МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения старшеклассников решению тригонометрических уравнений в школьном курсе математики»

Студент Л.В. Борзенкова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент Н.А. Демченкова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования заключается в том, что владение приемами решения тригонометрических уравнений – одно из основных требований к предметным результатам освоения математики в рамках ФГОС СОО. Тема «Тригонометрические уравнения» считается одной из самых сложных в математике. Это обусловлено множеством формул, периодичностью функций, бесконечным множеством корней уравнений, большим количеством методов решения. Решение тригонометрических уравнений побуждает учащихся к творческой деятельности, аналитическим способностям, логическим обоснованиям, доказательным рассуждениям. В современных учебниках алгебры и начал анализа достаточно подробно раскрыта тема «Тригонометрические уравнения», но возникает сложность в методике обучения учащихся для эффективной подготовки к итоговой аттестации.

Методика обучения решению тригонометрических уравнений в диссертации разработана с учетом:

– поставленных учебных целей перед учащимися, учитывая их потребности и способности;

– содержания теоретического и задачного материала в учебно-методической литературе по теме «Тригонометрические уравнения»;

– определенных форм и методов учебного процесса;

– организации дифференцированного обучения.

Эффективность обучения решению тригонометрических уравнений зависит от методики обучения и от подбора системы задачного материала. Методике обучения решению тригонометрических уравнений посвящены работы Е.С. Березанской [5], И.Т. Бородули [10], Б.М. Ивлева [21], А.П. Карпа [24], А.Н. Колмогорова [2], Ю.М. Колягина [26], А.Г. Мордковича [43, 44], М.К. Никольского [48] и др.

Анализ ранее выполненных диссертационных работ, посвященных тригонометрическим уравнениям, показал, что они были рассмотрены в следующих аспектах: проблема исследования корней тригонометрических уравнений в курсе математики средней школы и педагогического института (Г.И. Бржозовский 1967 г.) [12]; проблема методических особенностей обучения тригонометрии учащихся профильных классов (О.В. Захарова 2010 г.) [20]; проблема формирования системы тригонометрических задач для лучшего усвоения материала старшеклассниками (А.Н. Марасанов 2012г.) [37]; проблема усвоения материла по тригонометрии с использованием электронных технологий (Б.Б. Молоткова 2014г.) [36]; проблема изучения тригонометрии на основе деятельностного подхода и технологии дистантного обучения как способа развития математических способностей (С.Н. Суханова 2002г.) [64].

Как показал опыт исследователей, проблема организации обучения решению тригонометрических уравнений не нова, но актуальность ее проявляется в поиске новых особенностей обучения в средней школе, в разработке дифференцированной системы обучения с последующим внедрением в образовательный процесс.

Выявляется **противоречие** между потребностью учащихся в разноуровневой организации процесса обучения по теме «Тригонометрические уравнения» и недостаточным научно-методическим обеспечением этой темы в образовательном процессе. Отмеченное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических основ обучения решению тригонометрических уравнений в условиях дифференциации.

Объект исследования: процесс обучения алгебре и началам математического анализа учащихся средней школы.

Предмет исследования: тригонометрические уравнения в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования: выявление методических особенностей обучения решению тригонометрических уравнений в курсе общеобразовательной школы в условиях дифференциации.

Гипотеза исследования состоит в том, что процесс обучения решению тригонометрических уравнений в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы будет более эффективным, если:

– спроектировать и внедрить в образовательный процесс дифференцированную систему тригонометрических уравнений.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Определить цели, задачи и результаты обучения теме «Тригонометрические уравнения» в рамках ФГОС.

2. Изучить содержание теоретического и задачного материала темы «Тригонометрические уравнения» в учебниках различных авторов.

3. Выделить основные типы тригонометрических уравнений и разобрать методы их решений.

4. Выявить типичные ошибки учащихся, совершаемые при решении тригонометрических уравнений.

5. Описать методику дифференцированного обучения темы «Тригонометрические уравнения».

6. Разработать методические рекомендации обучения решению тригонометрических уравнений.

7. Описать педагогический эксперимент.

Теоретико-методологическую основу исследования составили: основные положения дифференцированного обучения математике Р.А. Утеевой [68].

Базовыми для настоящего исследования явились также: основные положения теории и методики обучения решению тригонометрических уравнений А.Г. Мордковича, Ю.М. Колягиа, Ш.А. Алимова.

Методы исследования: анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта учителей математики по данной теме исследования; сравнительный анализ учебников и учебных пособий; систематизация и обобщение материала по теме.

Опытно-экспериментальная база исследования. Исследование проводилось на базе Новогородковской средней общеобразовательной школы (Московская область, Одинцовский район, поселок Новый городок).

Основные этапы исследования:

1. Анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ).

2. Определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3. Разработка собственной методики, разработка дифференцированной системы тригонометрических уравнений.

4. Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Научная новизна исследования заключается в:

– проектировании дифференцированной системы тригонометрических уравнений при подготовке к Единому государственному экзамену.

Теоретическая значимость исследования заключается в:

– выявлении методических особенностей обучения учащихся решению тригонометрических уравнений.

Практическая значимость исследования связана с тем, что представленные дидактические материалы, методические рекомендации, разработанная дифференцированная система заданий могут быть использованы в работе учителей математики, студентов педагогических вузов и колледжей.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались:

– достаточным количеством изученных и используемых источников;

– внедрением дифференцированной системы тригонометрических уравнений в образовательный процесс при подготовке учащихся общеобразовательной школы к Единому государственному экзамену.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в проектировании дифференцированной системы тригонометрических уравнений при подготовке к Единому государственному экзамену, в апробации и внедрении результатов исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течении всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

– II Международной Научно-практической Конференции «Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях» (3-9 июня 2019 г., г. Луганск);

– Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (ноябрь 2019 г., ТГУ).

Основные результаты исследования отражены в 4 публикациях [7-10].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения теме «Тригонометрические уравнения» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

2. Дифференцированная система тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 3 рисунка, 5 таблиц, список используемой литературы (81 источник). Основной текст работы изложен на 90 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§1. Из истории развития тригонометрических уравнений

Рассмотрим историческую справку развития тригонометрии и тригонометрических уравнений. Основоположником тригонометрии является Гиппарх (190 – 120 гг. до н.э.) – выдающийся астроном древнего мира. Гиппарх является основателем таблицы хорд дуг, которая в то время играла такую же роль, какую играет в наше время таблица синусов. К сожалению, таблица хорд Гиппарха утеряна и не дошла до наших дней.

Так же большой вклад внес Птолемей (100 – 160 гг.), он вывел две теоремы:

– о вычислении посредством хорд двух дуг, меньших полуокружности;

– о вычислении по хорде дуги хорды половины этой дуги.

Птолемей вычислил хорды дуг с промежутком в полградуса.

Далее весомый вклад в развитие тригонометрии вносит другой народ – индусы. Индусы определили, что для математических вычислений комфортней пользоваться не хордами, а полухордами или синусами. Кроме синуса индусы наблюдали и за другими функциями дуги: косинус и синус-верзус, который представляет разность между радиусом и косинусом. Индусы также ввели соотношения, которые в современных учебниках пишутся так: $sin^2t + cos^2t = 1; cost = si\,n(90^\circ - t)$.

В начале VII века важную историческую роль играли арабы. Аль Баттани (858 – 929 гг.) начинает вводить алгебраические формулы с использованием тригонометрических обозначений. В X веке Абуль Вафа (940 – 998 гг.) делает новые свершения в истории тригонометрии. Он открывает способ построения таблицы синусов с промежутком в полградуса и с точностью до девятого десятичного знака, вводит тангенс и котангенс.

В дальнейшем развитие тригонометрии переходит в Европу. В первой половине XIV века в Европе в тригонометрических вычислениях появляются тангенс и котангенс. Появляется учебник Иоганна Мюллера (1436-1476), известный под названием Региомонтана, который оформил тригонометрию как научную дисциплину и дал ей такое содержание, которое в главных чертах сохранилось до наших дней. И. Мюллер провел обширную работу по составлению тригонометрических таблиц. Он впервые составил таблицу синусов и тангенсов.

Величайший французский алгебраист Франсуа Виет (1540-1603) систематически применял буквенную символику к тригонометрии; привел решение тригонометрического уравнения третьей степени.

Современный вид тригонометрии придал Леонард Эйлер (1707 – 1783 гг.). Он дал определение тригонометрической функции, определил обратные функции. Эйлер установил знаки для углов в четырех координатных квадрантах, исходя из формул приведения, он первым открыл разложение тригонометрических функций в бесконечные произведения.

Символы $arcsin$ *и* $arccos$ впервые появляются в работах математика К. Шерфера (1716 – 1783 гг.) и французского ученого Ж.Л. Лагранжа (1736 – 1813 гг.). Ранее уже рассматривались данные символы Д. Бернулли (1700 – 1782 гг.). Общеустановленными $arcsin$ *и* $arccos$ стали лишь в конце XVIII столетия. Приставка «arc» от латинского «$arcus$» (дуга, лук), что означает смысл понятия: $arcsinx$, так как это угол (или дуга) синус, которого равен x.

Начиная с XVII в. тригонометрические функции начали использовать для решения тригонометрических уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, движения различных механизмов, для описания колебательных процессов, распространения волн, для изучения переменного электрического тока и т. д. Поэтому тригонометрические функции внимательно исследовались и приобрели немалое значение для математики.

В это время появились и тригонометрические формулы разности функций. Их внедрил английский математик Непер для упрощения вычислений с тригонометрическими функциями. Первый рисунок синусоиды появился в 1634 г.

А. Каньоли (1743-1816 гг.) первым решил тригонометрическое уравнение (1786 г.) $a \cdot cosA + b \cdot sinB = n$ с помощью подстановок $a = mcosB$ и $b = msinB$.

В 1906 г. в программе высших учебных заведений появились новые учебники. В учебнике алгебры Н.А. Шапошникова [71] давалась теория тригонометрических функций, тригонометрических уравнений и неравенств. Также использовались графики тригонометрических функций. В особенности отличался раздел «Тригонометрические уравнения». Рассматривалась как теория тригонометрических уравнений, так и решение задач на составление и исследование уравнений.

В.В. Репьев своей книге «Методика тригонометрии» 1937 г. уже предлагает общий алгоритм решения тригонометрических уравнений [54]:

1. Все функции, входящие в тригонометрические уравнения, выражают через какую-либо одну из функций, обычно через ту, которая определяется простейшим способом из уравнения.

2. Определяют значение этой функции из уравнения по общим способам решения уравнения.

3. Находят по полученным значениям функции значения неизвестного аргумента.

4. Проверяют полученные корни.

До середины шестидесятых годов прошлого века тригонометрия как предмет в школьном курсе математики была совершенно другой, нежели сейчас. В 9-10 классах учащиеся изучали отдельную дисциплину, под названием «Тригонометрия». Для изучения этой дисциплины было отведено 2 учебных часа в неделю. В конце 60-х годов в процессе реформы школьного математического образования раздел тригонометрии оказался менее представлен в учебных программах.

С 1969 г. обучение математике в общеобразовательной школе велось по учебнику Е.С. Кочеткова и Е.С. Кочетковой «Алгебра и элементарные функции» [31]. Программа тригонометрических уравнений была небольшой, состояла она из следующих параграфов: решение простейших тригонометрических уравнений, решение однородных тригонометрических уравнений, графический способ решения тригонометрических уравнений, решение более сложных тригонометрических уравнений. Этот учебник проработал в школе менее 10 лет.

Вскоре внедряется в образование учебник «Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы» (1975) А.Н. Колмогорова [25]. Теоретический материл по теме «Тригонометрические уравнения» в учебнике А.Н. Колмогорова был расширен по сравнению с учебником Е.С. Кочеткова. В учебнике приведены тригонометрические функции и их свойства, формулы сложения, тригонометрические уравнения.

В дальнейшем после перехода к одиннадцатилетней школе обучения, материал по теме «Тригонометрические уравнения» был значительно усилен, что мы можем видеть в учебниках алгебры и начал анализа А.Г. Мордковича [39, 40, 42], Ш.А. Алимова [38], Ю.М. Колягина [26].

§2. Требования к предметным результатам освоения по ФГОС

Е.А. Седова в примерной программе среднего (полного) общего образования «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» пишет, что «изучение курса алгебры и начал анализа на базовом уровне ставит своей *целью* повысить общекультурный уровень человека и завершает формирование относительно целостной системы математических знаний как основы для продолжения образования в областях, не связанных с математикой» [60, с. 42].

Далее автор отмечает, что «изучение на углубленном уровне ставит своей *целью* завершение формирования у обучающихся относительно целостной системы математических знаний как основы для продолжения математического образования в системе профессиональной подгоовки» [60, с. 42-43].

Изучение темы «Тригонометрические уравнения» на базовом уровне, в соответствии с ФГОС [69], направлено на достижение следующих *задач*:

– «овладение системой математических понятий, законов и методов, изучаемых а пределах основной общеобразовательной программы среднего (полного) общего образования, установление логической связи между ними;

– осознание и объяснение роли математики в описании и исследовании реальных процессов и явлений; представление о математическом моделировании и его возможностях;

– овладение математической терминологией и символикой, начальными понятиями логики и принципами математического доказательства; самостоятельное проведение доказательных рассуждений в ходе решения задач;

– выполнение точных и приближенных вычислений и преобразований выражений; решение уравнений и неравенств; исследование функций, построение графиков;

– способность применять приобретенные знания и умения для решения задач, в том числе задач практического характера и задач из смежных учебных предметов» [60, с. 43].

На углубленном уровне к перечисленным выше задачам добавляются:

– «становление мотивации к последующему изучению математики, естественных и технических дисциплин в учреждениях системы среднего и высшего профессионального образования и для самообразования;

– осознание и выявление структуры доказательных рассуждений, логического обоснования доказательств;

– овладение основными понятиями, идеями и методами математического анализа, способность применять полученные знания для описания и анализа проблем из реальной жизни;

– готовность к решению широкого класса задач из различных разделов математики и смежных учебных предметов, к поисковой и творческой деятельности, в том числе при решении нестандартных задач» [60, с. 43-44].

Т.А. Бурмистрова в сборнике рабочих программ по теме «Тригонометрические уравнения» пишет, что учащиеся должны:

– «уметь находить арксинус, арккосинус, арктангенс действительного числа, грамотно формулируя определение;

– применяь формулы для нахождения корней уравнений $cosx = a, sinx = a, tgx = a$;

– уметь решать тригонометрические уравнения: линейные относительно синуса, косинуса, тангенса угла (числа), сводящиеся к квадратным и другим алгебраическим уравнениям после замены неизвестного, сводящиеся к простейшим тригонометрическим уравнениям после разложения на множители;

– применять все изученные свойства и способы решения тригонометрических уравнений и неравенств при решении прикладных задач» [1, с. 22].

В требованиях к предметным результатам освоения углубленного курса математики по теме «Тригонометрические уравнения» (отражено Т.А. Бурмистровой в сборнике рабочих программ) читаем, что учащиеся должны:

– «применять свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа;

– решать однородные (первой и второй степени) уравнения относительно синуса и косинуса, а также сводящиеся к однородным уравнениям;

– использовать метод вспомогательного угла;

– применять метод оценки правой и левой части частей уравнения;

– уметь применять несколько метедов при решении уравнения;

– применять все изученные свойства и способы решения тригонометрических уравнений и неравенств при решении прикладных задач повышенной сложности» [1, с. 34].

§3. Дифференцированный подход как основа обучения решению тригонометрических уравнений

Термин «*дифференциация*» (от франц. – defferention; лат. – defferentia) – разделение, расчленение, расслоение целого на части, форсы, ступени [62].

Н.Г. Гончаров [13] рассматривает *дифференциацию* как разделение содержания образования, как обучение учащихся по различным учебным планам, отвечающим «как индивидуальным склонностям, способностям и интересам учащихся, так и задаче воспитания в школе будущих новаторов производства, талантливых математиков, техников и физиков, механиков и историков и т.д.».

Р.А. Утеева [68] в своей диссертации «Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе» выделяет шесть видов дифференциации: внешнюю, внутреннюю, профильную, уровневую, поисковую и непрерывную.

Внешняя дифференциация – выделение особых форм обучения, которые ориентированы на интересы, способности и потребности учащихся. Примеры форм обучения: факультативные занятия; курсы; классы с профильным изучением математики.

*Профильная дифференциаци*я – возможность учащихся получать образование по разным программам и учебникам. Такая дифференциация ярко выражена в различных типах учебных заведений (школа, лицей, гимназия). Изменение учебной программы должно быть не только по определенному предмету, а по всем. В общеобразовательной школе профильная дифференциация может быть представлена в виде факультативных курсов, специальных курсов для профильной математики.

Можно выделить три типа профильной дифференциации в математике – это базовый (математика, как элемент общего образования); углубленный (математика, как средство изучения закономерностей); профильный (математика, как основное средство познания). Ю.М. Колягин [27] выделяет следующие профили: гуманитарный, технический, физико-математический и экономический.

Внутренняя дифференциация – это вид уровневой дифференциации, который основывается на анализе знаний и умений. Такая дифференциация опирается на индивидуальные способности учащихся и осуществляется непосредственно на уроке математики.

Поисковая дифференциация – позволяет определиться учителю с типологическими группами учащихся в классе, а также следить за динамикой развития их способностей.

Непрерывная дифференциация – построение обучения, учитывающего способности не только групп, но и каждого учащегося. Непрерывная дифференциация представляет собой систему этапов возможностей учащихся от низшего к высшим.

Уровневая дифференциация – один из ведущих видов дифференциации. В научно-методической литературе существует несколько мнений по поводу количества уровней в уровневой дифференциации. М.И. Башмаков выделяет: базисный; основной; углубленный [5]. Его деление основывается на имеющем объеме знаний учащихся. Н.М. Рогановский [55] предлагает 2-х уровневую дифференциацию: первый уровень – общекультурный; второй – повышенный. Можно сделать определенный вывод, что уровневая дифференциация – разделение учащихся на группы в соответствии с их уровнем знаний и умений.

В магистерской диссертации в §9 будут использованы следующие виды дифференциации: уровневая (внутренняя), профильная (внешняя).

Любой вид дифференциации сопровождается дифференцированным обучением. Н.М. Рогановский дает следующее определение, *дифференцированное обучение* – «обучение, состоящие в том, чтобы, зная индивидуальные особенности каждого ученика – определить для него наиболее целесообразный и эффективный характер работы на уроке» [55].

После того, как учитель определил вид дифференциации, по которой будет осуществляться дифференцированное обучение в классе, необходимо разделить учащихся на типологические группы.

Р.А. Утеева в своей диссертации «Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе» при делении учащихся на типологические группы выбрала два критерия: «1) фактический уровень знаний и умений по предмету (теме, разделу, курсу); 2) уровень их усвоения» [68].

Фактический уровень знаний и умений выявляется посредством предметных результатов, которых учащиеся должны добиться при изучении предмета (темы, раздела, курса).

В каждом классе составляется перечень основных знаний и умений. Для примера перечня возьмем тему «Тригонометрические уравнения».

Элементы знаний: понятие простейшего тригонометрического уравнения; понятие уравнения, сводящегося к квадратному; понятие однородного тригонометрического уравнения; понятие разложения на множители; типы и методы тригонометрических уравнений; общие формулы корней тригонометрических уравнений. *Элементы умений*: умение решать простейшего тригонометрического уравнения; умение решать уравнения, сводящегося к квадратному; умение решать однородного тригонометрического уравнения; умение решать разложения на множители; умение находить корни тригонометрического уравнения на заданном промежутке.

Опираясь на перечень основных элементов, составляется и проводится контрольная работа по теме, чтобы включить дифференцированную форму обучения на уроках математики. Результаты контрольной работы, говорят об определенном уровне знаний учащихся.

На основе исследования Р.А. Утеевой [68] анализ результатов контрольной работы (по одной или нескольким темам) позволяет разделить учащихся в классе на четыре типологические группы.

I группа – учащиеся, которые в полном объеме и безошибочно выполнили предложенные задания из контрольной работы. Эти учащиеся имеют хорошие познания в области изученной темы (курса). Владеют основными методами решения задач и уравнений. Способны привести доказательства. Логически рассуждают при решении задачи, уравнения.

II группа – учащиеся, которые большинство заданий выполнили безошибочно, а некоторые частично верно. Это учащиеся, имеющие хорошие знания по пройденной теме (курсу). Но зачастую не способны привести доказательства, собственные примеры.

III группа – учащиеся, которые основную часть заданий выполнили частично, а задания повышенной сложности не выполнили. Эти учащиеся владеют минимальным количеством знаний и умений. Могут решать простейшие задания и по теме (курсу).

IV группа – учащиеся, которые вовсе не справились с большинством заданий контрольной работы. Эти учащиеся не могут решать основную массу предложенных заданий, они не обладают навыками решения задач, уравнений.

Далее в §9 мы объединим третью и четвертую группу в одну, чтобы дифференцированное обучение происходило по трем типологическим группам.

§4. Анализ рабочих программ темы «Тригонометрические уравнения» различных авторов

Для анализа рабочих программ темы «Тригонометрические уравнения» я выбрала трех авторов: А.Г. Мордковича [39, 42], Ю.М. Колягина [26] и Ш.А. Алимова [38]. Рабочие программы А.Г. Мордковича, Ю.М. Колягина и Ш.А. Алимова делятся на два уровня: базовый и профильный.

В программе базового уровня отводится 3 часа в неделю на изучение алгебры и начал анализа, в программе профильного уровня отводится 4 часа или 5 часов в неделю на алгебру и начала анализа. Приведем сравнительные таблицы 1 и 2, по рабочим программам базового уровня (3 ч. в неделю) и профильного (6 ч. в неделю) соответственно.

Таблица 1

Поурочное планирование рабочих программ базового уровня по теме «Тригонометрические уравнения» различных учебниках

Тема урока	Количество часов отводимых автором на изучение темы		
	А.Г. Мордкович	Ю.М. Колягин	Ш.А. Алимов
Уравнение $cos x = a$.	2	3	3
Уравнение $sin x = a$.	2	3	3
Уравнение $tg x = a$.	2	2	2
Уравнение $ctg x = a$.	2	-	-
Уравнения, решаемые методом замены переменной	2	2	2
Однородные уравнения	3	3	2
Метод разложения на множители	2	1	2
Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Тригонометрические уравнения».	-	1	1
Контрольная работа по теме «Тригонометрические уравнения».	1	1	1
Анализ контрольной работы	1	-	-
Итого часов	17	16	16

Из таблицы 1 видно, что все авторы в программе базового уровня много часов отводят изучению решения простейших тригонометрических уравнений: $cos x = a$ $sin x = a$, $tg x = a$ и $ctg x = a$. Это объясняется тем, что все типы тригонометрических уравнений сводятся к решению именно простейших тригонометрических уравнений и именно простейшие тригонометрические уравнения представлены на ЕГЭ базового уровня.

Традиционный метод решения многих видов уравнений – это метод замены переменной. Все авторы выделяют на отработку этого метода по 2 часа. Этот метод хорошо знаком из других разделов алгебры и начал анализа, поэтому на изучение требуется не так много времени.

Тригонометрические уравнения, которые необходимо освоить в базовой программе – это однородные тригонометрические уравнения. А.Г. Мордкович и Ю.М. Колягин выделяют на эту тему по 3 часа, по сравнению с Ш.А. Алимовым – 2 часа. Однородные тригонометрические уравнения объемны по изучению, так как они имеют несколько видов: первой степени, второй степени и неполные второй степени. Поэтому считаю необходимым выделить им достаточное количество времени как А.Г. Мордкович и Ю.М. Колягин.

Следующий метод решения тригонометрических уравнений по программе – метод разложения на множители. Ю.М. Колягин выделил 1 час на изучение, возможно это связано с тем, что этот метод решения неполного однородного тригонометрического уравнения, то есть повторение пройденного материала. Напротив, А.Г. Мордкович и Ш.А. Алимов выделили по 2 часа на данный метод, так как рассматривают решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители вместе с алгебраическими преобразованиями уравнения, с применением тригонометрических формул (формул двойного угла; формул приведения, формулы основного тригонометрического тождества и др.).

Урок обобщения темы «Тригонометрические уравнения» есть по программе у Ю.М. Колягина и Ш.А. Алимова. Это позволит учащимся систематизировать полученные знания и вспомнить пройденный материал перед контрольной. Для повышения активности учащихся на обобщающих уроках, учителю необходимо применять различные методы и приемы работы, повторяемый материал должен быть разнообразным. А.Г. Мордкович не предлагает такой урок.

На контрольную работу по теме «Тригонометрические уравнения» все авторы выделили по 1 часу. А вот анализ контрольной работы есть в программе только у А.Г. Мордковича. Анализ помогает выявить типичные ошибки, провести работу над их устранением, выявить недочеты в усвоении пройденного материала.

Далее сравним содержание рабочих программ профильного уровня по теме «Тригонометрические уравнения» в учебниках алгебры и начал анализа следующих авторов: А.Г. Мордковича [42], Ш.А. Алимова [38] и Ю.М. Колягина [26] в таблице 2.

Таблица 2

Поурочное планирование рабочих программ профильного уровня по теме «Тригонометрические уравнения» в различных учебниках

Тема урока	Количество часов отводимых автором на изучение темы		
	А.Г. Мордкович	Ю.М. Колягин	Ш.А. Алимов
Уравнение $cosx = a.$	1	3	3
Уравнение $sinx = a.$	1	3	3
Уравнение $tgx = a.$	1	3	2
Уравнен $ctgx = a.$	1	-	-
Уравнения, решаемые методом замены переменной	1	2	2
Однородные уравнения	2	2	2
Решение уравнений методом разложения на множители	1	1	1
Метод оценки левой и правой частей	-	1	1
Уравнения, решаемые методом вспомогательного угла (аргумента)	1	2	2
Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Тригонометрические уравнения».	-	1	2
Контрольная работа по теме «Тригонометрические уравнения».	1	1	1
Решение тригонометрических уравнений с применением формул (формул синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы и разности двух аргументов, формул приведения, формул двойного аргумента, преобразование сумм в произведение, преобразование в сумму)	5	+	+
Метод универсальной подстановки	1	-	-
Итого часов	16	19	19

На изучение простейших тригонометрических уравнений авторы выделяют достаточное количество часов (от 4 до 9). Если учащиеся не усвоят смысл формул корней тригонометрических уравнений, дальнейшее изучение типов и методов уравнений нецелесообразно. Так как решение всех типов тригонометрических уравнений сводится к решению простейших тригонометрических уравнений.

Метод разложения на множители и метод замены переменной хорошо знаком учащимся из других разделов алгебры и начал анализа, авторы выделяют по 1-2 учебных часа.

Однородным тригонометрическим уравнениям все авторы отводят по 2 часа, объясняется это тем, что однородные тригонометрические уравнения решаются несколькими методами.

Метод введения вспомогательного угла (аргумента) – это метод решения тригонометрического уравнения типа $Asinx + Bcosx = C$. А.Г. Мордкович отводит на его изучение 1 час после прохождения темы «Преобразование тригонометрических выражений». Ш.А. Алимов и Ю.М. Колягин выделяют на проработку этого метода по 2 часа.

Все авторы предлагают включить в поурочное планирование урок обобщения знаний, он нужен для повторения пройденного материала, устранения пробелов перед предстоящей контрольной работой. На уроке определяются проблемы учащихся по теме «Тригонометрические уравнения» и актуализируются знания.

Контрольная работа, рассчитанная у всех авторов на 1 час необходима, чтобы выявить типичные ошибки при решении тригонометрических уравнений, для планирования дальнейших действий по их устранению. А.А. Темербекова [65] определяет контроль, как часть процесса обучения, которая проявляется в выявлении и сравнении (на определенном этапе обучения) результата учебной деятельности с требованиями, которые задаются к этому результату программой.

Метод универсальной подстановки для решения уравнения типа $Asinx + Bcosx = C$ использует только А.Г. Мордкович, метод способствует логическому мышлению учащихся профильного уровня обучения.

§5. Содержание теоретического материала темы «Тригонометрические уравнения» в различных учебниках алгебры и начал анализа

В данном параграфе мы рассмотрим изучение темы «Тригонометрические уравнения» в учебниках алгебры и начала анализа (базовый и углубленный уровни) авторов Ю.М. Колягина [26], Ш.А. Алимова [38] и А.Г. Мордковича [40]. Для этого составим таблицу 3.

Таблица 3

Изучение темы «Тригонометрические уравнения» в учебниках разных авторов

Название темы, изучаемой в учебнике	А.Г. Мордкович	Ю.М. Колягин	Ш.А. Алимов
	Содержание темы		
Решение уравнения $cost = a$	Образование общ. формулы, примеры решений, иллюстрации.	Образование общ. формулы, примеры решений, иллюстрац.	Образование общ. формулы, примеры решений, иллюстрац.
Решение уравнения $sint = a$	Образование общей формулы, примеры решений, иллюстрации.	Образование общ. формулы, примеры решений, иллюстрации.	Образование общ. формулы, примеры решений, иллюстрации.
Решение уравнений $tgt = a$; $ctgt = a$	Образование общей формулы, примеры решений, иллюстрации	Образование общей формулы, примеры решений, иллюстрации	Образование общей формулы, примеры решений, иллюстрации
Метод замены переменной	Описание метода, примеры уравнений	Примеры решения некоторых уравнений	Примеры решения некоторых уравнений
Метод разложения на множители	Описание метода, примеры решений некоторых уравнений	Примеры решения некоторых уравнений	Примеры решения некоторых уравнений
Однородные тригонометр. уравнения	Определение, алгоритм решения, описание методов, примеры решения уравнений	Описание методов, примеры решения уравнений	Примеры решения уравнений
Уравнение типа $Asinx + Bcosx = C$	Разобраны методы: введения вспом. угла, унив. подстановка, приведение к однород. Приведены примеры.	Разобраны методы: введения вспом. угла, приведение к однород. Приведены примеры.	Разобраны методы: введения вспом. угла, приведение к однород. Приведены примеры.

Продолжение Таблицы 3

Название темы, изучаемой в учебнике	А.Г. Мордкович	Ю.М. Колягин	Ш.А. Алимов
	Содержание темы		
Тригонометр. Уравнения с применением формул	Приведены примеры с применением всех формул преобразования тригонометрических уравнений	Приведены примеры с применением всех формул преобразования тригонометрических уравнений	Приведены примеры с применением всех формул преобразования тригонометрических уравнений

Порядок изучения типов уравнений и методов их решений у всех авторов очень схож, а содержание отличается.

Все авторы начинают изучение темы «Тригонометрические уравнения» с простейшего тригонометрического уравнения *cos x = a.* Так как формула его корней достаточно просто записывается и легко поясняется исходя из наглядных представлений. Во всех учебниках подробно описывается образование общей формулы корней уравнения *cos x = a.* Приведены примеры решения некоторых уравнений, а также иллюстрации решений с помощью тригонометрической окружности.

Далее все авторы изучают уравнение $sinx = a$. Во всех трех учебниках описано образование формулы корней уравнения $sinx = a$. Сначала решения уравнения записываются в виде двух серий: $x = arcsina + 2\pi k, k\epsilon Z; x = \pi - arcsina + 2\pi k, k\epsilon Z$. И лишь после ряда примеров авторы показывают, как эти две формулы преобразуются в одну общую: $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k\epsilon Z$. Приведены примеры решения некоторых уравнений и иллюстрации решения с помощью тригонометрической окружности.

Теоретический материал по решению уравнений $tgx = a$ и $ctgx = a$ уже отличается в рассматриваемых учебниках. А.Г. Мордкович описывает образование общих формул для уравнений $tgx = a$ и $ctgx = a$, а Ю.М. Колягин и Ш.А. Алимов раскрывают формулу корней только для уравнения $tgx = a$. Последние два автора иллюстрируют решение уравнения $tgx = a$, в отличие от А.Г. Мордковича. Примеры решения уравнений $tgx = a$ и $ctgx = a$ описаны во всех учебниках.

Все авторы описывают и приводят примеры решения: тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным, решаемых методом замены и переменной; тригонометрических уравнений, решаемых методом разложения на множители.

Примеры решения однородных тригонометрических уравнений в учебниках приводят все авторы, но подробное описание этого типа уравнения можно найти только у А.Г. Мордковича и Ю.М. Колягина, а алгоритм решения лишь в учебнике А.Г. Мордковича.

Тип уравнения $Asinx + Bcosx = C$ решается тремя методами: методом введения вспомогательного угла, методом приведения уравнения к однородному, методом универсальной подстановки (частный случай введения новой переменной). Первые два метода описаны во всех учебниках, также приведены примеры решения. Третий метод описан лишь в учебнике А.Г. Мордковича, этот метод решения тригонометрических уравнений подробно разобран, приведены примеры.

Все авторы приводят примеры тригонометрических уравнений с применением формул синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы и разности двух аргументов, формул приведения, формул двойного аргумента, с помощью преобразования сумм в произведение, преобразования в сумму.

Делаем вывод, что при изучении темы «Тригонометрические уравнения», все авторы выделяют следующие типы и методы решения тригонометрических уравнений: простейшие тригонометрические уравнения;

метод введения новой переменной, метод разложения на множители, однородные тригонометрические уравнения. Так же метод введения вспомогательного угла (все авторы) и метод универсальной подстановки (А.Г. Мордкович); метод оценки правой и левой частей уравнения (Ю.М. Коялгин). Но все авторы предлагают разные варианты примеров для демонстрации методов:

1. А.Г. Мордкович [40].

Метод замены переменной. Решить уравнение: $tg^2x + 5tgx + 6 = 0$.

Решение: Введем новую переменную $tgx = t$, тогда $t^2 + 5t + 6 = 0$. $D = 1$, $t_1 = -2, t_2 = -3$. $\left[\begin{array}{l} tgx = -2 \\ tgx = -3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -arctg2 + \pi k, k\epsilon Z \\ x = -arctg3 + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = -arctg2 + \pi k, k\epsilon Z;\ x = -arctg3 + \pi k, k\epsilon Z$.

Метод разложения на множители. Решить уравнение: $\left(sinx - \frac{1}{3}\right)\left(cosx + \frac{2}{5}\right) = 0$. Решение сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} sinx = \frac{1}{3} \\ cosx = -\frac{2}{5} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z \\ x = \pi \pm \arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = (-1)^k arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z;\ x = \pi \pm \arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

А.Г. Мордкович в учебнике [40] единственный расписывает алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения:

Алгоритм решения уравнения

$asin^2x + bsinxcosx + ccos^2x = 0$

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $asin^2x$.

2. Если член $asin^2x$ в уравнении содержится (т.е. a≠0), то уравнение решается делением почленно обеих его частей на cos^2x и последующим введением новой переменной $z = tgx$.

3. Решаем квадратное уравнение (находим z).

4. Находим значение уравнения $z = tgx$.

5. Записываем ответ.

6. Если член $asin^2x$ в уравнении не содержится (т.е. a=0), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносится $cosx$.

7. Приходим к совокупности уравнений: $cosx = 0, bsinx + cosx = 0$.

8. Решаем уравнения вида: $cosx = 0, bsinx + cosx = 0$.

9. $bsinx + cosx = 0$ решаем с помощью почленного деления обеих частей уравнения на $cosx$.

10. Записываем ответ.

Однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решить уравнение: $2sinx - 3cosx = 0$. Решение: разделим почленно обе части уравнения на $cosx \neq 0$, получим: $2tgx - 3 = 0$; $tgx = \frac{3}{2}$; $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

Однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Решить уравнение: $2sin^2x - 3sinxcosx + cos^2x = 0$. Решение: уравнение решается делением почленно обеих его частей на cos^2x и последующим введением новой переменной $tgx = t$. $\frac{2sin^2x}{cos^2x} - \frac{3\,sinx\,cosx}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = 0$; $2tg^2x - 3tgx + 1 = 0$. Введем новую переменную: $tgx = t$: $2t^2 - 3t + 1 = 0, D = 1, t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$. $\left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z \\ x = arctg\frac{1}{2} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$; $x = arctg\frac{1}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

В учебнике А.Г. Мордковича [40] приводится пример решения: уравнение вида $Asinx + Bcosx = C$, решаемое методом универсальной подстановки и методом приведения его к однородному тригонометрическому уравнению.

Пример *метода универсальной подстановки* в учебнике А.Г. Мордковича, основан метод на следующих рассуждениях:

Если $x \neq \pi + 2\pi k$, то справедливы следующие тождества:

$cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$; $sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$. Поэтому подстановка $u = tg\frac{x}{2}$ преобразует уравнение $R(sinx, cosx) = 0$ в уравнение $R\left(\frac{2u}{1+u^2}; \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) = 0$.

Решите уравнение $3sinx + 4cosx = 5$. Решение: введем новую переменную $u = tg\frac{x}{2}$ и перейдем к рациональному уравнению: $3\frac{2u}{1+u^2} + 4\frac{1-u^2}{1+u^2} = 5$, решив это уравнение получим $u = \frac{1}{3}$. Из уравнения $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ находим: $\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z$; $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

2. Ю.М. Колягин [26].

Метод замены переменной. Решить уравнение: $4sinx + 3 - 3cosx = 5$.

Решение. Используя формулы $sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}; cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $5 = 5 \cdot 1 = 5\left(cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}\right)$, получаем $8sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + 3\left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right) = 5\left(cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}\right)$;
$8sin^2\frac{x}{2} - 8sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2} = 0$. Поделив почленно обе части уравнения на $2cos^2x \neq 0$, получаем $4tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + 1 = 0$. Заменяем $tg\frac{x}{2} = t$, получаем $4t^2 - 4t + 1 = 0$, $t = \frac{1}{2}$. $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{2} + \pi k, k\epsilon Z$; $x = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

В учебнике Ю.М. Колягина [26] присутствует весь основной теоретический материал. Это единственный автор, который приводит пример решения тригонометрического уравнения *методом оценки правой и левой частей уравнения*. Уравнения, решаемые этим методом, встречаются в ЕГЭ, поэтому их необходимо проработать.

Решите уравнение: $sinxsin9xsin13x = 1$. Уравнение может иметь решения только в двух случаях: $sinx = 1$, $sinx = -1$. Если $sinx = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$, откуда $sin9x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2 + 9n)2\pi\right) = 1$, $sin13x = 1$. Следовательно, числа $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$, являются корнями исходного уравнения.

Если $sinx = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$, $sin9x = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + (9n - 2)2\pi\right) = -1$, $sin13x = -1$, $sinxsin9xsin13x = -1$ и поэтому корни уравнения $sinx = -1$ не являются корнями исходного уравнения. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$.

3. Ш.А. Алимов [38].

Метод замены переменной. Решить уравнение $2sin2x - 3(sinx + cosx) + 2 = 0$. Обозначим $sinx + cosx = t$, тогда $(sinx + cosx)^2 = t^2$; $2sinxcosx = t^2 - 1$, т.е. $sin2x = t^2 - 1$, тогда $2(t^2 - 1) - 3t + 2 = 0$; $2t^2 - 3t = 0$; $t(2t - 3) = 0$; $t_1 = 0, t_2 = \frac{3}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} sinx + cosx = 0 | / cosx \neq 0 \\ sinx + cosx = \frac{3}{2} \text{(не имеет решения)} \end{array}\right. \quad [tgx = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

Делаем вывод, что А.Г. Мордкович в своем учебнике при изложении темы «Тригонометрические уравнения» приводит примеры типов уравнений и методы их решения без применения преобразований с помощью тригонометрических формул (формул проведения, формул двойного угла и т.д.). Далее при изучении темы «Преобразование тригонометрических выражений» А.Г. Мордкович еще раз приводит примеры решения типов тригонометрических уравнений с преобразованиями. Ш.А. Алимов и Ю.М.

Колягин в своих учебниках приводят примеры решения тригонометрических типов уравнений и методов их решения с применением преобразований, так как эти авторы изучают тему «Преобразование тригонометрических выражений» перед темой «Тригонометрические уравнения».

Содержание теоретического материала учебников алгебры и начала анализа различных авторов может кардинально отличаться, например, С.Н. Никольский и Г.К. Муравин предлагают следующие подходы к методу разложения на множители.

В учебнике С.Н. Никольского [48] *метод разложения на множители* решения тригонометрических уравнений не используется, этот метод заменяется *методом замены переменной*.

Решите уравнение $(sinx - 0{,}5)(sinx + 1) = 0$. Автор рекомендует сделать замену неизвестного $t = sinx$, получаем $(t - 0{,}5)(t + 1) = 0$; $t_1 = 0{,}5$; $t_2 = -1$. Далее автор отмечает, что множество всех решений исходного уравнения есть объединение множеств всех решений двух уравнений: $sinx = 0{,}5$ и $sinx = -1$. Решая каждое из этих простейших уравнений, находим, что множество всех решений исходного уравнения состоит их трех серий решения: $x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m\epsilon Z$; $x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Г.К. Муравин [47] так же не выделяет метод разложения на множители, но приводит решения некоторых типов уравнений, применяя *метод разложения на множители*.

Решите уравнение $sinx - cos3x = 0$. Решение: с помощью формулы приведения заменим $sinx$ на $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - cos3x = 0$; $sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$. Произведение в левой части уравнения равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$\left[\begin{array}{l} sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \\ sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + x = \pi n, n\epsilon Z \\ \frac{\pi}{4} - 2x = \pi n, n\epsilon Z \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \pi n - \frac{\pi}{4}, n\epsilon Z \\ x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi n - \frac{\pi}{4}, n\epsilon Z; x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$.

Для математического профиля основным учебником математики, на мой взгляд, стоит выбрать учебник А.Г. Мордковича [42].

В учебнике алгебры и начала анализа А.Г. Мордковича рассматриваемая в данной диссертации тема относится к 4 Главе «Тригонометрические уравнения» и к 5 Главе «Преобразование тригонометрических выражений» §31 «Методы решения тригонометрических уравнений». Тема вводится после параграфа §21 «Обратные тригонометрические функции», в котором рассматриваются функции $y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx, y = arcctgx$. Дальнейшее решение тригонометрических уравнений невозможно без поиска значений обратных тригонометрических функций.

В требованиях к предметным результатам освоения углубленного курса математики по теме «Тригонометрические уравнения» перечислены в §2. Для успешой реализации предметных результатов учебник А.Г. Мордковича содержит весь теоретический и практический учебный материал.

Для профильного уровня изучения математики на тему «Тригонометрические уравнения» по программе А.Г. Мордковича отводится 16 часов, в течение которых рассматриваются все основные типы и методы решения тригонометрических уравнений.

Таким образом, выбор учебника А.Г. Мордковича [42] обоснован *следующими причинами*:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений;

– в данном учебнике *представлены* следующие типы и методы тригонометрических уравнений: простейшие тригонометрические уравнения;

уравнения, сводящиеся к квадратным методом замены переменной; уравнения, решаемые методом разложения на множители; однородные тригонометрические уравнения; уравнение типа $Asinx + Bcosx = C$, решаемое методом введения вспомогательного угла, методом универсальной подстановки, методом преобразования к однородному; уравнения, решаемые с помощью тригонометрических формул (формул приведения, формул двойного угла и т.д.); тригонометрические уравнения, содержащие в себе другие математические функции; тригонометрические уравнения, решаемые методом оценки правой и левой частей уравнения.

в учебнике наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Тригонометрические уравнения».

§6. Типология тригонометрических уравнений и методы их решения

Существует множество различных типов и методов решения тригонометрических уравнений. Обширное количество работ описывают несколько методов решения одного и того же тригонометрического уравнения. Проведем анализ практического опыта учителей по теме «Тригонометрические уравнения», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В статье Р.Ю. Костюченко «Алгоритмический подход к обучению школьников решению тригонометрических уравнений» [30] выделены основные типы и методы решения тригонометрических уравнений, они идентичны уравнениям, приведенным в учебниках алгебры и начал анализа.

К.М. Григорян в статье «Решение тригонометрических уравнений вида $sin^2x + cos^2x = a$» [14] применяет несколько методов решений для уравнения типа $sin^2x + cos^2x = a$. С.В.

Анисимов в статье «Три метода решения тригонометрических уравнений» [3] выделяет три метода решения тригонометрических уравнений: метод подстановок; метод решения (не)однородных уравнений; решение по тригонометрическим формулам.

В статье Н.М. Кара-Сал «Решение некоторых видов тригонометрических уравнений в школьном курсе математики» [23] разобраны решения основных типов тригонометрических уравнений: дробное уравнение; уравнение с разными аргументами; уравнения высших степеней; уравнение с модулем.

В статье Л.Г. Круповецкого «К методике решения тригонометрических уравнений» [32] выделены и решены следующие типы и методы: дробное тригонометрическое уравнение; однородные тригонометрические уравнения; метод разложения на множители; уравнения с применением тригонометрических формул (основное тригонометрическое тождество и т.д.); тип уравнения $Asinx + Bcosx = C$ решен методом возведения в квадрат обеих частей уравнения, методом введения вспомогательного угла.

Огромное количество учебных пособий опубликовано на тему «Тригонометрические уравнения» таких как:

– Тригонометрические уравнения и методика их преподавания Е.С. Березанская [6]; Тригонометрические уравнения Ю.И. Галанов [67].

– Сборник задач по математике для поступающих во вузы В.К. Егерев [59].

– Уравнения и неравенства (нестандартные методы решения) С.Н. Олехник [50].

– Тригонометрия С.И Новоселов [49].

– Практикум по элементарной математике. Тригонометрия В.Н. Литвиненко [34].

– Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для 10-11 кл. с углубленным изучением математики Карп А.П [24].

– И.Т. Бородуля «Тригонометрические уравнения и неравенства» [11] и др.

В статье П.И Самсонова «Тема урока «Решение тригонометрических уравнений различными способами»» [58] рассматриваются тригонометрические уравнения различных типов, решаемые с помощью тригонометрических формул (формул двойного угла, формул понижения степени, формул приведения).

В статье П.И Самсонова «Простые замечания о сложной методике обучения решению тригонометрических уравнений» [57] рассматриваются типы тригонометрических уравнений с решениями, по мнению автора, которые позволяют раскрыть особенности записей корней. Так же в статье приводится пример решения уравнения типа $Asinx + Bcosx = C$ методом оценки правой и левой частей.

В статье К.А. Рупасова «К вопросу о решении тригонометрических уравнений» [56] рассматриваются несколько методов решения уравнения типа $Asinx + Bcosx = C.$ Автор приводит примеры следующих методов решения одного уравнения: метод возведения обеих частей уравнения в квадрат; выражая $cosx = \sqrt{1 - sinx^2x}$ и далее возводя обе части уравнения в квадрат; метод с применением формулы понижения степени; метод приведения уравнения к однородному; метод применения формул приведения; метод универсальной подстановки; метод введения вспомогательного угла.

В статье С.В. Синакевич «Опыт работы по теме «Тригонометрические уравнения»» [61] рассматриваются примеры решений разных типов тригонометрических уравнений. Автор не выделяет конкретную типологию и методы решения тригонометрических уравнений, так как считает, что «наличие классификации связывает инициативу учащихся».

В статье кандидата педагогических наук К.Я. Хабибуллина (директор школы №12 г. Салават Республика Башкортостан) «Систематизируем методы решения тригонометрических уравнений» [70] рассматриваются основные типы и методы решения тригонометрических уравнений, приведены примеры решений некоторых уравнений. Автор выделяет следующие типы и методы решения: линейные уравнения - метод замены переменной; однородные тригонометрические уравнения (первой степени, второй степени и неполное однородное уравнение второй степени) - методы замены переменной и метод разложения на множители; линейные уравнения - использование формулы преобразования суммы в произведение; метод оценки правой и левой частей уравнения; метод введения вспомогательного угла; метод универсальной подстановки.

В статье кандидата педагогических наук, доцента К.О. Останова «Об изучении методов решения простейших тригонометрических уравнений в средней школе» [51], рассматриваются следующие типы и методы решения тригонометрических уравнений: общие виды формул корней; примеры решения простейших тригонометрических уравнений с различными аргументами; уравнения, решаемые методом замены переменной; однородные тригонометрические уравнения; метод разложения на множители; тригонометрические уравнения, решаемые преобразованием с применением тригонометрических формул.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [81] представлено большое количество конспектов уроков по теме «Тригонометрические уравнения» по учебникам Мордковича Г. А. [39, 40, 41, 42, 43].

На сайте «Решу ЕГЭ» [80] представлен материал для подготовки ЕГЭ по математике. В задании 13 «Уравнения» по теме проекта рассмотрено 3 задания и аналогичные им: тригонометрические уравнения, разложение на множители; тригонометрические уравнения; тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ.

Делаем вывод, что многие математики проявляют научный интерес к изучению методики обучения решению тригонометрических уравнений.

Выделим типы и методы решения тригонометрических уравнений, предложенных авторами учебников алгебры и начал анализа 10 класс общеобразовательной школы. Авторы: А.Г. Мордкович [40, 42], Ш.А. Алимов [38] и Ю.М. Колягин [26].

Представим в таблице 4 данные о количестве задачного материала по теме «Тригонометрические уравнения» различных учебников. Сделаем основные выводы.

Таблица 4

Содержание задачного материала по теме «Тригонометрические уравнения» различных учебников

Типы уравнений	А.Г. Мордкович		Ш.А. Алимов		Ю.М. Колягин	
	Количество	%	Количество	%	Количество	%
Общее количество уравнений	448	100	252	100	260	100
Простейшие тригонометрические уравнения	105	23,4	94	37,3	86	33
Уравнения, решаемые методом замены переменной	35	7,8	21	8,3	23	8,8
Однородные уравнения	35	7,8	14	5,6	29	11,2
Уравнения, решаемые методом разложения на множители	14	3,1	14	5,6	14	5,4
Уравнения, решаемые методом оценки правой и левой частей	7	1,6	4	1,6	4	1,5
Уравнения типа $Asinx + Bcosx = C$	28	6,3	4	1,6	2	0,8
Уравнения, решаемые с помощью тригонометрических формул разных типов	169	37,7	95	37,7	91	35
Тригонометрические уравнения, содержащие в себе другие функции	55	2,3	6	2,3	11	4,2

Первая строка – это общее количество тригонометрических уравнений в учебниках. А.Г. Мордкович в задачнике представил 448 уравнений, по сравнению с Ш.А. Алимовым 252 уравнения и Ю.М. Колягиным 260 уравнений, что позволит учащимся отработать умения решать тригонометрические уравнения наиболее продуктивно.

Все рассматриваемые авторы рекомендуют к решению значительное количество простейших тригонометрических уравнений: А.Г. Мордкович 23,4% от общего количества уравнений, Ш.А. Алимов 37,3%, Ю.М. Колягин

33%. Это необходимо, так как все тригонометрические уравнения сводятся к решению простейшего тригонометрического уравнения.

Уравнений, решаемых заменой переменной примерно одинаково по количеству в рассматриваемых учебниках: А.Г. Мордкович – 35, Ш.А. Алимов – 21, Ю.М. Колягин – 23. Этот тип уравнений один из основных, но также хорошо знаком учащимся до изучения темы «Тригонометрические уравнения» поэтому такого типа уравнений достаточно для отработки навыка решения.

Задания с решением однородных тригонометрических уравнений у А.Г. Мордковича – 35, Ш.А. Алимова – 14, Ю.М. Колягина – 29. Приблизительно равны по количеству с уравнениями, решаемыми с помощью замены переменной. На мой взгляд однородных должно быть больше в задачном материале, так как изучается несколько типов однородных уравнений, которые рассмотрим позже.

Уравнений, решаемы методом разложения на множители у всех авторов одинаковое количество – по 14. С этим методом учащиеся уже знакомы из других разделов алгебры и начал анализа, поэтому авторы не считают нужным предлагать много уравнений.

Уравнения, решаемы методом оценки правой и левой частей уравнения. Этот метод на логическое мышление, он не так часто встречается в экзаменах, диагностических и итоговых работах, поэтому А.Г. Мордкович представил 7 уравнений в задачнике, Ш.А. Алимов и Ю.М. Колягин по 4 уравнения.

Уравнение типа $Asinx + Bcosx = C$ решается тремя методами, но не все авторы предлагают именно три метода решения, как мы видим из таблицы 3. А.Г. Мордкович рассматривает все три метода и выделяет 28 уравнений для отработки навыков применения, Ш.А. Алимов и Ю.М. Колягин рассматривают два метода и предлагают 4 и 2 уравнений соответственно.

Самый большой объем заданий занимают уравнения с применением тригонометрических формул: формулы приведения, формулы двойного угла, формулы сложения и т.д. Это объясняется тем, что тригонометрических формул большое количество и их необходимо проработать. А также уравнения данного типа после применения преобразований приходят к решению типов уравнений, перечисленных выше.

Тригонометрических уравнений, в которых содержатся другие математические функции, в учебнике А.Г. Мордковича – 55 (12,3% всех уравнений), в учебнике Ш.А. Алимова 6 заданий (2,3% всех уравнений), Ю.М. Колягина 11 заданий (4,2% всех уравнений). Учителям необходимо подключить дополнительные источники, где представлены задания по решению тригонометрических уравнений, содержащих другие математические функции. Так как данный вид уравнений содержится в ЕГЭ. Учащимся требуется более обширное количество подобных заданий, для подготовки к экзамену, чем представлено в учебниках. Классы, которые учатся оп программе и учебнику А.Г. Мордковича дополнительных источников не требуется, уравнений такого типа достаточно в задачнике.

Приведем примеры каждого типа уравнения и разберем методы их решения. Первый тип – это *простейшие тригонометрические уравнения*, к ним относятся уравнения вида $sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a,$ где a – действительное число. Запишем все формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

– Если $|a| \leq 1$, то решения уравнения $cosx = a$ и имеют вид: $x = \pm arccos\, a + 2\pi n, n \in Z$.

– Если $|a| \leq 1$, то решения уравнения $sinx = a$ имеют вид: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z,$ или $x = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

– Если $|a| > 1$, то решения уравнения $sinx = a, cosx = a$ не имеют решений.

– Решение уравнения $tgx = a$ для любого значения а имеют вид: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$.

– Решение уравнения $ctgx = a$ для любого значения а имеют вид: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$.

– Особо важные случаи: $sinx = 0$, $x = \pi n, n \in Z$; $sinx = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $sinx = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $cosx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $cosx = 1$, $x = 2\pi n, n \in Z$; $cosx = -1$, $x = \pi + \pi n, n \in Z$.

Второй тип - уравнения, *сводящиеся к квадратным заменой переменной*. Этот тип уравнения также называют – сводящимся к алгебраическому уравнению.

Пример 6.1. $2cos^2x - 3cosx + 1 = 0$. Пусть $cosx = t$, $-1 \le t \le 1$, тогда: $2t^2 - 3t + 1 = 0$, $D = 1$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 1, \\ cosx = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi k, k \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Третий тип – *однородные тригонометрические уравнения*. Уравнение вида $asinx + bcosx = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение 1-ой степени; $asin^2x + bcosx \cdot sinx + ccos^2x = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение 2-ой степени, $asin^3x + bsin^2x \cdot cosx + csinx \cdot cos^2x + dcos^3x = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение 3-ей степени и т.д. Метод решения однородных уравнений – почленное деление обеих частей уравнения, во многих случаях, на $cosx$ (уравнения 1-ой степени) и на cos^2x (уравнения 2-ой степени), далее – замена переменной, как рассмотрено ранее.

Пример 6.2. (*однородное тригонометрическое уравнение 1-ой степени*). $\sqrt{2}sinx - \sqrt{2}cosx = 0$. Разделим почленно обе части уравнения на $cosx \ne 0$, $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$: $\sqrt{2}tgx - \sqrt{2} =$; $tgx = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример 6.3. (*однородное тригонометрическое уравнение 2-ой степени*).

$sin^2x - 5cosx \cdot sinx + 4cos^2x = 0$. Разделим почленно обе части уравнения на $cos^2x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$: $tg^2x - 5tgx + 4 = 0$. Пусть $tgx = t$, тогда $t^2 - 5t + 4 = 0$. D = 9, $x = 1$, $x = 4$. $\left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = 4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ x = arctg4 + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, x = arctg4 + \pi k, k \in Z$.

В рассмотренных выше двух примерах приведены методы решения полных однородных тригонометрических уравнений первой и второй степеней (a≠0, b≠0, c≠0), но, если один из этих коэффициентов будет равен нулю, то тригонометрическое уравнение обращается в неполное. Рассмотрим на следующем примере метод решения *неполного однородного тригонометрического уравнения второй степени*.

Пример 6.4. $cosx \cdot sinx - cos^2x = 0$. Вынесем общий множитель за скобки: $cosx(sinx - cosx) = 0$. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю:

$$\left[\begin{array}{c} cosx = 0, \\ sinx - cosx = 0|/cosx \neq 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ tgx = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Четвертый тип - уравнения, решаемые *методом разложением на множители.*

Пример 6.5. $4sinxcosx - 4cosx + 3sinx - 3 = 0$; $4cosx(sinx - 1) + 3(sin - 1) = 0$; $(4cosx + 3)(sinx - 1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} cosx = -\frac{3}{4} \\ sinx = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x = \pi \pm \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi \pm \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Пятый тип - уравнения, решаемые *методом оценки правой и левой частей.* Признаком того, что для решения следует применить метод оценки, является наличие в уравнении функций разной природы.

Пример 6.6. $ctg^4x = cos^2 2x - 1$. ОДЗ: $x \neq \pi k, k \in Z$. Левая часть уравнения $ctg^4x \geq 0$, а правая $cos^2 2x - 1 \leq 0$. Единственное решение уравнения будет верным, когда обе части уравнения будут равны нулю.

$$\left[\begin{array}{c} ctg^4x = 0 \\ cos^2 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} ctgx = 0 \\ cos2x = -1 \\ cos2x = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = \pi k, k \in Z \text{ (не подходит ОДЗ)} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Шестой тип - *уравнения вида:* $asinx + bcosx = c$. Математики предлагают множество методов решения данного типа уравнения, например, В.К. Шарапова в статье «Тема урока «Решение тригонометрических уравнений»»» [72] рассматривает шесть методов решения уравнения типа $asinx + bcosx = c$: введение вспомогательного угла, решение с помощью формулы приведения, приведение к однородному, метод универсальной подстановки, метод возведения в квадрат обеих частей уравнения, использование основного тригонометрического тождества. Но в заключении статьи автор делает вывод, что рациональными методами являются: введение вспомогательного угла, приведение к однородному, метод универсальной подстановки. Вывод основан на том, что остальные методы требуют обязательной проверки корней, на этом этапе учащиеся могут совершить ошибки. Поэтому и авторы школьных учебников выделяют только три метода решения уравнения типа $asinx + bcosx = c$, разберем их: сведение к однородному уравнению; решение уравнения с помощью универсальной тригонометрической подстановки; введение вспомогательного угла.

Решая уравнение методом сведения его к однородному уравнению, используют тригонометрические формулы двойного угла: $sinx = 2sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2}$ и $cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}$, постоянную *c* заменяют через тригонометрические функции, используя основное тригонометрическое тождество: $1 \cdot c = c\cos^2\frac{x}{2} + c\sin^2\frac{x}{2}$. В итоге получается однородное тригонометрическое уравнение второй степени, которое решается по известному алгоритму.

Пример 6.7. $2\cos x + \sin x = 2$. Преобразуем обе части уравнения: $2\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2}$. Приведем подобные слагаемые: $2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} = 0$; $2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0 \\ \cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0 \,\Big|/\cos\frac{x}{2} \neq 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi k, k \in Z \\ tg\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi k, k \in Z, x = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Второй метод решения уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$ основан на приведении этого тригонометрического уравнения к рациональному с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $tg\frac{x}{2} = t$.

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Заметим, что областью определения $tg^2\frac{x}{2}$ являются все x, кроме $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$, поэтому нужно проверить, не являются числа вида $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$ решениями данного уравнения.

Пример 6.8. $2\cos x + \sin x = 2$. Пусть $tg\frac{x}{2} = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\frac{2-2t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = 2$; $\frac{2-2t^2+2t-2-2t^2}{1+t^2} = 0$; $4t^2 - 2t = 0$; $2t(2t-1) = 0, t = 0,\ t = \frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \\ tg\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Проверка показывает, что числа $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$, не удовлетворяют заданному уравнению. Ответ: $x = 2\pi k, k \in Z$, $x = 2arctg\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Третий метод решения уравнения $asinx + bcosx = c$ – это метод введения вспомогательного угла. Данный метод решается по следующей формуле: $Asinx + Bcosx = Csin(x + t)$, где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Пример 6.9. $4sinx - 3cosx = 5$; $4sinx - 3cosx = 5(\frac{4}{5}sinx - \frac{3}{5}cosx)$. Вводим вспомогательный угол: $cost = \frac{4}{5}$ и $sint = \frac{3}{5}$; $t = arccos\frac{4}{5}$. Получаем: $5(costsinx - sinxcosx) = 5$; $\sin(x - t) = 1$; $x - t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $x = t + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Заменяем t на $arccos\frac{4}{5}$: $x = arccos\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = arccos\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Седьмой тип – это уравнения, решение которых предусматривает выполнение определенных преобразований, преобразующих данное уравнение к решению уравнений первого, второго или третьего типа. Среди уравнений этой группы можно выделить уравнения, решаемые с помощью понижения степени, с помощью применения формул суммы или умножения тригонометрических функций и др.

Пример 6.10. $cos2x = 1 + 2sinx$. Раскладываем косинус двойного угла по формуле $cos2x = cos^2x - sin^2x$, раскрываем скобки и единицу представим как основное тригонометрическое уравнение $cos^2x + sin^2x = 1$: $cos^2x - sin^2x = cos^2x + sin^2x + 2sinx$; $2sin^2x + 2sinx = 0$; $sin^2x + sinx = 0$; $sinx(sinx + 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} sinx = 0 \\ sinx = -1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \pi k, k \epsilon Z \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi k,\ k \epsilon Z,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \epsilon Z$

Пример 6.11. $cos^2x - 3sinxcosx + 2sin^2x = 2$ [4]; $cos^2x - 3sinxcosx + 2sin^2x = 2cos^2x + 2sin^2x$; $cos^2x + 3sinxcosx = 0$; $cosx(cosx + 3sinx) = 0$;

$$\left[\begin{array}{c} cosx = 0 \\ cosx + 3sinx = 0 | / cosx \neq 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} cosx = 0 \\ tgx = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z \\ x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$; $x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z$.

Восьмой тип – уравнения, *содержащие в себе несколько разных функций*. Уравнения пятого типа решаются методом приведения его к простейшему тригонометрическому уравнению, путем применения свойств, определений, теорем другой математической функции. Рассмотрим данный тип уравнения на примере тригонометрического уравнения с модулем.

Пример 6.12. $|sinx| = sinx + 2cosx$. Решение: Раскрывая знак модуля, получаем системы уравнений:

$$\begin{cases} sinx \geq 0 \\ sinx = sinx + 2cosx \end{cases} \text{ или } \begin{cases} sinx < 0 \\ -sinx = sinx + 2cosx | / cosx \neq 0 \end{cases}$$

По методике решения тригонометрических уравнений, приходим к простейшим тригонометрическим уравнениям:

$$\begin{cases} sinx \geq 0 \\ cosx = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} sinx < 0 \\ tgx = -1 \end{cases}; \begin{cases} sinx \geq 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} sinx < 0 \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

В условиях дифференциации обучения для учащихся в учебниках профильного уровня предложены задания с различными формулировками. Составим таблицу 5, где будут перечислены типы заданий по теме «Тригонометрические уравнения», основываясь на их формулировке.

Таблица 5

Типы заданий, различных формулировок по теме «Тригонометрические уравнения» различных учебников

№	Название задания	А.Г. Мордкович	Ш.А. Алимов	Ю.М. Колягин
1	Нахождение корней на заданном промежутке	+	+	+
2	Нахождение наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корня	+	+	+
3	Нахождение количества корней на интервале	+	-	-
4	Нахождение корней удовлетворяющих неравенству	-	+	+

Помимо основного задания по теме «Тригонометрические уравнения» - «Решить уравнение», в разных учебниках присутствуют задания, представленные в таблице 5. Перечисленные задания в таблице 5 помогают выявить глубину знаний, направлены на развитие логического мышления и творческого потенциала. Как мы видим, задания с такими формулировками присутствуют во всех учебниках.

В статье С.Р. Мугаллимовой «Обучение отбору корней тригонометрического уравнения» [46], автор выделяет несколько способов отбора корней: способ перевода в градусную меру; способ движения по окружности; способ оценки; графический способ; способ перебора. Мне больше нравится способ движения по окружности, он заключается в иллюстрации тригонометрической окружности с отмеченными корнями уравнения и заданного промежутка.

Рассмотрим примеры по каждому типу задания.

Пример 6.13. Найдите корни уравнения на заданном промежутке. $cosx = -\frac{1}{2}, x \in [-\pi; \pi]$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{2\pi}{3}$; Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3}$.

Пример 6.14. Решите уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ и найдите: а) наименьший положительный корень; б) наибольший отрицательный корень. $2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z$;

$а)\ x_1 = \frac{7\pi}{8}$; б) $x_2 = -\frac{\pi}{8}$. Ответ: $а)\ x_1 = \frac{7\pi}{8}$; б) $x_2 = -\frac{\pi}{8}$.

Пример 6.15. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ и найдите корни, принадлежащие интервалу $(-\pi; \frac{\pi}{2})$. Решение: $\frac{\pi}{3} - 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$;

$$\left[\begin{array}{l} -2x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z; \\ -2x_2 = 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} - \pi k, k \in Z; \\ x_2 = \pi k, k \in Z. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{2\pi}{3}; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = \frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{\pi}{3}$.

Пример 6.16. Найдите все корни уравнения $sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $log_{\pi}(x-4\pi)<1$. Решение: $sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z;\\ \frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}+4\pi k, k\in Z;\\ x=\frac{4\pi}{3}+4\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$

Затем решим логарифмическое неравенство: $log_{\pi}(x-4\pi)<1$. ОДЗ: $x-4\pi>0$, $x>4\pi$. Правую часть неравенства представим в виде логарифма: $log_{\pi}(x-4\pi)<log_{\pi}\pi$. Так как основание логарифма $\pi>0$, то знак неравенства не меняется: $x-4\pi<\pi$, $x<5\pi$. Ответ: $(4\pi;\ 5\pi)$. Необходимо подобрать корни уравнения $sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, которые принадлежат интервалу $(4\pi; 5\pi)$. Ответ: $\frac{14\pi}{3}$.

Такие задания интересны для учащихся, они побуждают интерес к решению, заставляют вспоминать ранее пройденный материал, призывают логически думать.

Таким образом, в §4 выделены типы уравнений, алгоритмы решения которых учащиеся должны понимать и уметь применять в стандартных случаях.

В учебниках достаточно заданий для проработки каждого типа уравнения. Так же в учебниках профильного уровня есть задания повышенной сложности (таблица 5), которые помогут учащимся при подготовке к ЕГЭ.

Выводы по первой главе

Первая глава посвящена теоретическим основам обучения решению тригонометрических уравнений в школьном курсе математики. В ней изложена краткая история развития тригонометрических уравнений; представлены цели, задачи, предметные результаты обучения тригонометрическим уравнениям по ФГОС; проведен анализ рабочих программ темы «Тригонометрические уравнения» разных авторов; описано содержание теоретического материала темы «Тригонометрические уравнения» в различных учебниках алгебры и начал анализа; разобраны основные типы и методы решения тригонометрических уравнений; раскрыто понятие дифференцированного обучения математике.

В первой главе выделены:

1. Цели и задачи обучения теме «Тригонометрические уравнения».

2. Сходства и различия теоретического материала в учебниках алгебры и начал анализа авторов: А.Г. Мордковича, Ю.М. Колягина и Ш.А. Алимова.

3. Сходства и различия задачного материала в учебниках алгебры и начал анализа авторов: А.Г. Мордковича, Ю.М. Колягина и Ш.А. Алимова.

4. Примеры решений основных типов и методов решения тригонометрических уравнений: простейшие тригонометрические уравнения; метод замены переменной; метод разложения на множители; однородные тригонометрические уравнения; уравнения, которые требуют преобразований с помощью тригонометрических формул (приведения, двойного угла и т.д.); уравнение типа $Asinx + Bcosx = C$, решаемое разными методами (введение вспомогательного угла, универсальная подстановка, приведение к однородному); уравнение, решаемое методом оценки правой и левой частей; уравнения, в которых содержатся другие математические функции.

5. Понятие дифференциации - разделение содержания образования, как обучение учащихся по различным учебным планам, отвечающим как индивидуальным склонностям, способностям и интересам учащихся, так и задаче воспитания в школе будущих новаторов производства, талантливых математиков, техников и физиков, механиков и историков и т.д. (Н.Г. Гончаров).

6. Виды дифференциаций: внешняя, внутренняя, профильная, уровневая, поисковая.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§7. Методические рекомендации обучения решению тригонометрических уравнений

Первый тип уравнений, который предстоит усвоить ученикам это простейшие тригонометрические уравнения. Простейшие тригонометрические уравнения необходимо начать изучать с уравнения $cosx = a$, так как готовая формула корней наиболее проста в восприятии и запоминании. Следующее уравнение – это $sinx = a$, формулы корней которого стоит начать изучать с вида двух серий: $x = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z.$ И лишь после ряда проработанных примеров можно переходить к формуле общего вида $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$. Далее переходить к уравнениям $tgx = a$ и $ctgx = a$. Стоит отметить частные случаи корней уравнений, объяснить их суть.

Для решения простейших тригонометрических уравнений А.Г. Мордкович в учебном пособии [45] предлагает следующий алгоритм учащимся:

1. Составить общую формулу корней уравнения.
2. Вычислить соответствующее значение обратной тригонометрической функции.
3. Подставить найденное значение в общую формулу.

Но для полного осознания и понимания решения простейших тригонометрических уравнений, необходимо проработать задания на отбор корней на заданных промежутках, отрезках. Это должны быть задания вида, как в примере 1.

Пример 7.1. Решите уравнение $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, найдите корни, принадлежащие промежутку $x \in [-\frac{\pi}{4}; 12)$. Решение: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$. Корни на заданном промежутке: $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$.

Иллюстрации решения каждого простейшего тригонометрического уравнения с помощью тригонометрической окружности обязательно требовать в профильном уровне обучения. Поэтому возьмем данные из примера 1 и проиллюстрируем решение, а также укажем корни на промежутке.

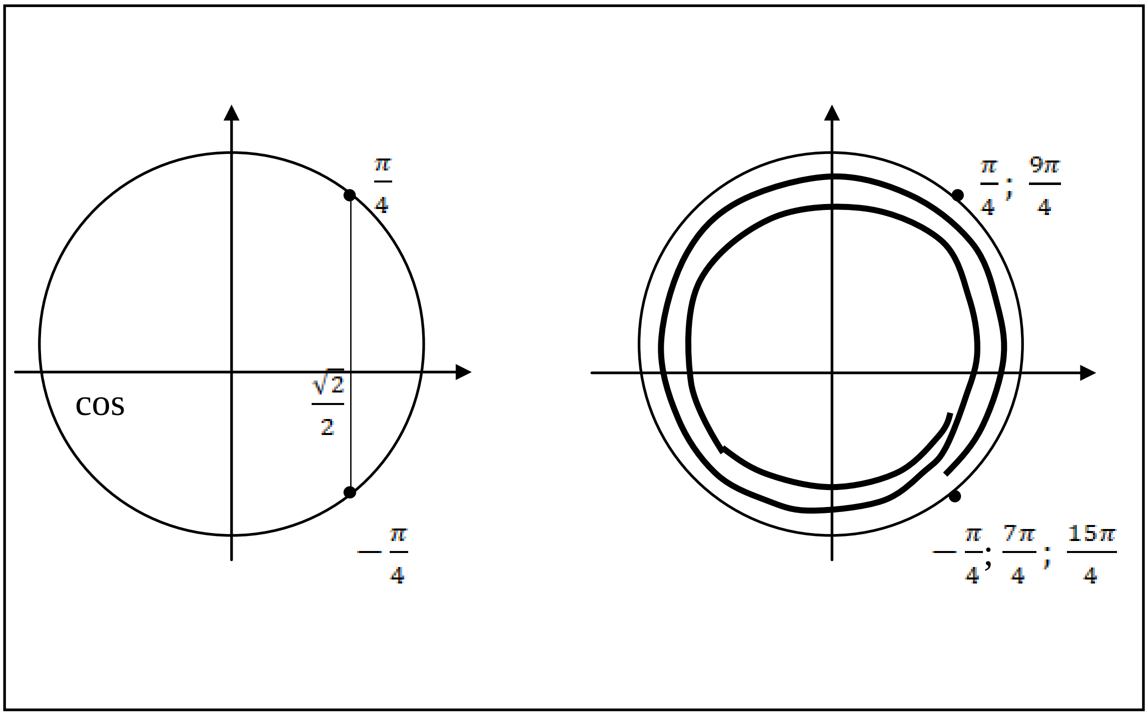

Рис. 1. Иллюстрация примера 1.

Преподаватель Горно-Алтайского государственного университета Л.А. Соловьева в статье «Отбор корней тригонометрических уравнений» [63] рассматривает следующие приемы отбора корней: перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней (арифметический способ); решение неравенства относительно целочисленного параметра и вычисление корней (алгебраический способ); движение по тригонометрической окружности и отбор корней (геометрический способ). А.Г. Корянов и А.А. Прокофьев в статье «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» [29] приводят примеры алгебраического способа отбора корней. Учащиеся сами выбирают для себя наиболее удобный способ отбора корней. На рисунке 1 приведен пример геометрического способа отбора корней.

В процессе обучения темы «Тригонометрические уравнения» необходимо отработать систему упражнений, которая должна состоять из следующих типов заданий:

– нахождение значений обратных тригонометрических функций;

– решение простейших тригонометрических уравнений ($sinx = a, cosx = a$) с помощью числовой окружности;

– решение уравнений вида $\sin(kx + m) = a, \cos(kx + m) = a, tg(kx + m) = a$;

– отбор корней при решении простейших тригонометрических уравнений;

– решение тригонометрических уравнений, решаемых методом замены переменной;

– решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители;

– решение однородных уравнений;

– решение уравнений, которые требуют преобразований с помощью тригонометрических формул (приведения, двойного угла и т.д.);

– решение уравнений типа $Asinx + Bcosx = C$, разными способами (введение вспомогательного угла, универсальная подстановка, приведение у однородному);

– решение уравнений методом оценки правой и левой частей уравнения;

– решение тригонометрических уравнений, в которых содержатся другие математические функции;

– решение уравнений повышенной сложности, представленных в ЕГЭ.

Учитель должен обратить внимание учащихся на способ выполнения каждого из заданий, дать соответствующий образец, провести работу над ошибками. Каждый тип задания необходимо проработать достаточным количеством упражнений.

Приведем образец решения тригонометрического уравнения, в котором содержатся другие математические функции:

Пример 7.2. Решите уравнение: $2 \cdot 8^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = (\frac{1}{2})^{cos2x}$. Способом решения такого типа уравнений является избавление от показательной функции и переход к тригонометрической. $2 \cdot 2^{3\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = (2)^{-cos2x}$; $2^{1+3sinx} = (2)^{-cos2x}$; $1 + 3sinx + cos2x = 0$; $1 + 3sinx + cos^2x - sin^2x = 0$; $1 + 3sinx + 1 - sin^2x - sin^2x = 0$; $3sinx + 2 - 2sin^2x = 0$. Пусть $sinx = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0$, D=25, t_1=2, t_2=$-\frac{1}{2}$; $sinx = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Методике обучения учащихся решению тригонометрических уравнений посвящено множество научных статей, например, В.Н. Дятлов [18], Н.А. Данилова [15], Е.И. Майер [35] предлагают организацию процесса решения тригонометрических уравнений с помощью опорных схем. В статьях Е.Г. Ергалиева [19], Л.С. Капкаевой [22], к.ф-м.н. М.В. Ладошкина [33] предложены общие методические аспекты обучения решению тригонометрических уравнений. В статье Н.В. Полянской [53] разработаны варианты дифференцированной самостоятельной работы по теме «Методы решения тригонометрических уравнений», как средства контроля полученных знаний.

Обучающие и корректирующие самостоятельные работы необходимы для получения обратной связи по усвоению материала. Учитель будет видеть пробелы в знаниях и своевременно их устранять.

Пример самостоятельной работы после отработки тригонометрических уравнений, решаемых с помощью замены переменной:

Пример 7.3. Решите уравнение: $2cos^2x - 3cosx - 2 = 0$. Пусть $cosx = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0$, D=25, t_1=2, t_2=$-\frac{1}{2}$; $cosx = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Пример 7.4. Решите уравнение: $tg^2 2x - tg2x - 2 = 0$. Пусть tg2$x = t$, тогда $t^2 - t - 2 = 0$, D=9, t_1=2, t_2=-1; tg2$x = 2$; $x = \frac{1}{2}arctg2 + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$; tg2$x = -1$; $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$. Ответ: $x = \frac{1}{2}arctg2 + \frac{\pi}{2}k, k \in Z, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Самостоятельная дается на 5-10 минут. Возможно добавить несколько вариантов.

Проводить контролирующую самостоятельную работу необходимо после полного изучения (с корректировками и работой над ошибками) каждого или нескольких перечисленных типов заданий. Обязательное выставление оценок после такой работы. Возможно применить дифференцированное обучение, распределить учащихся по успеваемости или другому признаку. Соответственно в проверочных работах также применять дифференциацию, например, ученикам с лучшей успеваемостью давать дополнительные задания повышенной сложности.

Пример дифференцированной самостоятельной работы.

Пример 7.5. Решете уравнение: $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$.

Пример 7.6. Решите уравнение: $tg(\pi + x) = \sqrt{3}$; $tgx = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Пример 7.7. Решите уравнение: $sin2x - 2cosx = 0$; $2cosxsinx - 2cosx = 0$;

$2cosx(sinx - 1) = 0; 2cosx = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; или

$sinx = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Пример 7.8. Решите уравнение: $sin^2 2x = 1$, найдите корни принадлежащие промежутку $[0;\pi]$. $\frac{1-cos4x}{2} = 1; 1 - cos4x = 2; cos4x = -1$; $4x = \pi + 2\pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$.

Самостоятельная дается на 10-15 минут. Возможно добавить несколько вариантов. Первые два примера - самые легкие, если верно решены ставится оценка 3, три примера – оценка 4, четыре примера (Пример 5 – самый сложный) – оценка 5.

Методикой преподавания тригонометрии, в частности решения тригонометрических уравнений интересуются зарубежные математики. В статье Derling José Mendoza Velazco «Teaching Resource for the Teaching of Geometry: Circular Trigonometric Geoplane» [76] применяется иллюстрация «геоплана» в качестве учебного инструмента по тригонометрии, наглядно представлены тригонометрические соотношения косинуса, синуса, тангенса и котангенса. Методика основана на визуальном восприятии учебного материала.

В статье Valerie May, Scott Courtney «Developing Meaning in Trigonometry» [75] разработан урок изучения тригонометрии. Цель урока – соединить тригонометрические понятия в геометрии и алгебре. Разработана система обучающих упражнений для урока по тригонометрии.

В методике обучения математике, в частности обучения учащихся решению тригонометрических уравнений используются различные технологии: проблемного обучения, творческих мастерских, лекционно-семинарского метода и др. Предложим методические рекомендации в рамках технологии проблемного обучения по изучаемой теме.

В статье Н.А. Демченковой «Подготовка будущего учителя к проблемному обучению математике» [17] под проблемным обучением понимается система проблемных ситуаций, которая специально создается учителем на уроке с помощью проблемно-поисковой задачи. Проблемное обучение представляет собой создание некоторой проблемной ситуации, которая побуждает учащихся к самостоятельной творческой работе, к открытию новых методов и свойств.

В статье «Проблемное обучение высшей математике в вузе» [16] Н.А. Демченкова пишет, что применение проблемного обучения при изучении математики студентами способствует повышению эффективности обучения, развитию личности студента. Технология проблемного обучения по теме «Тригонометрические уравнения» поможет эффективней усвоить все основные типы и методы решения тригонометрических уравнений. Понять, а не заучить формулы корней тригонометрических уравнений. На примере проблемной ситуации сделаем выводы о целесообразности использования технологии проблемного обучения.

Определяем *цель создания проблемной ситуации*: необходимо ввести формулу корней простейшего тригонометрического уравнения $cos x = a$. Перед обучающимися ставится следующая практическая задача.

Учитель: Возьмем точку М($\frac{\pi}{4}$) на окружности и найдем соответствующие координаты в прямоугольной системе координат xOy (рис.1).

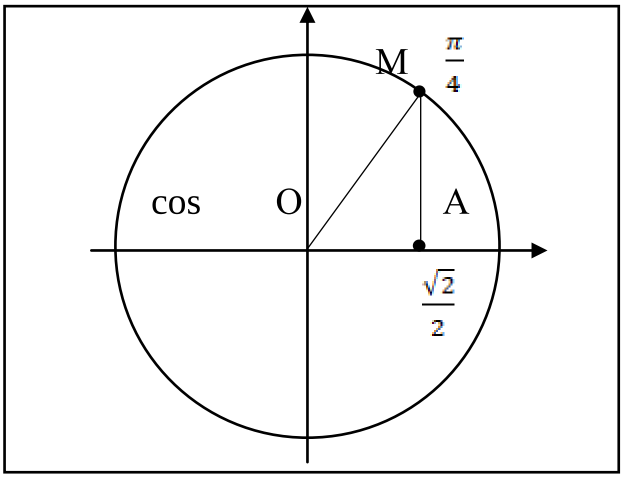

Рис. 2. Иллюстрация практической задачи

Обучающиеся: Опустим перпендикуляр на прямую ОА из точки М. Зная что уравнение числовой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$, то есть ОМ=1, $\angle$МОА = $45°$, т.к. М($\frac{\pi}{4}$) $= \frac{180°}{4} = 45°$, следовательно треугольник

MOA – равнобедренный MO=MA и прямоугольный. Нужно решить систему уравнений:

$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, при условии, что $x > 0, y > 0$.

$y^2 + y^2 = 1; 2y^2 = 1; y^2 = \frac{1}{2}; y = \frac{\sqrt{2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: M($\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Учитель: найдите все корни уравнения $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Прогнозируем основные затруднения учащихся при столкновении с данной проблемной ситуацией: осознание проблемы учащимися, как найти все корни уравнения?

Определяем пути разрешения данной проблемной ситуации с учащимися: нам необходима общая формула корней простейшего тригонометрического уравнения $cosx = a$.

Устанавливаем пути создания проблемной ситуации, используя предложенную проблемно-поисковую математическую задачу: конструирование формулы корней тригонометрического уравнения по точкам пересечения с окружностью.

Выбираем метод: исследовательский.

Выбираем форму учебной деятельности учащихся: коллективную.

Обучающиеся – в затруднении.

Учитель (ставит вспомогательную задачу): найдите на числовой окружности точки с абсциссой $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и запишите, каким числам на окружности они соответствуют.

Учащиеся: прямая $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает окружность в двух точках, эти точки соответствуют числам $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$, а значит и любым числам $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Учитель: как можно составить общую формулу корней тригонометрического уравнения?

Учащиеся: объединить множество чисел на окружности, соответствующих данной абсциссе в одну формулу.

Обучающиеся обсуждают, предлагают варианты общей формулы корней тригонометрического уравнения.

Учитель: решением уравнения $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ являются корни $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Общая формула: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

В основе проблемного обучения находятся проблемно-поисковые задачи, которые формируют у учащихся четкое представление решения тригонометрических уравнений. С помощью проблемного обучения учащиеся самостоятельно выдвигают предположения о формулах корней тригонометрических уравнений. Данная технология обучения помогает понять конструирование формулы корней тригонометрических уравнений, а не заучивать их.

Ю.М. Колягин в книге «Задачи в обучении математике» [28] пишет, что опыт многих учителей, проводящих изучение отдельных тем школьного курса математики в проблемной форме, показал, что учащиеся резко меняют свое отношение к учебной деятельности, приобретая к ней интерес. Как мы выяснили ранее, тема «Тригонометрические уравнения» довольно тяжела для учащихся средней школы, поэтому требует от них не только полной отдачи на уроках, но и максимальной заинтересованности, которую может обеспечить проблемное обучение.

Проектирование изучения темы «Тригонометрические уравнения» в рамках технологии проблемного обучения

Процесс изучения темы «Тригонометрические уравнения» в рамках технологии проблемного обучения будет происходить по следующей схеме: создание проблемной ситуации с помощью проблемно-поисковой задачи;

определение путей разрешения проблемной ситуации; решение проблемно-поисковой задачи.

Проектирование темы. Цель: формирование знаний и умений учащихся решать типы тригонометрических уравнений с применением основных методов. *Задачи*: разобрать примеры проблемно-поисковых тригонометрических уравнений основных типов и методов решения; определить пути разрешения проблемных ситуаций при решении проблемно-поисковых уравнений; провести контролирующие работы (самостоятельные, зачеты, контрольные).

В рабочей программе профильного уровня А.Г. Мордковича [42] выделено 16 часов на изучение темы «Тригонометрические уравнения»:

1. Простейшие тригонометрические уравнения (4 часа): $cosx = a$; $sinx = a$; $tgx = a$; $ctgx = a$.
2. Метод замены переменной (1 час).
3. Метод разложения на множители (1 час).
4. Однородные тригонометрические уравнения (2 часа).
5. Метод введения вспомогательного угла (1 час).
6. Контрольная работа (1 час).
7. Решение тригонометрических уравнений с применением формул преобразования (формулы двойного угла, формулы приведения, формулы суммы и разности аргументов, формулы преобразования сумм в произведение и произведения в сумму) (5 часов).
8. Метод универсальной подстановки (1 час).

Рассмотрим проектирование технологии проблемного обучения на примере изучения темы «Тригонометрических уравнения», в частности решения простейших тригонометрических уравнений с применением метода оценки правой и левой частей уравнения.

Решение простейших тригонометрических уравнений изучается в 10 классе, это обучение этому типу тригонометрических уравнений рассчитано на 4 часа по рабочей программе А.Г. Мордковича:

1. Решение уравнений $cosx = a$;
2. Решение уравнений $sinx = a$;
3. Решение уравнений $tgx = a$; $ctgx = a$;
4. Урок-контроль, самостоятельная работа.

Выбираем метод: исследовательский.

Выбираем форму учебной деятельности учащихся: коллективную.

Цель: формирование знаний и умений учащихся, связанных со структурой корней тригонометрических уравнений.

Предполагаемый результат: свободное применение формул корней для решения простейших тригонометрических уравнений. Осознание смысла формул корней тригонометрических уравнений.

План занятия:

– Организационный момент, ознакомление с планом занятия.

– Введение проблемной задачи (уравнения).

– Коллективное обсуждение решения проблемной задачи (уравнения).

– Решение проблемно-поисковой задачи.

Рассмотрим технологию проблемного обучения на примерах. Способ создания проблемной ситуации на основе имеющихся частных знаний.

Проблемная ситуация 1. Тема «Решение уравнения: $cosx = a$*».*

Учитель: решите уравнение $\cos(x^2) = \frac{2}{3}$.

Прогнозируем основные затруднения, с которыми сталкиваются учащиеся: как вычислить косинус с аргументом x^2?

Учащиеся: применяем формулу корней для решения исходного уравнения: $x^2 = \pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Учитель: оцените правую и левую части уравнения.

Учащиеся: $x^2 \geq 0$ и $\pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \geq 0$.

Учитель: в правую часть уравнения подставьте вместо k следующие значения: $-1; 0; 1$.

Учащиеся: (учитель записывает на доске) $k = -1$, $x^2 = \pm arccos\frac{2}{3} - 2\pi$; $k = 0$, $x^2 = \pm arccos\frac{2}{3}$; $k = 1$, $x^2 = \pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi$.

Учитель: во всех ли случаях правая часть будут положительной или равной 0? Какие приемы можно использовать, чтобы правая часть уравнения всегда была ≥ 0.

Учащиеся обсуждают, предлагают варианты ответов.

Учитель: Если $k = 1$, то правая часть > 0. Если $k = -1$, то правая часть уравнения ≥0 при $|k|$. Если $k = 0$, то правая часть уравнения ≥ при $(|k| + 1)$, так как 2π должно умножаться на положительное число.

Учитель: предлагает решить вспомогательную задачу: решите уравнение $x^2 = 4$.

Учащиеся: $x = \pm\sqrt{4}$.

Учитель: запишите ответ исходного уравнения.

Учащиеся: $x = \pm\sqrt{\pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi(|k| + 1)}, k\epsilon Z$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{\pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi(|k| + 1)}, k\epsilon Z$.

Проблемная ситуация 2. Тема «Решение уравнения: $sinx = a$».

Учитель: решите уравнение $\cos(sinx) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Учащиеся: $sinx = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Прогнозируем основные затруднения, с которыми сталкиваются учащиеся: как решить уравнение, если $sinx$ =бесконечное множество корней.

Учитель: Какие значения может принимать $sinx$? Оцените правую и левую часть уравнения.

Учащиеся: $-1 \le sinx \le 1$, значит $k = 0$ и $sinx = \pm\frac{\pi}{4}$.

$$\left[\begin{array}{l} sinx = \frac{\pi}{4} \\ sinx = -\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k arcsin\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z \\ x = (-1)^{k+1} arcsin\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

$$\left[x = \pm(-1)^k arcsin\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.\right.$$

Ответ: $x = \pm(-1)^k arcsin\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

Проблемная ситуация 3. Тема «Решение уравнения: $tgx = a$, $ctgx = a$*».*

Учитель: решите уравнение $tg(ctg(30^\circ + x))^2 = 1$.

Прогнозируем основные затруднения, с которыми сталкиваются учащиеся: вычисление котангенса сложного аргумента в квадрате.

Учащиеся: $(ctg(30^\circ + x))^2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

Учитель: оцените правую и левую части уравнения.

Учащиеся: $\frac{\pi}{4} + \pi k \geq 0$; $(ctg(30^\circ + x))^2 = \frac{\pi}{4} + \pi|k|, k\epsilon Z$; $ctg(30^\circ + x) = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi|k|}, k\epsilon Z$;

$30^\circ + x = \pm arcctg\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi|k|, k\epsilon Z} + \pi k, k\epsilon Z$.

Учитель: какой точке на окружности соответствует угол 30°?

Учащиеся: $x = \pm arcctg\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi|k|} - \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = \pm arcctg\sqrt{\frac{\pi}{4} + \pi|k|} - \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$.

Организация контроля

Самостоятельная работа:

1. **Задание.** Решите уравнение: $\cos(x^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x^2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\sqrt{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi(|k| + 1)}, k\epsilon Z$. Ответ: $x = \pm\sqrt{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi(|k| + 1)}, k\epsilon Z$.

2. **Задание.** Решите уравнение: $sin(cosx) = 0,5$; $cosx = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$; $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$; $cosx = \frac{\pi}{6}$, где $k = 0$ и $cosx = -\frac{\pi}{6}$, где $k = -1$. Ответ: $x = \pm arccos\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

3. Задание. Решите уравнение: $ctg(tgx)^2 = \sqrt{3}$. Решение: $(tgx)^2 = \frac{\pi}{3} + \pi|k|, k \in Z$; $tgx = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3} + \pi|k|}, k \in Z$; $x = \pm arctg\sqrt{\frac{\pi}{3} + \pi|k|}, k\epsilon Z$. Ответ: $x = \pm arctg\sqrt{\frac{\pi}{3} + \pi|k|}, k\epsilon Z$.

Организация контроля:

Цели: анализ хода формирования знаний и умений учащихся, связанных со структурой корней тригонометрических уравнений.

Контроль должен быть достаточно разнообразен и полон, охватывать все этапы обучения темы «Тригонометрические уравнения». Самостоятельная работа предусмотрена на четвертом уроке изучения темы «Решение простейших тригонометрических уравнений» и может показать уровень усвоения данной темы. Контроль знаний и умений необходим учителю для выявления типичных ошибок и их дальнейшего устранения. Работа проводится в письменной форме, самостоятельно и состоит из трех простейших уравнений. Во всех трех уравнениях применяются основные формулы корней тригонометрических уравнений. За каждую задачу можно получить от 0 до 3 баллов:

0 баллов – учащийся не приступал к решению уравнения или сделано все неверно;

1 балл – была попытка решения уравнения, но учащийся запутался в решении;

2 балла – ход решения верный, но есть ошибка в вычислении;

3 балла – уравнение решено верно.

По результатам выполнения работы выставляется отметка:

«5» - 8-9 баллов,

«4» - 5-7 баллов,

«3» - 3-4 балла,

«2» - меньше 3 баллов.

§8. Анализ типичных ошибок при решении тригонометрических уравнений

В пятом параграфе первой главы мы выделили основные типы и методы решения уравнений по теме «Тригонометрические уравнения» авторов А.Г. Мордковича, Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, еще раз их перечислим: простейшие тригонометрические уравнения; уравнения, решаемые методом замены переменной; однородные уравнения; уравнения, решаемые с помощью тригонометрических формул; тригонометрические уравнения, содержащие в себе другие функции; уравнения, где необходимо найти корни на определенном промежутке (интервале). На примере этих типов уравнений разберем ошибки.

Сначала разберем общие ошибки, которые могут быть допущены в любом типе тригонометрического уравнения, для этого разберем пример решения простейшего тригонометрического уравнения.

Пример 8.1. Решите уравнение: $cosx = \frac{1}{2}$; $x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Первая ошибка: неверное вычисление обратной тригонометрической функции. Исходя из примера 1: $x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$, далее пойдет неверное вычисление аркосинуса $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$. Следовательно, учащиеся плохо владеют тригонометрической окружностью и не умеют находить по ней значения обратных функций.

Вторая ошибка: неточности в формулах корней уравнений. В примере 8.1. один из корней имеет вид $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, учащиеся могут совершить ошибку в виде корня $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$, пропущена двойка. Ученики стараются заучить формулы корней и не вникают в их суть, поэтому возникают такого рода ошибки. Учащимся необходимо знать период каждой тригонометрической функции и как образуются формулы корней.

Далее разбираются ошибки, возникающие при решении определенного типа уравнения. И следующий тип, который рассмотрим – это уравнения, решаемые методом замены переменной.

Пример 8.2. Решите уравнение: $3cos^2x + 7cosx + 4 = 0$. Пусть $cosx = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $3t^2 + 7t + 4 = 0$, D=1, $x_1 = -\frac{4}{3}$ (не удовлитворяет $-1 \leq t \leq 1$), $x_2 = -1$; $cosx = -1$; $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$. Ответ: $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

Третья ошибка: незнание множества значений тригонометрических функций синуса и косинуса. При решении тригонометрических уравнений методом замены переменной, учащиеся нередко совершают ошибку, вследствие которой возникают посторонние корни уравнения. В примере 8.2., в решении квадратного уравнения имеем корень $x_1 = -\frac{4}{3}$, далее совершаем типичную ошибку: $cosx = -\frac{4}{3}$; $x = \pi \pm \arccos\frac{4}{3} + 2\pi k, k \in Z$. Учащиеся не осознают смысла в записи $sinx = a, cosx = a,$ где $a \in [-1; 1]$, область значений тригонометрических функций четко видно на их графиках. Чтобы подобные ошибки не допускались, можно использовать предложенный метод из примера 8.2. На этапе ввода замены переменной (пусть $cosx = t$), сразу обозначаем область значений для t ($-1 \leq t \leq 1$).

Рассмотрим ошибки в однородных тригонометрических уравнениях.

Пример 8.3. (однородное тригонометрическое уравнение 1-ой степени). Решите уравнение $6cosx - 2sinx = 0$. Разделим почленно обе части уравнения на $cosx \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $6 - 2tgx = 0, tgx = 3$, $x = arctg3 + \pi k, k \in Z$. Ответ: $x = arctg3 + \pi k, k \in Z$.

Четвертая ошибка: незнание определений $tg = \frac{sinx}{cosx}$ и $ctg = \frac{cosx}{sinx}$. Однородные тригонометрические уравнения первой и второй степеней решаются методом почленного деления обеих частей уравнения на $cosx$ или $sinx$, после деления могут возникнуть ошибки, если учащиеся перепутают формулы $tg = \frac{sinx}{cosx}$ и $ctg = \frac{cosx}{sinx}$, последующее решение уравнения будет неверным.

Пятая ошибка: незнание множества значений тригонометрических функций тангенса и котангенса. Учащиеся могут перепутать области значений тригонометрических функций синуса (косинуса) и тангенса (котангенса). При незнании области значений $tg = a, ctg = a, a \in (-\infty; +\infty)$, в ответе примера 8.3. будут отсутствовать корни.

В однородных тригонометрических уравнениях второй степени и неполных уравнениях второй степени будут встречаться ошибки подобные четвертой и пятой, поэтому примеры приводить нецелесообразно.

Следующий тип - это уравнения, решаемые с помощью тригонометрических формул (двойного угла, приведения и т.д.).

Пример 8.4. Решите уравнение $sin4xcos2x = sin2xcos4x$ [2]; $2sin2xcos^2 2x = cos^2 2xsin2x - sin^3 2x$; $cos^2 2xsin2x + sin^3 2x = 0$; $sin2x(cos^2 2x + sin^2 2x) = 0$; $sin2x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Шестая ошибка: неверно записаны тригонометрические формулы. В примере 8.4. требуется применить формулу основного тригонометрического тождества и формулу двойного угла. Если же формулы использованы не верно, то в решении уравнения будет ошибка. Кроме четвертого примера ошибки могут быть допущены при применении любой тригонометрической формулы: формулы понижения степени, формулы суммы и разности аргументов и т.д. Ошибки, связанные с незнанием формул, говорят о том, что недостаточно отработан данный тип уравнений.

В тригонометрических уравнениях, содержащих в себе другие математические функции допускаются все вышеперечисленные ошибки, так как с помощью преобразований такой тип уравнений перейдет к решению любого другого типа уравнения. Значит пример такого типа уравнений подробно разбирать нет необходимости.

Заключительный тип уравнений – это уравнения, где первое задание – решить уравнение, а второе - найти корни на определенном промежутке (интервале).

Пример 8.5. Решите уравнение $sin^2x + 1{,}5sinx - 1 = 0$ и найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

Решение: $sin^2x + 1{,}5sinx - 1 = 0.$ Пусть $\sin x = t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $t^2 + 1{,}5t - 1 = 0$, D=2,25, $x_1 = -2$ (не подходит), $x_2 = \frac{1}{2}$. $sinx = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. Для удобства поиска корней на промежутке $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$, запишем частные формулы двух корней $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$. Корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$ это $-\frac{19\pi}{6}$.

Седьмая ошибка: неверное вычисление корней, принадлежащих данному промежутку. Эта ошибка может быть допущена, если первое задание – решить уравнение выполнено с ошибками, а также неверным вычислением корней на заданном промежутке. Это происходит, когда учащиеся слабо владеют вычислениями на числовой окружности.

Восьмая ошибка: потеря корней на промежутке при переходе от общей формулы корней к двум формулам частного вида. В примере 8.5.: $sinx = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$. Мы потеряли второй частный вид корня $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, и поэтому теряются корни на промежутке.

Зарубежные и российские математики глубоко исследуют и анализируют ошибки, допускаемые учащимися при решении тригонометрических уравнений.

В статье H. Gür «Trigonometry Learning» [78] проводит эксперимент среди учащихся старших классов на знание тригонометрических формул и умение решать тригонометрические уравнения. Автор выделяет следующие ошибки, допущенные учащимися в ходе эксперимента: не знание тригонометрических формул (формул сложения, формул приведения), неверные определения значений функций, механические ошибки (ошибки в формулах корней).

В статье D. Fahrudin «Profile of students' errors in trigonometry equations» [77] проведен эксперимент по выявлению тригонометрических ошибок. Автор выделил следующие ошибки: ошибки в вычислении значений функций; ошибки в формулах корней; ошибки в отборе корней на промежутках, ошибки в применении тригонометрических формул (формул двойного угла и т.д.) при решении уравнений.

В статье Usman M.H. «Analysis of Students’ Error in Learning of Trigonometry Among Senior Secondary School Students in Zaria Metropolis» [79] проведен анализ типичных ошибок при решении тригонометрических уравнений. Автор обозначил следующие ошибки: ошибка понимания (неверное вычисление значений функций); ошибка навыка процесса (неверное применение тригонометрических формул); ошибка преобразования (ошибки в формулах корней).

В статье к.п.н., доцента А.Н. Павлова [52] выделены основные ошибки, допускаемые учащимися на ЕГЭ при решении тригонометрических уравнений: незнание формул для решения простейших уравнений; неверное написание табличных значений арккосинуса и арксинуса; неумение отбирать корни на промежутке, неарифметические ошибки при решении квадратного уравнения; незнание формул двойного угла; незнание множества значений тригонометрических функций; ошибки в уравнениях с радикалами.

В перечисленных статьях предложено несколько упражнений для повторения пройденного материала, с целью исключения некоторых типичных ошибок при решении тригонометрических уравнений:

– заполнить пропущенные табличные значения тригонометрических функций;

– заполнить пропуски в тригонометрических формулах (формулы сложения и разности аргументов, формулы приведения и т.д.).

Для улучшения качества решения тригонометрических уравнений, можно предложить следующие методические рекомендации:

– подбор задачного материала для отработки всех типов уравнений и методов их решений;

– ежедневные устные опросы по вычислению значений на числовой окружности;

– повторение теоретического материала, изученного ранее в котором допущены основные ошибки;

– предложение учащимся следующих заданий: найти ошибку в решении уравнения, объяснить и исправить ошибки в решении тригонометрических уравнений;

– подбор задачного материала для понимания периода и множества значений тригонометрических функций, например, задания где требуется решить уравнение с помощью графика;

– на уроках обязательны для проработки задания с отбором корней на заданных промежутках.

§9. Дифференцированная система тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ

В §6 мы обозначили, что при разработке дифференцированной системы тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ будет использоваться два вида дифференциации: уровневая (внутренняя), профильная (внешняя).

На ЕГЭ по математике представлено два типа профиля: базовый и профильный. Следовательно, профильная дифференциация системы тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ будет состоять из двух типов: базовый, который в свою очередь состоит из трех уровней; профильный, который также состоит из трех уровней.

Уровневая дифференциация будет состоять из следующих уровней:

1 уровень – базовые уравнения (удовлетворительные знания);

2 уровень – базовые уравнения с дополнительными сведениями (хорошие знания);

3 уровень – уравнения с различными дополнениями, усложняющими решение (отличные знания).

Объединив два вида дифференциации: профильный и уровневый. Выделим шесть групп в классе: базовый тип 1 уровень; базовый тип 2 уровень; базовый тип 3 уровень; профильный тип 1 уровень; профильный тип 2 уровень; профильный тип 3 уровень.

Для того, чтобы разработать дифференцированную систему тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ необходимо понять, что такое система. Т.А. Иванова в учебном пособии «Теория и технология обучения математике в средней школе» [66] определяет систему как совокупность элементов, находящихся в определенных связях и отношениях друг с другом, которые образуют определенную целостность. А системный подход в исследовании предполагает:

– выделение состава элементов, входящих в систему;

– установление структуры (связей между элементами);

– описание функций каждого из элементов, его роли и значения в системе.

Проектируя системный подход к дифференцированной системе тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ элементами будут выступать типы тригонометрических уравнений, связь между элементами – движение обучения от простого к сложному, опираясь на уровневую и профильную дифференциацию, описание элементов, их роль и значение – формирование умений и навыков решения тригонометрических уравнений на заданном уровне для дальнейшего перехода на следующий уровень сложности.

Дифференцированная система тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ изображена схематически на рис. 3.

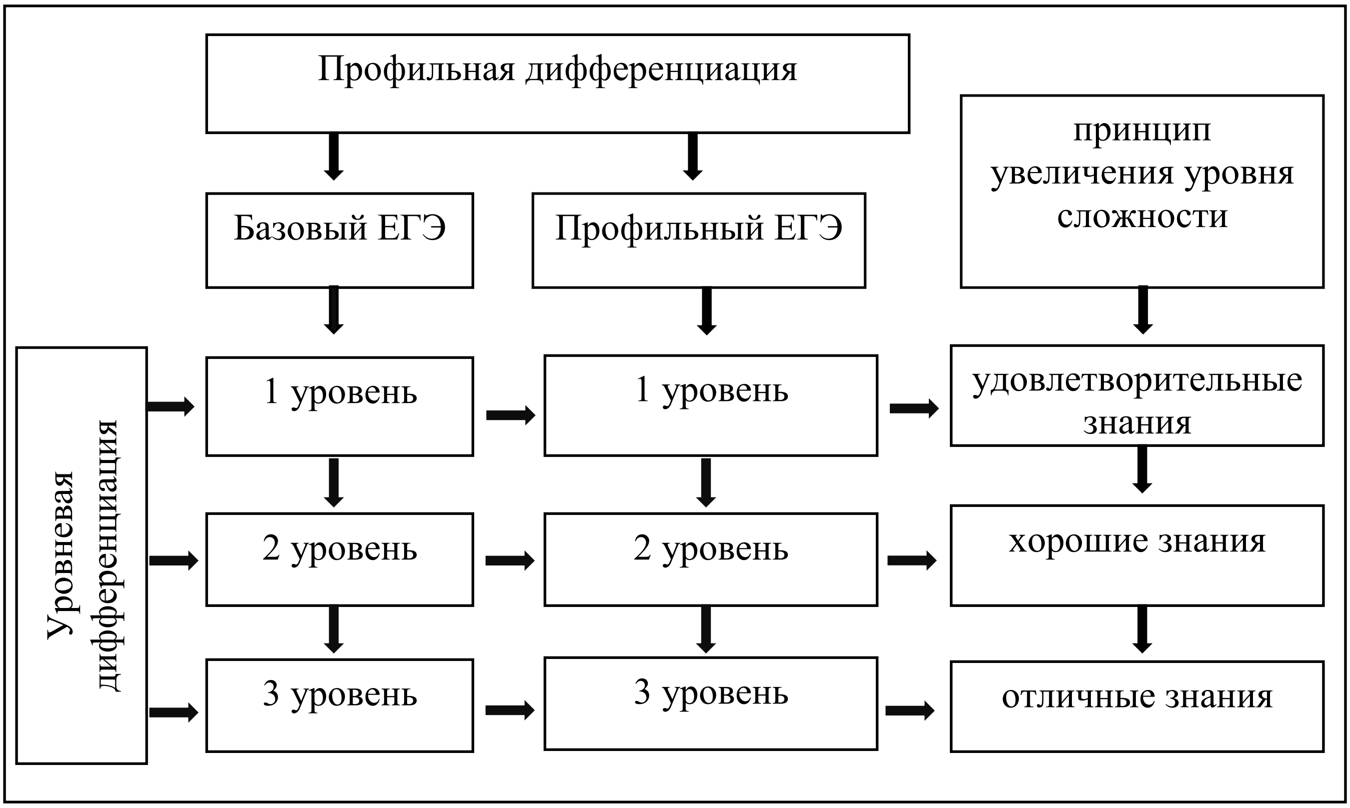

Рис. 3. Схема дифференцированной системы.

Далее разберем типы и методы тригонометрических уравнений, которые будут входить в тот или иной уровень.

Базовый тип 1 уровень будет содержать простейшие тригонометрические уравнения с односложными аргументами без дополнительных заданий в виде поиска корней на промежутке. Решения такого типа тригонометрических уравнений, выступают фундаментом для решения последующих типов. Их роль в системе является ключевой, так как все типы тригонометрических уравнений, посредством преобразований, приходят к решению простейших тригонометрических уравнений.

Пример 9.1. Решите уравнение: $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Ответ:

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Пример 9.2. Решите уравнение: $sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

Пример 9.3. Решите уравнение: $sinx = \frac{1}{8}$; $x = (-1)^{k} arcsin\frac{1}{8} + \pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = (-1)^{k} arcsin\frac{1}{8} + \pi k, k\epsilon Z$.

Пример 9.4. Решите уравнение: $cosx = \frac{5}{3}$. Ответ: нет решений, т.к. $-1 \leq cosx \leq 1$.

Пример 9.5. Решите уравнение: $tgx = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

Базовый тип 2 уровень будет содержать простейшие тригонометрические уравнения с модифицированным аргументом без дополнительных заданий в виде поиска корней на промежутке. Такой тип тригонометрических уравнений подготавливает учащихся к решению самых сложных уравнений базового профиля.

Пример 9.6. Решите уравнение: $\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{2} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k\epsilon Z$.

Пример 9.7. Решите уравнение: $ctg\frac{x}{2} = 1$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Пример 9.8. Решите уравнение: $2sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$; $sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{x}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\epsilon Z$;

$x=(-1)^k\frac{4\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}+4\pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x=(-1)^k\frac{4\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}+4\pi k, k\epsilon Z$.

Пример 9.9. Решите уравнение: $\sqrt{3}tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3$; $tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{\sqrt{3}}$;

$tg\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; $\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{x}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{x}{3}=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z$;

$x=\frac{\pi}{2}+3\pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+3\pi k, k\epsilon Z$.

Базовый тип 3 уровень будет содержать простейшие тригонометрические уравнения с модифицированным аргументом и поиском корней на заданном промежутке, или поиске наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней. Это типовые тригонометрические уравнения, которые входят в ЕГЭ базового уровня. Учащиеся, сдающие базовый ЕГЭ по математике, должны стремиться безошибочно решать подобные уравнения.

Пример 9.10. Решите уравнение $sin\frac{\pi x}{3}=0{,}5$. В ответе напишите наименьший положительный корень. Решение: $\frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{\pi x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z$; $x_1=\frac{1}{2}+6k, k\epsilon Z$; $x_2=\frac{5}{2}+6k, k\epsilon Z$. Если $k=0$, то $x=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{5}{2}$. Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

Пример 9.11. Решите уравнение $tg\frac{\pi x}{4}=-1$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень. Решение: $\frac{\pi x}{4}=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; $x=-1+4\,k, k\in Z$. Если $k=0$, то $x=-1$. Ответ: $x=-1$.

Пример 9.12. Решите уравнение $cos\frac{\pi(x+2)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[-\pi;0]$. Решение: $\frac{\pi(x+2)}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,k\epsilon Z;$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{2}=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,k\epsilon Z\\ \frac{\pi x}{2}=-\frac{5\pi}{4}+2\pi k,k\epsilon Z\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=-1{,}5+4k,k\epsilon Z\\ x=-2{,}5+4k,k\epsilon Z\end{array}\right.$$

\`Ответ: -2,5; -1,5.

Пример 9.13. Решите уравнение $ctg\frac{\pi(x-4)}{6}=\sqrt{3}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[2\pi;0]$. Решение: $\frac{\pi(x-4)}{6}=\frac{\pi}{6}+\pi k,k\epsilon Z;$ $\frac{\pi x}{6}=\frac{4\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi k,k\epsilon Z;\frac{\pi x}{6}=\frac{5\pi}{6}+\pi k,k\epsilon Z;\ x=5+6k,k\epsilon Z.$

Ответ: 5.

Профильный тип 1 уровень будет содержать уравнения основных типов тригонометрических уравнений и методы их решения. Типы: метод замены переменной, однородные уравнения, метод разложения на множители. На этом уровне учащиеся вспоминают основные типы тригонометрических уравнений и методы их решений, для последующего включения в уравнения дополнительных преобразований.

Пример 9.14. Решите уравнение: $4sin^2x-3sinx=0;$ $sinx(4sinx-3)=0;sinx=0$ или $4sinx-3=0.$

$$\left[\begin{array}{l}sinx=0\\ sinx=\frac{3}{4}\end{array}\right. \left[\begin{array}{c}x=\pi k,k\epsilon Z\\ x=(-1)^k arcsin\frac{3}{4}+\pi k,k\epsilon Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pi k,k\epsilon Z;x=(-1)^k arcsin\frac{3}{4}+\pi k,k\epsilon Z.$

Пример 9.15. Решите уравнение: $6cos^2x+cosx=2;$ $6cos^2x+cosx-2=0$. Пусть $cosx=t,-1\le t\le 1$, тогда $t^2+t-2=0;$ D=49, $t_1=\frac{1}{2},t_2=-\frac{2}{3}.$

$$\left[\begin{array}{l}cosx=\frac{1}{2}\\ cosx=-\frac{2}{3}\end{array}\right. \left[\begin{array}{c}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,k\epsilon Z\\ x=\pi\pm arccos\frac{2}{3}+2\pi k,k\epsilon Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z, x = \pi \pm arccos\frac{2}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Пример 9.16. Решите уравнение: $sin^2 4x + 2sin4xcos4x - 3cos^2 4x = 0,$

$(/cos^2 4x \neq 0; 4x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z; x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k, k\epsilon Z)$; $tg^2 4x + 2tg4x - 3 = 0.$

Пусть $tg4x = t$, тогда $t^2 + 2t - 3 = 0; D=16, t_1 = 1, t_2 = -3.$

$$\left[\begin{array}{l} tg4x = 1 \\ tg4x = -3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z \\ 4x = arctg(-3) + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k, k\epsilon Z \\ x = -\frac{arctg3}{4} + \frac{\pi}{4}k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k, k\epsilon Z; x = -\frac{arctg3}{4} + \frac{\pi}{4}k, k\epsilon Z.$

Пример 9.17. Решите уравнение: $sin^2\frac{x}{2} = 3sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2};$ $sin\frac{x}{2}\left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right) = 0;$ $sin\frac{x}{2} = 0$ или $sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2} = 0$ $(/cos\frac{x}{2} \neq 0; x \neq \pi + 2\pi k, k\epsilon Z).$

$$\left[\begin{array}{l} sin\frac{x}{2} = 0 \\ tg\frac{x}{2} = 1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi k, k\epsilon Z \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi k, k\epsilon Z; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Профильный тип 2 уровень будет содержать тригонометрические уравнения с применением преобразований уравнений с помощью тригонометрических формул: формул приведения; формул двойного аргумента; формул суммы и разности аргумента и т.д.). Так же на этом уровне будут изучаться тригонометрические уравнения, содержащие в себе другие математические функции. Второй уровень профильной подготовки необходим для отработки решения уравнений с преобразованиями.

Пример 9.18. Решите уравнение $tg(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = tg\frac{5\pi}{4};$ $tgxsin2x = 1; \frac{sinx \cdot 2sinx \cdot cosx}{cosx} = 1; 2sin^2 x = 1; sin^2 x = \frac{1}{2}; sinx = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^{k}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z \\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z \\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z \\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right. x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\epsilon Z$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\epsilon Z.$

Пример 9.19. Решите уравнение $(81^{sinx})^{cosx}=9^{\sqrt{2}cosx}$; $9^{2sinxcosx}=9^{\sqrt{2}cosx}$; $2sinxcosx=\sqrt{2}cosx$; $cosx(2sinx-\sqrt{2})=0$.

$$\left[\begin{array}{l} cosx=0 \\ sinx=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z \\ x=(-1)^{k}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z; x=(-1)^{k}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z.$

Пример 9.20. Решите уравнение $(6sin^2x+11cosx-10)log_{\pi}sinx=0$; ОДЗ: $sinx>0$; $\pi k, k\epsilon Z<x<\pi+2\pi k, k\epsilon Z$ (1) $6sin^2x+11cosx-10=0$ или (2) $log_{\pi}sinx=0$. Решаем по очереди: (1) $6sin^2x+11cosx-10=0$; $6-6cos^2x+11cosx-10=0$; $6cos^2x-11cosx+4$. Пусть $cosx=t, -1\leq t\leq 1$, тогда $6t^2-11t+4=0$, D=25, $t_1=1\frac{1}{3}$(не подходит), $t_2=\frac{1}{2}$. $cosx=\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\epsilon Z$; с учетом ОДЗ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\epsilon Z.$
(2) $log_{\pi}sinx=0; sinx=1; x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\epsilon Z; x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z.$

Пример 9.21. Решите уравнение $3sin^2\frac{x}{4}-sin\frac{x}{4}cos\frac{x}{4}=2$; $3sin^2\frac{x}{4}-sin\frac{x}{4}cos\frac{x}{4}-2sin^2\frac{x}{4}-2cos^2\frac{x}{4}=0$;
$sin^2\frac{x}{4}-sin\frac{x}{4}cos\frac{x}{4}-2cos^2\frac{x}{4}=0$ $(/cos^2\frac{x}{4}\neq 0; \frac{x}{4}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z;$ $x\neq 2\pi+4\pi k, k\epsilon Z)$; $tg^2\frac{x}{4}-tg\frac{x}{4}-2=0$. Пусть $tg\frac{x}{4}=t$, тогда $t^2-t-2=0$, D=9, $t_1=1, t_2=-2$.

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{4}=1 \\ tg\frac{x}{4}=-2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{x}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z \\ \frac{x}{4}=-arctg2+\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\pi+4\pi k, k\epsilon Z \\ x=-4arctg2+4\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi + 4\pi k, k\epsilon Z; x = -4arctg2 + 4\pi k, k\epsilon Z.$

Профильный тип 3 уровень будет содержать тригонометрические уравнения с применением преобразований уравнений с помощью тригонометрических формул: формул приведения; формул двойного аргумента; формул суммы и разности аргумента и т.д.). На этом уровне учащиеся тренируются решать тригонометрические уравнения разными методами: метод замены, переменной, метод разложения на множители, метод оценки правой и левой частей. Так же на этом уровне будут изучаться тригонометрические уравнения, содержащие в себе другие математические функции. И обязательное дополнительное задание для каждого уравнения – поиск корней на заданном промежутке. Это типичное 13 задание ЕГЭ профильного уровня. Рассмотренные уравнения этой группы представлены в учебных пособиях И.В. Ященко [73, 74]. Третий уровень играет роль непосредственной подготовке к ЕГЭ.

Пример 9.22. а) Решите уравнение $tg(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = sin\frac{5\pi}{6}$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Решение а) $-tgx(-sin2x) = \frac{1}{2}$; $tgx2sinxcosx = \frac{1}{2}$; $\frac{sinx2sinxcosx}{cosx} = \frac{1}{2}$; $2sin^2x = \frac{1}{2}$; $sin^2x = \frac{1}{4}$; $sinx = \pm\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \quad x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$$

б) $x = -\frac{5\pi}{6}; x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}; x = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}.$

Ответ: а) $x = \pm(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}.$

Пример 9.23. а) Решите уравнение $sinx = \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Решение а) ОДЗ: $\frac{1-cosx}{2} \geq 0$; $1 - cosx \geq 0$; $cosx \leq 1$; $x\epsilon R$. $\frac{1-cosx}{2} = sin^2x$; $1 - cosx = 2sin^2x$;

$1 - cosx - 2 + 2cos^2x = 0; \quad 2cos^2x - cosx - 1 = 0.$ Пусть $cosx = t$, $-1 \le t \le 1$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$, D=9, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 1 \\ cosx = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k\epsilon Z \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

б) $x = 2\pi; x = 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}; x = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = 2\pi k, k\epsilon Z; x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) 2π; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Пример 9.24. а) Решите уравнение $cosx + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}(sinx + 1)} = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$. Решение а) Это уравнение решается методом оценки левой и правой частей и оно переходит к решению следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2}(sinx + 1) = 0 \\ cosx \le 0 \end{cases} \begin{cases} sinx = -1 \\ cosx \le 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ -\pi + 2\pi k, k\epsilon Z \le x \le 2\pi k, k\epsilon Z \end{cases}$$

б) $-4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{9\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) $-\frac{9\pi}{2}$.

Пример 9.25. а) Решите уравнение $2sin2x - 4cosx + 3sinx - 3 = 0$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$. Решение а) $4sinxcosx - 4cosx + 3sinx - 3 = 0; \quad sinx(4cosx + 3) - (4cosx + 3) = 0;$ $(4cosx + 3)(sinx - 1) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} 4cosx + 3 = 0 \\ sinx - 1 = 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} cosx = -\frac{3}{4} \\ sinx = 1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \pi - arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z \\ x = \pi + arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

б) $x = \frac{5\pi}{2}; x = \pi + arccos\frac{3}{4}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pi \pm arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\pi + arccos\frac{3}{4}$.

Пример 9.26. а) Решите уравнение $\frac{1}{sin^2x}-\frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{2}-x)}=2$. б) Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$. Решение а) ОДЗ:

$\left[\begin{array}{l} sin^2x \neq 0 \\ \cos(\frac{3\pi}{2}-x) \neq 0 \end{array}\right.$ $sinx \neq 0; x \neq \pi k, k\epsilon Z;$

$\frac{1}{sin^2x}+\frac{1}{sinx}-2=0;$ $\frac{1+sinx-2sin^2x}{sin^2x}=0;$ $2sin^2x-sinx-1=0.$ Пусть $sinx=t, -1 \leq t \leq 1$, тогда $2t^2-t-1=0$, D=9, $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

$\left[\begin{array}{l} sinx=1 \\ sinx=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z \\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z \\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$

б) $x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}; x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6};\ x=\frac{5\pi}{2}.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z; x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z;$ б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}.$

§10. Описание педагогического эксперимента

Констатирующий этап экспериментального исследования подразумевает под собой: 1) изучение современного состояния использования дифференцированной системы заданий (уравнений) при подготовке к ЕГЭ; 2) апробацию дифференцированной системы тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ на практических занятиях, проверка гипотезы.

В качестве метода исследования в первом случае анкетирование учителей, во втором спроектированная дифференцированная система тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ (см. §9) и дифференцированная контрольная работа.

В первом этапе констатирующего эксперимента учителям математики предлагается ответить на следующие вопросы: 1. Какие виды дифференциации Вы используете при подготовке к ЕГЭ? По теме «Тригонометрические уравнения»? 2. Что Вы понимаете под дифференцированной системой тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ? 3. Как часто Вы даете отдельным группам учащихся разные по сложности задания (тригонометрические уравнения)? Почему? 4. Применяете ли Вы дифференцированные самостоятельные, контрольные работы в обучении? Почему? 5. Хотели бы Вы применять дифференцированное обучение в классах?

В первом этапе констатирующего эксперимента для учащихся двух классов проводились занятия по теме «Тригонометрические уравнения» при подготовке к ЕГЭ. В «А» классе занятия проводились традиционно (без применения дифференциации), в «Б» классе занятия проводились по дифференцированной системе.

Учащимся обоих классов на первом этапе предлагается одинаковая контрольная работа.

Контрольная работа:

1. **Задание.** Решите уравнение: $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

2. **Задание.** Решите уравнение: $sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$; $\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; $\frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; $x_1 = \frac{1}{2} + 6k, k \in Z$; $x_2 = \frac{5}{2} + 6k, k \in Z$. Ответ: $x_1 = \frac{1}{2} + 6k, k \in Z; x_2 = \frac{5}{2} + 6k, k \in Z$.

3. **Задание.** Решите уравнение: $cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень. Решение: $\frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{3}x - \frac{7\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{3}x = \frac{7\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = 7 \pm 1 + 6k, k\epsilon Z$. Если $k = -1$, то $x = 2$ и $x = 0$; если $k = -2$, то $x = -4$ и $x = -6$. Ответ: $x = -4$.

4. Задание. Решите уравнение: $2cos^2 2x - cos2x - 3 = 0$. Пусть $cos2x = t$, $-1 \le t \le 1$, тогда $2t^2 - t - 3 = 0$, D=25, $t_1 = \frac{3}{2}$ (не подходит), $t_2 = -1$. $cos2x = -1$; $2x = \pi + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

5. Задание. Решите уравнение:
$cosx + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}sin2x - 1$;
$cosx + 2\cos 2xcos\frac{\pi}{3} + 2sin2xsin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}sin2x - 1$;
$cosx + cos2x + \sqrt{3}sin2x = \sqrt{3}sin2x - 1$;
$cosx + cos^2x - sin^2x = -cos^2x - sin^2x$; $2cos^2x + cosx = 0$;
$cosx(2cosx + 1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0 \\ cosx = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

6. Задание. а) Решите уравнение $(2cos^2x - sinx - 1)log_{0,5}(-0,5cosx) = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-6\pi; -4\pi]$. Решение: ОДЗ: $-0,5cosx > 0$; $cosx < 0$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. $-0,5cosx = 1$; $cosx = -2$ (корней нет) или $2cos^2x - sinx - 1 = 0$; $1 - sin^2x - sinx - sin^2x = 0$; $2sin^2x + sinx - 1 = 0$. Пусть $sinx = t$ $(-1 \le t \le 1)$, тогда $2t^2 + t - 1 = 0$; D=9, $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = -1$.

$$\left[\begin{array}{l} sinx = -1 \\ sinx = \frac{1}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \notin \text{ОДЗ} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \notin \text{ОДЗ} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z \end{array}\right.$$

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-6\pi; -4\pi]$. $-5\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{31\pi}{6}$.

Ответ: а) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \epsilon Z$; б) $-\frac{31\pi}{6}$.

На контрольную работу выделяется 45 минут учебного времени. Критериями оценивания контрольной работы предложено взять по каждому заданию основные моменты: выполнено полностью правильно; выполнено полностью с недочетами и ошибками; не выполнено вообще или неправильно.

Выводы по второй главе

Вторая глава посвящена методическим основам обучения решению тригонометрических уравнений в школьном курсе математики. В ней изложены методические рекомендации обучения решению тригонометрических уравнений; проведен анализ типичных ошибок при решении тригонометрических уравнений; разработана дифференцированная система тригонометрических уравнений при подготовке к ЕГЭ; описано содержание методического проекта по теме «Тригонометрические уравнения»; отображено описание проведенного педагогического эксперимента.

Во второй главе выделены:

1. Перечень методических рекомендаций обучения решению тригонометрических уравнений.
2. Типичные ошибки при решении тригонометрических уравнений: неверное вычисление обратной тригонометрической функции; неточности в формулах корней уравнений; незнание множества значений тригонометрических функций синуса и косинуса; незнание определений тангенса и котангенса; незнание множества значений тригонометрических функций тангенса и котангенса; неверно записаны тригонометрические формулы; неверное вычисление корней, принадлежащих данному промежутку; потеря корней на промежутке при переходе от общей формулы корней к двум формулам частного вида.

3. Система тригонометрических уравнений для подготовки учащихся к ЕГЭ в условиях дифференцированного обучения двух видов: профильного и уровневого.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты и выводы, полученные в ходе достижения поставленных задач:

– определены цели, задачи, предметные требования в условиях ФГОС по теме «Тригонометрические уравнения»;

– изучено содержание теоретического и практического материала по теме «Тригонометрические уравнения» в различных учебниках алгебры и начала анализа;

– выделены основные типы и методы решения тригонометрических уравнений;

– выявлены типичные ошибки учащихся при решении тригонометрических уравнений;

– разработаны методические рекомендации обучения по теме «Тригонометрические уравнения»;

– спроектирована система тригонометрических уравнений в условиях дифференцированной подготовки к ЕГЭ;

– описан педагогический эксперимент.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что все поставленные в диссертации цели достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы: учеб. пособие для учителей общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни /Т.А. Бурмистрова. - М.: Просвещение, 2016. - 128 с.

2. Алгебра и начала анализа: 10-11 кл: Учебник для общеобразовательных учреждений /А.Н. Колмогоров [и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. - 6-е изд. - М.: Просвещение, 2007. - 320 с.

3. Анисимов, С.В. Три метода решения тригонометрических уравнений /С.В. Анисимов //Инженерные и социальные системы. - 2017. - С. 40-43.

4. Бабаян, Д.К. Тригонометрия: однородные уравнения второй степени / Д.К. Бабаян //Математика - Первое сентября. - 2013. - №6. С. 45-53.

5. Башмаков, М.И. Уровень и профиль школьного математического образования /М.И. Башмаков //Математика в школе. - 1993. - №2. С. 8-9.

6. Березанская, Е.С. Тригонометрические уравнения и методика их преподавания / Е.С. Березанская - Москва: Учпедгиз, 1935. - 68с.

7. Борзенкова, Л.В. Учет индивидуальных особенностей учащихся при изучении темы «Тригонометрические уравнения» /Л.В. Борзенкова //Вестник магистратуры. - 2019. - С. 75-77.

8. Борзенкова, Л.В. Методика решений тригонометрических уравнений, содержащих в себе разные функции /Л.В. Борзенкова // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: материалы II Международной заочной научно-практической конференции. 3-9 июня 2019 г., г. Луганск. – Луганск: Книта, 2019. - С. 109-114.

9. Борзенкова, Л.В. Методика обучения старшеклассников решению тригонометрических уравнений /Л.В. Борзенкова //Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция «Молодежь. Наука. Общество». - 2019.

10. Борзенкова, Л.В. Типичные ошибки учащихся при решении тригонометрических уравнений /Л.В. Борзенкова //Вестник магистратуры. - 2019. - С. 77-80.

11. Бородуля, И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства / И.Т. Бородуля - М.: Просвещение, 1989. - 239с.

12. Бржозовский, Г.И. Проверка и исследование корней тригонометрических уравнений в курсе математики средней школы и педагогического института: дис. ... канд. пед. наук /Г.И. Бржозовский - Ленинград, 1967. - 190 с.

13. Гончаров, Н.К. Дифференциация и индивидуализация образования в современных условиях /Н.К. Гончаров //Проблемы социальной педагогики. - М: Педагогика, 1975. - С. 338-341.

14. Григорян, К.М. Решение тригонометрических уравнений вида $sin^2x + cos^2x = a$ / К.М. Григорян //Проблемы современной науки и образования. - 2018. - С. 10-13.

15. Данилова, Н.А. Обучение учащихся решению тригонометрических уравнений посредством опорных схем /Н.А. Данилова //Образование и педагогические науки в XXI веке. - 2017. - С. 101-105.

16. Демченкова, Н.А. Проблемное обучение высшей математике в вузе /Н.А. Демченкова //Вектор науки ТГУ. - 2018. - №3(34). С. 7-13.

17. Демченкова, Н.А. Подготовка будущего учителя к проблемному обучению математике /Н.А. Демченкова //Вектор науки ТГУ. - 2014. - №1(16). С. 66-69.

18. Дятлов, В.Н. Технология решения задачи: Лекция 13. Решение тригонометрических уравнений без анализа множества корней / В.Н. Дятлов //Математика - Первое сентября. - 2013. - №6. С. 45-53.

19. Ергалиев, Е.К. Методика формирования умений решать тригонометрические уравнения и неравенства в курсе алгебры и начал анализа /Е.К. Ергалиев //Актуальные научные исследования в современном мире. - 2018. - С. 137-142.

20. Захарова, О.В. Методические особенности обучения тригонометрии учащихся профильных классов: дис. ... канд. пед. наук /О.В. Захарова. - Астрахань, 2010. - 221 с.

21. Ивлев, Б.М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса /Б.М. Ивлев, С.М. Саакян, С.И. Шварцбурд. - 6-е изд. - М.: Просвещение, 2006 г. - 176 с.

22. Капкаева, Л.С. Формирование универсальных учебных действий учащихся при решении тригонометрических уравнений и неравенств / Л.С. Капкаева //Математика и математическое образование: современные тенденции и перспективы развития. - 2017. - С. 19-25.

23. Кара-Сал, Н.М. Решение некоторых видов тригонометрических уравнений в школьном курсе математики /Н.М. Кара-Сал//Вестник Тувинского государственного университета. - 2011. - С. 9-15.

24. Карп, А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для 10-11 кл. с углубленным изучением математики /А.П. Карп. - М.: Просвещение, 1995. - 176 с.

25. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа. Учеб. Пособие для 9-10 кл. сред. Школы /А.Н. Колмогоров. - М.: Просвещение, 1975. - 222 с.

26. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10 кл. средней школы (базовый и профильный уровни) /Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. - 4-е изд. - М.: Просвещение, 2011. - 368 с.

27. Колягин, Ю.М. Профильная дифференциация обучения математике /Ю.М. Колягин //Математика в школе. - 1990. - №4. С. 21-26.

28. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математики /Ю.М. Колягин. - М.: Просвещение, 1977. - 111с.

29. Корянов, А.Г. Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников /А.Г. Корянов //Математика - Первое сентября. - 2011. - №14. С. 49-59.

30. Костюченко, Р.Ю. Алгоритмический подход к обучению школьников решению тригонометрических уравнений /Р.Ю. Костюченко //Theoretical&applied science. - 2015. - С. 80-85.

31. Кочетков, Е.С. Алгебра и элементарные функции. В 2 ч. Уч. Пособие для 9-10 классов. /Е.С. Кочетков, Е.С. Кочеткова. - М.: Просвещение, 1969. - 288 с.

32. Круповецкий, Л.Г. К методике решения тригонометрических уравнений /Л.Г. Круповецкий //Математика в школе. - 1937. - №2. С. 41-49.

33. Ладошкин, М.В. Обучение решению тригонометрических уравнений при подготовке к Единому Государственному Экзамену /М.В. Ладошкин //Учебный эксперимент в образовании. - 2017. - С. 34-41.

34. Литвиненко, В.Н. Практикум по элементарной математике. Тригонометрия: Учебное пособие /В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. - М.: Вербум-М, 2007. - 160 с.

35. Майер, Е.И. Некоторые методические аспекты изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики /Е.И. Майер //Наука и образование: Новое время. - 2017. - С. 365-369.

36. Молоткова, Б.Б. Методика использования электронных образовательных ресурсов при изучении тригонометрии как средство повышения уровня осознанности знаний: дис. ... канд. пед. наук /Б.Б. Молоткова. - Санкт-Петербург, 2014. - 272 с.

37. Марасанов, А. Н. Система задач по тригонометрии в обучении математике учащихся средних общеобразовательных учреждений: дис. ... канд. пед. наук /А.Н. Марасанов. - Йошкор-Ола, 2012. - 180с.

38. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни /Ш.А. Алимов [и др.]. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 2016. - 463с.

39. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) /А.Г. Мордкович.- 14-е изд. - М.: Мнемозина, 2013. - 400 с.

40. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 кл.: Учебник для учащихся общеобразовательных орг. (базовый и углубленный уровни) /А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. - 2-е изд. - М.: Мнемозина, 2014. - 463 с.

41. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа.10-11 классы. Часть 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень), - 10-е изд., стер. /А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2009. - 399 с.

42. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 кл.: Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) /А.Г. Мордкович. - 4-е изд., испр. - М.: Мнемозина, 2007. - 336 с.

43. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 кл.: В 2 ч. Ч. 2 задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) /А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. - 6-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2009. - 424 с.

44. Мордкович, А.Г. Тригонометрия: Учебное пособие для учащихся старших классов общеобразовательных школ. /А.Г. Мордкович, Е.Е. Тульчинская. - М.: Издательский дом "Новый учебник", 2009. - 224 с.

45. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа: 10-11 кл.: Методическое пособие для учителя /А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2006 г. - 144 с.

46. Мугаллимова, С.Р. Обучение отбору корней тригонометрического уравнения /С.Р. Мугаллимова //Математика. - 2014. - №10. - С. 30-32.

47. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник /Г.К. Муравин, О.В. Муравина. - М.: Дрофа, 2013. - 318 с.

48. Никольский, М.К. Алгебра и начала математического анализа 10 класс: Учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный

уровни /С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. - 8-е изд. - М.: Просвещение, 2009. - 430 с.

49. Новоселов, С.И. Тригонометрия: Учебное пособие для общеобразовательных учебных учреждений /С.И. Новоселов. - М.: Учпедгиз, 1963. - 150 с.

50. Олехник, С.Н. Уравнения и неравенства (нестандартные методы решения): Учебное пособие для учащихся старших классов общеобразовательных школ /С.Н. Олехник, М.К. Потапов П.И. Пасиченко. _ М.: Дрофа, 2007. - 150 с.

51. Останов, К.О. Об изучении методов решения простейших тригонометрических уравнений в средней школе /К.О. Останов //Проблемы науки. - 2019. №4. - С. 80-82.

52. Павлов, А.Н. Обобщающе повторение темы «Тригонометрические уравнения при подготовке к профильному ЕГЭ /А.Н. Павлов//Конференциум ФСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. - 2015. - С. 1308-1316.

53. Полянская, Н.В. Обучение учащихся решению тригонометрических уравнений в условиях дифференциального подхода /Н.В. Полянская //Электронный научный журнал. - 2017. - С. 93-95.

54. Репьев, В.В. Методика тригонометрии /В.В. Репьев. - М.: Учпедгиз, 1937. - 152 с.

55. Рогановский, Н.М. Каким быть дифференцированному учебнику /Н.М. Рогановский //Математика в школе. - 1993. №3. С. 11-12.

56. Рупасов, К.А. К вопросу о решении тригонометрических уравнений /К.А. Рупасов //Математика в школе. - 1938. - №2. С. 66-67.

57. Самсонов, П.И. Простые замечания о сложной методике обучения решению тригонометрических уравнений» /П.И. Самсонов //Математика. - 2010. - №7. С. 46-47.

58. Самсонов, П.И. Тема урока «Решение тригонометрических уравнений различными способами» /П.И. Самсонов //Математика. - 2008. - №22. С. 13-14.

59. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учебное пособие / В.К. Егерев. - 6-е изд., испр. и доп. - М.: Столетие, 2007. - 560 с.

60. Седова, Е.А. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 10-11 классы /Е.А. Седова, С.В. Пчелинцев, Т.М. Мищенко и др. - М.: Вентана-Граф, 2012. - 136 с.

61. Синакевич, С.В. Опыт работы по теме «Тригонометрические уравнения» /С.В. Синакевич //Математика в школе. - 1955. - №1. С. 4-19.

62. Словарь иностранных слов, 18-е изд. М.: Русский язык, 1989. - 624 с.

63. Соловьева, Л.А. Отбор корней тригонометрических уравнений Л.А. Соловьева //Информация и образование: границы коммуникаций. - 2016. - С. 196-201.

64. Суханова, С. Н. Изучение тригонометрии на основе деятельностного подхода и технологии дистантного обучения как способ развития математических способностей: дис. ... канд. пед. наук /С.Н. Суханова. - Новокузнецк, 2002. - 179с.

65. Темербекова, А.А. Методика обучения математике: Учебное пособие /А.А. Темербекова, И.В. Чугунов, Г.А. Байгонакова. - СПб.: Издательство «Лань», 2015. - 512 с.

66. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. Пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов /Т.А. Иванова. 2-е изд., испр. и доп. - Н. Новгород: НГПУ, 2009. - 355с.

67. Тригонометрические уравнения. Электронное пособие для абитуриентов. /Ю.И Галанов. – Томск: ТПУ, 2011. - 72 с.

68. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. ... док. пед. наук /Р.А. Утеева. - Москва, 1998. - 363 с.

69. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. № 413. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/2365

70. Хабибуллин, К.Я. Систематизируем методы решения тригонометрических уравнений /К.Я. Хабибулин //Образование в современной школе. - 2009. - №9. С. 30-38.

71. Шапошников, Н.А. Учебник алгебры, примененный к программам средних заведений. - 7-е изд. (в двух частях) с существ. доп. во второй части. - Ч. 2.: Курсы старших классов гимназий и реальных училищ /Н.А. Шапошников. - М.: Тип. Императорск. Моск. ун-та, 1908. - 176 с.

72. Шарапова, В.К. Тема урока «Решение тригонометрических уравнений» /В.К. Шарапова //Математика - Первое сентября. - 2014. - №7. С. 44-47.

73. Ященко, И.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов /И.В. Ященко. - М.: Изд. «Национальное образование», 2019. - 256 с.

74. Ященко, И.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов /И.В. Ященко. - М.: Изд. «Национальное образование», 2020. - 256 с.

75. Valerie May, Scott Courtney Developing Meaning in Trigonometry / Valerie May, Scott Courtney //Illinois Mathematics Teacher. - 2016. - P. 25-32.

76. Derling José Mendoza Velazco, Yoandry Rivero Padrón Teaching Resource for the Teaching of Geometry: Circular Trigonometric Geoplane / Derling José Mendoza Velazco, Yoandry Rivero Padrón //International electronic journal of mathematics education. - 2019. - P. 3-13.

77. Fahrudin D., Mardiyana and Pramudya I. Profile of students' errors in trigonometry equations /Fahrudin D., Mardiyana and Pramudya I. //IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1188. - 2018. - P. 1-8.

78. Hülya Gür Trigonometry Learning /Hülya Gür //New Horizons in Education. - 2009. - P. 87-80.

79. Usman M.H., Hussaini M.M. Analysis of Students' Error in Learning of Trigonometry Among Senior Secondary School Students in Zaria Metropolis, Nigeria /M.H Usman., M.M. Hussaini //IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM). - 2017. - P. 1-4.

80. https:ege.sdamgia.ru/ : сайт «Решу ЕГЭ».

81. https://открытый урок.рф : сайт «Открытый урок. 1 Сентября».