МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения производной в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы»

Студент Е.И. Дубровская
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент С.Ш. Палферова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Понятие производной является одним из фундаментальных понятий, изучаемых в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы. Именно этим, в первую очередь, обусловлена особая актуальность рассматриваемой в работе темы о методике преподавания производной в курсе алгебры и начал анализа. Изучая производную, вырабатываются логические основы для понимания многих явлений в окружающем мире. Именно поэтому в педагогической науке и практике методика обучению темы «производная» занимает особое место.

Анализ базовой и дополнительной учебной литературы в целом показывает, что объем представлений о методах решения задач по теме «Производная» ограничивается достаточно узким спектром методологических подходов.

На текущий момент можно выделить несколько групп научных работ, посвященных проблеме методики обучения решению задач по рассматриваемой теме:

– изучение производной в средней школе как одного из методов решения широкого круга практических задач в алгебре и смежных дисциплинах [49];

– исследование способностей к усваиванию материала в условиях профильной дифференциации [11];

– обучение началам анализа в старших классах школы с использованием различных компьютерных программ [30];

– изучение проблематики подготовки уровня старшеклассников к знакомству и усваиванию тем, рассматриваемых в началах анализа [51].

Несмотря на достаточно подробное изучение вопросов о методике преподавания начал анализа в общеобразовательной школе, поиск эффективных, универсальных и, в то же время, действительно работоспособных способов обучения сохраняет свою актуальность.

В качестве **объекта исследования** выбран процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения теме «Производная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Проблема исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения теме «Производная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования выявить методические особенности обучения теме «Производная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы, на основе которых разработать методические рекомендации и систему задач**.**

Гипотеза исследования:

Если систематически использовать: проведение анализа научно-практических работ по проблематике данной работы, исследование типовых ошибок у учащихся и выявление основных затруднений при решении задач на «производную» и задач, использующих производную в качестве инструмента, то в процессе обучения будет наблюдаться положительная динамика усвоения практических знаний по данной теме.

Задачи исследования:

1. Сравнить учебно-методические пособия и материалы экзаменов, используемых в образовательном процессе.

2. Изучить специализированные научно-исследовательские работы, посвященные теме работы.

3. Проанализировать состояние методических рекомендаций, лежащих в основе процесса преподавания старшеклассникам понятия «производная» и других сопряженных элементов в алгебре и началах анализа.

4. Изучить конкретный практический опыт преподавания алгебры и начал анализа в старших классах школ разного уровня.

5. Обобщить и проанализировать типовые сложности и ошибки, с которыми сталкиваются учащиеся при решении задач с использованием производной.

6. Систематизировать исследования по методике преподавания математических предметов в целом в средней школе и довузовских образовательных учреждениях.

Теоретико-методологическую основу составили труды Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачева. Теоретический аспект был использован для базового уровня обучения основам математического анализа в трудах А.Г. Мордковича, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунина.

Базовыми для настоящего исследования явились также основные требования к знаниям, умениям учащихся по теме «Производная», анализ содержания теоретического и задачного материала по темы «Производная» алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: изучение и анализ научно-педагогической и учебной литературы; педагогическое наблюдение; тестирование школьников; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент по проверке основных положений исследования.

Опытно-экспериментальная база исследования: учебное учреждение МУП СОШ №4 г. Оленегорска, Мурманской обл., 11 классы. В эксперименте принимали участие 75 человек.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем определены и обоснованы методические особенности обучения производной в математике старших классов в общеобразовательной школе.

Теоретическая значимость работы:

- сформулированы теоретические основы обучения теме «Производная», проанализированы требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся;

- раскрыта методика преподавания задачного материала по теме «Производная».

Практическая значимость работы: проведен анализ задачного материала по теме «Производная», включая задачи ЕГЭ, предложен соответствующий методический анализ.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались:

- сочетанием теоретических и практических методов исследования;
- анализом педагогической практики;
- личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в:

1 *этап* (2017/18 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников по математике, нормативных документов (стандартов, программ).

2 *этап* (2017/18 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации. Прохождение производственной практики по получению профессиональных умений и опыта профессионально деятельности.

3 *этап* (2018/19 уч.г.): подборка системы упражнений и задач для подготовки к единому государственному экзамену учащихся одиннадцатых классов по теме «Производная». Прохождение производственной практики (педагогической практики).

4 *этап* (2019/20 уч.г.): прохождение преддипломной практики, оформление методического проекта и диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов педагогического эксперимента, формулирование выводов.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

1) IX международной научной конференции «Математика. Образование. культура» (г. Тольятти, 24-26 апреля 2019);

2) международной научно-практической конференции «Наука и образование в XXI веке: теория, методология, практика» (г. Уфа, 4 октября 2019 г., 25 октября 2019 г.).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению теме «Производная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

2. Анализ задач, направленных на формирование понятия производная, для обучающихся 10-11 классов общеобразовательной школы.

3. Результаты педагогического эксперимента в обучении школьников производной в математике.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 14 рисунков, 8 таблиц, список используемой литературы (58 источников). Основной текст работы изложен на 73 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие производной в школьном курсе алгебры и начал анализа

Одной из главных проблем образования на современном этапе развития общества является создание, поддержание и развитие у учащихся способностей, навыков и умений к восприятию и практическому использованию в будущей профессиональной деятельности стремительно проникающих в жизнь информационных и технологических новинок. Ключевым для этого в курсе школьной программы является математика в целом и, в частности, тема «производная», как одна из наиболее важных не только в алгебре и началах анализа, но и при изучении других предметов естественнонаучной направленности.

Именно для поиска способов и механизмов изложения материала в доступной для учащихся форме разрабатываются методики преподавания математики, отвечающие требованиям сегодняшнего дня.

Под методикой преподавания в разных трактовках понимают:

- «готовый «рецепт», алгоритм, процедура», предназначенные для выполнения определенных действий, имеющих установленную цель [15];

- такой раздел педагогики, который исследует «закономерности бучения математике на определенном уровне ее развития в соответствии с целями обучения, поставленными обществом» [6];

- набор «конкретных приёмов, способов, техник педагогической деятельности» в процессе преподавания [5];

- раздел педагогики, который занимается «изучением, разработкой, усовершенствованием различных методов и форм», используемых для преподавания математики [2].

Первые методики преподавания математики в России стали возникать одновременно с широким внедрением школьного образования, начиная с начала 18-го века и одного из первых учебников, написанных Л.Ф. Магницким. В последующие годы большой вклад в развитие методик внесли, в том числе, работы Л. Эйлера, М.Е. Головина, С.Е. Гурьева [10].

Формирование педагогической школы по методике преподавания математических дисциплин относят к концу 19-го века. Тогда же открылись первые учебные заведения соответствующего профиля. В начале 20-го века появились ВУЗы педагогической направленности [8].

Начиная с конца 20-х годов прошлого столетия, методика преподавания математики начинает приобретать современные очертания. Появляется большое количество учебной литературы и профессиональные печатные издания [9].

С конца 60-х годов, когда начала анализа стали вводиться в курс среднеобразовательной школы, все большее место в методиках преподаванию математики стало уделяться теме «производная».

В отличие от других разделов математики, начала анализа и, в частности, тема «производная», является разделом, требующем нестандартные подходы и проявление своего рода «творчества» при решении задач. Стали разрабатываться методики преподавания, позволяющие учащимся преодолеть эти сложности.

В целом, можно выделить несколько направлений, по которым идет поиск путей повышения эффективности методик при изучении начал анализа, среди которых [14]:

- разработка таких заданий, которые стимулируют индивидуальные творческие начала в учебно-познавательной деятельности учащихся старших классов;

- разъяснение материала с использованием задач, носящих прикладной характер;

- построение стройных и, по возможности, упрощенных логических внутрипредметных связей;

- проведение занятий с использованием примеров, моделирующих процессы, которые доходчиво описываются в терминах алгебры и начал анализа;

- создание такой системы задач и упражнений, которая учитывает уровневую дифференциацию учащихся;

- применение современных информационных и компьютерных технологий и конструирование соответствующих прикладных задач;

- методические особенности применения прикладных программ в обучении математике;

- формирование универсальных учебных действий для учащихся довузовских учебных заведений различной профильной ориентации.

Анализируя структуру методик преподавания математики, можно выделить несколько функций, которую они выполняют:

1) методологические;

2) теоретические;

3) прикладные;

4) практические.

Каждая из этих функций включает более мелкие подфункции. Так, прикладная функция предназначена для формирования процесса обучения с применением различных методов и способов деятельностного подхода, анализа их осваивания и использования теоретических основ в ежедневной практике.

Собственно, функции, для которых предназначены методики преподавания математики можно изобразить схематически (Рис.1).

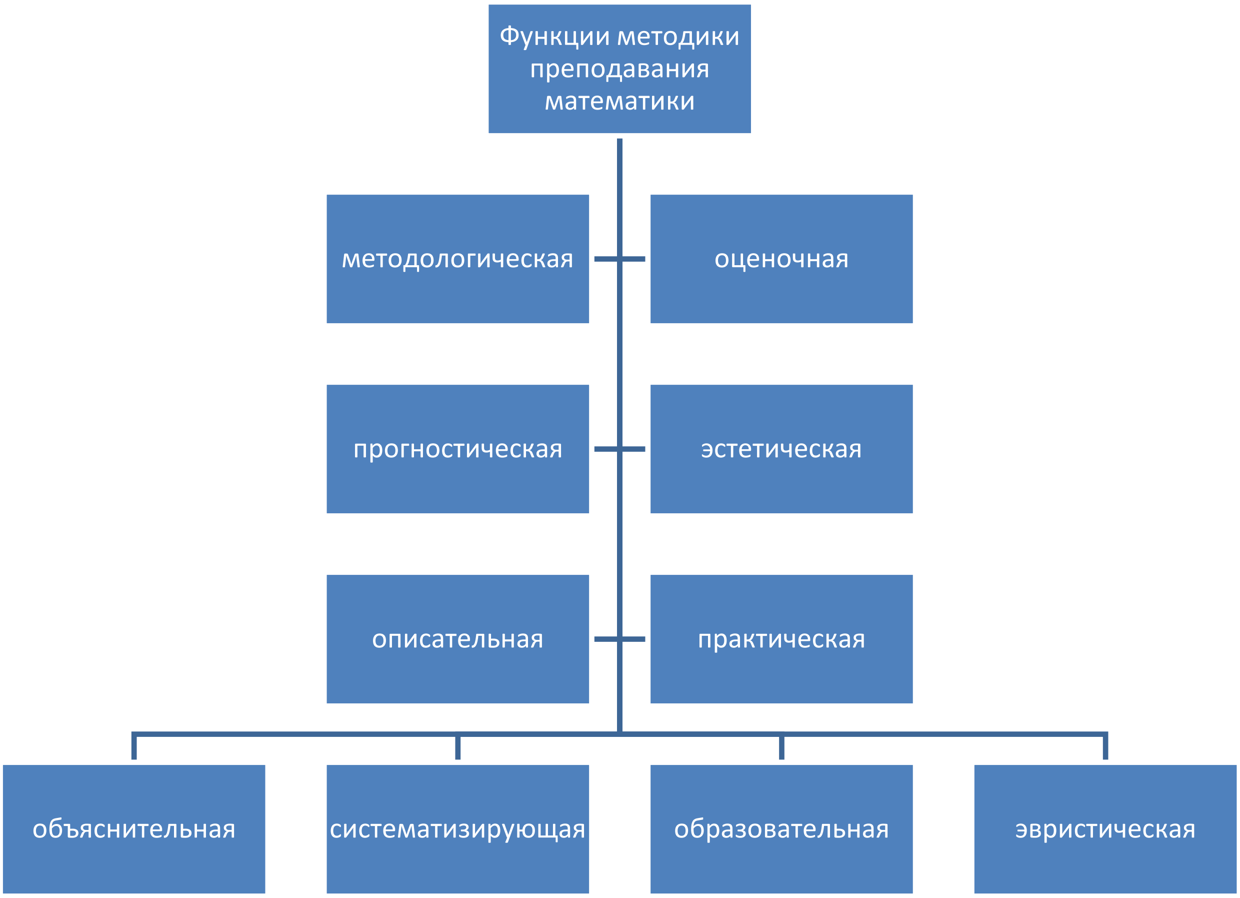

Рис.1. Схема преподавания математики.

Надо заметить, что подходы к общеобразовательному предмету «алгебра и начала анализа», конечно же, отличается от научного понимания этого раздела математики. Поэтому, методикам преподавания темы «производная» неизбежно приходится адаптировать научные постулаты к реалиям процесса преподавания.

Начала анализа как составная часть учебного предмета отличается от математического анализа как науки не только объемом и широтой изложения, но и конкретной прикладной направленностью изучаемых вопросов. Именно поэтому существует известная сложность в связи с необходимостью «упрощения» материала для придания сложным научным конструкциям доступного для учащихся характера без потери научной строгости изложения сути предмета.

Таким образом, можно сказать, что методика преподавания начал анализа – это наука о математическом анализе как учебном предмете для общеобразовательной школы и закономерностях процесса обучения этому предмету старшеклассников.

Принципиально, методика обучения должна давать ответы на три главных вопроса:

- Какая цель преследуется при обучении «производной» и началам анализа в целом? Говоря проще: зачем обучать этой теме учащихся?
- По какому принципу следует отбирать материал из математического анализа как науки для доступного изложения учащимся в рамках школьного предмета на базовом и профильном уровнях? Иначе, говоря: чему обучать старшеклассников?
- Как организовать учебно-познавательную деятельность учащихся? С использованием каких педагогических инструментов следует донести до старшеклассников понятие «производной»? Или иначе: как обучать?

Методика обучения исследует в качестве объекта сам процесс преподавания, в котором можно выделить несколько основных компонентов:

- содержание обучения;
- преследуемая цель;
- педагогическая деятельность преподавателя;
- учебно-познавательная деятельность учащихся.

Безусловно, эти компоненты взаимосвязаны, и изменение одного из них неизбежно влечет за собой внесение изменений в другие. В качестве предмета методика обучения исследует именно взаимосвязь между указанными компонентами.

Структуру методики преподавания можно представить схематически (Рис.2).

Рис. 2. Схема структуры методики преподавания.

§2. Основные цели и задачи обучения теме «Производная»

Исходя из изложенного выше, можно сказать, что основной целью методики обучения производной является сведение воедино теоретических положений об этом понятии в курсе алгебры и началах анализа и, в дальнейшем, формирование практических рекомендаций для преподавания этой темы и тематики комплекса вопросов и задач, которые обеспечивают высокую результативность при усваивании материала учащимися.

Основными задачами методики преподавания темы «производная» являются:

- определение конкретных целей при изучении производной, в том числе, с учетом уровневой дифференциации;

- планирование конкретного содержания процесса обучения в соответствие с поставленными целями;

- выявление наиболее оптимальных методов, форм и приемов, которые в ходе обучения будут приводить к достижению поставленных целей;

- определение необходимых визуально-прикладных средств, которые способствуют лучшему усваиванию материала и разработка конкретных рекомендации по их использованию в практике преподавания.

В дополнение к этому, следует отметить, что в методике преподавания можно выделить общую методику, затрагивающую общие теоретические вопросы изучаемой темы и частные (специальные) методики, касающиеся отдельных ее подразделов.

Методика обучения математике в целом связана со многими науками, в том числе, с философией, психологией, педагогикой, логикой, информатикой, историей математики.

- Философия предоставляет методы познания, такие как аналогия и абстрагирование, обобщение и конкретизация, диалектику и другие законы познания.

- Воздействие психологии обусловлено индивидуальностью, памятью, вниманием учащихся, а также, личностной ориентацией современного образовательного процесса с акцентом на саморазвитие школьников.

- Педагогика непосредственно определяет методы, используемые при обучении, равно как и цели воспитательного процесса. Эти аспекты педагогики нашли свое отражение в методика обучения, которая вносит свое предметное, математическое содержание.

- Логика формирует такие элементы мышления человека, как «уравнение», «доказательство», «выражение», «понятие». Именно на логике основаны математические аксиомы и теоремы.

- Информатика проникла во все сферы нашей жизни, и, соответственно, стала неотъемлемой частью визуально-прикладной части методики преподавания математики, алгебры и начал анализа.

- История математики является познавательной и, одновременно, поучительной стороной методики преподавания, акцентирующая внимание на сложности изучаемой темы.

Часто, такие понятия, как «Методика преподавания математики» и «технология преподавания математики», неправильно воспринимаются в качестве синонимов. С очевидностью, их следует различать, так как технологический подход содержит в большей степени целевой, процессуальный, количественный и расчетный компоненты, в то время как в методике выделяют содержательную, качественную и вариативную стороны. Технология акцентируется на функционировании, на процессах изменения во времени.

При технологическом подходе более существенным, чем в методике, является диагностика при постановке целей. Она необходима для правильной организации обратной связи, которая отражает процесс достижения поставленных целей и является средством корректировки их достижения. Самым существенным отличием является гарантированность достижения результата при технологическом подходе и возможность ее воспроизвести другими преподавателями и участниками образовательного процесса [12].

Методика отличается от метода конкретизацией приемов применительно к изучаемой теме и сопутствующих задач. Например, вычисление скорости с помощью производной расстояния по времени может объясняться как метод вычисления скорости, а конкретный набор выбор критериев, математических характеристик — как методика [3].

Бывает и так, что методика является составной частью технологии (Рис. 3), которая, в свою очередь, является составной частью методики [13].

Рис. 3. Схема методики преподавания темы «Производная».

Так, методика вычисления производной элементарных функций является составной частью технологией дифференцирования сложной функции, которая, в свою очередь, является составной частью методики преподавания темы «производная».

Конечно, самым сложным моментом в методике преподавания темы производная является формы, методы и технология изложения материала по дифференцированию сложной функции.

К сожалению, нет универсальных способов изложения этой темы, дающих гарантированный результат с точки зрения усвоения учащимися, причем, с учетом уровневой дифференциации. Причина заключается в необходимости «творческого подхода».

Стандартный алгоритм состоит в определении «внутренней» и «внешней» функций. Представляется, что основные усилия надо сосредоточить не столько на вычислении самой производной, как на определении иерархии функций. На занятиях, исходя из ограниченности по времени, следует рассматривать как можно большее количество функций и их структурирование, даже не доводя до окончательного вычисления производной.

Приведем несколько важных и сложных для восприятия учащимися примеров функций (Табл.1).

Таблица 1

Примеры сложных функций

№	Функция	Внешняя функция	Внутренняя функция
1	$f(x) = \cos^2 x$	$f(x) = g^2$	$g = \cos x$
2	$f(x) = \cos x^2$	$f(x) = \cos g$	$g = x^2$
3	$f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$	$f(x) = \dfrac{1}{g}$	$g = \ln x$

В качестве первого самостоятельного примера можно предложить учащимся найти производную функции:

$$f(x) = x^2.$$

С одной стороны, производная данной функции является стандартной по уже известной учащимся формуле:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

С другой стороны, эту функцию можно представить как сложную функцию и можно подтолкнуть учащихся воспользоваться схемой дифференцирования «функции от функции»:

$$f(x) = g^2,\ g(x) = x.$$

Представляется, что именно такой подход может показать учащимся технику дифференцирования и особую «простоту» этого процесса, если усвоить саму суть процесса.

Следующим примером, уже для полностью самостоятельного решения (или решения в парах) можно предложить в чем-то аналогичную задачу по нахождению производной функции $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}.$$

Аналогичным является пример с функцией:

$$f(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

который одновременно является табличным с помощью преобразованию:

$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x + 1.$$

В качестве более сложных примеров для учащихся с высокой мотивацией к учебно-познавательной деятельности можно пошагово рассмотреть примеры, представленные в Таблице 2.

Таблица 2

Разложение сложных функций на внешнюю и внутреннюю

№	Функция	Внешняя функция	Внутренняя функция
1	$f(x) = \ln^2 \cos x$	$f(x) = g^2, \quad g = \ln u$	$u = \cos x$
2	$f(x) = \sin\sqrt{x^2 + \cos x}$	$f(x) = \sin g, \quad g = \sqrt{u}$	$u = x^2 + \cos x$
3	$f(x) = \dfrac{1}{\ln^2\left(5 + \sqrt{\sin x^2}\right)}$	$f(x) = \dfrac{1}{g^2}, \quad g = \ln u,$ $u = 5 + \sqrt{v}, \quad v = \sin w$	$w = x^2$

Вторым, очень важным разделом при изучении производной является построение графиков. Конечно, здесь также требуется «творческий подход».

Заметим, что основная сложность при обучении возникает на последней стадии решения задачи – построении графика. Пошаговый алгоритм исследования функций является стандартным и не вызывает особых затруднений у учащихся, знакомых с техникой дифференцирования и методами нахождения экстремумов. Главное, объяснить учащимся, как на основании полученных данных построить кривую линию, являющуюся графиком функции. В качестве примера, рассмотрим график функции:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Перед построением графика следует уяснить, является ли функция четной или нечетной. Затем, необходимо изобразить имеющиеся асимптоты и нанести точки экстремума и точки перегиба. Определить участки выпуклости-вогнутости (выпуклости вверх и вниз). Своими словами можно разъяснить, что на участках, где функция непрерывна, можно изобразить кривую «не отрывая ручку от листа бумаги».

По мнению психологов и педагогов самым важным компонентом в этом процессе «творчества» учащихся является их мотивация к учебно-познавательной деятельности [4]. Впервые термин «мотивация» был введен немецким философом А. Шопенгауэром в 19 веке как «причинность, рассматриваемая изнутри». На сегодняшний день используется несколько определений «мотивации». Например:

- Мотивация – это побуждение к действию, психофизический процесс, управляющий поведением человека [11].
- Мотивация – это психическое явление, являющееся совокупностью мотивов [7], т.е. обобщенных образов предметов, представляющих ценность для человека.

Следует отметить, что мотивация учащихся претерпевает изменения. Если в младших классах ими в большей степени движет желание впечатлений, равно как и интерес к решению задач, то, у старшеклассников, мотивация смещается к стремлению получить так называемый «знания жизни» [1]. Этот факт безусловно следует использовать и учитывать при планировании визуально-прикладного аспекта занятий.

Представляется, что без должного изучения мотивов, которые движут учащимися, и, формирования их мотивации к учебно-познавательной деятельности невозможно полноценное изучение непростой темы «производная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

§3. Основные требования к знаниям, умениям и навыкам по теме «Производная»

Рассмотрим основные знания и умения, которыми должны овладеть учащиеся для правильного понимания начал анализа и, в частности, операции нахождения производной.

В соответствие с ФГОС на базовом уровне у учащихся должны сформироваться:

- представления о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;
- понимания возможности аксиоматического построения математических теорий;
- знания методов доказательств и алгоритмов решения, а также умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

При углубленном изучении математики в дополнение к знаниям и умениям базового уровня у учащихся должны сформироваться:

- представления о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;
- знания понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знания основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;
- умения моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;
- представления об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций,

использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

Перечислим основные знания и умения, которые обязательно должны усвоить учащиеся перед тем, как приступить к непосредственному изучению математической операции нахождения производной функции.

1. Как было отмечено в предыдущем разделе, для того чтобы учащиеся успешно овладели способами вычисления производной, им необходимо знать и понимать, что представляет собой предел функции.

2. Далее учащиеся должны понимать, что такое приращение функции и приращение аргумента. Пусть некоторая произвольная точка x лежит в окрестности точки x_0. Приращение аргумента в точке x_0 называется разность

$$\Delta x = x - x_0 .$$

Обозначается данная операция символом Δ. Но, если мы изменим аргумент функции, то, соответственно, и значение функции в данной точке x тоже изменится: $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Таким образом, разность значений функции в точках x и x_0, соответствующих приращению Δx, называется приращением функции и обозначается $\Delta f(x)$. О геометрической интерпретации приращения функции указано в предыдущем параграфе в задаче о секущей.

3. Предельный переход $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

является самым важным понятием, которым обязательно должны овладеть учащиеся для правильного понимания математической операции дифференцирования. Именно в результате вычисления предельного перехода в точке x_0 при $x \to x_0$ учащиеся усваивают процесс дифференцирования и находят искомый результат – производную функции $f(x)$ в точке x_0.

Очень важно донести до каждого учащегося понятие предельного перехода, которое было использовано еще Архимедом при вычислении площади круга.

Далее, можно разобрать пример с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, интуитивно определив ее предел. В продолжение, при всей очевидной сложности для школьников, можно привести, конечно без строгой формулировки и доказательства, теорему «о двух полицейских». Некоторым образом разнообразит и упоминание истории этой теоремы, о ее разных названиях в других странах – теорема «о двух карабинерах», о трёх струнах, «о сэндвиче», и т.п.

Представляется обязательным изложение смысла производной исходя из материала, изучаемого в других предметов естественнонаучной направленности. В физике производная широко применяется во всех разделах, и, как правило, характеризует скорость изменения одной физической величины в зависимости от другой. Так, ускорение в механике является производной скорости, т.е. характеризует быстроту изменение скорости во времени. В электричестве, ток, протекающий по проводнику, является производной заряда или характеристикой скорости изменения заряда в зависимости от времени. В химии, с помощью производной можно охарактеризовать скорость химической реакции, а именно понять, как быстро меняется концентрация того или иного вещества во время протекания реакции [47]. В биологии, именно с помощью производной характеризуется средняя производительность жизнедеятельности популяции. Говоря иначе, скорость размножения популяции микроорганизмов определяется как производная функциональной зависимости числа особей в популяции микроорганизмов во времени.

Итак, как было упомянуто выше, для нахождения производной учащиеся должны овладеть понятием предельного перехода. Но в чем суть этой математической операции?

Пусть задана функция $y = f(x)$. Посмотрим, как будет себя вести функция $y = f(x)$ при приближении аргумента x к некоторому числу α.

При $x \to \alpha, f(x) \to f(\alpha)$. Или $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Пусть заданы две функции: 1) $f(x)=x^2$, 2) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Определим предельный переход функций 1) и 2) при $x\to 2$:

$$1)\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

$$2)\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-1}=\frac{2^2}{2-1}=\frac{4}{1}=4.$$

Если при $x\to x_0$, $f(x)\to f(x_0)$, т.е. $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, то функция непрерывна в точке x_0, а, следовательно, в этой точке она имеет производную. График этой функции представляет собой плавную, непрерывную кривую линию.

Перейдем к более строгому определению производной.

Пусть имеется функция $y=f(x)$. Сравним значения заданной функции в некоторой точке x_0 со значениями этой функции в точках, лежащих в окрестности точки x_0. Выше мы дали определение приращения аргумента, которое дается выражением (6). Тогда, $x=\Delta x+x$.

Пользуясь определением приращения функции, данном нами в выражении (7), переходим непосредственно к определению производной функции.

Определим производную функции как предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при $x\to x_0$:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Более строгое определение производной функции звучит следующим образом:

Производная функции есть предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, $\Delta x\to 0$: $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Итак, мы рассмотрели основные навыки и умения, которыми должны владеть учащиеся, прежде чем приступить к непосредственному освоению темы понятия производной. Далее мы обсудим, какие навыки приобретают учащиеся после освоения техники дифференцирования.

Для базового уровня достаточно:

1. Уметь вычислять производные простых функций и их комбинаций. Например: $y = x^3 + 3x^2\sqrt{x} + 2, y = \frac{x}{x+1}$.

2. Исследовать простые функции с применением производной. Например: $y = x^2 + 3x + 5, y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{3x+2}{(x+2)^2}$.

Для профильного уровня помимо вышеперечисленных навыков необходимо:

1. Находить производные сложных, логарифмических и показательных функций. Например: $y = In(tg^2 x), y = \frac{e^x}{1+e^x}, y = \frac{\log_2 x}{1+2^x}$;

2. Вычислять вторые производные функций;

3. Полное исследование функции с построением асимптот, нахождением точек перегиба, определение видов точек разрыва функции (разрывы первого и второго рода).

Для углубленного уровня желательны дополнительные навыки:

1. Умение решать с применением производной задачи из смежных областей. Например, определить скорость и ускорение материальной точки; зная закон изменения заряда со временем, определить силу тока, и т.д.

2. Знать основы интегрального исчисления, уметь интегрировать простые функции.

3. Уметь решать простые дифференциальные уравнения. Например, $y = y', y = xy'$.

§4. Анализ содержания теоретического материала темы «Производная» в учебниках алгебры и начал анализа разных авторов

В настоящее время все больше внимания уделяется профильному образованию. Отличие стандартов базового и профильного уровней математического образования обусловлено различием целей обучения математике. Профильный уровень довольно сильно отличается от базового уровня в содержании, обязательных умениях и навыках учащихся. В Таблице 3 приведены сравнения стандартов образования базового и профильного уровня общеобразовательной программы.

Таблица 3

Сравнение стандартов базового и профильного уровней средней общей образовательной программы

Уровень обучения	Цель обучения	Требования к знаниям учащихся
Базовый уровень	Целью обучения в целом является формирование: - представлений о математике как универсальном языке науки -математического и логического мышления, -овладение математическими знаниями и умениями для изучения естественнонаучных дисциплин - навыков использования знаний для решения практических задач, -представлений об основных понятиях и подходах при решении задач начала анализа окружающего мира, происходящих процессов, наблюдаемых явлений, - понимания значимости математике для научно-технического прогресса и отношение к математике как части общечеловеческой культуры, - знакомство с историей математики, -понимания эволюции математических идей - работе с учебным материалом и корректной формулировке своих мыслей, - критического мышления, - развитие интуиции, способностей к построению логических связей, к доказательству утверждений, использованию терминологии и математической символики.	- умение находить производные элементарных функций и их комбинаций: $f(x)=\frac{\sin x+x}{In(x)}$ - исследование с применением производной несложных функций, например: $f(x)=x^2-3x+2$ или $f(x)=x\sin x$

Продолжение Таблицы 3

Уровень обучения	Цель обучения	Требования к знаниям учащихся
Профильный уровень	В дополнение к базовому уровню, на профильном уровне обучения: - формируется понимание в необходимости проведения доказательств и дедуктивно-логических обоснований при проведении математических преобразований, - формируется логика основных понятий по главным разделам курса математики, основных аксиом, теорем, формул и навыки их применять, - используются различные языки математики для интерпретации, аргументации и доказательства, -осуществляется алгоритмическая деятельность, - построение и исследование математических моделей для описания и решения прикладных задач смежных дисциплин, - вырабатываются умения по проведению доказательств и по нахождению решений нестандартных задач и нахождению нестандартных решений для задач повышенной сложности, - происходит обучение навыкам исследования функций с помощью элементов начал анализа, - применение производных для решения широкого класса прикладных задач, задач повышенной сложности и нетиповых задач, - самостоятельная работа с источником информации, анализ и обобщение и систематизация полученной информации.	- вычисление производных сложных функций: $f(x)=\sqrt{\sin(Inx)}$, $f(x)=\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+1}}$. - полное исследование функций, включая построение асимптот и определение точек перегиба, например, как в случае функции: $y=\frac{x^2+1}{x}$, - умение решать с широкий круг математических задач, в том числе прикладные задачи из смежных областей. Например: Уравнение скорости материальной точки имеет вид: $x=6t-\frac{t^3}{8}$. Найти мгновенную скорость и ускорение точки. - решать простейшие дифференциальные уравнения: $y=xy'$.

Как видно из Таблицы 3, содержание учебного материала по теме «Производная» на базовом и профильном уровне различаются сложностью и объемом изучения материала. Если базовый уровень подразумевает умение находить производные элементарных функций, то профильный уровень подразумевает нахождение производных сложных функций, а также производных показательных и логарифмических функций. Далее, базовый уровень исследования функции с помощью производной направлен на исследования неложных функций, например, $f(x)=x^2-3x+5$ или $f(x)=x\cos x$.

Профильный же уровень направлен на полное исследование функций, включая нахождения точек перегиба и построение асимптот и определение типов разрывов функций. Примером такого подхода может служить функция

$f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$. Проанализируем учебные пособия различных авторов по теме «Производная». В Таблице 4 представлен анализ учебных пособий по алгебре и началу анализа различных авторов. Следует заметить, что во всех учебниках можно выделить содержательно-методическую линию элементов математического анализа (понятие производной, техника дифференцирования, приложение производной к исследованию функций, геометрический и механический смысл производной, понятие предела последовательности и функции, теоремы о пределах, определенный интеграл и простейшие дифференциальные уравнения).

Таблица 4

Анализ учебных пособий

различных авторов по алгебре и началам анализа

Название	Теоретический аспект
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: базовый и углубл. уровни / Ш. А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева.[36]	В данном учебном пособии для раскрытия темы производной (глава 8) используются понятия из физики и техники. Например, скорость механического движения определяется как как предел отношения перемещения к бесконечно малому промежутку времени. Рассмотрения понятие производной авторы начинают с традиционного геометрического подхода, но при этом делают основной акцент на приложении производной к физическим и техническим задачам. В главе 9 подробно рассматривается алгоритм исследования простых функций и построения их графиков. Для углубленного уровня дается строгое определение непрерывности функции, определение и построение асимптот, а также рассматриваются вторые производные. Учебник содержит дополнительные разделы, которые представляют интерес для углубленного изучения математики. К дополнительным разделам относятся: элементы комбинаторики, теории вероятности, статистики и некоторые разделы теории множеств. Данное учебное пособие может быть использовано преимущественно для профильного обучения.

Продолжение Таблицы 4

Название	Теоретический аспект
Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / под ред. М.И. Сканави. [44]	Классический задачник, написанный в соответствии с программой по алгебре для поступающих в ВУЗы. Задачи группируются по принципу однородности тем, типов, методов решения и подразделяются на три группы по уровню их сложности. Большинство задач имеет подробное решение. В конце каждой главы приведены сведения справочного характера. Много внимание уделяется задачам на непрерывность и исследование функции. Отдельный класс представляют задачи на прикладное применение математического анализа. Данный сборник задач можно использовать преимущественно для профильного уровня обучения.
Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый и профильный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко [35]. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко [37].	Учебники содержат теоретический материал по всем разделам начала анализа в соответствие с положениями ФГОС среднего общего образования. В данном учебном пособии для 10-го класса содержатся систематические сведения о числах и расширенные сведения о функциях. При изучении действительных чисел вводится понятие предела числовой последовательности. Понятия предела последовательности вводится при рассмотрении бесконечной геометрической прогрессии. Также учащиеся знакомятся с основными идеями и методами математического анализа. Сначала дается упрощенное, а затем и строго определение предела функции. В качестве закрепления понятия предела предлагаются задачи с использованием степенных функций с рациональным и действительным показателем. В учебнике для 11-го класса элементы математического анализа начинаются с повторения определения предела последовательности, далее, на основании этого материала, вводится понятие предела функции. Определение производной вводится через ее физический смысл, а именно, как мгновенная скорость точки в определенный момент времени. Уже затем дается математическое определение, как предел разностного отношения. Разбираются все основные элементарные функции и делается акцент на геометрическом смысле производной. Третья глава посвящена применению производной к исследованию функций, также вводится понятие второй производной. Изложение учебного материала учитывает уровневую дифференциацию учащихся. Учебник может быть использован для базового и профильного уровней. В конце учебника содержатся материалы по истории математике, а также вопросы для повторения и задание «проверь себя!». К сожалению, в учебнике недостаточно внимания уделяется приложению производной к задачам геометрии, физике и технике.

Продолжение Таблицы 4

Название	Теоретический аспект
Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2-ч частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/Мордкович А.Г. [38], [39].	Один из самых популярных учебных комплектов для изучения алгебры и начала анализа в 10-11 классах. Изучение математического анализа традиционно начинается с понятия предела последовательности, суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, предела функции. Достаточное внимание уделяется теме производной и технике дифференцирования, в том числе логарифмических и показательных функций. Отличительной особенностью учебника является доступное для школьников изложение материала по сравнению с другими традиционными учебниками, наличие большего количества примеров разного уровня сложности с подробными решениями. Обучение строится на приоритетности функционально-графической линии. Каждая тема предполагает определенное количество часов, которое рекомендовано в учебнике. Особо выделяются такие темы, построение касательных, нахождение экстремумов, исследование графиков функций. На них запланировано более 60% общего количества часов от всего курса математики. Учебник может быть использован для базового уровня обучения основам математического анализа.

Из Таблицы 4 видно, насколько различаются подходы изучения темы «производная» для базового и профильного уровней. В учебных пособиях присутствуют задачи разного уровня, от самого элементарного до уровня задач повышенной сложности.

Далее, на основе ряда научно-педагогических работ, проанализируем различные методики обучения нахождения производной.

Производная является центральным понятием дифференциального исчисления. Поэтому, очень важно в процессе обучения учащихся началам дифференциального исчисления, обратить внимание на методы преподавания данной темы.

Очень важно, что в настоящее время в методиках преподавания дифференциального исчисления учитываются как современные требования к уровню образования, так профильная и уровневая дифференциация.

В Таблице 5 проведен сравнительный анализ статей по методике преподавания основ дифференциального исчисления в школе.

Таблица 5.

Сравнительный анализ статей по методике преподавания основ дифференциального исчисления в средней школе

Название	Теоретический аспект
Козлов С. Рождение математического понятия.	В статье дана стандартная методика преподавания основ дифференциального исчисления. Изложение основ темы «Производная» традиционно начинается с геометрического подхода и примеров из классической механики, а именно: с рассмотрения задачи о касательной и скорости механического движения. Далее следует строгое определение понятия производной. Объяснение темы сопровождается небольшим экскурсом в историю математики, в котором рассматривается становление понятия производной. Приведенная автором методика годится для вводного занятия по основам дифференциального исчисления. Методика подачи учебного материала подходит больше всего для базового уровня. Основным достоинством методики, приводимой автором, является использование исторических материалов, поэтапная подача учебного материала, строгое определение понятие производной. К недостаткам следует отнести отсутствие научной новизны, т.к. работа не содержит принципиально новых подходов.
Кожухов С. Читаем график производной.	Очень часто учащиеся и абитуриенты сталкиваются с заданиями, в которых требуется определить те или иные характеристики функции по графику функции производной. Например: «По графику производной функции $y = f'(x)$ определите точки экстремума». Несмотря на то, что в школьном курсе алгебры и начала анализа подобным задачам уделяется достаточное время, у школьников и абитуриентов они вызывают определенные трудности. Это обуславливает актуальность данного вопроса. Автор статьи предлагает стандартный алгоритм для решения задач такого типа. В статье рассматриваются как стандартные, так и нестандартные задачи по исследованию функции посредством производной. Статья не содержит новых научных результатов.
Кац М. Физический материал на уроках математики.	В работе методика преподавания основ дифференциального исчисления строится на использовании некоторых физических понятий. Для раскрытия темы «Производная» используются как традиционные понятия механического движения, так и из других разделов физики, в частности, электродинамики. При таком подходе производная рассматривается как скорость изменения физической величины. Например, мгновенная скорость характеризует быстроту изменения перемещения, ускорение – быстроту изменения скорости. Таким образом, мгновенная скорость является производной перемещения, а ускорение - производной скорости. Далее, наряду со стандартным подходом к объяснению производной, автор использует некоторые понятия классической электродинамики, а именно, электрический ток представлен как производная электрического заряда.

Название	Теоретический аспект
	Этот учебный материал соответствует базовому уровню Для более углубленного изучения предмета и профильного уровня излагаются основы интегрального исчисления. Вводится понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.
Электронный ресурс infourok.ru	На сайте представлен вариант обобщающего урока по теме «производная». К достоинствам урока можно отнести элементы модульного обучения. В качестве примера можно привести различные варианты самостоятельной работы учеников: разноуровневая работа по карточкам, в парах, и т.д. При этом учитывается уровневая дифференциация учеников. К недостаткам стоит отнести устаревшую подачу учебного материала, очень слабым использованием компьютерных средств.
Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов.	Монография принадлежит крупным математикам Р. Куранту, Г. Роббинсу. По мнению авторов, книга призвана сократить разрыв между школьной математикой и важными для современного естествознания и техники разделами математики. Изложение материала начинается с элементарных понятий, плавно переходя к современным разделам математике и технике. В книге доходчиво, живым языком изложены элементарные понятия начал анализа, их связь с естествознанием и техникой. Книга представляет интерес в том числе и в качестве учебного материала по основам математического анализа как на базовом, так и на профильном уровнях.

Как следует из Таблицы 5, многие авторы для объяснения темы производной функции используют конкретные примеры из курса физики и других естественнонаучных дисциплин.

Например, предлагается найти скорость химической реакции через 3 с, скорость и ускорение материальной точки, определить ток как скорость изменения электрического заряда. Подобные примеры наглядно поясняют основной смысл производной как скорости изменения функции и способствуют лучшему усвоению основ дифференциального исчисления.

§5. Анализ содержания задачного материала темы «Производная» в учебниках алгебры и начал анализа разных авторов

Проанализируем изучение темы «Производная» на примере ряда учебных пособий.

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый и профильный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко [50].

Практические задачи также учитывают уровневую дифференциацию.

Пример рассматриваемых задач:

- стандартного уровня сложности.

Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}(0{,}2)^n.$$

- повышенного уровня сложности.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

если

$$x_n = \frac{1}{n+1};\ x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: базовый и углубл. уровни / Ш. А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева [49].

В учебнике для самостоятельной работы учащихся предложено большое количество задач разной сложности, требующих «творческого подхода»

Приведем несколько примеров.

«Найти мгновенную скорость движения точки, если $s(t) = 2 - 3t$».

«Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке $A(2; 0{,}5)$».

«Найти точки перегиба функции $f(x)$ если:

$$f(x) = x^5 - 5x^2».$$

3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый и профильный уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко [51].

Практический материал содержит большое количество подробно разобранных задач, в том числе, задачи, которые предлагаются на тестированиях.

Примеры задач различной степени сложности.

Базовый уровень.

Найти производную функции:

$$y = (x^3 + 1)\cos 2x.$$

Профильный уровень.

Найти производную функции:

$$y = \sqrt{\ln x}.$$

Повышенная сложность:

Под каким углом пересекаются графики функций:

$$y = \sqrt{2x + 1},\ y = 1.$$

4. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / под ред. М.И. Сканави [44].

В сборнике в подробном виде представлены задачи различной категорий сложности.

Найти производные функций.

Базовый уровень.

$$y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{3}.$$

Профильный уровень.

$$y = tg(sinx).$$

Повышенная сложность.

$$y = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}.$$

5. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2-ч частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Мордкович А.Г. [52], [53].

К учебнику прилагается отдельный задачник, в котором представлены задачи трех уровней сложности. Составлены в соответствии с требованиями и программами тестов.

Приведем типовые примеры.

Базовый уровень.

«Найдите скорость изменения функции $y = h(x)$ в точке x_0:

$$h(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -2».$$

Средняя сложность.

«Найдите производную функции:

$$y = \frac{x^3}{2x+4}».$$

Повышенная сложность.

«Проведите касательную к графику заданной функции так, чтобы она проходила через начало координат: $y = e^{x/3}$».

На примере ряда научно-педагогических работ тема производной является центральной в процессе обучения учащихся началам анализа, чем и обусловлена повышенная внимательность к методике ее преподавания в научно-педагогической литературе.

В методиках последнего времени находят отражения современные требования к уровню образования, равно как и профильная и уровневая дифференциация.

1. Козлов С. Рождение математического понятия. [56] В практическом плане, в работе рассмотрено несколько примеров для первого урока, в которых проводится вычисление производной, как предельного переходя отношения приращений. Один из таких примеров: «Найти производную функции $y = x^2 - 3x + 4$».

2. Кожухов С. Читаем график производной. [55]. С практической стороны в статье, в разобранном примере, приведен ряд нестандартных задач: «По графику производной $y = f'(x)$определите:

- количество точек графика функции y = f(x), в которых касательная перпендикулярна оси Oy;

- количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых касательная образует с положительным направлением оси Ox угол 60°;

- абсциссу точки графика функции $y = f(x)$, в которой угловой коэффициент касательной принимает наименьшее значение».

3. Кац М. Физический материал на уроках математики. [54]. Разобран целый ряд прикладных задач на первую и вторую производные.

«Материальная точка движется по закону

$x = 4 + 2t + t^2$.

а) Найдите скорость и ускорение. Убедитесь, что при замене начальной координаты (4м) на другие ее значения, например, на 0, 1, 5 (м) величина скорости не изменится, а при замене начальной скорости (2м/с) на 0, 1, 5 (м/с) величина ускорения не изменится.

б) По найденному ускорению определить скорость и координату».

4. Электронный ресурс infourok.ru [60].

Предлагается ряд нестандартных задач, в том числе, рассматривается пример на химический смысл производной.

«Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию, задается зависимостью: $p(t) = t^2/2 + 3t - 3$.

Найти скорость химической реакции через 3 секунды».

5. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов [57].

В качестве интересного практического приложения можно рассмотреть следующую задачу из этой книги:

«Докажите, что производная функции $f(x) = x^n$равна $f'(x) = nx^{n-1}$

Используя разложение выражения $x_1^n - x^n$ на множители».

Заметим, что в отличие от других разделов алгебры и начал анализа методика изучение темы производной в иностранной литературе не отличается существенно от принятых в России, о чем свидетельствуют весьма популярные издания [55-59].

Проблемы, возникающие при преподавании «производной», связаны с тем, что разнообразие способов и методов, используемых для решения задач по этой теме значительно шире, чем те, что изложены в подавляющем большинстве учебников. В связи с этим, выпускники часто показывают неудовлетворительные результаты. Объём знаний и всех типов задач, которые представлены в большинстве учеников совершенно недостаточно и роль методики преподавания значительно возрастает.

§6. Анализ диссертационных исследований и опыта работы учителей по изучению производной в школьном курсе математики

Понятие производной входит в содержание основных понятий курса алгебры и элементов математического анализа, изучаемого в общеобразовательной школе. Изучение этого предметного содержания осуществляется в 10-11/11 классах (в зависимости от того, какие базовые программы и учебники пользуются в образовательном процессе). И методики введения понятия производной, методики обучения использованию понятий математического анализа всегда были и остаются предметом как научного рассмотрения, так и предметом методических поисков учителей практиков [3 и др.].

Такое положение обосновывается тем, что введение понятий анализа требует глубокой пропедевтики. Например, введению понятия «производная функции в точке» должны предшествовать введение: понятий «предел функции в точке» (точка может быть и бесконечной), «непрерывность функции в точке»; теоремы о пределах и др. В свою очередь, организация пропедевтической работы должна быть обоснована, то есть иметь определённые принципы (или подход), по которым будут отбираться задачи и задания средствами которых учитель сможет подвести школьника к восприятию нового понятия «производная».

Эта проблема отмечается не только учителями математики, но и экспертами, разработчиками контрольно-измерительных материалов. В частности, И.В. Ященко в своей аналитической справке о результатах ЕГЭ 2019 отмечает низкий уровень владения выпускниками умениями читать графики функций, читать графики производной функции, различать точки экстремума функции и её экстремумы [19]. Эти же ошибки отмечаются и многими учителями практиками. То есть, проблема обучения школьников элементам математического анализа хотя и не нова, но является современной и актуальной. Об актуальности выделенной проблемы свидетельствуют и те исследования, которые осуществляются в этом направлении. Анализ тенденций проблематики исследований подтверждает наше утверждение.

Действительно. В своей работе [2] ставится и решается проблема совершенствования методов обучения элементам математического анализа средствами программных средств поддержки. Так автором этой работы предлагается вопросы теории производной вводить средствами компьютерной среды GeoGebra. С одной стороны, этот подход имеет перспективы. Однако, в работе автора, при наличии анализа существующих методик введения понятий темы «Производная» мы не увидели чёткой целесообразности использования среды с методической точки зрения: есть алгоритмы построения графиков функций средствами GeoGebra, есть задачи, решаемые в среде, но нет методики.

В дипломной работе Хажиахметовой Ю.Э. [16] поднимаются вопросы неформального освоения основных понятий элементов анализа, изучаемых в школьном курсе математики. Для этого автор предлагает систему дифференцированных заданий, подводящих школьников к более глубокому и осмысленному пониманию физического смысла производной. Однако разработки учебных материалов, представленные в дипломное, соответствуют тем заданиям, которые существуют во многих учебных и методических пособиях таких авторов как А.Г. Мордкович, М.И. Шабунин и др. По существу, сама идея диплома очень интересна, но до конца всё-таки не освещена, потому как не описана технология отбора или создания таких дифференцированных заданий.

Интересная работа представлена на сайте Пермского государственного педагогического университета «Производная и её приложение» [12]. В работе ставится вопрос о том, как обучать элементам анализа в классах разной профильной направленности. Результаты, полученные в этой работе очень интересны, и могут быть полезны как как для начинающих учителей, так и для учителей, имеющих стаж работы. К примеру, поставленную проблему автор решает посредством специального комплекса задач разного профиля: математического, физического, экономического, естественно-научного и др. Самое интересное, что, используя свои комплексы, автор подводит школьников разного профиля к общим вопросам теории производной так, как будто бы эти дети одновременно изучали одни и те же источники.

Выводы по первой главе

1. Приведенные выше материалы по теме «Производная» не содержат принципиально новых научных результатов и основаны на устаревших подходах. Большим недостатков указанных работ является слабое использование информационно-компьютерных технологий. Таким образом, проведенный сравнительный анализ учебников по алгебре и началу анализа разных авторов позволяет выявить их преимущества и недостатки.

2. Анализ выпускных работ, анализ практики введения понятий элементов математического анализа при обучении школьников математике свидетельствуют о том, что многие направления исследований ориентированы на то, чтобы как можно больше задействовать интуицию школьников и наглядность. В рассмотренных работах мы не нашли исследований, в которых бы вопросы обучения началам анализа рассматривались с позиции их глубокой пропедевтики. Что и объясняет направление нашего поиска.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§7. Методические рекомендации по обучению теме «Производная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы

В теории и методике обучения идея дифференциального исчисления, заключающаяся в представлении функции как линейной в достаточно малой окрестности точки, проявляет *первое* направление пропедевтической работы – подробное изучение линейной функции.

Второе направление пропедевтики – работа над понятием приращения аргумента и приращения функции. Здесь важно у обучающихся на ряде примеров сформировать очень чёткое представление о том, что отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ (или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) является функцией от Δx.

И *третье* направление связывают с введением понятия касательной к кривой, как средства понимания геометрического смысла производной, с одной стороны. И, как инструмента развития у обучающихся геометрической интуиции, с другой.

В соответствии с выделенными направлениями пропедевтики в *первом* подходе к моменту введения понятия производной обучающиеся должны быть знакомы с определением линейной функции и видом её графика. Обучающиеся должны понимать, что всякая прямая, не параллельная оси ординат, является графиком некоторой линейной функции. Кроме того, очень важно, чтобы учащиеся имели отчётливое представление об угле, составленном прямой и осью абсцисс, называемым углом наклона прямой. И основным результатом пропедевтической работы должно стать знание о связи линейной функции и её графике, которое можно сформулировать так: если линейная функция задана формулой $y = kx + b$, то тангенс угла наклона прямой, являющейся её графиком, равен k.

Второе направление пропедевтики реализуется через введение понятий приращения аргумента и приращения функции: $\Delta x, \Delta y$ ($\Delta f(x)$). Причём обучающимся следует пояснить, что символ Δ заменяет слово «разность», но его нельзя рассматривать в отрыве от переменной, то есть за символом Δ следует обозначение переменной. И основные равенства, содержащие этот символ, таковы: $x - x_0 = \Delta x,$ то есть $x = x_0 + \Delta x;$

$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$ то есть $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0).$

В реализации этой линии велика роль геометрических иллюстраций: приращение аргумента и функции может быть положительным, отрицательным, равным нулю, и как следствие, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ может принимать как положительное, так и отрицательное или равное нулю значение.

В этом направлении среди упражнений на закрепление уместно давать такие, в которых бы использовались введённые понятия. Для примера рассмотрим следующие задания:

Найти $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если a) $y = x^2$; b) $y = x^3$; c) $y = 3x^2 + 2x + 1$;

$$d)\ y = ax^2 + bx + c;\ \ e)\ y = kx + b.$$

Для того, чтобы в последствии сформировалось правильное представление о производной функции в точке, решение подобных заданий должно сопровождаться построением правильного алгоритма действий.

Приведём *пример* алгоритма вычисления отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции $y = kx + b.$

Шаг 1. Зафиксируем x_0.

Шаг 2. Дадим приращение аргументу, получим $x = x_0 + \Delta x.$

Шаг 3. Найдём значение функции в точке x_0, получим $y(x_0) = kx_0 + b.$

Шаг 4. Найдём значение функции в точке $x_0 + \Delta x,$ получим: $y(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b.$

Шаг 5. Найдём приращение функции, получим:

$\Delta y = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = k(x_0 + \Delta x - x_0) = k\Delta x.$

Шаг 6. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, получим: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$

Здесь же важно формировать характерную особенность линейной функции: для неё отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянно и равняется угловому коэффициенту графика функции. Кроме того, уместно показать обучающимся то, что если в некотором промежутке положительному Δx соответствует положительное Δy (или $\Delta x < 0$ соответствует $\Delta y < 0$), то функция в этом промежутке возрастает; верно и обратное утверждение. В противном случае, если Δx и Δy имеют в некотором промежутке разные знаки, то функция – убывает. Важно выяснить геометрический смысл отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, который естественным образом связан с физическим смыслом этого отношения, для установления которой уместно рассматривать задачи с физическим содержанием. Откуда можно сделать вывод, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно рассматривать и как среднюю скорость изменения любой функции на промежутке с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$.

Третье направление, как отмечалось выше, связано с введением понятия касательной к графикам функций. Понятие «касательная» в школьном курсе математики, встречается по отношению к окружностям, а потому, достаточно понятно для обучающихся, и оно легко усваивается по отношению к выпуклой кривой. Общий смысл слова «касательная» позволяет проводить касательные и в более сложных случаях, например, к синусоиде даже тогда, когда касательная к кривой в одной точке пересекает эту кривую в другой точке (Рис. 5, 6).

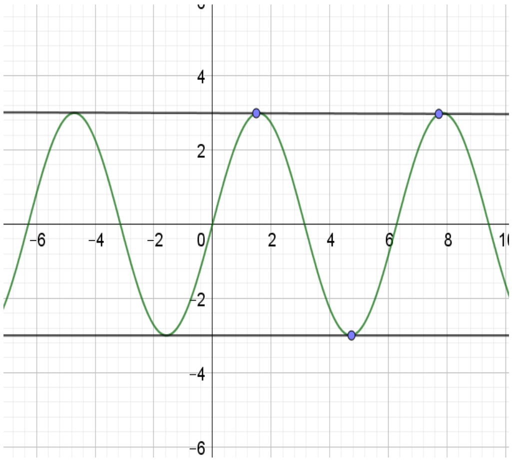

Рис. 5. График функции.

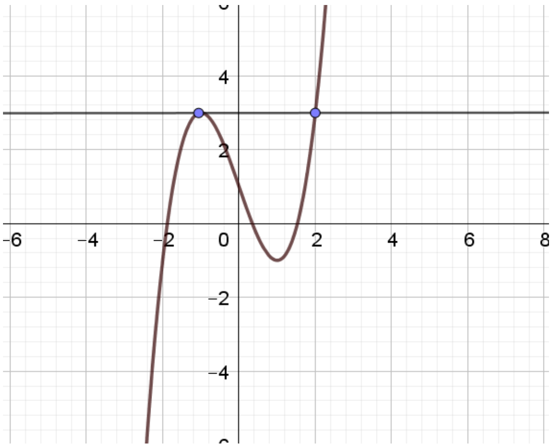

Рис. 6. График функции.

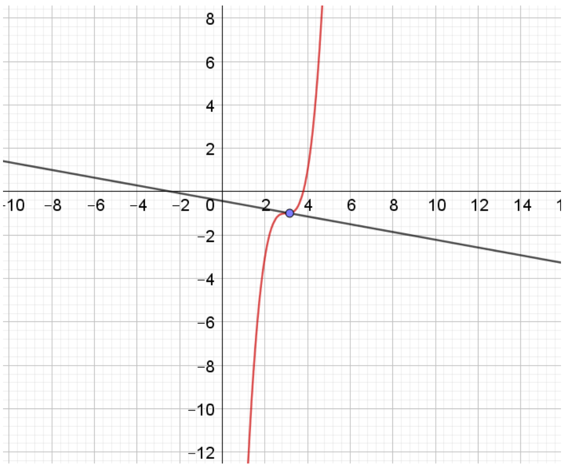

Рис. 7. График функции.

Рис. 8. График функции.

На первых этапах некоторые недоумения у обучающихся вызывают примеры того, что касательная пересекает график функции. Приведённые примеры (Рис. 7, 8) показывают, что число общих точек на кривой несущественно, расположена ли кривая по одну сторону от кривой или по разные, тоже несущественно. Например, на рисунках 6, 7 графики функций расположены по одну сторону от прямых AD и AE (Рис. 9), часть графика (Рис. 10). Но ни одна из них не является касательной.

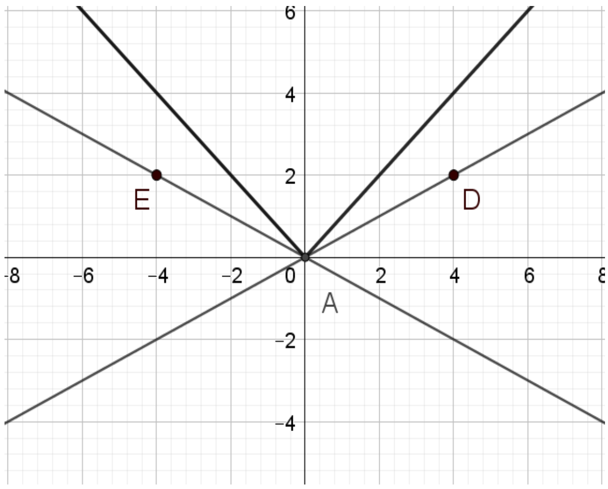

Рис. 9. График функции.

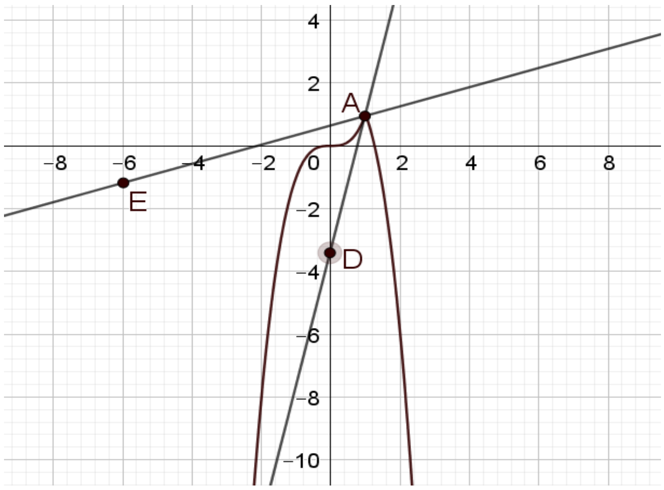

Рис. 10. График функции.

Существенным для касательной является следующее положение: среди всех прямых, проведённых через одну и ту же точку на кривой, касательная теснее всех прямых примыкает к этой кривой вблизи данной точки. Работа в этом направлении подводит обучающихся к понятию касательной как предельного положения секущих. Для более компактного и целесообразного изложения уместно использовать динамические среды. К примеру, динамическая среда GeoGebra позволяет наблюдать изменение положение прямой от секущей до касательной.

Все три направления пропедевтики понятия «производная» могут быть реализованы *тремя способами*: 1) рассредоточено, начиная с 7 класса по мере изучения программного материала по теории функций на интуитивной основе; 2) непосредственно перед введением понятия «производная»; 3) концентрированно и в том месте курса алгебры и начал анализа, в котором они становятся необходимыми.

Введение понятия производной функции в точке осуществляется посредством задач, подводящих к определению производной. В их число входят задачи, которые лежат у истоков этого понятия: проведение касательной к кривой и вычисление скорости в данный момент времени.

Система задач, выступающая в роли мотивировки введения производной, должна удовлетворять определённым требованиям: задачи должны давать достаточно материала для обобщения; сюжеты их должны быть разнообразными и построенными на известном материале; количество задач должно быть ограничено, поскольку отыскание предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, лежащее в основе решения, громоздко и однообразно.

Примерами таких задач могут быть задачи, основная часть которых относится к рассмотрению прямолинейного движения (вычисление скорости и ускорения, где аргументом служит время). Или задачи на вычисление теплоёмкости тела (аргумент – температура). И, наконец, обобщающая задача на вычисление скорости изменения функции. При решении всех этих задач, по существу, находится производная в точке и обращается внимание на то, что можно рассматривать функцию, значениями которой являются числа.

Задача 1. Зная, что зависимость пути от времени при свободном падении тела выражается формулой $s = \frac{gt^2}{2}$, найти скорость тела в момент времени t_0.

Решение. Найдём среднюю скорость, соответствующую промежутку Δt: $v_{\text{ср}} = gt_0 + g\frac{\Delta t}{2}$ (формула получена на этапе пропедевтики). Чем меньше Δt, тем скорость ближе к скорости, соответствующей моменту времени t_0, поэтому, что вполне естественно, по определению принять значение скорости в момент времени t_0 предел отношения средней скорости при $\Delta t \to 0$. При фиксированном t_0 средняя скорость является функцией от Δt. Это значит, что можно ставить вопрос об отыскании предела этой функции при $\Delta t \to 0$.

Обозначим искомую скорость $v(t_0)$. Принимая, по определению $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, получаем: $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(gt_0 + g\frac{\Delta t}{2}\right)$.

Воспользовавшись теоремами о пределах, учитывая, что g и t_0 являются постоянными получим: $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(gt_0 + g\frac{\Delta t}{2}\right) = gt_0$. То есть $v(t_0) = gt_0$.

Если t изменяется, то каждому значению t соответствует своё значение $v(t)$ (при условии существования предела). Это значит, что формулой $v(t) = gt$ задаётся функция с аргументом t.

Задача 2. Зависимость пути от времени выражается формулой $s = f(t)$, где$s -$ путь,$t -$ время. Найти скорость в момент времени t_0.

Задача 3. Скорость движения задана формулой $v = \varphi(t)$, где $t -$ время, $v -$скорость. Найти ускорение в момент времени t_0.

Задача 4. Количество тепла, получаемого телом при нагревании от 0^0 до T^0 выражается формулой $Q = \Phi(T)$, где $T -$ температура. Найдите теплоёмкость тела при заданной температуре T_0.

Задача 5. Дать определение скорости изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Решение всех задач уместно оформлять в виде таблицы (Табл. 6). Пятая задача решается в общем виде, поэтому в последнем столбце окажется алгоритм вычисления производной функции в точке на основе определения.

Таблица 6

Пример оформления задачи 1 и 5

$s = f(t)$ *найти* $v(t_0)$	$y = f(x)$ *Определить скорость изменения функции в точке* x_0
$\Delta t \colon f\ (t_0 + \Delta t)$	Зафиксируем x_0 и придадим ему приращение Δx, после чего найдем значение функции в точке $x_0+\Delta x$: $f\ (x_0 + \Delta x)$
$\Delta s \colon f\ (t_0 + \Delta t) - f(t_0)$	Найдем приращение функции: $\Delta y = f\ (x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
$v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\ (x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
$v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} =$ $= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$	Находим предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f\ (x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Кроме того, уместно привести примеры функций, не имеющих производной в конкретной точке. Для примера это $y = |x|$ при $x = 0$.

После введения понятия производной начинается этап её применения и изучения её свойств, как результата решения, а затем и обобщения задач на определение некоторых физических величин, как задач по использованию полученных алгоритмов.

Пятая задача решается в общем виде, поэтому в последнем столбце окажется алгоритм вычисления производной функции в точке на основе определения.

Кроме того, уместно привести примеры функций, не имеющих производной в конкретной точке. Для примера это $y = |x|$ при $x = 0$.

После введения понятия производной начинается этап её применения и изучения её свойств, как результата решения, а затем и обобщения задач на определение некоторых физических величин, как задач по использованию полученных алгоритмов.

Содержание по применению производной к исследованию функций, построению графиков функций, решению задач на оптимизацию в разделе темы «Производная и её применение» имеет особое значение. Это утверждение обосновывается тем, что материал этой темы используется при изучении многих классов функций, изучаемых в школьном курсе математики. Кроме того, основные понятия и теоремы теории дифференциального исчисления используются как внутри курса математики, так и вне его (физика, экономика, химия и др.).

Содержание материала по применению производной к исследованию функций вызывают методические трудности по сравнению с введением понятия производной. Они возникают в связи с тем, что в этом материале сложнее логическая структура и, для общеобразовательной школы, основной факт для построения всей необходимой теории, а это теорема о том, что непрерывная на отрезке функция принимает на нём наибольшее и наименьшее значения, - не входит в рамки школьного курса. По существу, возникает методическая задача отбора необходимого минимума учебного материала, нахождения доказательства теорем, на языке доступном для обучающихся.

В теории и методике существуют различные варианты изложения темы. Например, А.Г. Мордкович [25, 26] для иллюстрации содержания необходимых и достаточных условий возрастания и убывания функции рассматривает координату точки как динамическую модель: точка движется в положительном направлении – функция возрастает, в отрицательном направлении – функция убывает; скорость столкновения как производная от координаты по времени т.д. Или, А.Н. Колмогоров [19], пытаясь найти приёмы изложения недоказанных фактов теории дифференциального исчисления, как то, теорема Лагранжа, предлагает её геометрическую интерпретацию. При этом, громоздкая формулировка теоремы, заменяется более сильной её интерпретацией. Вот эта формулировка: Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка. Тогда между любыми двумя точками a и b этого промежутка найдётся такая точка $c,$ что $f(b) - f(a) = c \cdot (b - a)$.

Подводя итог можно сказать, что суть *методических рекомендаций* по изучению производной и её приложений заключается в следующем.

1. Выписать основные понятия, входящие в тему.
2. Выявить те из них, для введения которых необходима пропедевтическая работа. Спроектировать систему задач и заданий для включения их различные темы курса математики.
3. Определить линию введения основных понятий темы.
4. Спроектировать систему заданий для освоения основных понятий темы.
5. Спроектировать систему диагностических и корректирующих заданий.
6. Спроектировать самостоятельную работу обучающихся (то есть выявить те разделы, которые могут быть освоены обучающимися самостоятельно).

7. Спроектировать систему контролирующих заданий.

В предлагаемом проекте предлагается следующая схема соответствия между этапами введения понятий (Табл. 7).

Таблица 7

Схема соответствия между этапами формирования понятия и заданиями, реализующими их

Этапы формирования понятия	Соответствия	Задания, реализующие этапы формирования понятия	Демонстрационные и динамические средства визуализация этапа освоения понятия
1.1. Мотивация введения понятия;	1.1. ⟶ 1.2.; 1.1. ⟶ 1.3. 1.1. ⟶ 2.3.	1.2. Задания на применение ранее изученных понятий и теорем;	1.3. Демонстрация (создание проблемной ситуации);
2.1. Выделение существенных свойств понятия;	2.1. ⟶ 1.2. 2.1. ⟶ 2.2. 2.1. ⟶ 3.2.	2.2. Задания практического характера;	2.3. Эксперимент (аналитический или динамический) на выявление существенных свойств понятия;
3.1. Синтез выделенных свойств, формулировка определения понятия;	3.1. ⟶ 3.2. 3.1. ⟶ 4.2.	3.2. Задания на построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам;	3.3. Задачи на построение различных моделей, удовлетворяющие указанным свойствам;
4.1. Усвоение логической структуры определения понятия;	4.1. ⟶ 4.2. 4.1. ⟶ 5.2. 4.1. ⟶ 3.2.	4.2. Задания на распознавание объектов, принадлежащих объёму понятия;	4.3. Задания на выявление свойств понятий по готовым или динамическим конструкциям;
5.1. Запоминание определения понятия;	5.1. ⟶ 5.2. 5.1. ⟶ 4.2.	5.2. Задания на дополнение условий, на распознавание и выделение следствий;	5.3. Задания на использование выделенных свойств при построении геометрических моделей ситуации;
6.1. Применение понятия;	6.1. ⟶ 6.2. 6.1. ⟶ 7.2.	6.2. Задания на составление родословной понятия; на применение понятия в различных ситуациях;	6.3. Задания на использование свойств понятия в решении задач из другой темы;
7.1. Установление связей изучаемого понятия с другими понятиями.	7.1. ⟶ 7.2. 7.1. ⟶ 6.2.	7.2. Задания на систематизацию понятий.	7.3. Задания, по решению задач на использование понятий темы.

Процессуальную часть технологии обучения элементам математического анализа составляют методы, формы и приёмы учебно-познавательной деятельности обучающихся; методы и формы деятельности преподавателя по управлению активизацией процессами изучения содержания темы «Производная».

Основным методом управления процессами освоения старшеклассниками учебного содержания, является метод постановки учебных задач, по освоению приёмов выделения основного отношения, заложенного в понятии, построение моделей и их отношений и др. Поэтому с целью освоения этих приёмов необходимо контекстно дополнить учебное содержание учебными задачами по их освоению. Технологически это будет выглядеть как встраивание одного типа задач в другой. Например, приём поиска решения математической задачи формулируется так:

1. Выделить условие и требование задачи.
2. Выделить свойства объектов, входящих в условие задачи.
3. Выделить свойства объектов, входящих в требование задачи.
4. Построить логические связи между свойствами объектов, входящих в условие и свойствами объектов, входящих в требование.
5. Наметить план поиска решения задачи.
6. Реализовать план (решить задачу).

Эффективность использования вышеописанной технологии можно отследить, наблюдая как обучающиеся актуализируют знания, как структурируют содержание учебного материала, как решают задачи на расшифровку информации (построение неизвестных аналитических или геометрических моделей функций и пр.).

Этапы реализации проекта.

1. Подготовительный этап включает анализ теоретического и практического материала по теме «Производная», отбор основных понятий, его структурирование, подбор заданий для введения, освоения и закрепления изучаемого материала. Создание базы диагностических и контролирующих материалов, источником которых являются материалы учебного пособия и материалы КИМ. Отбор наиболее эффективных способов организации взаимодействия учителя и обучающихся, обучающихся в парах/группе на уроке. Намечается план и последовательность изучения основных понятий.

2. *Этап реализации* технологии обучения элементам математического анализа. На этом этапе осуществляется учебный процесс для чего идёт разработка уроков изучения, закрепления и обобщения учебного материала, осуществляется корректировка намеченного плана.

Для примера рассмотрим следующую ситуацию. На уроке закрепления понятия «касательная к графику функции» учитель, с целью того, чтобы выяснить: понимают ли обучающиеся существенные свойства касательной, предложил школьникам задания на готовых чертежах, среди которых чертежи, представленные на Рис. 15, 16. И получил следующие результаты: 80% обучающихся, по рисунку 12 сказали, что прямая, изображённая на рисунке не является касательной; по рисунку 13 около 95% обучающихся отметили то, что прямая AD не является касательной, а вот 73% школьников отметили прямую AE, как касательную к графику функции.

В связи с выявленными обстоятельствами, учитель должен ещё раз вернуться к рассмотрению понятия «касательная» и, как следствие, откорректировать свои планы.

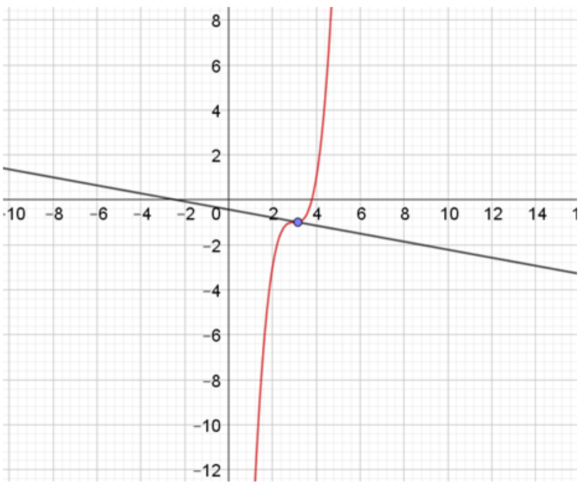

Рис. 15. График функции.

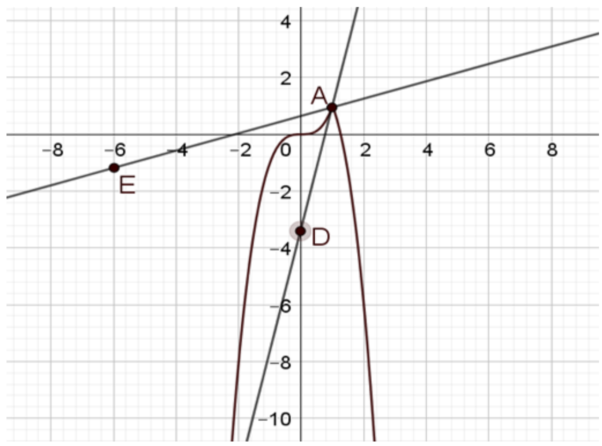

Рис. 16. График функции.

3. *Этап диагностики* технологии включает процедуры диагностики и контроля как способов организации обучения, так и учебного содержания.

Планирование изучения темы «Производная» (табл.8. Карта изучения темы «Производная»). *Средства поддержки учебного процесса*: [23, 24, 25, 26, 29, 30, 42]. *Замечание*: Сайт [42] предоставляет: демонстрации видео уроков, конспекты уроков в текстовой форме; тренажёр и тесты для проверки освоенного знания.

Таблица 8

Карта изучения темы «Производная»

№	Тема	Основные образовательные результаты	Средства поддержки учебного процесса
1	Предел последовательности;	*Уметь*: изображать предел последовательности на бесконечности; вычислять несложные пределы;	9,10, 14,15
2	Сумма бесконечной геометрической прогрессии;	*Знать*: определение геометрической прогрессии и её компонентов; формулу суммы прогрессии;	9,10, 14,15
3	Предел функции;	*Уметь*: изображать предел функции в точке и на бесконечности; вычислять несложные пределы;	9,10, 14
4	Определение производной;	*Владеть:* алгоритмом вычисления производной как предела $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$;	9,10, 14
5	Вычисление производных: Таблица производных. Типовые задачи; Правило дифференцирования. Типовые задачи; Дифференцирование функции $y = f(kx+m)$ Дифференцирование сложных функций;	*Знать*: формулы вычисления производных; правилами вычисления производных *Уметь:* использовать правила и формулы вычисления производных в заданиях типа: $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$; $f(x) = e^{-x}(x-2)$; $f(x) = sin^2(3x+5)$;	9,10, 14
6	Уравнение касательной к графику функции;	*Уметь:* находить тангенс угла наклона касательной, проходящей через заданную точку графика функции; находить уравнение касательной к графику функции по заданным условиям;	8, 9,10,11,14, 15
7	Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы;	*Знать*: определение критической точки; признаки возрастания и убывания функции и признаки максимума и минимума функции; алгоритмы нахождения промежутков монотонности и точек экстремума функции;	9, 10, 14

Продолжение Таблицы 8

№	Тема	Основные образовательные результаты	Средства поддержки учебного процесса
		Уметь: находить промежутки монотонности и точки экстремума функций;	
8	Построение графиков функций;	*Уметь* использовать теоремы анализа для исследования и построения графиков функций;	9, 10,14
9	Применение производной для нахождения наибольших, наименьших значений величин.	*Уметь:* использовать теоремы анализа для решения задач на оптимизацию.	8, 9,10,11,14, 15

В качестве системы диагностических и корректирующих заданий, непосредственно по теме «Производная» предлагается учащимся ответить на следующие вопросы:

1. Что называется производной функции в точке?
2. Что такое дифференцирование?
3. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
4. Что значит вычислить производную по алгоритму?
5. Какие правила дифференцирования вы знаете?
6. Как взаимосвязаны непрерывность функции в точке и ее дифференцируемость в этой точке?
7. Как находить производную сложной функции, обратной функции?

По каждому из вопросов учащимся предлагается задача для самостоятельного решения на занятии. Затем, эти задачи разбираются у доски с активным вовлечением различных групп учащихся с учетом их уровневой дифференциации.

К разделам, которые могут быть освоены учащимися самостоятельно, можно, в частности, отнести следующие:

- по вычисленному углу наклона касательной к графику в определенной точке, записать уравнение касательной,
- определить по прямолинейному уравнению движения точки, является ли оно равномерным, равноускоренным или равнозамедленным;

- определить, при каком значении x касательная к данному графику параллельна оси абсцисс.

§8. Анализ задач ЕГЭ по теме «Производная»

Основное предназначение единого государственного экзамена заключается в получении объективного результата об уровне *владения* выпускниками знаниями по курсу математики и по алгебре и началам анализа в том числе. По результатам оценочных процедур, по существу, можно выявить типичные проблемы в математической подготовке учащихся, а значит построить методическую систему работы с обучающимися по их недопущению или устранению.

Для того, чтобы провести анализ задач ЕГЭ по элементам теории дифференциального исчисления, изучаемым в школе, необходимы параметры, на основании которых можно осуществить их анализ.

Решение математической задачи выполняется на основе и с помощью познавательных мыслительных операций, общих учебных действий и операций. При решении математических задач по алгебре и началам анализа существенное место занимают специальные математические действия и операции (арифметические действия, вычисление производной, построение графиков и др.). А также общие методы науки, предмета математики и конкретные методы решения определённого класса задач. Следовательно, в один класс предметных математических задач, в частности задач по теме «Производная», можно объединить все задачи, основой решения которых будет одна математическая теория. В аспекте проблематики проводимого исследования, это будет теория дифференциального исчисления. Но внутри этого класса задач нужно осуществить более детальную типизацию, которая определяется, к примеру, приёмами решения задач, специфическими действиями, приёмами поиска решения задач, спецификой тематики и др.

Возможна типизация задач, основанная на особенностях запоминания учебного материала. К примеру, в исследованиях по педагогической психологии доказано, что процесс запоминания и воспроизведения материала является больше реконструкцией, нежели точным повторением. Оно не сводится к простому накоплению различных математических фактов, к их механическому нагромождению одних на другие и к готовности извлечь материал, который хранится в памяти, в таком же виде, как он запечатлён. В действительности запоминаемый материал влияет на ранее изученный, организуясь в системные группы. Поэтому типизация задач может быть осуществлена так же и на основе той роли, и места, которое занимает каждое понятие в системе других понятий.

Для примера, рассмотрим структуру понятий, входящих в понятие производной, представленной на схеме (Рис. 11). На её основе можно составить комплексы задач: а) на осознание места данного понятия в системе понятий, входящих в систему понятий темы «производная»; б) на установление связей и зависимостей между понятиями темы; в) на установление связей между теоремами и понятиями какого-либо компонента. И, как следствие, задачи ЕГЭ, как средства диагностики достижения основных образовательных результатов по вопросам дифференциального исчисления, должны диагностировать у обучающихся наличие знания, понимания и владения этими знаниями.

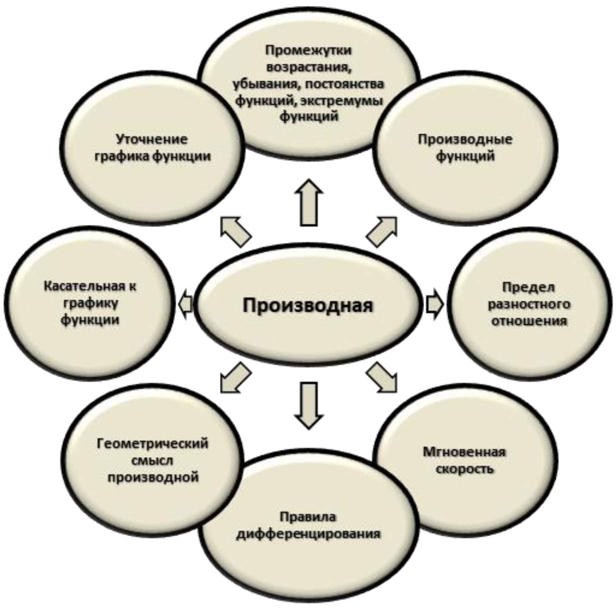

Рис. 11. Схема структуру понятий, входящих в понятие производной.

При этом в систему знаний материала должны входить не только предметные знания по теме «производная», но и способы их использования в решении задач того или иного вида. В свою очередь, владение этими способами показывает понимание обучающимся места проверяемого знания в системе понятий темы «производная»; умений устанавливать связи и зависимости между понятиями темы или связи между теоремами и понятиями какого-либо компонента темы. А это значит, что критериями анализа математических задач могут быть следующие:

1) проверяемое математическое знание;

2) место проверяемого знания в системе понятий темы «производная» и в системе понятий школьного курса математики;

3) способы использования знаний в решении задач по теме «производная»;

4) приёмы использования знания в решении класса задач, не входящих в тему «производная» (приёмы переноса знания в другую область (внутри и межпредметные связи)).

Рассмотрим примеры задач ЕГЭ по теме «Производная и её приложения» [23, 24, 28,34].

Задача 1. На рисунке (Рис. 12) изображён график $f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённый на интервале $(-5; 5)$.

Найдите: точки минимума функции $f(x)$.

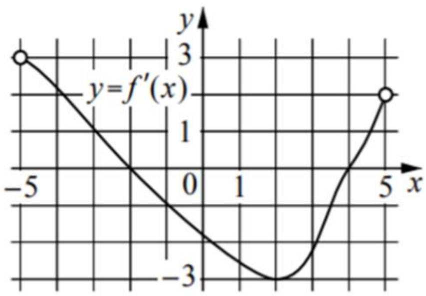

Рис. 12

Для решения этого задания необходимо владеть понятием «точка минимума/максимума функции», знать достаточный признак минимума/максимума. Обычно, при изучении производной, достаточный признак хорошо осваивается обучающимися и не вызывает у них трудностей. Школьники достаточно хорошо справляются с заданиями типа: найдите точки минимума/максимума функции; найдите точки экстремума и т.д. Но подобные задания не указывают на то, что обучающиеся усвоили материал о точках минимума/максимума не формально. Об этом свидетельствуют и результаты ЕГЭ: около 50% выпускников не справляются с подобными заданиями [34]. То есть, рассмотренный пример контролирующего задания ориентирует учителя на использование в обучении не только базовых задач, но *и заданий на усвоение существенных свойств понятий*. К примеру, существенным свойством точки минимума является то, что в малой окрестности этой точки (x_0) для всех значений переменной x выполняется неравенство: $f(x) > f(x_0)$. Это значит, что при переходе через эту точку функция меняет направление монотонности. Откуда, на основании признака минимума, получаем: если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то точка x_0- точка минимума. В противном случае, точка x_0 – точка максимума. Отсюда, со всей очевидностью следует: график производной функции пересекает ось абсцисс в точках экстремума.

Поэтому, если выпускник не справляется с подобными заданиями, то есть, не умеет читать графики производной функции, то понятие «точка минимума/максимума» освоено формально, или, совсем не освоено.

Следующая задача из материалов ЕГЭ относится к типу задач на проверку владения способами использования знаний в решении задач по теме «Производная» (Рис.13).

Задача 2. На графике дифференцируемой функии $f(x)$ отмечены точки x_1, x_2, …,x_n. Найдите количчество точек, в которых производная функции больше нуля.

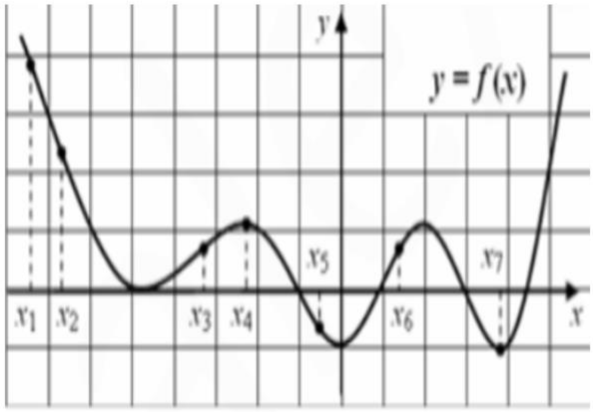

Рис. 13

Решение этого задания основано на использовании геометрического смысла производной: Значение производной функции в точке, если функция имеет производную в этой точке, равно значению тангенса угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

По требованию задачи производная должна принимать положительные значения, поэтому угол наклона каждой касательной к положительному направлению оси абсцисс должен быть острым. Очевидно, что точки касания расположены на тех участках, где график функции возрастает. Ясно, что в решении этой задачи геометрический смысл производной используется как приём прочтения графической ситуации, то есть, условие «производная больше нуля» переводится на язык геометрии. И суть приёмов, которые используются в решении заданий подобного типа заключается в том, что аналитические требования задачи переводятся на язык геометрии. Если же выпускник не справляется с заданиями, то есть, не умеет переводить требование задачи, заданного в аналитической форме на язык геометрии и обратно, то это свидетельствует о том, что понятие «геометрический смысл производной» освоено формально, или, совсем не освоено.

Рассмотрим ещё одну задачу на использование геометрического смысла производной (рис.14).

Задача 3. На рисунке изображен график функции *f (x)* и касательные, проведенные к нему в точках с абсциссами A, B, C и D. В правом столбце указаны точки A, B, C и D. Пользуясь графиком поставьте в соответствие каждой точке значение производно в ней.

Точки	Значения производной
A, B, C и D	1) 1,4; 2) -0,7; 3) 0,5; 4) -1,8

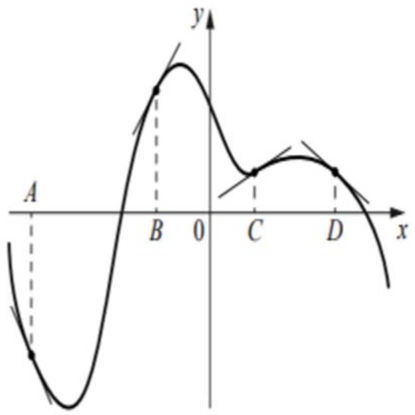

Рис. 14

Очевидно, что в этом задании также проверяется владение понятием производная функции в точке и её геометрический смысл. Но это задание ориентировано на проверку не только чисто математического знания. В нём присутствует контроль по проверке метапредметных умений. То есть, для решения этого типа заданий необходимо не просто применить знания по предмету, но и показать умения выстраивать соответствия, сравнивать и др. Следовательно, если ученик не выполнил такого типа задание, то причина может крыться не только в недостатке предметных знаний, но и в том, что ученик не владеет приёмами анализа, приемами сравнения и др.

Для того, чтобы достичь положительного результата в решении заданий подобного типа, необходимо обучать школьников вышеназванным приёмам.

Итак, анализ заданий ЕГЭ по теме «Производная» показал, что все предлагаемые задания ориентированы на глубокое понимание выпускником основных понятий теории дифференциального исчисления, изучаемых в школьном курсе алгебры. А понимание, в свою очередь, требует разбора различных ситуаций, возникающих в задаче, это, во-первых. И во-вторых, требует систематического использования аппарата анализа в решении математических задач. В этой связи, можно составить рекомендации к типам задач и заданий по освоению основных понятий темы «Производная» и способам их освоения.

Рекомендации по обучению школьников решать задачи по теме «Производная» на ЕГЭ.

1) Систематически, без привязки к изучаемой теме включать наглядные задания по анализу геометрических ситуаций на поиск угла наклона касательной; на поиск промежутков монотонности; на поиск знака производной в зависимости от поведения функции на заданном промежутке; на поиск точек экстремума; на поиск экстремумов функции; на поиск наибольшего или наименьшего значений функции и др. Проводить устные обсуждения наглядных заданий во время устного опроса систематически и без привязки к теме урока.

2) Использовать аппарат математического анализа для решения задач, не входящих в тему «Производная». Например, использовать графический метод при исследовании уравнений и неравенств с параметром.

§9. Описание и результаты педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе учебного учреждения (МУП СОШ №4 г. Оленегорска, Мурманской обл., 11 классы). В эксперименте принимали участие 75 человек.

Суть эксперимента заключалась в следующем. На первом этапе происходило знакомство с классом: посещение уроков, дополнительных занятий, проведение частных бесед со старшеклассниками. В частных беседах с ребятами мы выясняли их интересы, склонности и желание продолжать образование в учебных заведениях различного уровня.

По результатам опроса и наблюдений обучающихся, бесед с учителем математики, который работает в этом классе, учителей предметников было выявлено, что в классе один отличник, 13 человек успевают на «4» и «5». И хотя в классе почти половина обучающихся имеет по предмету математики отметку «3», практически все обучающиеся в дальнейшем собираются продолжить своё образование в вузе, для поступления в который необходим сертификат о сдаче экзамена по математике на профильном уровне, то есть, можно утверждать, что внешние мотивы обучения математике есть.

Полученные данные свидетельствуют о намерениях школьников серьёзно заниматься математикой. Но действительность учебных занятий свидетельствовала об обратном: во время посещения уроков мы не наблюдали со стороны многих школьников особого усердия в учении (многие приходили не подготовленными к уроку, во время урока были рассеяны и пр.).

Для того, чтобы понять причину такого положения нами было проведено анкетирование. Анкета содержала вопросы типа: Каким должен быть преподавание математики, чтобы Вам было интересно на занятиях? Что для Вас является важным в преподавании? Какие методы обучения Вам больше нравятся? И др. Вопросы мы старались составить так, чтобы они по некоторым параметрам как бы перекрещивались или накладывались друг на друга. Каждый из участников опроса имел возможность ответить положительно или отрицательно на любой из представленных вопросов. То есть, по существу каждый из вопросов оценивался из 100%. Затем полученные вопросы мы выстраивали по убыванию, тем самым определяя значимые условия комфорта обучающихся на уроках математики. После опроса и обработки полученных ответов нами был получен следующий результат.

Опрошенные ставят на первое место методы преподавания предмета (диалоговые формы, активные формы, демонстрации, примеры из жизни и практики, новые формы, типа деловых игр, социально значимых проектов и пр.) – более 60%. На втором месте личные качества преподавателя (душевность, доброта, справедливость, понимание, отзывчивость, сопричастность и пр.) – более 30%. На третьем месте чувство юмора – белее 25%. На четвёртом месте перцептивные способности преподавателя (восприятие собеседника, эмоциональность в общении и пр.). На пятом месте – умение выстраивать партнёрские отношения с аудиторией и с отдельно взятым обучающимся.

Далее, на втором этапе эксперимента, мы разработали материалы для входной диагностики обучающихся для выявления уровня владения материалом, необходимым для восприятия содержания темы «Производная».

В диагностические материалы входили задания КИМ [23] на чтение графиков функций, на построение графиков по заданной формуле или условиях, на описание свойств функций по графической и аналитической модели.

По результатам входной диагностики выло выявлено, что обучающиеся слабо владеют умениями: читать графики функций; описывать свойства функции, заданной в аналитическом виде; записывать формулу функции по заданным свойствам. Например, задания вида: а) Найдите квадратичную функцию $f(x)$, если $f(-2) = 2, f(2) = 2, f(4) = 8$; б) Найдите какую либо функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию $f(x + 1) = x^2 + 2x + 2$ не выполнил ни один старшеклассник, даже отличник.

Большие трудности вызвали задания типа: Изобразите на координатной плоскости линию, задаваемую уравнением $y = \sqrt{2 - x}$.

По результатам вводного тестирования стало ясно, что для того чтобы тема «Производная» была освоена школьниками необходимо провести пропедевтическую работу. Для этого на занятиях спецкурса нами были рассмотрены вопросы о построении графиков элементарных функций, об описании свойств элементарных функций, о чтении графиков функций.

По результатам проделанной работы мы вновь провели диагностику по материалам КИМ. Полученные результаты показали, что более 65%

учащихся стали справляться с заданиями, остальные 35% обучающихся выполняли задания частично.

На следующем этапе мы проводили уроки по теме «Производная». По изучению темы проводилась контрольная работа, в которой были задания на вычисление простейших производных, производных сложных функций, задания на нахождение точек экстремума и др. По результатам этой контрольной работы получены следующие результаты: с заданиями на вычисление производной простейших функций, многочленов справились все ребята; с заданиями на вычисление производной сложной функции – справились 75% обучающихся; с заданиями на нахождение точек экстремума справились 50% школьников. Ошибки, которые допускали школьники в этом задании заключались в том, что после отыскания точек экстремуму, дети находили экстремум функции и ответ записывали в виде пары чисел. Причем эти ошибки допустили даже три ученика, успевающих по математике на «5». Подобные ошибки свидетельствуют о том, что для освоения понятий анализа необходимо продолжительное время. Что и подтверждает наши рекомендации, данные в работе.

Помимо перечисленных ошибок, нами были отмечены положительные сдвиги в умениях школьников читать графики, писать уравнения касательных. С заданиями этого вида не справились только два человека.

В целом, по результатам проведённого эксперимента можно сказать следующее: изучение элементов математического анализа необходимо предварять пропедевтической работой. Изучение собственно материала по теме «Производная» необходимо продолжать и вне пройденной темы, то есть доводить умения, до навыка использования знаний по математическому анализу.

Выводы по второй главе

1. Изложенные выше подходы к системе задач на производную позволяют сделать выводы о получаемых учащимися ценностных ориентирах. Это:

- формирование умения к логическим рассуждениям,
- освоение эвристических приемов,
- формирование интеллектуальных умений, в том числе, выбор стратегии решения задач, анализ и сопоставление данных,
- развитие учебно-познавательной активности и ее индивидуализация,
- формирование способностей выявлять закономерности,
- привлечение учащихся к групповой деятельности и обмену своими предложениями в ходе свободного общения на занятиях.

2. Можно выделить следующие универсальные учебные действия, которые усваивают учащиеся:

- анализ текста задачи и выработка оптимального пути решения,
- моделирование изложенных ситуаций в тексте задачи, использование необходимых знаково-символических средств математического анализа,
- способность к воспроизводству решения задачи,
- анализ отдельных этапов при решении задач и их применение в смежных учебных дисциплинах,
- объяснение и доказательство способа действия при решении задач.

3. Спроектированная система по теме «Производная» являются важным инструментом формирования предметных компетенций учащихся и предопределения их профессиональной ориентации в будущем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложение материала с использованием приведенной схемы – это процесс, подталкивающий учащегося к самостоятельной работе по изучению темы и к развитию мышления для поиска требуемого решения прикладных задач. Подталкивание учащегося к выбору наиболее рационального способа решения является главным фактором для развития навыков логического мышления. Реальный опыт показывает, что регулярное использование производной в практике преподавания задач в алгебре, геометрии, физике даёт значительный эффект в целом.

Производная, сама по себе, является инструментом, с помощью которого описываются очень многие явления реального мира, и познания развитие геометрического мышления у учащихся является очень важной задачей.

Приходится констатировать, что в последнее время, к сожалению, происходит постоянное снижение качества общей подготовки старшеклассников по естественнонаучным предметам. Не последнюю роль в этом играет снижение уровня преподавания начал анализа. Далее это вызывает серьезные проблемы при базовой подготовке специалистов, столь необходимой во время стремительного развития современных технологий во всех сферах деятельности.

Если ситуацию с преподаванием по другим разделам математики, хоть в какой-то мере, можно считать приемлемой, то внимание к началам анализа ослаблено настолько, что качество обучения опустилось до неприемлемо низкого уровня.

Анализ выпускных работ, анализ практики введения понятий элементов математического анализа при обучении школьников математике свидетельствуют о том, что многие направления исследований ориентированы на то, чтобы как можно больше задействовать интуицию школьников и наглядность. Но в изученных работах, мы не нашли исследований, в которых бы вопросы обучения началам анализа рассматривались с позиции их глубокой пропедевтики. Что и объясняет направление нашего поиска.

Суть методических рекомендаций по изучению производной и её приложений заключается в следующем: Выписать основные понятия, входящие в тему; Выявить те из них, для введения которых необходима пропедевтическая работа; Спроектировать систему задач и заданий для включения их различные темы курса математики; Определить линию введения основных понятий темы; Спроектировать систему заданий для освоения основных понятий темы; Спроектировать систему диагностических и корректирующих заданий; Спроектировать самостоятельную работу обучающихся (то есть выявить те разделы, которые могут быть освоены обучающимися самостоятельно); Спроектировать систему контролирующих заданий.

Анализ заданий ЕГЭ по теме «Производная» показал, что все предлагаемые задания ориентированы на глубокое понимание выпускником основных понятий теории дифференциального исчисления, изучаемых в школьном курсе алгебры. Что требует систематичности разбора различных ситуаций, возникающих в задаче. В связи с чем необходимы специальные задачи и задачи по реализации требований. Рекомендации к типам задач и заданий по освоению основных понятий темы «Производная» и способам их освоения: 1) Систематически, без привязки к изучаемой теме включать наглядные задания по анализу геометрических ситуаций на поиск угла наклона касательной; на поиск промежутков монотонности; на поиск знака производной в зависимости от поведения функции на заданном промежутке; на поиск точек экстремума; на поиск экстремумов функции; на поиск наибольшего или наименьшего значений функции и др. Проводить устные обсуждения наглядных заданий во время устного опроса систематически и без привязки к теме урока. 2) Использовать аппарат математического анализа для решения задач, не входящих в тему «Производная».

По результатам проведённого эксперимента можно сказать следующее: изучение элементов математического анализа необходимо предварять пропедевтической работой. Изучение собственно материала по теме «Производная» необходимо продолжать и вне пройденной темы, то есть доводить умения, до навыка использования знаний по математическому анализу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: учеб. для 10 кл. школ с углубл. изучением математики. — 4-е изд., дораб. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад. образов., изд-во «Просвещение», 2006; — 270 с.
2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. -4-е изд. -М.: Рос. акад. наук, Рос. акад-. образования, изд-во «Просвещение», 2006. 240 с.
3. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.',. Евстафьева Л.П. Геометрия, 10-11: кн. для учителя. -М.: Просвещение, 2005. 128 с.
4. Андреенкова Н.Л. Обучение математике в классах гуманитарного профиля, Известия Волгоградского государственного технического университета: межвуз. сб. науч. ст. № 4 / ВолгГТУ. – Волгоград, 2006. – 136 с.
5. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе.— М.: Учпедгиз, 1984.
6. Барыбин К. С. Методика преподавания алгебры: Пособие для учителя.— М.: Просвещение, 1995.
7. Александров П. С, Колмогоров А. Н. Алгебра: Пособие для учащихся средней школы.— М.: Наука, 1992.
8. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX—X классы: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1983.
9. Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем.— М.: Просвещение, 1991.
10. Возняк Г. М., Гусев В. А. Прикладные задачи на экстремум.—М.: Просвещение, 1995.
11. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые.— М.: Наука, 1998.
12. Виленкин Н. Я. и др. Современные основы школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1995.
13. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г. Производная и интеграл: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1996.

14. Виленкин Н., Мордкович А. Что такое производная / Н. Виленкин, А. Мордкович // Квант. – 1975. – № 12. – С. 10–18.
15. Волошинова А. Интернет-ресурсы для учителя математики // Математика / Еженед. учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». -2008.-№ 15.-С. 17-18.
16. Габович И. Предел функции / И. Габович // Квант. – 1980. – № 10. – С. 40–42.
17. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Изд-во «Вербум- М», «Издательский центр «Академия», 2003. — 432 с.
18. Дорофеев Г. В. Понятие функции в математике и в школе // Математика в школе.— 1978.— № 2.
19. Земляков А., Ивлев Б. 17 задач по анализу / А. Земляков, Б. Ивлев // Квант. – 1977. – № 1. – С. 36–39.
20. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 10: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. -256 с.
21. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 11: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. -336 с.
22. Кипнис И. М. Задачи на составление уравнений и неравенств.— М.: Просвещение, 1989.
23. Колмогоров А. Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение. 2005.
24. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике.— М.: Просвещение, 1997.— Ч. I.
25. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике.— М.: Просвещение, 1997.— Ч. II.

26. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика.— М.: Просвещение, 1995.
27. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики.— М.: Просвещение, 1997.
28. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. Основные понятия современного школьного курса математики.— М.: Просвещение, 1994.
29. Контрольно-измерительные материалы (КИМ) ЕГЭ. Режим доступа: http://fipi.ru/sites/default/files/document/2015-2019/variant/maprof_101.pdf (свободный). Дата посещения: 13.09.2019.
30. Литвиненко В.Н. Задачи на развитие пространственных представлений: кн. для учителя. — М., Просвещение, 1991. 127 с.
31. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. М.: Просвещение, 2002. - 175 с.
32. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / А.Я. Блох, В.А. Гусев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. — 416 с.
33. Мордкович А. Г., Смышляев В. К. Алгебра и начала анализа: Пробный учебник для 9—10 классов средней школы.— М.: Просвещение, 2001.
34. Медяник Л. И. Учителю о школьном курсе геометрии.— М.: Просвещение. 1994.
35. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы / Под ред. А. И. Фетисова.— М.: Просвещение, 1997.
36. Настольная книга учителя математики. Нормативные документы, методические рекомендации и справочные материалы для организации работы учителя / Сост. Л.О. Рослова. М.: при обучении геометрии. / Современные проблемы Астрель, 2004. - 429 с.
37. Никифорова М.А. Новые компьютерные технологии // Математика / Учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». 2004 - № 2931.
38. Никифорова М.А. Преподавание математики и новые компьютерные технологии // Математика в школе. — 2005. — № 7. — С. 72-80

39. Никольский С. М., Потапов М. К. Алгебра: Пособие для само-образования.—М.: Наука, 1994.
40. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения.— М.: Просвещение. 1997.
41. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 класс: учеб. Для бщеобразовательных учебных заведений с углубл. и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2003. 224 с.
42. Сайт «Интернет урок». Режим доступа: https://interneturok.ru/book/algebra/10-klass/algebra-i-nachala-matematicheskogo-analiza-10-11-klass-mordkovich-a-g (платный). Дата посещения: 14.09.2019.
43. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2005. - 255 с.
44. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Базовый уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19 814
45. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Профильный уровень, http://www.school.edu.ru/dokedu.asp7obn 0=19812
46. Столяр А. А. Методы обучения математике.—Минск: Вышейшая школа, 1996.
47. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». – М.: Омега-Л, 2014. – 134 с.
48. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Ч. II. Среднее (полное) общее образование. М-во образования Рос. Федерации.- М., 2012.
49. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. М.: Московский психолого-соц. ин-т; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 1999. - 240 с.
50. Хвостенко Е.Е. Методика обучения алгебре и началам анализа в 10-11 классах гуманитарного профиля с использованием компьютера. Дис. канд. пед. наук : 13.00.02 : Махачкала, 2000. - 176 с.

51. Хинчин А. Геометрический смысл производной / А. Хинчин // Квант. – 1977. – № 2. – С. 35–37.
52. Яглом И. О хордах непрерывных кривых / И. Яглом // Квант. – 1977. – № 4. – С. 27–29.
53. https://infourok.ru/proizvodnaya_funkcii.__obobschayuschiy_urok_v_10_klasse.-121840.htm
54. K.A. Stroud, Dexter J. Booth. Foundation Mathematics / Palgrave Macmillan, London – 2009 – p. 320
55. Joanne Lockwood, Richard Aufmann. Introductory and Intermediate Algebra: An Applied Approach / Brooks Cole – 2013 – p. 293
56. Matt Parker. The Maths Book: Big Ideas Simply Explained / DK – 2019 – p. 307
57. Lara Alcock. How to Think About Analysis / Oxford University Press – 2014 – p. 272
58. Gerald B. Folland. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications / Wiley-Blackwell – 1999 – p. 416.