угол между $l_1{}'$ и $l_2{}'$ или угол между l_1 и n_2) сохранится.

Заметим, что если образ точки M пересечения прямых l_1 и l_2 есть точка M', то она принадлежит и окружности $l_2{}'$ и прямой l_1. Таким образом, прямая l_1 пересекает окружность в двух точках O и M', и, следовательно, касательные в этих точках к окружности $l_2{}'$ составляют один и тот же угол с $l_1{}' = l_1$.

- В случае, когда ни одна из прямых l_1 и l_2 не проходит через центр инверсии доказательство утверждения аналогично.

– Угол между двумя окружностями при инверсии равен углу между их образами.

В качестве следствия двух последних свойств можно сформулировать следующее утверждение.

– Угол образованный прямой и окружностью, не меняется при преобразовании инверсии.

Последние приведенные свойства указывают на то, что угол между изначальными линиями и их образами при инверсии не меняются. Это означает, что преобразование инверсии является конформным отображением.

В данном параграфе были сформулированы свойства всех основных преобразований плоскости: движения, гомотетии и инверсии.

Приведенная здесь информация вполне могут быть использованы в качестве вводных занятий при проведении элективных занятий в процессе изучения планиметрии, геометрии.

§3. Анализ применения инверсии как метода решения геометрических задач в школьных учебниках

Для начала сравним стандарты и программы базового и профильного уровней применительно к изучению геометрии и, в частности, преобразования инверсии.

Если сравнить стандарты базового и профильного уровней [22], то можно отметить, что различия содержания, обязательных умений учащихся обусловлены различием целей профильного и базового уровня обучения математике.

Базовый уровень

Целью обучения на базовом уровне является

- создание у учащихся понимания того, что математика является инструментом для изучения окружающего мира, происходящих процессов, наблюдаемых явлений,

- формирование навыков по работе с учебным материалом и корректной формулировке своих мыслей,

- развитие интуиции, способностей к построению логических связей, к доказательству утверждений, использованию терминологии и математической символики.

При изучении геометрии ставится цель:

- сформировать умения по описанию окружающих предметов на языке геометрии,

- развить пространственное воображение, умения к изображению плоских и пространственных объектов,

- научить геометрическим построениям, систематизировать знания о свойствах объектов и фигур,

- развить навыки по использованию инструментов алгебры при решении задач по планиметрии, стереометрии.

Профильный уровень.

В дополнение к базовому уровню, на профильном уровне обучения:

- формируется понимание в необходимости проведения доказательств и дедуктивно-логических обоснований при проведении математических преобразований,

- формируется логика основных понятий по главным разделам курса геометрии, математики, основных аксиом, теорем, формул и навыки их применять,

- вырабатываются умения по проведению доказательств и нахождению решений нестандартных задач и нахождению нестандартных решений для задач повышенной сложности,

- формируются умения распознавать в реальном мире геометрические фигуры и применять свойства и постулаты из геометрии для решения задач с практическим содержанием.

На базовом уровне от учащихся требуется знать определение инверсии, основных ее свойств, уметь строить образы при инверсии для элементарных линий (прямых, окружностей). Помимо этого, на профильном уровне требуется:

- знать основные классические задачи на инверсию, уметь проводить доказательства,

- иметь навыки по решению задач на построение с использованием преобразования инверсии,

- уметь строить композиции из нескольких преобразований, позволяющих построить оптимальное решение поставленной задачи.

Содержание материала по теме «Инверсия» на базовом и профильном уровне различаются глубиной и объемом изучения материала. Следует заметить, что изучение преобразования инверсии не предусмотрено стандартной базовой программой геометрии. Как правило, инверсию изучают на дополнительных занятиях, в рамках элективных курсов, при углубленном изучении математики и в профильной школе.

Рассмотрим несколько учебников, учебных пособий, задачников, в которых уделено внимание изучению преобразования инверсии, а также теоретический и практический аспект изложения материала.

Название: Геометрия. Учебник для 9 класса с углубленным изучением математики/ Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.

Теоретический аспект.

В данном учебнике дается классическое определение инверсии, приведена ее аналитическая форма, основные свойства. Для наглядности преобразования приводится механизм работы инверсора.

Практический аспект.

Приведены задачи с учетом уровневой дифференциации, задачи, требующие изображения, доказательства, исследования, построения. Помимо этого, предлагается задача олимпиадного характера, весьма полезная для внеклассовой работы.

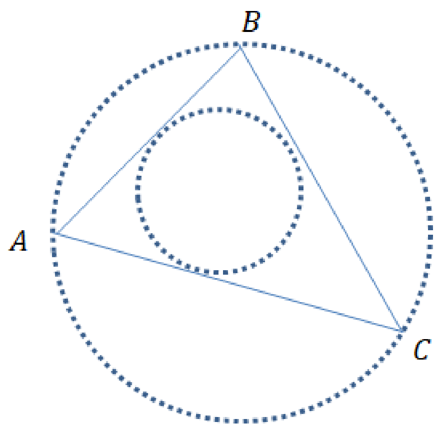


Рис. 25. Задача на доказательство

Название: Дорофеев С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах: Учебное пособие.

Теоретический аспект.

В данном пособии приведены основные положения теории преобразований, не только плоскости, но и пространства. Изложение материала представлено на доступном для учащихся языке.

В дополнение к стандартному материалу рассмотрены свойства скользящего и поворотного отражения, винтового движения. Также, достаточно подробно рассмотрены свойства инверсии в пространстве.

Практический аспект.

Приведены задачи с учетом уровневой дифференциации, задачи, требующие изображения, доказательства, исследования, построения.

В пособие решено большое количество задач планиметрии общего характера, требующих применение преобразования инверсии для решения:

Произвольная точка M окружности, описанной около правильного треугольника ABC, соединена с его вершинами. Доказать, что один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

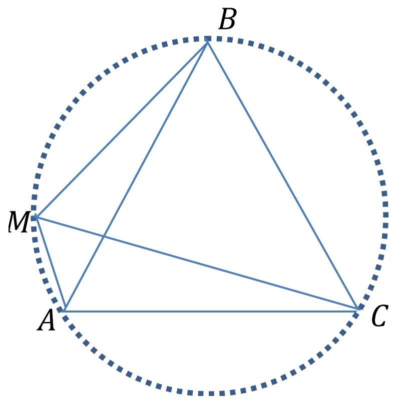


Рис. 26. Точка на окружности

Название: Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов.

Теоретический аспект.

Данное учебное пособие содержит теоретический материал по стереометрии и, частично, по планиметрии в рамках курса средней школы, в том числе, раздел, посвященный инверсии. Пособие рассчитано не только для учащихся, но будет полезно и для преподавателей в качестве справочного материала.

Практический аспект.

Практический материал содержит большое количество подробно разобранных задач, в том числе, задачи, которые предлагались на вступительных экзаменах разного уровня сложности. Пример задачи из стереометрии:

В результате какого преобразования тетраэдр DABC отображается на себя в случаях если:

- $DB = DC = AB = AC$
- $DB = DC = AB = AC$, и $DA = BC$
- $DA = BC, DB = AC, DC = AB$

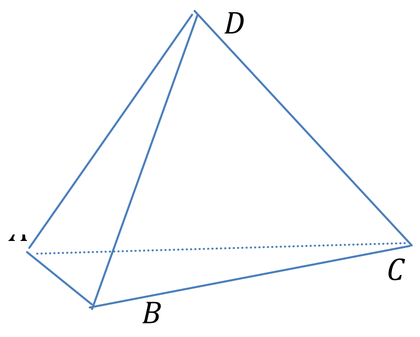


Рис. 27. Преобразования тетраэдра

Название: Прасолов В. В. Задачи по планиметрии.

Теоретический аспект.

В данном сборнике в подробном виде представлены задачи по всем разделам планиметрии, в том числе по преобразованиям плоскости, включая инверсию. Приведены решения, разъясняющие теоретический материал.

Практический аспект.

В сборнике в подробном виде представлены задачи практически по всем видам инверсий, на построение окружностей, на построение одним циркулем, на цепочки окружностей и на геометрическое место точек.

Можно выделить нестандартные задачи следующего плана:

Постройте только одним циркулем окружность, в которую переходит данная прямая l при инверсии относительно данной окружности с центром в точке O.

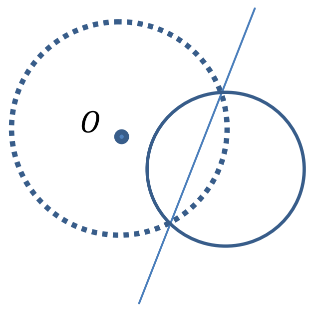


Рис. 28. Инверсия прямой

Название: Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости.

Теоретический аспект.

Одна из самых фундаментальных работ, посвященная теории и практике конструктивной геометрии. Рассматривается практически вся проблематика задач на построение, в том числе, задачи, основанные на свойствах преобразования инверсии.

Практический аспект.

В сборнике в подробном виде представлены задачи практически по всем видам инверсий, на построение окружностей. Помимо теоретической части в работе в познавательной форме предполагается целый ряд задач конструктивной геометрии, вполне доступный для базового школьного курса.

Большой комплекс задач на построение позволяет обучить практически всех универсальным методам в планиметрии. Пример задачи:

Через данную точку M провести окружность, пересекающую две данные прямые l_1 и l_2 под данными углами α и β.

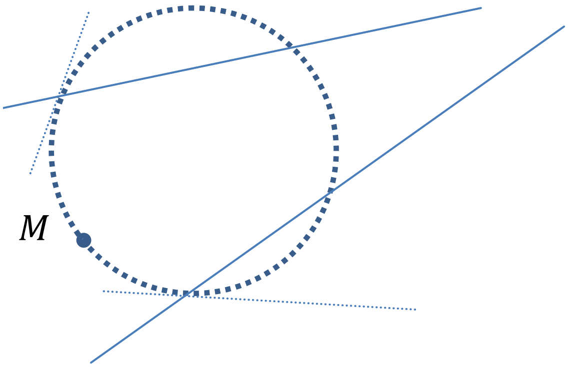


Рис. 29. Окружность и две прямые

Проанализируем далее изучение темы «Методика обучения старшеклассников решению геометрических задач с применением инверсии» на примере ряда научно-педагогических работ.

Тема инверсии не является центральной в процессе обучения учащихся планиметрии, геометрии, чем и обусловлена недостаточная внимательность к методике ее преподавания в базовом курсе геометрии в научно-педагогической литературе.

Название: Бакельман И. Я. Инверсия.

Теоретический аспект.

Одна из самых фундаментальных работ, посвященная теории и практике конструктивной геометрии. Рассматривается практически вся проблематика задач на построение, в том числе, задачи, основанные на свойствах преобразования инверсии.

Практический аспект.

С практической стороны в работе детально разобрано большое количество задач, по всем подразделам темы. Представляется интересным способ доказательства теоремы Птолемея:

Во всяком вписанном четырехугольнике со сторонами a, b, c, d и диагоналями d_1 и d_2 сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей: $a \cdot c + b \cdot d = d_1 \cdot d_2$.

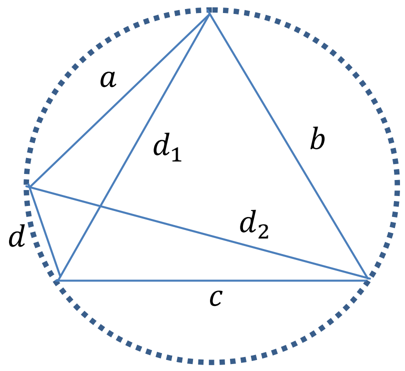


Рис. 30. К теореме Птолемея

Название: Жижилкин И.Д. Инверсия.

Теоретический аспект. Одна из работ, в которой в наиболее полном и стройном виде сформулированы основы темы «инверсия» на доступном для учащихся языке. Приведены свойства других преобразований плоскости.

Практический аспект. В работе подробно разобрано большое количество классических задач, стереографическая проекция, теорема Понселе. В большом количестве представлены задачи на доказательство.

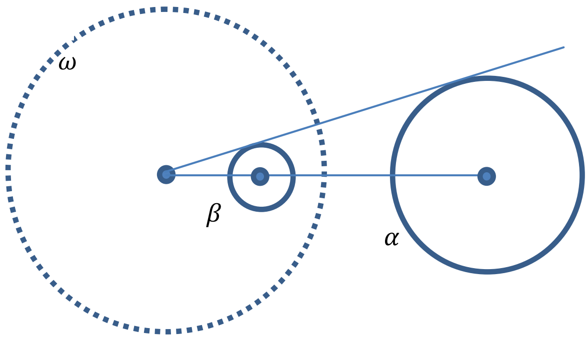


Рис. 31. Соосность окружностей

В качестве типичного примера приведем задачу:

Известно, что окружность α при инверсии относительно окружности и переходит в окружность β. Докажите, что окружности α, β и ω соосные.

Название: Заславский А. А. Геометрические преобразования.

Теоретический аспект.

В работе изложены элементы теории преобразований. В том числе, рассмотрены аффинные и круговые преобразования и их приложения к геометрии Лобачевского

Практический аспект.

Разобран целый ряд нестандартных задач. В качестве полезного примера приведем задачу о нахождении требуемого преобразования инверсии:

Построить окружность, проходящую через данную точку и перпендикулярную двум данным окружностям.

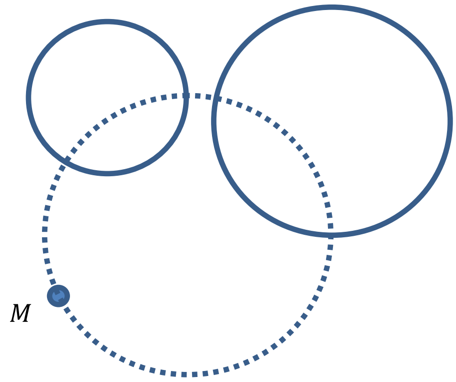


Рис. 32. Перпендикулярность окружностей

Название: Каюмов О.Р. Преобразования плоскости и их применение к решению задач планиметрии.

Теоретический аспект.

В работе в систематизированном виде сформулированы все основные преобразования плоскости, включая инверсию. Сделан акцент на классификацию движений, подобий, и на способы применения суперпозиции преобразований.

Приведена теория преобразований в комплексном виде.

Практический аспект.

Рассмотрены конкретные примеры, которые в наглядном виде иллюстрируют возможности инверсии, как части композиции преобразований для решения задач.

Название: Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов.

Теоретический аспект.

В работе в систематизированном виде сформулированы все основные преобразования плоскости, включая инверсию. Сделан акцент на классификацию движений, подобий, и на способы применения суперпозиции преобразований.

Этот труд представляет собой перевод крупным американских математиков. В книге живым языком изложены элементарные понятия их связь другими разделами естествознания и техникой. Книга написана живым языком, на доступном широкому кругу читателей языке, и будет интересна, в том числе, для преподавания геометрии в качестве элективного курса.

Практический аспект.

В качестве интересного практического приложения можно рассмотреть задачи следующего плана:

Найти центр данной окружности с помощью одного лишь циркуля.

Выводы по первой главе

Проанализированный материал по теме «Инверсия» не содержит принципиально новых научных результатов и говорит о том, что в его основе лежат традиционные подходы к изучению данной темы. Недостающим элементом указанных работ с точки зрения современных подходов к обучению является слабое использование информационно-компьютерных технологий.

Таким образом, сравнительный анализ учебников, учебных пособий и аналогичных материалов по геометрии разных авторов позволяет выявить их преимущества и недостатки.

Анализ практики введения понятия преобразования инверсии при обучении школьников геометрии, планиметрии свидетельствуют о том, что многие направления исследований ориентированы на возможно большее задействование интуиции учащихся и наглядность. Но в рассмотренном материале, лишь частично присутствуют вопросы, посвященные полноценному обучению этой темы в рамках элективных курсов, что и объясняет направление данной работы.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИНВЕРСИИ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§1. Методические особенности применения инверсии к решению задач на построение с помощью циркуля и линейки, на вычисление и доказательство

Перед изучением задач на построение с помощью преобразования инверсии учащимся стоит напомнить об известных из базового курса планиметрии стандартных задачах:

– построить окружность, проходящую через три данные точки,

– построить окружность, касающуюся трех данных прямых,

– построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых,

– построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных пересекающихся прямых,

– построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой,

– построить окружность, касающуюся данной окружности и проходящую через две данные точки,

– построить окружность, касающуюся трех данных окружностей, проходящих через одну общую точку P.

Заметим, что последняя задача является частным случаем задачи Аполлония, и она имеет достаточно простое решение с помощью преобразования инверсии.

Рассмотреть решение этой задачи можно сразу же, после подробного изучения вводной задачи.

В качестве вводной, учащимся можно предложить самостоятельно решить задачу о построении с помощью циркуля и линейки образа точки при заданной известной инверсии с определенным радиусом и центром:

«С помощью циркуля и линейки построить образ A' точки A при инверсии ψ с радиусом r и центром O.»

Приведем вполне доступное для самостоятельного исследования учащимися решение поставленной задачи. Заметим, что в прямоугольном треугольнике ΔMNL с высотой MK выполняется соотношение

$$|MK|^2 = |NK| \cdot |KL|$$

которое сопоставимо с определением инверсии:

$$|OA|' \cdot |OA| = r^2$$

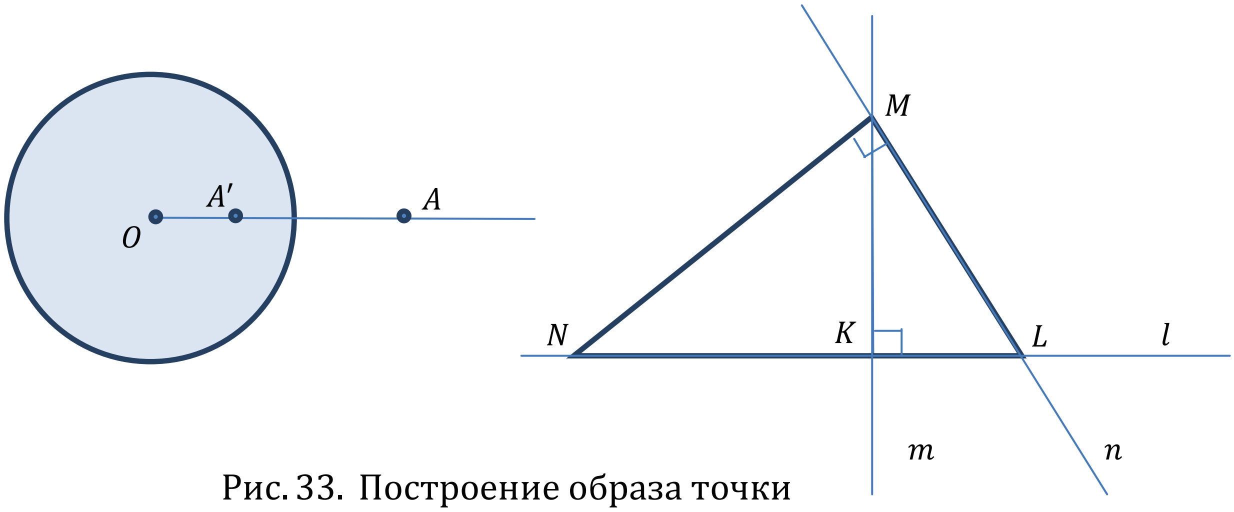


Рис. 33. Построение образа точки

Сравнивая эти соотношения, видно, что если в прямоугольном треугольнике $|MK| = r$ и $|NK| = |OA|$, то тогда

$$|KL| = |OA'|$$

Получаем алгоритм построения:

1. Откладываем на прямой l отрезок.

$$|NK| = |OA|$$

2. Проводим перпендикуляр m к l в точке K.

3. Откладываем вдоль m отрезок

$$|KM| = r.$$

4. Соединяем M с N и проводим перпендикуляр n к NM в точке M.

Здесь и в пункте 2 мы используем уже пройденный учащимися материал по построению перпендикуляров.

5. Обозначим пересечение n с l как L.

6. Отрезок KL будет искомым:

$$|KL| = |OA'|$$

Рассмотрим более сложный пример. Предлагаем учащимся по заданным на рисунке точкам A и B и окружности α с центром в точке O радиуса r построить окружность β, проходящую через A и B, такую, что касательные к α и β в точках их пересечения взаимно перпендикулярны.

Обращаем внимание учащихся, что если принять α за базисную окружность инверсии ψ и построить образ A' точки A, то окружность, проходящая через A, A' и B будет искомой окружностью β.

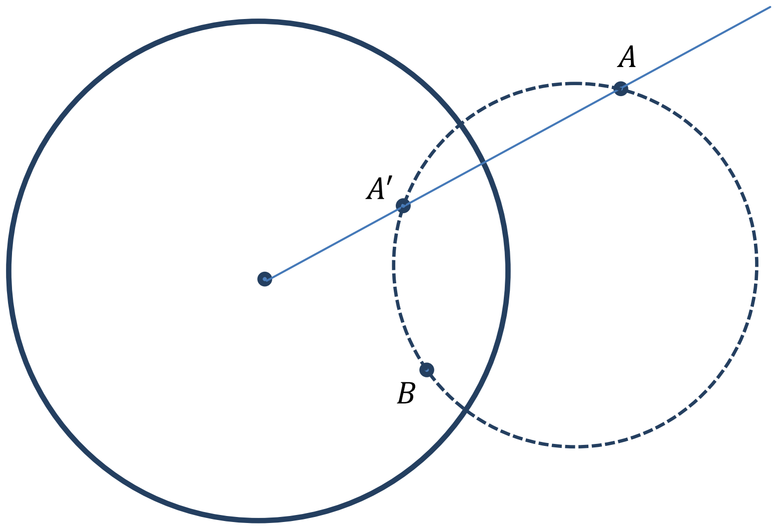


Рис. 34. Перпендикулярность окружностей

Действительно, в этом случае при инверсии относительно α окружность β перейдет сама в себя, $\psi(\beta) = \beta$ т. к. образ A' и сама точка A принадлежат β. Учитывая, что углы между линиями при инверсии не меняются, то окружность β и будет искомой.

Отсюда следует алгоритм построения:

1. Строим $A' = \psi(A)$.

2. Строим искомую окружность β, проходящую через A, A' и B.

Далее, задачи на построение с использованием метода инверсии условно можно подразделить на три группы.

К первой группе относятся задачи, в которых центр и радиус базовой окружности преобразования предопределены логикой задачи. Полученные образы в результате инверсии представляют собой геометрическое место точек для решаемой задачи. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Дана точка K и две прямые AB и AC. Требуется провести секущую KXY так, что:

$$KX \cdot KY = a^2$$

где $a -$ известное числовое значение.

Решение.

Учащимся предлагается сформулировать свойство инверсии об образе прямой, не проходящей через центр инверсии.

Идея решения задачи основана на применении инверсии ψ с радиусом $r = a$ и центром K, при которой образом прямой AB будет окружность ω.

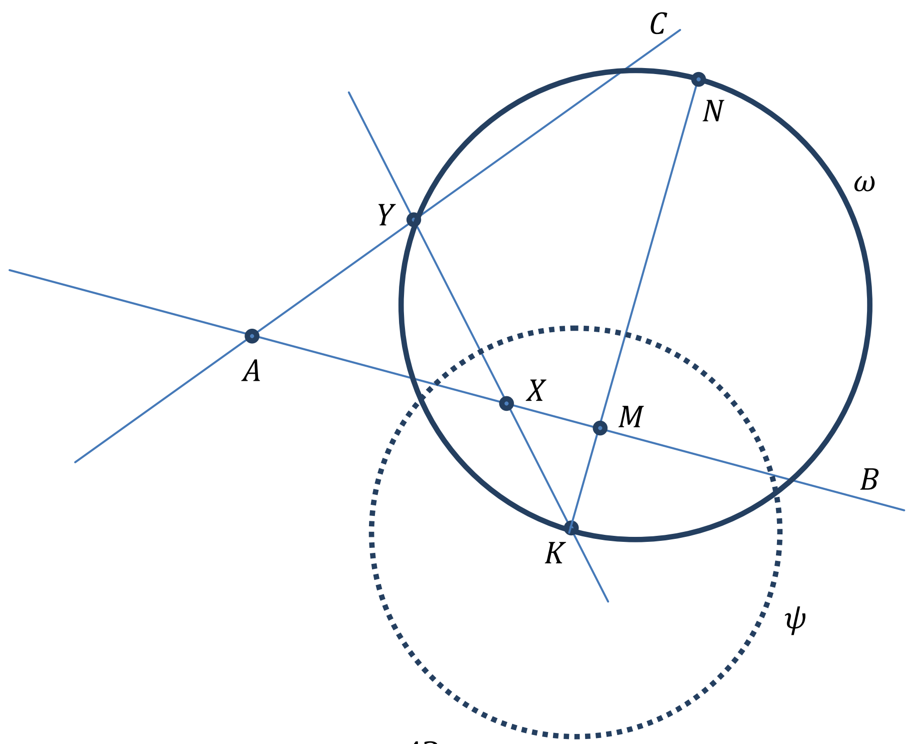


Рис. 35. Построение секущей

Учащиеся приходят к выводу, что для точки Y:

$$Y = \omega \cap AC$$

будет справедливо соотношение:

$$KX \cdot KY = r^2 = a^2$$

Далее, опуская из точки K перпендикуляр KM к прямой AB, учащиеся строят образ N точки M относительно ψ. Продолжая рассуждения, если построить окружность ω на отрезке KN, как на диаметре, то эта окружность будет образом прямой AB при инверсии ψ. Следовательно, можем найти точку $Y = \omega \cap AC$.

Соединяем точки K и Y и находим пересечение X с прямой AB:

$$X = KY \cap AB$$

Учащиеся приходят к выводу, что по построению, точка Y является образом X при инверсии ψ:

$$KX \cdot KY = r^2 = a^2$$

и, следовательно, это и есть искомые точки.

Ко второй группе относятся задачи, в которых центр инверсии, как правило, еще следует подобрать, исходя из исследования поставленной задачи. Часто, инверсии (или нескольким инверсиям) подвергается часть заданных или искомых в задаче фигур. Проиллюстрируем далее такого типа задачи.

Задача 2.

Даны три точка A, B, C. Через точку B провести прямую так, чтобы расстояние AX и CY от точек A и C до этой прямой удовлетворяло соотношению:

$$AX^2 - CY^2 = a^2$$

где $a -$ известное числовое значение.

Решение.

Выражение в левой части является разностью квадратов, что наводит учащихся на мысль о сходстве выражения

$$(AX - CY)(AX + CY) = a^2$$

с аналитической записью преобразования инверсии. Тем самым, учащихся подталкиваем к изображению отрезков:

$$AK = AX - XK = AX - CY$$

$$AN = AX + XN = AX + CY$$

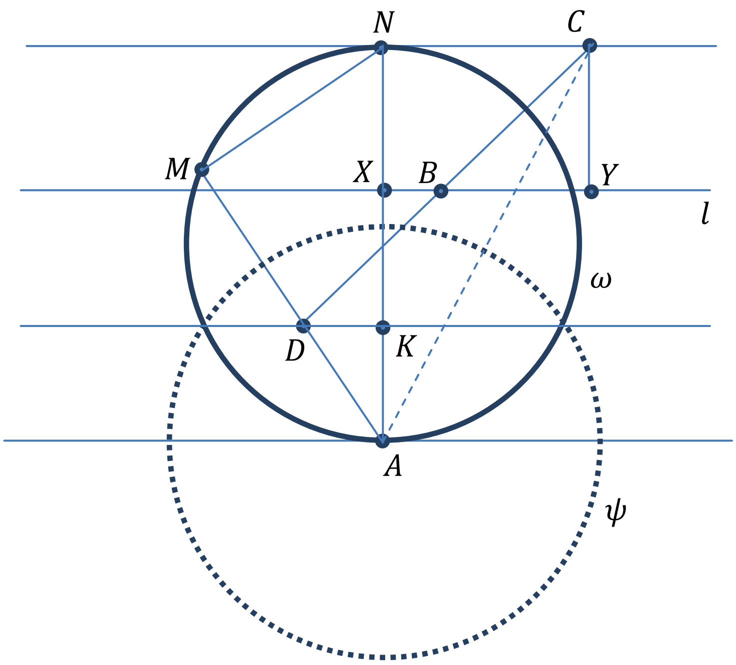


Рис. 36. Построение прямой

Тогда, если прямая l является искомой, то:

$$AK \cdot AN = (AX - CY)(AX + CY) = AX^2 - CY^2 = a^2$$

и точка N является образом точки K при инверсии ψ с центром в точке A и радиусом $r = a$, и окружность ω, построенная на AN как на диаметре, является образом прямой DK:

$$AK \cdot AN = a^2$$

Взяв за основу этот результат, учащиеся самостоятельно строят алгоритм решения задачи.

1. Построим $CD = 2CB$ и точку M — образ точки D при инверсии ψ:

$$AD \cdot AM = a^2$$

2. На отрезке AC, как на диаметре, построим окружность и пересечение этой окружности с перпендикуляром из точки M к AM обозначим через N.

3. Через точку B проводим прямую l, параллельную CN и опускаем перпендикуляры AX и CY к этой прямой.

Тогда по построению:

$$AX^2 - CY^2 = AK \cdot AN = a^2$$

К третьей группе задач относятся задачи, в которых образы при инверсии исходной и искомой фигур позволяют установить гораздо более простые зависимости между элементами задачи. Приведем пример такой задачи.

Задача 3.

Через данную точку проведем окружность, пересекающую данные две окружности α и β под определенными углами.

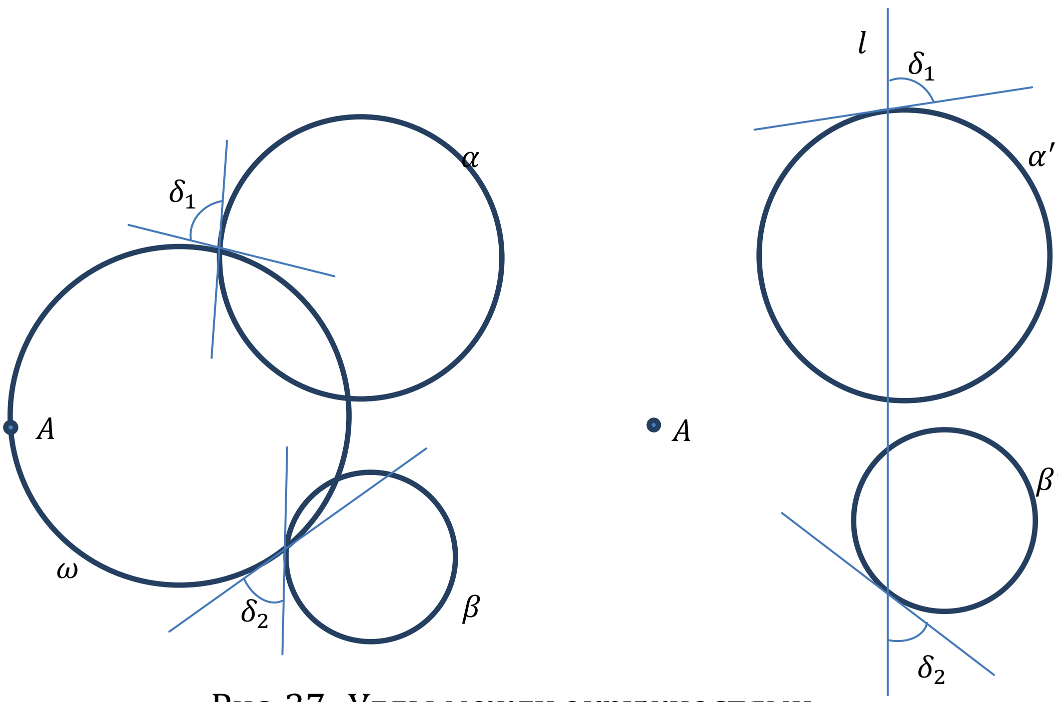


Рис. 37. Углы между окружностями

По условию, искомая окружность ω проходит через точку A. Это наводит учащихся на мысль, что можно воспользоваться свойством инверсии, согласно которому образом ω при инверсии ψ с центром в точке A будет прямая линия, проходящая через A. Возьмем инверсию ψ с произвольным радиусом r. Тогда, образом ω будет прямая l, а образами окружностей α и β будут окружности α' и β' , не проходящие через A. Учитывая конформность инверсии задача сводится к стандартной задачи с построением такой прямой l, которая составляет заданные углы к α' и β'.

Получаем алгоритм решения задачи:

1. Находим образы α' и β' окружностей α и β при инверсии ψ с произвольным радиусом r и центром в точке A.

2. Используя решение известной задачи планиметрии, построим прямую l, которая составляет с α' и β' требуемые углы.

3. Инвертируя l обратно, получим требуемую окружность.

В качестве задачи на доказательство можно привести *теорему Птолемея:*

В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство.

В качестве подсказки предлагаем учащимся, используя свойства инверсии показать, что если на плоскости задана инверсия φ с центром в точке O и радиусом r, и точки M и $N -$ две произвольные точки плоскости, отличные от точки O и бесконечно удаленной точки O_∞.

Тогда

$$M'N' = MN\frac{r^2}{OM \cdot ON^2}$$

где

$$M' = \varphi(M),\;\; N' = \varphi(N).$$

Действительно, используем свойство инверсии о том, что треугольники OMN и $OM'N'$ подобны.

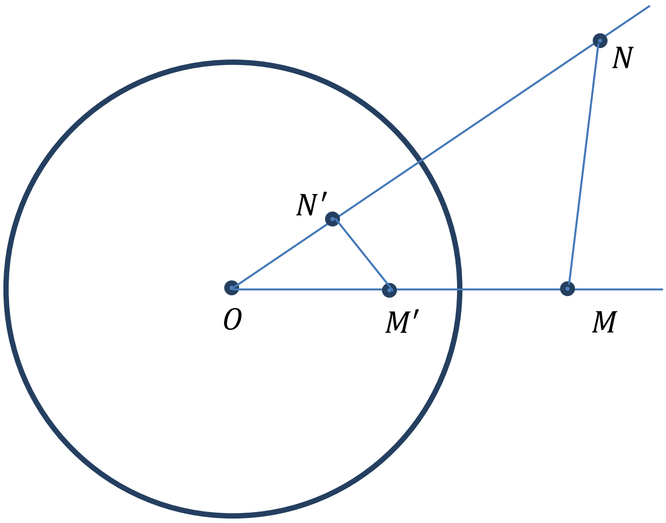


Рис. 38. Подобие при нверсии

Тогда:

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{OM'}{ON}$$

Учитывая, что:

$$OM' = \frac{r^2}{OM'},$$

получаем:

$$M'N' = MN\frac{OM'}{ON} = MN\frac{r^2}{OM \cdot ON}$$

Возьмем теперь вписанный в α четырехугольник ADEF и построим их образы при инверсии относительно окружности φ заведомо большого диаметра с центром в точке A.

Учащимся предлагаем убедиться, что это прямая l и точки D', E', F'. Тогда:

$$D'E' = DE\frac{r^2}{AD \cdot AE}, \qquad E'F' = EF\frac{r^2}{AF \cdot AE}, \qquad D'F' = DF\frac{r^2}{AD \cdot AF}$$

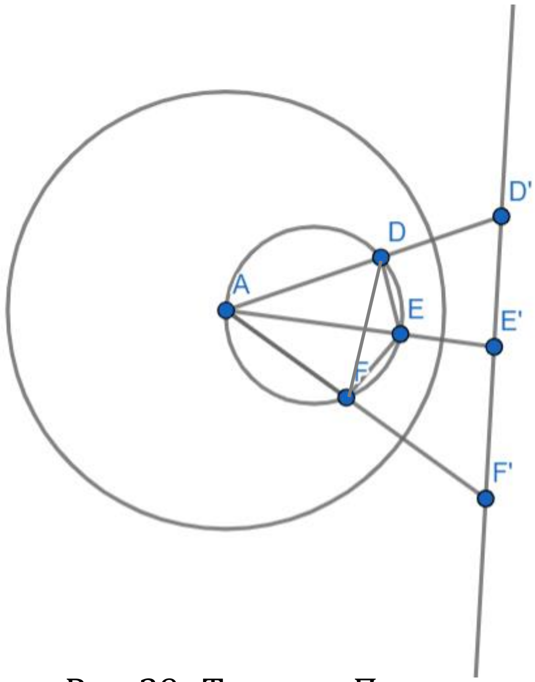


Рис. 39. Теорема Птолемея

Учитывая, что:

$$D'E' + E'F' = D'F', \qquad AE \cdot A'E' = r^2$$

получаем искомое равенство:

$$AE \cdot DF = AF \cdot DE + AD \cdot EF$$

§2. Именные задачи (задача Архимеда, задача о бабочке и т.д.) как основа обучения школьников применению инверсии к решению геометрических задач

Интерес у учащихся при изучении преобразования инверсии вызовут известные именные задачи, которые наглядно иллюстрируют удобство применения инверсии для вычисления и доказательства [42, 46, 47].

Вначале рассматриваем задачу Архимеда о «криволинейном треугольнике», сторонами которого являются дуги окружностей, и который традиционно называют арбелосом (по сходству с сапожным ножом).

Задача Архимеда.

Возьмем точку L, которая принадлежит отрезку KN. Построим по одну сторону от KN три полуокружности на отрезках KL, LN и KN как на диаметрах. Проведем перпендикуляр ML к KN. Этот перпендикуляр делит арбелос на две части:

$$KLM \text{ и } MLN$$

которые ограничены дугами KM, KL и MN, LN соответственно. В задаче требуется показать, что радиусы окружностей вписанных в эти части равны между собой.

В качестве наводящей идеи для решения данной задачи учащимся предлагается построить образы окружностей γ и α относительно окружности ω с центром в точке N и радиусом NM.

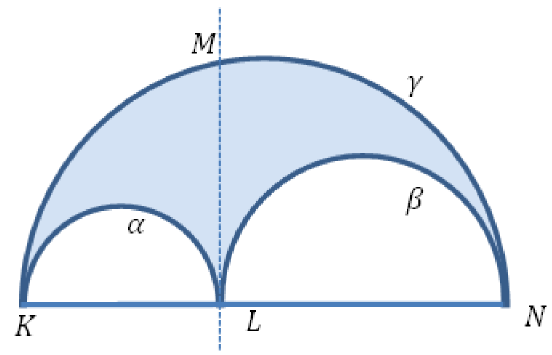


Рис. 40. Арбелос и задача Архимеда

Для начала вычисляются основные расстояния.

$$OK = ON = OM = a + b$$

$$OL = a + b - 2a = b - a$$

$$|ML|^2 = |OM|^2 - |OL|^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$|NM|^2 = |LN|^2 + |ML|^2 = (2b)^2 + 4ab = 4b(a+b)$$

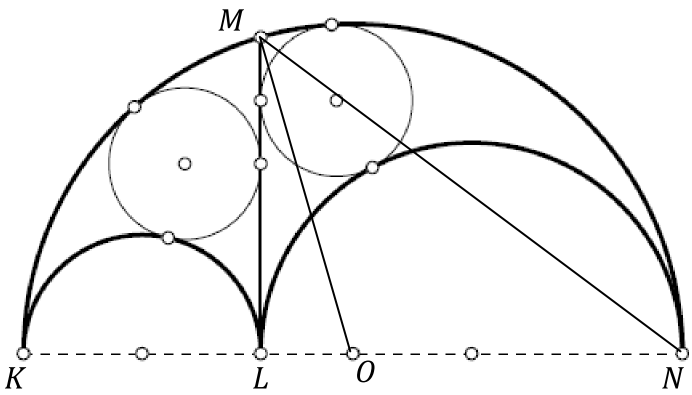


Рис. 41. Арбелос и задача Архимеда

Исходя из этого, образом точки K будет точка L. Действительно:

$$NK \cdot NL = 2(a+b) \cdot 2b = 4b(a+b) =$$
$$= |NM|^2$$

Следовательно, образом окружности γ при такой инверсии будет прямая (ML) и образом окружности β будет прямая (KP), такая что

$$(KP) \perp (KN)$$

Очевидно, что образом окружности φ с радиусом r которая касается окружностей γ и β и прямой (ML) будет окружность φ', которая касается прямых (KP) и (ML).

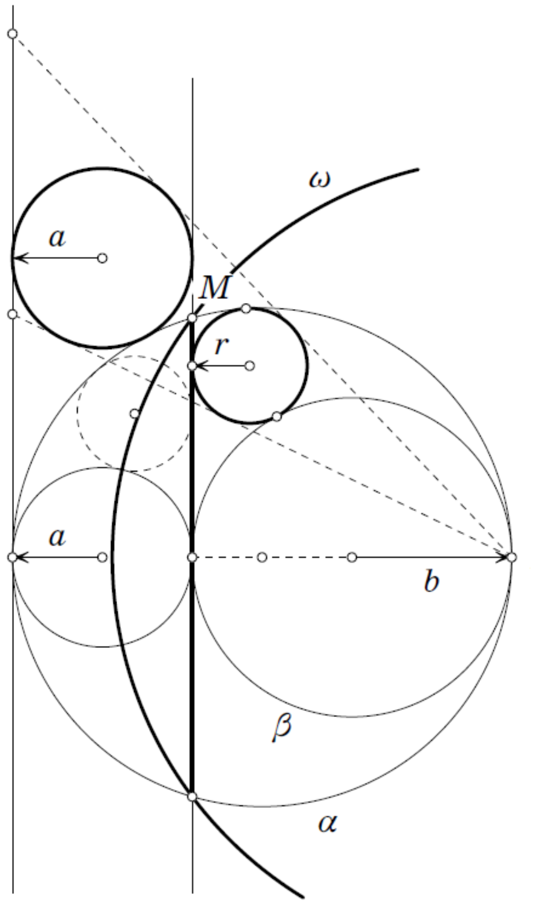


Рис. 42. Арбелос и задача Архимеда

Несложно заметить, что при гомотетии с центром в точке N, переводящей окружность φ в φ', точка M будет переходить в точку K. Это означает, что

$$\frac{r}{a} = \frac{NL}{NK} = \frac{b}{a+b}$$

Отсюда следует, что

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

Аналогично, учащимся предлагается провести рассуждения касательно инверсии относительно окружности ω' с центром в точке K и радиусом KL. При аккуратном выполнении этого задания будет получен результат:

$$\frac{r'}{b} = \frac{KL}{KN} = \frac{a}{a+b}$$

или

$$r' = \frac{ab}{a+b}$$

Как видим, $r' = r$, что и требовалось доказать в задаче Архимеда.

Задача о бабочке.

Учащимся безусловно будет интересно ознакомиться с решением известной задачи о бабочке с помощью преобразования инверсии.

Пусть хорды окружности AC, BD и KN пересекаются в точке M, а прямая KN пересекает прямые AB и CD в точках P и Q соответственно. Если точка M является серединой хорды KM, то $MP = MQ$.

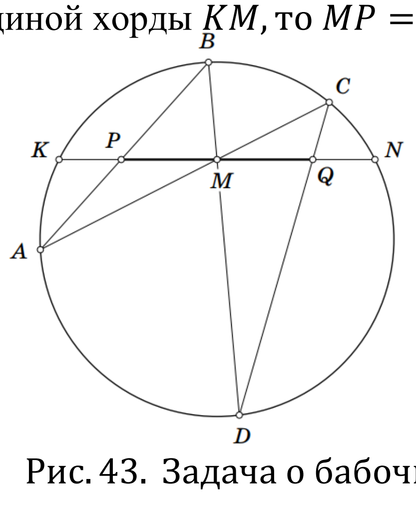


Рис. 43. Задача о бабочке

Возьмем окружность α и произвольную точку O с внешней стороны. Введем понятие «проекции окружности на себя», то есть проведем из точки O секущие к окружности α и для каждой секущей поменяем две точки ее пересечения с окружностью. Две точки, в которых секущие превратились в касательные, останутся на месте, остальные точки разобьются на пары и в каждой паре поменяются местами. Полученное отображение окружности на себя можно называют центральной проекцией окружности на себя.

Полученное отображение обладает следующим интересным свойством.

Утверждение. Пусть при проекции окружности на себя с центром O точки A, B, C, D переходят в точки A', B', C', D', пусть также прямые AB и CD пересекаются в точке M, прямые $A'B'$ и $C'D'$ – в точке M'. Тогда точки O, M, M' лежат на одной прямой.

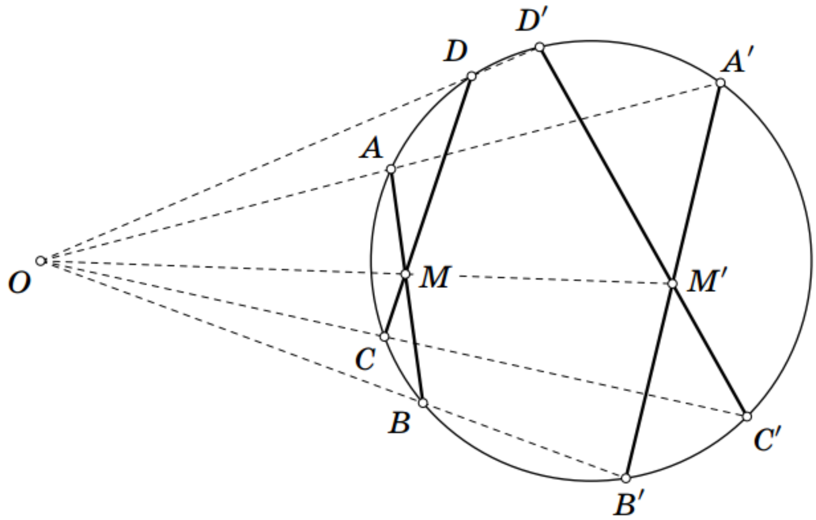


Рис. 44. Вспомогательное утверждение.

Доказать это утверждение легчи, если использовать пространственную инверсию относительно сферы. Будем проецировать на себя не окружность, а сферу. При инверсии пространства окружность переходит в окружность, следовательно, верно следующее утверждение.

Утверждение. При центральной проекции сферы на себя окружность переходит в окружность.

Главным здесь является то обстоятельство, что плоское сечение сферы переходит снова в плоское сечение. Тогда, точки M и M' лежат на прямой пересечения плоскостей OAB и OCD.

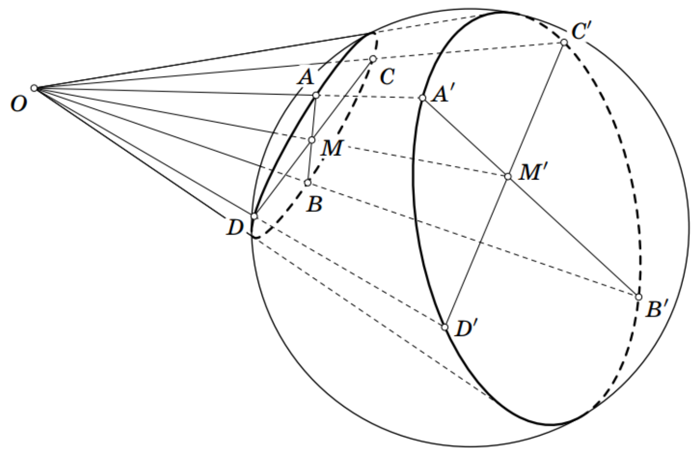


Рис. 45. Инверсия в пространстве

В случае совпадения плоскостей OAB и OCD задача становится «плоской», что позволяет говорить о справедливости рассматриваемого утверждения.

После этого, собственно задаче о бабочке решается достаточно просто.

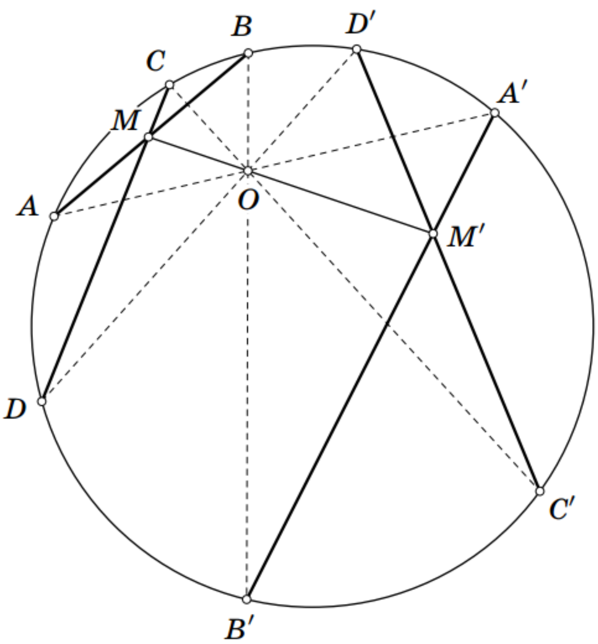


Рис. 46. К решению задачи о бабочке.

Впишем в окружность произвольную «бабочку» $ABB'A'$ с «центральной точкой» P, а затем построить симметричную ей относительно диаметра OP «бабочку» $CDD'C'$.

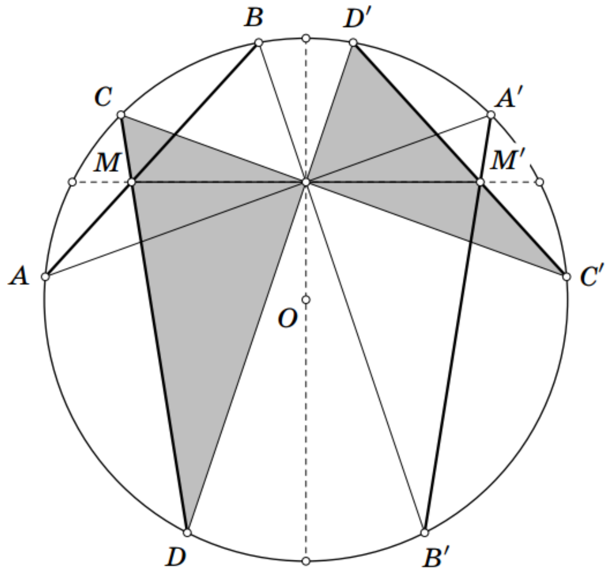


Рис. 47. К решению задачи о бабочке.

Точки M и M' пересечения прямых AB, CD и $A'B', C'D'$ лежат на одной прямой с центром проекции P, а с другой стороны – они симметричны относительно прямой OP. Точка P является при этом серединой соответствующей хорды. Убирая с чертежа одну из «бабочек», получаем утверждение задачи. Учащимся стоит также рассказать о теореме Понселе, которую для стандартного курса занятий можно привести без доказательства.

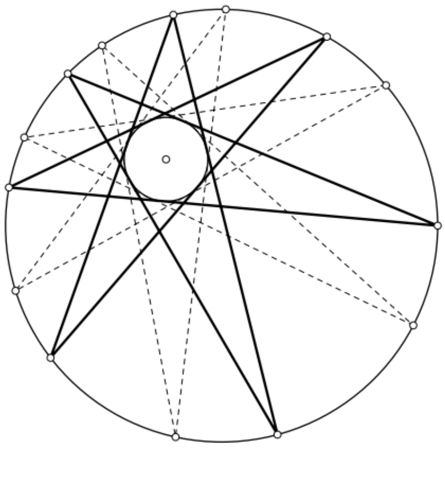


Рис. 48 Теорема Понселе

Рассмотрим две непересекающиеся окружности α и β. Будем строить ломаную $A_1A_2A_3 \ldots$, вершины которой лежат на окружности α, а звенья касаются окружности β.

Может случиться так, что вершина A_n совпадет с вершиной A_1. Тогда у любой аналогичной ломаной $B_1B_2B_3 \ldots$, начинающейся из произвольной точки B_1 окружности α, вершина B_n совпадет с вершиной B_1.

§3. Методика обучения школьников применению инверсии к решению геометрических задач с использованием компьютерных программ

Приведем несколько известных программ с геометрическим уклоном, позволяющих обучать учащихся преобразованию инверсии [29, 30].

Одной из таких программ, позволяющих строить изображения фигур при инверсии, является GeoGebra [41].

Основные характеристики программы:

– Доступна для использования на ПК с операционными системами: Windows, Linux, MacOS,

– Использует язык программирования Java,

– Свободно распространяемое ПО.

– Относится к категории математического (геометрического) ПО.

– Доступна онлайн на сайте https://www.geogebra.org/geometry.

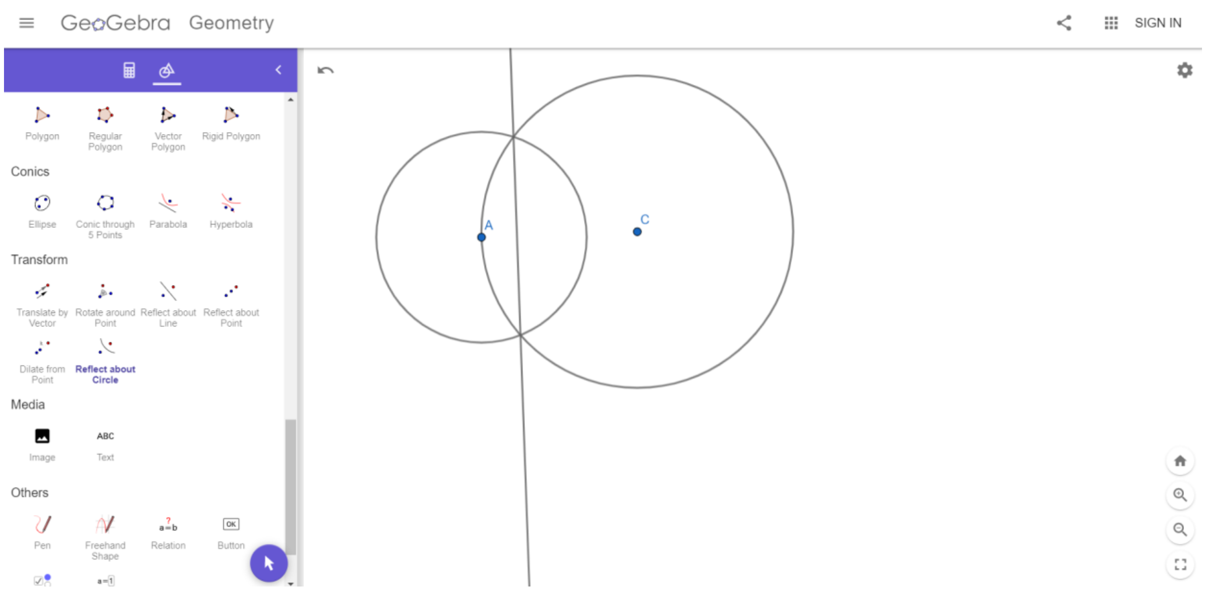


Рис. 49. Фрагмент применения программы GeoGebra при решении задач.

На Рис. 49 изображен фрагмент программы GeoGebra, на котором видна инверсия окружности с центром в точке C относительно окружности с центром в точке A.

Как и было показано ранее, образом окружности с центром в точке C, которая проходит через точку A, при такой инверсии будет прямая линия, проходящая через точки пересечения окружностей.

Другой известной программой для решения геометрических задач является «Живая геометрия» или «The Geometer's Sketchpad» в английской версии [12, 13, 14]. Основные характеристики программы:

– Доступна для использования на ПК с операционными системами: Windows, Linux, MacOS,

– Использует язык программирования Java,

– ПО требует приобретения лицензии,

– Относится к категории математического (геометрического) ПО,

– Доступна на сайте http://sketchpad.keycurriculum.com/.

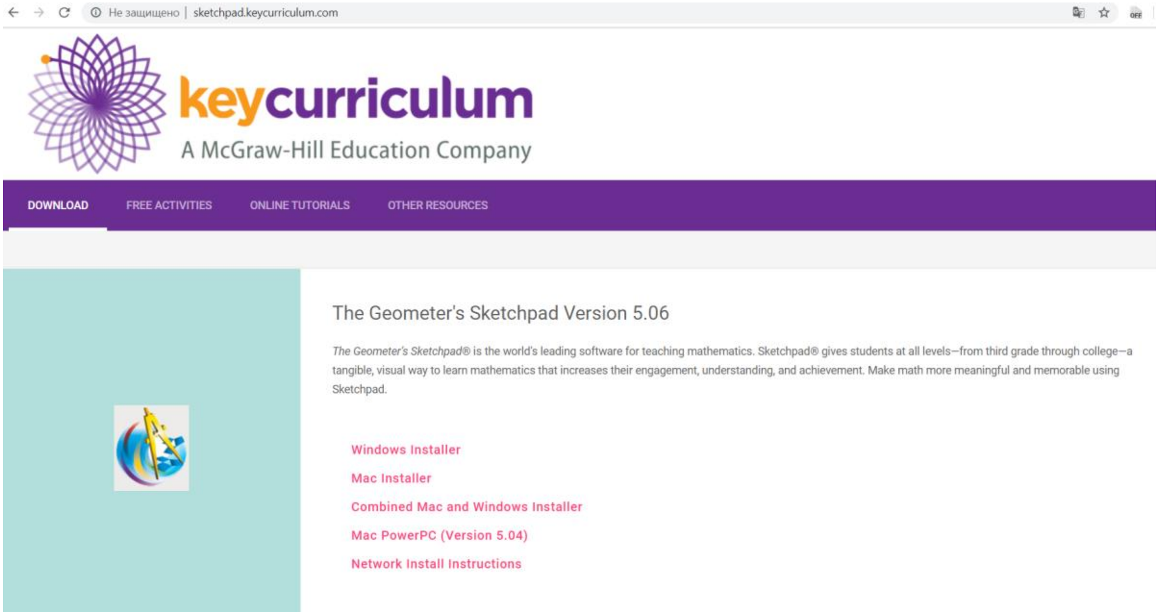


Рис. 50. Фрагмент программы.

Программа (Рис. 50) предоставляет хорошую возможность наглядно изучить преобразование инверсии. В программе присутствуют примеры решения задач. На Рис. 51 показан пример, построенный с помощью программы «The Geometer's Sketchpad», на котором видна инверсия треугольника ABC и ее медиан относительно окружности с центром в точке O . В результате получается криволинейный треугольник KLM с соответствующими медианами.

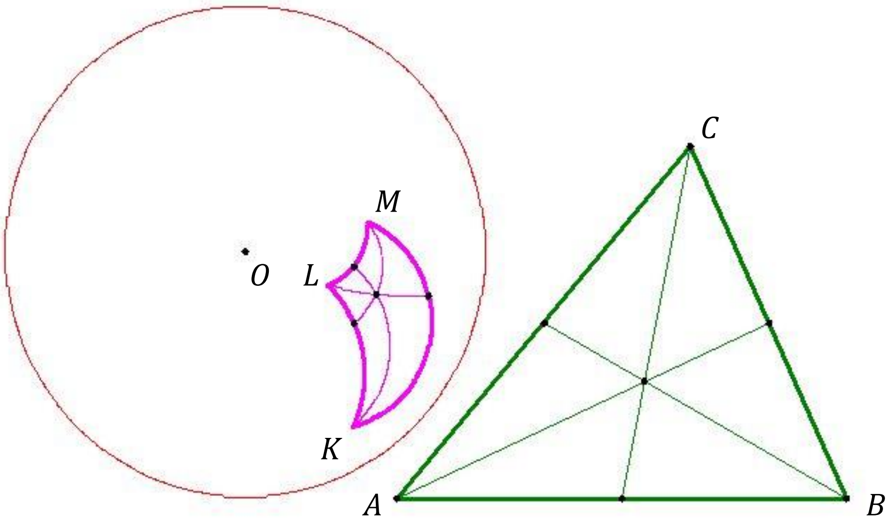


Рис. 51. Пример, построенный с помощью программы «The Geometer's Sketchpad».

Еще одной программой, позволяющей получать фигуры в результате преобразования инверсии, является Wingeom. Основные характеристики программы:

- Доступна для использования на ПК с операционными системами: Windows, Linux, MacOS,
- Использует язык программирования Java,
- ПО не требует приобретения лицензии,
- Относится к категории математического (геометрического) ПО,
- Доступна для скачивания на сайте: https://www.softpedia.com/get/Science-CAD/Wingeom.shtml

Программа позволяет выполнять все виды основных преобразований:

- параллельный перенос; поворот; гомотетия; зеркальная симметрия; инверсия.

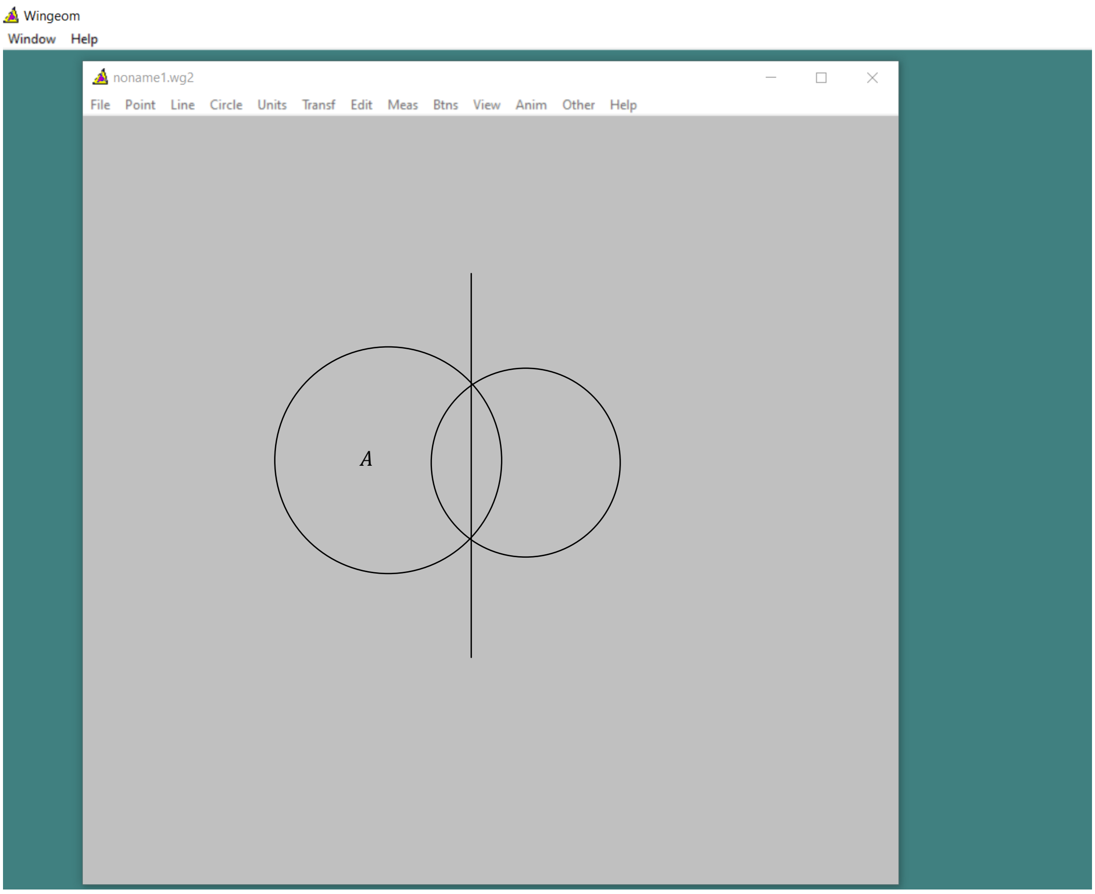


Рис. 52. Фрагмент программы Wingeom.

На Рис. 52 изображен фрагмент программы Wingeom, на котором видна инверсия окружности с центром в точке B относительно окружности с центром в точке A.

Как и было показано ранее, образом окружности с центром в точке B, которая проходит через точку A, при такой инверсии будет прямая линия, проходящая через точки пересечения окружностей.

Основная идея обучения преобразованию инверсии с помощью компьютерных программ сводится к следующему алгоритму, который интуитивно будет понятен учащимся:

– Понятие инверсии и построение изображения точек с различным месторасположением относительно окружности.

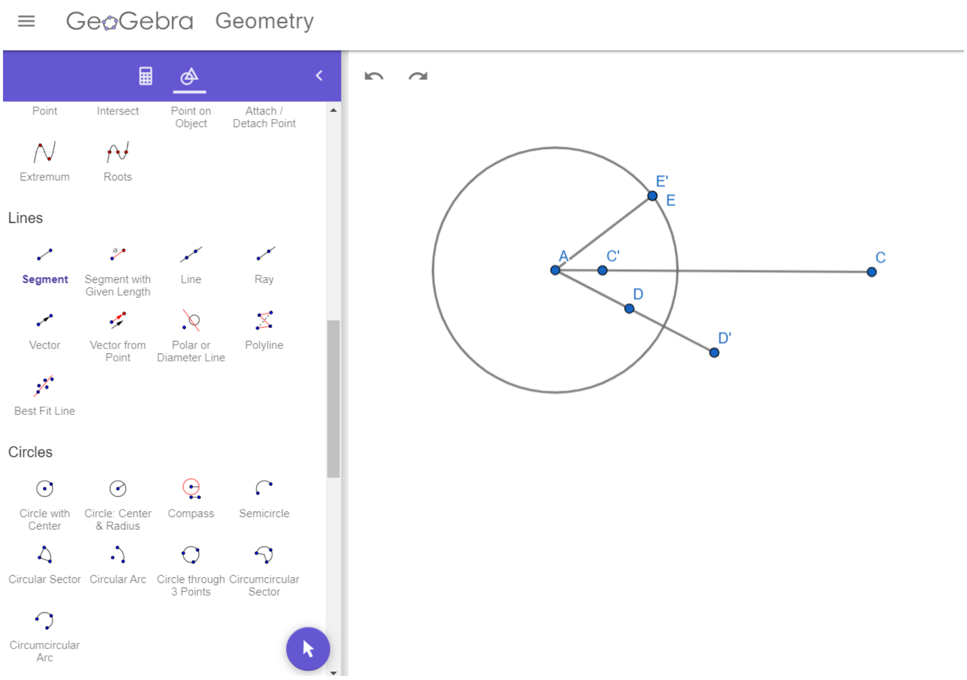


Рис. 53. Фрагмент применения программы GeoGebra при решении задач.

– Проверка основных свойств инверсии:

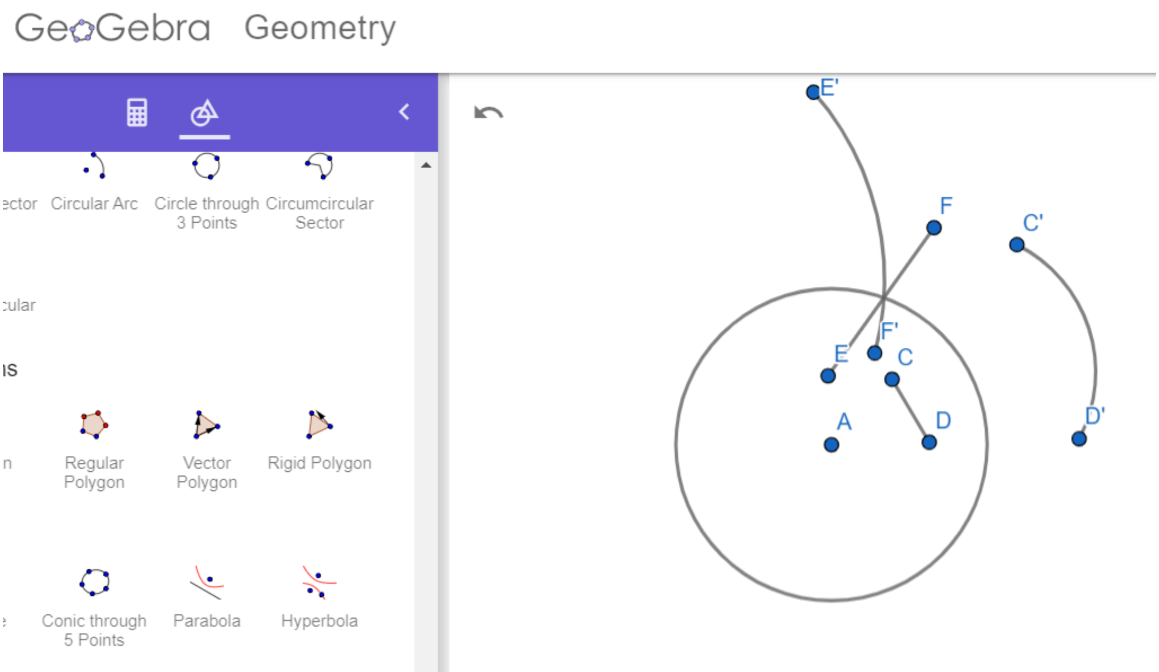


Рис. 54. Фрагмент применения программы GeoGebra при решении задач.

– Решение простых стандартных задач на построение,
– Проверка решения именных задач,
– Переход к самостоятельному решению новых задач.

Из изложенного видно, что в методике преподавания темы «инверсия» ключевым является объяснение учащимся особенностей этого преобразования и «творческих элементов» при решении задач. Для этого предлагаются использовать прикладные элементы и конкретные примеры, имеющих узкую направленность.

§4. Методические особенности создания элективного курса по геометрии

В целом, элективные курсы являются достаточно эффективным способом для достижения целей индивидуального самоопределения учащихся в их профессионально-личностном развитии.

Учащиеся свободны в выборе направленности элективных курсов, поэтому, эти курсы не являются повторением основного учебного курса. Элективные курсы предназначены для [38, 45]:

– стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся,

– развития их умственных возможностей,

– обучения алгоритмам универсальных учебных действий,

– формирования представлений о современных технологиях лучшего восприятия материала.

Помимо этого, с помощью предметных элективных курсов учащиеся:

– могут определиться со своей будущей специализацией и выбором вида профессиональной деятельности во взрослой жизни,

– продолжают получать знания в дополнение к основному курсу по выбранному направлению.

Конечно же, ключевым способом при обучении с помощью элективных курсов является самообразование. За редким исключением учащиеся ответственно подходят к подготовке к занятиям, что обусловлено самостоятельным выбором элективного курса.

Все это позволяет сделать вывод о том, что элективные курсы дают возможность поддержать на высоком уровне изучение математики, как профильного предмета, и, помимо этого, они используются еще и для внутрипрофильной дифференциации учащихся.

Обучение с помощью элективных курсов требует разнообразных форм и методов обучения. При их выборе следует учитывать особенности структуры и содержания курса, равно как и общий уровень развития учащихся, их базовой подготовки, а естественный познавательный интерес к различным подразделам программы [24, 25, 27].

Приведем некоторые основные формы организации занятий элективного курса. К ним относятся:

– лекционные занятия,

– занятия в форме свободного обсуждения,
– дискуссии и полемика,
– соревнования групп учащихся, игры,
– индивидуальные занятия-консультации,
– практические занятия, посвященные решению задач,
– групповая и индивидуальная учебно-познавательная исследовательская деятельность,
– дистанционная поддержка,
– контрольные и зачетные занятия.

Дифференциация в обучении учащихся осуществляется путем подбора задач, состоящих из различных уровней сложности.

По завершении программы элективного курса учащиеся могут представить индивидуальные творческие работы по их выбору или иные работы в форме проектной деятельности, как каждым учащимся, так и группой учащихся.

Само содержание элективных курсов обычно предполагает наличие некоторых компонентов. Это:

– исторический материал, которому уделяется больше внимания, чем в основном учебном курсе по данному предмету,
– акцент на практическую работу, когда учащиеся самостоятельно ведут конспекты и получают навыки самостоятельной работы,
– индивидуальная и групповая работа с дополнительной литературой по избранному предмету и курсу,
– использование компьютерных программ, интернет технологий, когда это необходимо для решения поставленных задач,
– выступления перед группой, которые носят публичный характер и дают учащимся очень важный навык изложения материала в классе/аудитории.

Задачи, отбираемые для элективного курса, как правило, удовлетворяют нескольким принципам:

1. Принцип преемственности, когда новые задачи можно решить с помощью уже полученных знаний и навыков, а также используя взаимосвязь основного и элективного курсов.

2. Принцип связи теории с практикой, когда задачи являются логическим продолжением полученных теоретических знаний, одновременно являясь средством полноценного восприятия нового материала.

3. Принцип полноты, при котором в цепочках задач отражаются математические идеи, а также присутствуют примеры, носящие межпредметный характер.

4. Принцип контрастности, по которому задачи должны быть как с положительными, так и с отрицательными ответами, а также когда подбираются задачи, использующие различные виды знаний и не повторяясь.

5. Система задач должна предусматривать обучение эвристическим приемам, благодаря чему овладение методами научного познания происходит в процессе решения задач. В исследованиях по методике преподавания математики среди эвристических приемов наиболее часто встречаются:

- аналогия,
- индукция,
- прием элементарных задач,
- прием моделирования и другие.

6. Принцип формирования исследовательских умений, под которыми понимают вид учебно-познавательной деятельности, предполагающий выполнение учебных заданий с помощью самостоятельного творческого поиска новых знаний. В учебные исследования можно выделить следующие важные этапы:

- постановка проблемы,

– выдвижение гипотез,

– доказательство или опровержение гипотез.

Таким образом, элективные курсы позволяют развивать и формировать у учащихся:

– культуру логического мышления,

– разносторонние интересы,

– умение самостоятельно восполнять знания,

– общую математическую культуру,

– приобщают школьников к самостоятельной учебно-познавательной исследовательской деятельности,

– дают возможность познакомиться с некоторыми современными достижениями науки.

Помимо этого, они помогают раскрыться внутреннему потенциалу учеников, а также создают условия для их самореализации и развития. Элективные занятия дают шанс наиболее успешно применять индивидуальный подход к каждому школьнику, учитывая его способности, и более полно удовлетворить познавательные и жизненные интересы учащихся.

Элективный курс редко длится целый год. Для них рекомендуется применять программы, которые рассчитаны на один-два месяца, одну четверть или одно полугодие.

Очень важно, чтобы у учеников был шанс хотя бы раз в полугодие выбрать элективный курс другого направления, поскольку хорошо известно, что интересы учащихся этой возрастной группы неустойчивы.

Поэтому желательно предложить как минимум 3–5 элективных курсов по каждому учебному предмету в предпрофильной подготовке и минимум 2–3 курса в профильном обучении.

В процессе разработки программы элективного курса по геометрии необходимо:

– определить цель курса и функцию курса в рамках изучаемого основного учебного курса по геометрии,

– установить отличия в содержании элективного курса от содержания основного курса геометрии,

– распределить программу курса по темам с выделением необходимого количества часов по каждой из них,

– гарантировать наличие для учащихся конкретного курса по геометрии различных учебно-методических материалов,

– выделить основные виды учебно-познавательной деятельности учащихся, определить степень их самостоятельности,

– определить критерии успешного прохождения элективного курса по геометрии,

– подготовит контрольные задачи и вопросы для проведения промежуточного зачета.

Элективные курсы по геометрии могут выполнять различные функции, в том числе:

– являются углубленным вариантом определенных разделов базового курса, способствуя лучшему прохождению экзаменационных испытаний;

– служат основой для профильной ориентации учащихся в старших классах довузовских учебных заведений,

– способствуют самоопределению и знакомят учащихся с основными принципами предстоящей, по завершению обучения в школе, профессиональной деятельности.

– служат цели удовлетворения познавательных интересов учащихся в сферах, выходящих за рамки выбранного им профиля.

Исходя из этого, при проведении занятий преподаватели должны:

– придать курсу как привлекательное название, так и привлекательные формы проведения и достигаемые цели,

– избегать дублирования основной программы по геометрии,

– включать принципиально новые, нестандартные для учащегося знания, вызывающие у него познавательный интерес,

– заложить в программу элективного курса быстрый и эффективный путь получения знаний, используя уже пройденный материал,

– обеспечить синхронность содержания элективных курсов с установленными государственными стандартами образования.

– делать акцент на личностно-деятельностный подход в обучении, смещать акценты на формирование умений через активную самостоятельную деятельность учащихся.

§5. Разработка элективного курса «Применение инверсии к решению геометрических задач»

Преобразованию инверсии уделяется внимание лишь в курсе геометрии за 9 год обучения в учебных заведениях либо классах профильной ориентации с углубленным изучением математики. Обучение, как правило, ограничивается изложением основных свойств преобразования инверсии и ее применением к решению лишь некоторых, наиболее простых задач. Вместе с тем, инверсия представляет гораздо больший интерес с точки зрения нестандартных умений и навыков, приобретаемых учащимися, а также опыта решения широкого круга задач.

Подробное изучение данного вида преобразования плоскости представляется возможным в рамках элективного курса «Применение инверсии в геометрических задачах». Представляется целесообразным проведение занятий в первой половине 10-го года обучения, после того, как в конце девятого года было завершено изучение всех основных разделов планиметрии.

Программное содержание на занятиях по данному элективному курсу предлагается сконструировать по следующему алгоритму:

– обобщение первоначальных знаний,

– изучение нового материала, которое, как правило, выходит за рамки школьного курса,

– организация практической учебно-познавательной деятельности учащихся по применению полученных знаний.

Цель данного элективного курса:

– углублении и расширение представлений обучающихся о преобразованиях плоскости в планиметрии; изучение и приобретение навыков по решению задач с применением преобразования инверсии.

Для того, чтобы достичь поставленной цели, в процессе обучения следует решать следующие задачи:

– обобщить и систематизировать знания учащихся по планиметрии и стереометрии;

– обучить использованию различных методов решения геометрических задач;

– развивать интерес школьников к геометрии и математики в целом;

– обучить учеников применению аппарата алгебры к решению геометрических задач.

Предлагается элективный курс из 8 занятий (Таблица 1).

Представляется наиболее интересной для данного элективного курса «Применение инверсии в геометрических задачах» технология обучения математике с помощью ключевых задач.

Цель технологии: развитие индивидуальных способностей учащихся и их увлечение математикой с помощью ключевых задач, которые формируются применительно к каждой из изучаемых тем.

Прогнозируемый результат: успешное усваивание материала всеми группами учащихся.

Таблица 1

Содержание занятий элективного курса

№ занятия	Тема
1	Повторение материала, изученного в 9-м классе. Преобразования плоскости. Определение инверсии, аналитическая форма представления, основные свойства. Простейшие примеры.
2	Применение инверсии для решения задач на построение. Типовые задачи с применением инверсии.
3	Стереографическая проекция. Конформность и ортогональность окружностей. Степень точки и радикальная ось окружностей. Теорема Птолемея.
4	Задачи Архимеда и Паппа. Поляры и задача о бабочке. Пучки окружностей. Строение пучков. Теорема (альтернатива) Штейнера. Соосные окружности.
5	Окружность Аполлония. Обобщенная окружность. Теорема Понселе. Задача Аполлония.
6	Комплексные числа и инверсия. Группы преобразований. Геометрия Лобачевского и инверсия.
7	Зачетное занятие. Контрольная в письменной форме.
8	Завершающее занятие, обобщение изученного материала.

Для достижения целей данной технологии основным моментом являются ключевые задачи по каждой из изучаемых тем.

Эти задачи обеспечивают успешное обучение на уровне стандарта всеми группами учащихся.

Каждое из восьми занятий в рамках элективного курса имеет длительность в два академических часа. Соответственно, занятие включает:

– Урок в виде лекции, который раскрывает новую изучаемую тему крупным блоком,

– Урок в виде практического занятия, посвященный решению ключевых задач различного уровня сложности.

Среди заключительных занятий элективного курса:

– урок в виде консультации, когда учащиеся готовят вопросы и задачи, вызвавшие затруднение,

– урок в виде зачета (коллоквиума), когда повторяется тема целиком, излагаемая, преимущественно, самими старшеклассниками,

– контрольный урок, который проводится в письменной форме,

– завершающий урок, посвященный анализу и обобщению всего пройденного материала.

По завершении обучения учащиеся:

– знают основные свойства преобразования инверсии,

– умеют строить образы линий и фигур при различных инверсиях,

– могут проводить доказательства некоторых соотношений в конструктивной геометрии,

– умеют решать задачи на построение с применением преобразования инверсии.

Выводы по второй главе

Во второй главе показаны методические особенности преподавания темы инверсия и продемонстрированы наглядные возможности современных компьютерных программ для лучшей усваиваемости материала.

Приведены основные типы задач и теорем, а также самые известные именные классические задачи, на которых предлагается основывать сам элективный курс и методику его преподавания.

Изложенные выше подходы к элективному курсу позволяют сделать выводы о получаемых учащимися ценностных ориентирах. Это:

– формирование умения к логическим рассуждениям,

– освоение эвристических приемов,

– формирование интеллектуальных умений, в том числе, выбор стратегии решения задач, анализ и сопоставление данных,

– развитие учебно-познавательной активности и ее индивидуализация,

– формирование способностей выявлять закономерности,

– привлечение учащихся к групповой деятельности и обмену своими предложениями в ходе свободного общения на занятиях.

Результирующим выводом является то, что предложенный элективный курс по теме «Инверсия» являются важным инструментом формирования предметных компетенций учащихся и компонентом для предопределения их профессиональной ориентации в будущем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе рассмотрена важная и актуальная тема, которая лежит как в основе практических задач, так при преподавании теоретических вопросов планиметрии, геометрии учащимся средней школы.

Преобразование инверсии известно еще с Древней Греции. Греческие математики пифагорейской школы уже в VI-V веках до нашей эры делали попытки расположить цепь математических доказательств в определенную последовательность, чтобы переход от одного понятия к другому не вызывал ни у кого никаких сомнений. Этот «дедуктивный» метод получил дальнейшее развитие у Эвклида, Архимеда и Апполония. Понятие инверсии у них уже ни в чем существенном не отличается от современного. Математика и, в частности, конструктивная геометрия, стали наукой тогда, когда в ней начали систематически применять логические построения, когда ее положения стали выводить не только путем непосредственных измерений, но и при помощи умозаключений, когда те или иные ее положения начали устанавливать в общем виде.

Непосредственно преобразование инверсии является важным разделом для всех геометрий, в том числе, евклидовой, как на плоскости, так и в пространстве, так и для неевклидовых геометрий.

Стандартным инструментарием для выполнения геометрических построений является преобразование плоскости. Однако, особый интерес представляет построения с помощью преобразования инверсии, которые существенно облегчает решения многих задач.

Данная работа представляет с собой также и теорию и практику геометрических построений с помощью преобразования инверсии, рассмотренную на примере конкретных задач.

Первая глава посвящена теоретическим вопросам, связанным с понятием инверсии и технологией решения задач, проведения построений, основываясь на свойствах инверсии. Рассмотрены все основные аксиомы, леммы и теоремы, служащие основой для этой части геометрии. По сути, сформулировано теоретическое обоснование возможностей решения задач с помощью преобразования инверсии.

Проблема обучения учащихся преобразованиям плоскости всегда являлась одной из центральных в методике преподавания математики. В настоящее время её актуальность возросла на фоне направленности процесса обучения на развитие личности.

Во второй главе разобрано большое количество практических задач в которых подробно рассмотрена техника проведения типовых построений с использованием преобразования инверсии. Эти задачи могут рассматриваться модельными для решения других, более сложных проблем конструктивной геометрии.

Приведены задачи, которые можно отнести к «историческим», и которые лежат в основе современного образования по курсу геометрии в средней школе. Помимо этого, продемонстрировано единство математики, когда алгебраические преобразования широко используются для доказательства справедливости геометрических построений.

Умение решать задачи на доказательство необходимы любому ученику, желающему не только быть успешным на уроках, на математических конкурсах и олимпиадах, но и подготовиться к поступлению в высшее учебное заведение и успешно в нем обучаться. Как показывает опыт, решение задач на доказательство часто вызывает затруднения, так как эти задачи требуют поиска пути и способа доказательства, проведения доказательственных рассуждений, выдвижения гипотез и их обоснования.

Также, во второй главе приведены примеры использования компьютерных программ для наглядного изучения преобразования инверсии.

Приведены методические особенности создания элективного курса по геометрии. Поэтапно рассмотрено создание элективного курса «Применение инверсии к решению геометрических задач».

Цель данной работы была достигнута при помощи рассмотрения теории и решения практических примеров, доступных как для учащихся на углубленном базовом уровне, так и для профильных классов и элективных курсов в средней школе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азевич А.И. Задачи по геометрии. 10-11 классы: дидактические материалы и контрольные работы. — М.: Школьная Пресса, 2005. — 144 с.

2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: учеб. для 10 кл. школ с углубл. изучением математики. — 4-е изд., дораб. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад. образов., изд-во «Просвещение», 2006. — 270 с.

3. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. -4-е изд. -М.: Рос. акад. наук, Рос. акад-. образования, изд-во «Просвещение», 2006. - 240 с.

4. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.',. Евстафьева Л.П. Геометрия, 10-11: кн. для учителя. -М.: Просвещение, 2005. - 128 с.

5. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. – Висагинас, Alfa, 1998. – 576 с.

6. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов пед.вузов. М.: ГУПИ МП РСФСР – 1957. – 268 с.

7. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов пед.вузов. М.: ГУПИ МП РСФСР – 1957. – 268 с.

8. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кадомцев и др. Геометрия 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. — М.: Просвещение, 2009. - 255 с.

9. Баранова Е.И. Методика реализации компьютерного обучения геометрии в средней школе: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02. — СПб, 1997. - 170 с.

10. Бакельман И. Я., Инверсия. Издательство «Наука», М., 1966 – 84с.

11. Беленький, В.З., Заславский, А.А. О задаче Мальфатти. / В.З.Беленький, А.А. Заславский // Квант. – 1994. - №4. – С. 39-42.

12. Боровкова О.А. «Живая геометрия» в действии // Математика в школе. 2007. - № 4. - С. 37-43.

13. Булычев В. Проект ИСО и новые образовательные ресурсы в школьном курсе геометрии // Математика / Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября». —2008. - № 15. - С. 8-13.

14. Василевский А.Б. Методы решения геометрических задач. Мн.: Высшая школа, 1969. — 232 с.

15. Волошинова А. Интернет-ресурсы для учителя математики// Математика/ Еженед. учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». - 2008.- № 15.- С. 17-18.

16. Габович И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач. — М.: Просвещение, 1995. - 192 с.

17. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П. Наглядный справочник по геометрии для 7-11 классов. М., Харьков: Независимый научно-методический центр «Развивающее обучение», 1996. - 96 с.

18. Геометрия. Учебник для 9 класса с углубленным изучением математики./Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. – М.: Просвещение, 2004. – 240с.

19. Гуревич С.В. Методика построения чертежа к геометрической задаче при изучении геометрии, основанном на идеях фузионизма: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02.-М., 1997. - 174 с.

20. Дорофеев С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах: Учебное пособие. – Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. – 189с.

21. Евстафьева Л.П. Геометрия: дидактические материалы для 10-11 кл. ~ М.: Просвещение, 2004. - 78 с.

22. Жижилкин И.Д. Инверсия / И.Д. Жижилкин // Серия «Математическое просвещение». Издательство МЦНМО – 2009. – 72с.

23. Заславский А. А. Геометрические преобразования. – М.: МЦНМО, 2004. – 86с.

24. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 10: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. - 256 с.

25. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 11: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. - 336 с.

26. Каюмов О.Р. Преобразования плоскости и их применение к решению задач планиметрии.-М.: Из-во «ФЛИНТА», 2014. - 133с.

27. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. М.: Просвещение, 2002. - 175 с.

28. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика/ А.Я. Блох, В.А. Гусев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. - 416 с.

29. Никифорова М.А. Новые компьютерные технологии// Математика/ Учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября». 2004. - № 2931.

30. Никифорова М.А. Преподавание математики и новые компьютерные технологии // Математика в школе. - 2005. - № 7. - С. 72-80

31. Погорелов А. В., Геометрия, изд.2, М., Наука, 1984.

32. Понарин Я.П., Элементарная геометрия, Том 1, планиметрия, преобразования плоскости. М., МЦИМО 2004.

33. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 класс: учеб. Для общеобразовательных учебных заведений с углубл. и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2003. - 224 с.

34. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: Изд-во МЦНМО, 2001. – 584 с.

35. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: МЦНМО, 2001. - 568 с.

36. Савин, А.М. Инверсия и задача Аполлония / А.М. Савин // Квант. – 1971. – № 8. – С. 23–28.

37. Саранцев Г.И. Составление геометрических задач на заданных чертежах // Математика в школе. 1993. - №6. - С. 14-16.

38. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2005. - 255 с.

39. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Базовый уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19 814

40. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Профильный уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp7obn 0=19812

41. Страбыкина Л.А. Формирование геометрических понятий в средней школе с использованием компьютера: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. — Киров, 2002. - 164 с.

42. Уроев В.М. Инверсия / В.М. Уроев // журнал «Квант» – 1984. – № 5 – с. 26–32.

43. Федеральный государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/.

44. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – М.: Омега-Л, 2014. – 134 с.

45. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. М.: Московский психолого-соц. ин-т; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК», 1999. - 240 с.

46. Шарыгин И.Ф. Учимся решать задачи по геометрии/ И.Ф. Шарыгин// Математика в школе. 1989. - №2. - С. 87- 101.

47. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. М.: ООО «Изд-во АСТ», 2001. - 400 с.

48. Blair, David E., Inversion Theory and Conformal Mapping/ N.Y.: American Mathematical Society – 2000. – 118 p.

49. I.E. Leonard, J.E. Lewis, Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective / L.: Wiley – 2014. – 496 p.

50. I.E. Leonard, J.E. Lewis, Solutions Manual to Accompany Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective/ L.: Wiley – 2014. – 176 p.

51. Kay David C., College Geometry / N.Y.: Holt, Rinehart and Winston – 1969. – 218 p.

52. Frank Morley, Inversive Geometry / L.: Dover Books on Mathematics – 2014. – 288 p.