МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Принцип математической индукции и его применение в школьном курсе математики»

Студент А.Н. Барышников
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук О.А. Кузнецова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Общемировые интеграционные процессы в науке и производственно-экономической сфере потребовали качественно нового подхода к математическому образованию в целом, и школьному в частности. XXI век ознаменован бурно развивающимся процессом математизации знаний и всемерным проникновением математических методов во все отрасли науки и практики, что, в свою очередь, закономерно вызывает необходимость более глубокого освоения и использования математических методов, повышения уровня математического мышления и мыслительных способностей, развития математической интуиции.

Одна из ключевых целей математического школьного образования согласно ФГОС [43] и одновременно одна из самых сложных задач, стоящих перед учителем математики – научить учащихся правильно строить доказательные рассуждения, выводить верные умозаключения, то есть рассуждать в соответствии с логическими правилами. В этом контексте специалисты в области методики преподавания математики сходятся во мнении, что исключительное значение имеет развитие индуктивного и дедуктивного мышления учащихся в силу той особой роли, которую играют доказательства в математике и в обучении математике. Однако обучение доказательству без объяснения того, как осуществляется доказательство, не позволяет в полной мере использовать возможности этого обучения. Для повышения эффективности обучения доказательству должна быть организована специальная работа по разъяснению общелогических методов рассуждений.

Известно, что дедукция и индукция – это важнейшие виды умозаключений, играющие огромную роль в процессе получения новых знаний на основе выведения из ранее полученных. Однако эти формы мышления принято рассматривать также и как особые методы, приемы познания. В данной работе фокус внимания обращен на особенности изучения принципа математической индукции – единственного метода индуктивного исследования, приводящего к математически достоверным заключениям. Причем достоверность в этом случае достигается единством индукции и дедукции, а плодотворность данного метода, по мнению Ярыгина, в большой мере зависит от интуиции и воображения [49].

Вопросами применения принципа математической индукции (далее ПМИ) занимались Н.Я. Виленкин [12], комплексы заданий по применению ПМИ систематизированы и разработаны И.С. Соминским [36], А.В. Леонтьевой [23], А.Ш. Шень [46]. В контексте развития интеллектуальной компетентности и математического мышления проблему изучения затрагивали Ю.М. Колягин [7], С.И. Шварцбурд [34]; методические аспекты обучения школьников рассматривали И.Я. Депман [4], И.С. Рубанов[35].

Таким образом, можно констатировать определенный интерес ученых к теме «Принцип математической индукции», вместе с тем исследований, посвященных методическим аспектам изучения ее в современной школе явно недостаточно, что обуславливает актуальность проблемы.

Метод, связанный, по своему существу, с понятием числа и в первую очередь имеет наибольшее применение в арифметике и алгебре. Однако понятие числа является основным во всей математике, поэтому метод математической индукции широко используется в самых разнообразных её областях. На основе метода решается множество задач, как программных, так и олимпиадных. В психологическом и методическом аспектах метод неполной индукции особенно хорош в целях: развития логических структур мышления (за счет проведения анализа, синтеза, сравнения, обобщения), активизации познавательной деятельности учащихся, постановки проблемных ситуаций и поиска их решения. При этом в школьной программе с данной темой знакомятся лишь поверхностно и только в классах с углубленным изучением математики. Таким образом, можно говорить о существующем *противоречии* между значимостью принципа математической индукции в математической науке, огромном его потенциале в плане развития логического, алгоритмического мышления, кругозора, математической культуры и недостаточным вниманием к его изучению в современной школе.

Поиск путей разрешения данных противоречий обусловили выбор темы исследования и позволило сформулировать **проблему исследования**; каковы должны быть методические основы эффективного обучения принципу математической индукции в старших классах общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методические особенности изучения принципа математической индукции в школьном курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности для эффективного обучения принципу математической индукции и разработать методические материалы для его применения в школьном курсе математики в процессе подготовки учащихся общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования заключается в следующем: реализация принципа математической индукции позволит повысить качество математической подготовки обучающихся и даст положительный эффект если:

– выявить методические особенности и разработать методические рекомендации по его эффективному применению в старших класса общеобразовательной школе;

– разработать систему дифференцированных заданий по применению принципа математической индукции для углубленного уровня;

– создать элективный курс «Принцип математической индукции при решении задач».

В соответствии с проблемой, объектом, предметом и целью исследования были выдвинуты следующие **задачи:**

1. Изучить различные подходы к введению принципа математической индукции в школьном курсе математики.
2. Определить цели и задачи обучения теме «Принцип математической индукции».
3. Определить основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Принцип математической индукции».
4. Провести анализ содержания теоретического и задачного материалов темы в учебниках разных авторов.
5. Выделить методические особенности применения принципа математической индукции при обучении учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы.
6. Разработать методические рекомендации по реализации принципа математической индукции на углубленном уровне.
7. Предложить систему дифференцированных заданий по применению принципа математической индукции для углубленного уровня изучения математики в общеобразовательной школе.
8. Создать элективный курс «Принцип математической индукции при решении задач».
9. Провести педагогический эксперимент и представить его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили концептуальные положения методики преподавания математики в школе в целом и метода математической индукции в частности (М.И. Башмаков, Н.Я. Виленкин, И.С. Соминский и др. [34]); концепция профильной и уровневой дифференциации обучения математике (В.В. Бесценная, В.А. Гусев, Ю.М. Колягин [1], А.Г. Мордковича [7] и др.); концептуальные идеи разработки элективных курсов в школьном курсе математики (З.А. Калмыкова, А.А. Пинский [33]).

Базовыми для настоящего исследования явились также:

- методическое пособие для учителей и учащихся С.А. Николаевой [9];

- нормативные документы федерального уровней: Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 30.12.2015 г.) «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями, вступающими в силу с 01 июля 2016 г.); Федеральный базисный учебный план и примерные учебные планы для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования, Федеральный базисный учебный план, утвержденные приказом Министерства образования Российской Федерации от 09.03.2004 № 1312;Стандарт основного общего образования по математике. Федеральный компонент государственных образовательных стандартов общего образования, утвержденный приказом Министерства образования Российской Федерации от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»;примерная основная образовательная программа основного общего образования, одобрена Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию, протокол заседания от 8 апреля 2015 г., № 1/15;Приказ Минобрнауки РФ от 31 марта 2014 г. № 253 «Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» с изменениями в соответствии с приказом Минобрнауки России от 26 января 2016 года № 38 «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 31 марта 2014 г. № 253».

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, методической и математической литературы, работ по истории математического образования и истории математики, школьных программ, учебных пособий и учебников; изучение опыта работы учителей математики; проведение педагогического эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2017/18 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертация, анализ школьных учебников, нормативных документов, опыта работы общеобразовательной школы;

2 семестр (2017/18 уч.г.): определение теоретических и методических аспектов исследования по теме диссертации;

3 семестр (2018/19 уч.г.): разработка методики обучения учащихся 10-11-х классов теме «Принцип математической индукции» в курсе математики общеобразовательной школы;

4 семестр (2018/19 уч.г.): разработка системы дифференцированных заданий по теме «Принцип математической индукции» для учащихся старших классов общеобразовательной школы и создания элективного курса «Принцип математической индукции»,

5 семестр (2019/20 уч.г.): оформление диссертации, корректировка раннее представленных результатов, описания результатов экспериментальной работы, формулирования выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования была кафедра высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также ГБОУ СОШ №31 с углубленным изучением английского языка Василеостровского района г. Санкт-Петербург.

Теоретическая значимость исследования заключается в:

– проведенном анализе различных подходов к введению понятия математической индукции в школьном курсе математики;

– определении целей и задач обучения теме «Принцип математической индукции»;

– выявлении основных требований к знаниям и умениям учащихся по теме «Принцип математической индукции»;

– проведенном анализе содержания теоретического и задачного материалов темы «Принцип математической индукции» в учебниках разных авторов;

– рассмотрении методических особенностей обучения теме «Принцип математической индукции» учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования заключается в создании методических материалов по обучению теме «Принцип математической индукции» в курсе математики общеобразовательной школы.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались:

– сочетанием теоретических и практических методов исследования;

– анализом педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в разработке методических рекомендаций, системе задач и элективного курса по теме исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования и осуществлялись путем проведения занятий для учащихся 10-х классов ГБОУ СОШ №31 с углубленным изучением английского языка Василеостровского района г. Санкт-Петербург. *Экспериментальная проверка* предлагаемой технологии, программы элективного курса была осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование Тольяттинского государственного университета.

Основные результаты исследования отражены в 1 публикации [11].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению теме «Принцип математической индукции» в курсе математики общеобразовательной школы.

2. Система дифференцированных заданий по теме «Принцип математической индукции» для учащихся старших классов общеобразовательной школы.

3. Элективный курс «Принцип математической индукции при решении задач».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 6 рисунков, 7 таблиц, список используемой литературы (54 источника). Основной текст работы изложен на 71 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§1. Сущность принципа математической индукции в математике

Существенной особенностью математики является построение теории на дедуктивной основе. Но, следует заметить, что не только дедукция является методом научного мышления. В естественных науках не последнее значение отводится индуктивным методам, которые нередко приводят к интуитивному предвидению формулировок теорем, а в ряде случаев и к путям их доказательств.

Дедукция (от лат. deductio - выведение), переход от общего знания о предметах данного класса к частному знанию относительно отдельных представителей класса; один из методов познания. Используя найденные общие закономерности, дедуктивные умозаключения с успехом можно применять для прогнозирования тех фактов, которые ещё не наступили, либо при обосновании, доказательстве различных положений, либо для проверки намечаемых предположений и гипотез. Именно благодаря данному методу в науке были сделаны важнейшие известные открытия.

В противоположность *дедукции индукцию* (от лат. inductio – наведение) определяют как переход от частного к общему, от единичного знания об отдельных предметах целого класса к общему выводу, касающегося в совокупности всех предметов данного класса. Другими словами, это есть постепенное обобщение более частного, конкретного понятия. Базис индукции составляют данные, полученные на основе ряда наблюдений и проведенных экспериментов. То есть, можно говорить о противоположной дедукции направленности рассуждений, умозаключений и структурной организации мысли.

В качестве формальной структуры индуктивное рассуждение имеет следующую схему:

Q1 есть R

Q2 есть R

Q3 есть R

Q1, Q2, Q3 составляют часть предметной области Q

Любая Qn есть R.

Рассматривают разные формы индукции: полную и неполную. Первая из них — это умозаключение, где общее заключение находят по результатам единичных посылок относительно каждого предмета (элемента) рассматриваемого множества (класса, области, объема и пр.). В силу того, что приходится исследовать каждый элемент множества, то очевидно, что данным видом индукции можно пользоваться в случае относительно небольшого множества, численность элементов которого поддается перечислению предметных областей (множеств, классов, объемов и пр.). Другой вид индукции- неполная, которая и есть собственно индукция; по своей сути, это рассуждение, где к заключению приходят на основе гипотез, которые частично покрывают рассматриваемую, предметную область. Данный вид индукцию классифицируют следующим образом: вывод на основе обычного перечисления случаев при отсутствии противоречий среди них; вывод через выбор фактов, причем таких, где исключено случайное обобщение, и научная индукция.

По сравнению с дедукцией, где при истинных посылках следует истинное заключение, достоверный вывод, в случае индуктивных рассуждений даже при истинных посылках заключение носит, получается, вероятностный характер, т.е. индуктивные умозаключения не гарантируют абсолютно достоверного знания. Это вытекает из того, что достоверность частного не гарантирует однозначно достоверности общего. Поскольку в этом случае заключение имеет вероятностный характер, дальнейшее создание новых умозаключений, вытекающих из сделанного вывода, вполне может искажать ту истинную информацию, которая была выведена ранее. Единственным исключением является умозаключение по так называемой полной индукции.

Очевидно, что такие категории, как общее и частное, необходимо познавать только во взаимосвязи. Ни одной из них нет преимуществ перед другой, ни одну нельзя назвать самостоятельной, поскольку рассмотрение процессов, явлений и предметов окружающей действительности исключительно сквозь призму, допустим, частного картина вырисовывается неполной, и не отражает многие необходимые элементы. И, напротив, исключительно общий обзор тех же предметов закономерно вырисовывает тоже слишком общую картину, в которой, предметы будут отражены слишком поверхностно.

Как методы познания, в том числе в школьном обучении, широко применяются как индукция, так и дедукция. В случае дедуктивных умозаключений новый опыт при обретается опосредованно, не обращаясь к личному проведенному опыту. Данный подход дает возможность вместо рассмотрения совокупности отдельных единичных случаев обозначить общие принципы, понятия и умения в контексте рассматриваемой области знания. Оперирование общими положениями позволит затем выполнять анализ отдельных случаев как частных вариантов их проявления. По этой причине реализация дедуктивного приема особенно важна при изучении теоретического материала, при решении задач, в которых необходимо выявить следствия из имеющихся общих положений. Путем данного метода учащиеся сначала усваивают материал общего и теоретического характера и только потом применяют их для конкретных случаев, выводя частные и конкретные знания. Таким образом, дедуктивный метод мышления развивает способность видеть каждый конкретный случай как некое звено в общей цепи явлений, способность анализировать звенья общей цепи во взаимосвязи друг с другом. В результате выполненных данным методом рассуждений обучаемый может добывать данные, которые содержатся за пределами исходных условий, и, на их основе приходить к новым для себя заключениям. Рассматривая объекты исходных положений в различных новых связях, он выходит на новые свойства, что закономерно способствует формированию и развитию мыслительной продуктивной активности.

Индукция очень важна в процессе познания, и ее ценность и значимость определяется именно тем, что в ней огромный потенциал для расширения рамок знания, распространения некого отдельного фрагмента знаний на более широкие области неизвестного. В процессе научного исследования нередко пользуются индукцией для нахождения важных концептуальных положений. Общеизвестно, что практически любой научный факт, независимо от области -будь то наука гуманитарная или естественная, фундаментальная или прикладная, выступает как результат обобщения, причем, формулировку в общем виде можно получить только одним способом— если предварительно будут изучены и подтверждены гипотезы в отдельных случаях, в достаточно большом объеме рассмотренных предметов действительности. Именно такой способ и становится источником обобщающей информации о закономерностях окружающей действительности. Поэтому поводу «крупнейший математик XVIII века Леонард Эйлер заметил: «…наши самые большие надежды мы можем возлагать на наблюдения; они непрерывно будут вести нас к новым свойствам, которые позже мы будем стараться доказать. Этот вид знания, которое подкрепляется только наблюдениями и всё ещё не доказано, следует тщательно отличать от истины; оно, как мы обычно говорим, приобретается индукцией… мы должны пользоваться таким открытием как возможностью более точно исследовать эти открытые свойства и доказать их или опровергнуть; в обоих случаях мы можем научиться кое – чему полезному»»[30]. Добытый индуктивным путём общий закон становится основой получения новых выводов дедуктивным путём.

К примеру, многие формулы или теоремы выводятся на основании индукции. Рассмотрим пример: 1+3+5+…+..(2n-1) – сумма первых *n* нечетных натуральных чисел.

Обозначим сумму S(n).

Заметим, что S(1) = 1,

S(2) = 1 + 3 = 4,

S(3) = 1 + 3 + 5 = 9,

S(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,

S(5) =….= 25,

Нетрудно увидеть, что $1 = 1^2$; $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $16 = 4^2$; $25 = 5^2$.

На основании рассмотренных случаев можно предположить, что

$S(n) = n^2$.

Формула получена индуктивным путем, однако, достоверность ее требует доказательства. Не приводя пока доказательства, отметим, что данная формула верна. Очевидно, что предположение может оказаться и неверным. Приведем пример.

Пусть $g(a) = a^2 + a + 41$ – функциональная зависимость, заданная на множестве R_0. Начнем искать значения данной функции для первых чисел из рассматриваемого множества (Табл. 1):

Таблица 1

Значения функции g(a) для первых чисел из рассматриваемого множества

a	0	1	2	3	4
g(a)	41	43	47	53	61

На основе полученных результатов естественным образом возникает мысль о том, что значение данной функции – исключительно простые числа. Если продолжить дальнейшие вычисления, то можно убедиться, что высказанное предположение неверно, и уже на шаге g(40) в результате подсчета мы видим, что получится число, которое не является простым.

$1681 = 41 \cdot 41$.

Этот пример наглядно демонстрирует, то выводы, полученные путем индуктивных умозаключений, не всегда истинные, вследствие чего сам метод не может претендовать на метод строгого доказательства, при этом выступает довольно продуктивным методом для формулирования гипотез и открытия новых закономерностей. Заметим, что в других примерах, которые будут показаны ниже, предположения могут оказаться истинными. Из этого примера становится ясным и другое: множества важных гипотез формулируются относительно большого числа случае (в данном примере гипотеза охватывает бесконечное множество целых неотрицательных чисел). Очевидно, что невозможно проверкой охватить все эти частности, именно поэтому неполная индукция не гарантирует вывод для всех элементов множества, и для некого элемента вывод может быть ошибочным.

К середине XVII века в математике накопилось немало ошибочных версий в силу того, что многие исследователи верили в непогрешимость индукции. Развитие науки закономерно потребовало разработку и научное обоснование такого метода, который можно бы было принять в качестве строго формального доказательства. Как ответ на запрос науки такой метод был найден. Этот особый метод рассуждений, называемый ММИ, по существу, является синтезом индуктивного и дедуктивного методов [48].

Основная заслуга в открытии метода принадлежит французским математикам Паскалю (1623 - 1662) и Декарту, а также швейцарскому математику Якобу Бернулли (1654-1705).

ММИ – универсальный метод доказательства утверждений, зависящих от n, где n ∈ N. Чтобы пояснить суть ПМИ, на котором основывается ММИ, обратимся к примеру: допустим, задача состоит в том, чтобы доказать, что $\sum_{1}^{2}(2n-1)=n^2$.

Очевидно, что в силу бесконечности множества натуральных чисел проведение доказательства для каждого элемента n невозможна. Поступают следующим образом: сначала делают проверку справедливости (*) для n = 1. Далее предполагают его верность для некого k ∈ N и исходя из этого предположения, доказывают справедливость (*) для следующего элемента, т.е. n = k + 1. В этом случае утверждение считается доказанным для всех n.

В самом деле, пусть (*) справедливо для n = 1. Но в силу доказанного оно справедливо и для последующего числа n' = n + 1 = 2. Из утверждения для n = 2 следует его истинность для n'(2) = 2 + 1 = 3. Проводя рассуждения по этой цепочке шаг за шагом, в результате можно говорить о верности (*) для любого натурального числа n. Таким образом, утверждение (*) доказано для любого n.

На языке математической логики это записывается так:

$$\big(P(1)\,\&\,\forall\, n\in\mathbf{N}\,(P(n)\Rightarrow P(n+1))\big)\Rightarrow\forall\, n\in\mathbf{N}\,P(n).$$

Фундаментом для разработки ПМИ явились аксиомы Пеано: система (N,‘; 1) называется системой Пеано, если она удовлетворяет трем аксиомам:

1. P_1: n' ≠ 1 для каждого n, принадлежащего N.

2. P_2: (m'=n') → (m =n) для любых m и n, принадлежащих N.

3. P_3: для любого подмножества M в N если: 1) 1 ∈ M; 2) n ∈ M →n'∈ M для каждого n ∈ N , то M = N.

Переформулировка аксиомы P_3 и подводит к ПМИ.

В математическом «фольклоре» идею ПМИ поясняют на примере домино: выстроим рядом друг с другом кости домино (рис. 1). Если теперь повалить первую из них, то за ней последует вся цепочка [45]: падая, костяшка толкает следующую (рис. 2).

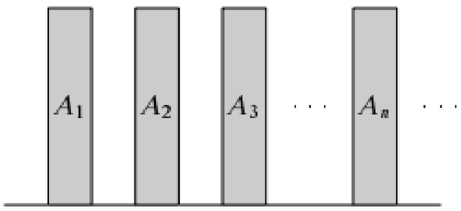

Рис.1. Кости домино

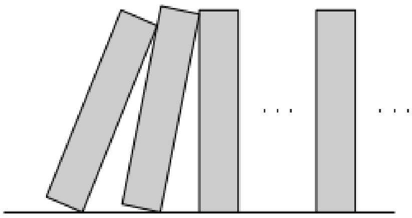

Рис.2. ПМИ в действии

Выбор n = 1 обусловлен тем, что в данном примере это –наименьший возможный элемент. В некоторых примерах ставится задача доказательства утверждения не для $\forall n \in N$, а только, начиная с некоторого для $n > m$, где m - заданное натуральное число. В этой связи дается обобщенная формулировка теоремы ПМИ:

Если утверждение B(n) справедливо при n = m и если $B(k) \to B(k+1)$ при $\forall$ k>m, то предложение B(n) выполняется для $\forall$ n>m.

Обобщая сказанное, сформулируем алгоритм применения ПМИ.

Решение задач на «доказательство истинности некоторого утверждения методом математической индукции состоит из четырех этапов» (рис. 3):

«1. *Базис индукции*. Проверяют справедливость утверждения для наименьшего из натуральных чисел, при котором утверждение имеет смысл.

2. *Индукционное предположение*. Предполагаем, что утверждение верно для некоторого значения k.

3. *Индукционный переход*. Доказываем, что утверждение справедливо для k+1.

4. *Вывод*. Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе ПМИ можно утверждать, что утверждение верно для любого натурального числа n» [10].

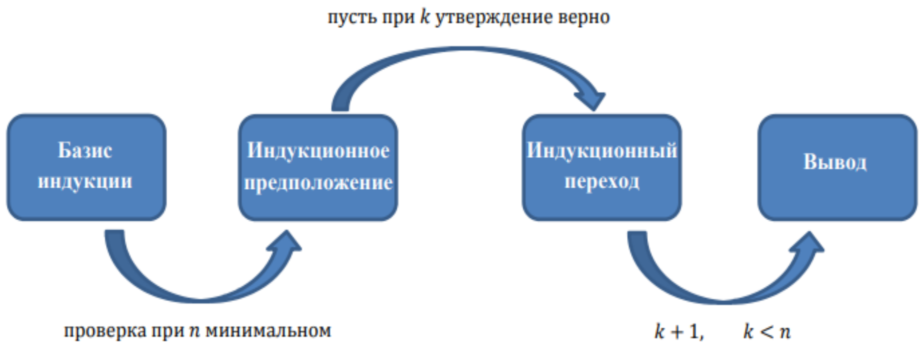

Рис.3. Алгоритм применения принципа математической индукции

Докажем с помощью ПМИ утверждение, рассмотренное ранее:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

1) База индукции. Проверим выполнимость (*) при n = 1:

Левая часть: 1; правая часть $1^2 = 1$ - выполнено.

2) Индукционное предположение. Предположим, что при n = k: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k-1) = k^2$.

3) Индукционное доказательство.

Докажем, что $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k+1)^2$, $n \in N$.

Так как $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

Тогда, согласно ПМИ, утверждение верно для любого $n \in N$. Гипотеза доказана.

Важное замечание при применении ПМИ: В процесс построения умозаключений следует предотвратить ошибки в рассуждениях, в противном случае, заключение может быть неверным.

В качестве примера можно предложить следующий: допустим, требуется проверить истинность утверждения: $\forall n \in N$ $(n \geq 10)$ (*).

Доказываем его:

Пусть $\exists$ n = k, для которого (*) выполняется, т.е. $k \geq 10$ (**).

Докажем, что и для следующего элемента (*) выполняется, т.е. $k + 1 \geq 10$.

Доказательство. К обеим частям (**) прибавим по 1 и получим верное неравенство $k+1 \geq 11$ (***).

Из условий (***) и $11>10$ заключаем, что $k+1 \geq 10$.

Однако, ясно, что полученное умозаключение неверно, достаточно взять $n = 2$, чтобы опровергнуть его. В чем же дело?

Ответ: в неверном применении ПМИ, в процессе которого не был выполнен первый шаг, т.е. не было доказательства истинности (*) для $n = 1$. В этом случае мы бы сразу пришли к заключению о ложности утверждения (*).

Отметим, что метод математической индукции имеет широкое приложение, и с его помощью можно доказывать различные утверждения. Примеры использования ПМИ будут представлены ниже.

§2. Особенности изучения принципа математической индукции в существующей практике обучения школьников

Анализ программ, действующих учебников, показывает, что в программе современной школы тема, связанная с ПМИ, не включена в программу базового уровня, и принцип индукции изучают в классах с углубленным изучением математики. В соответствии с рекомендованными программами [34] изучение ПМИ осуществляется в рамках раздела «Действительные числа», и на его изучение отводится 4-6 ч.

При этом, в силу исключительной важности и той роли, которую играет данная тема в математической подготовке учащихся, ПМИ нередко включается учителями в программы факультативных и кружковых занятий.

В условиях введения профильного обучения широкое распространение получают элективные курсы – курсы по выбору, обеспечивающие дифференцированную, вариативную часть школьного образования. В отличие от факультативных курсов, существующих ныне в школе, элективные курсы обязательны для изучения, и их содержание как бы «компенсирует» во многом достаточно ограниченные возможности базовых курсов в удовлетворении разнообразных образовательных потребностей старшеклассников.

Следует подчеркнуть, что по итогам конкурса учебно-методических пособий по элективным курсам, Национальным фондом подготовки кадров подготовлены программы, учебные и методические материалы по 8-10 элективным курсам по каждому учебному предмету [47]. В образовательной области «Математика» в перечне рекомендованных тем для изучения «Метод математической индукции» нашла свое отражение. Изучение опыта различных школ и практикующих учителей свидетельствует, что о том, что в содержании реализуемых в школах элективных курсов довольно часто присутствует изучение ПМИ в разных классах: в 9-х классах тема изучается в целях предпрофильной подготовки, в 10-11 классах – в качестве углубленного изучения ПМИ как метода математического доказательства.

Выбор ПМИ как содержания элективных курсов не случаен. Анализ математических олимпиад и требований к их проведению [40], а также ЕГЭ, свидетельствует, что задачи на применение ПМИ включаются в олимпиадные задачи и задачи группы С на ЕГЭ. А поэтому для успешного участия в олимпиадах и сдачи экзамена учащиеся должны владеть данным методом. В этой связи одной из приоритетных целей элективных курсов – подготовка к олимпиадам и ЕГЭ.

В психологическом и математическом аспектах ПМИ также играет существенную роль в целях: развития логических структур мышления (за счет проведения анализа, синтеза, сравнения и обобщения), активизации познавательной деятельности учащихся, постановки проблемных ситуаций и поиска их решения

Обозначим конкретнее цели изучения ПМИ в школе.

В Стандарте основного общего образования по математике и описании примерных достижений по основным разделам математики сформулировано: учащиеся должны овладеть принципом математической индукции и применять при доказательстве и решении задач. Предлагаемые курсы (факультативные, элективные, кружковые) должны помочь учащимся усвоить основные (базовые) математические понятия, способы использования при решении различных задач, в том числе решения задач олимпиадного уровня, расширить базовый компонент.

При этом очевидно, что организация деятельности по освоению ПМИ подчинена общим целям изучения математики, а именно:

– формирование представлений об идеях и методах математики как универсального языка науки и техники, инструментом для построения моделей различных явлений и процессов;

– формирования умения пользоваться устным и письменным математическим языком, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественнонаучных дисциплин, для продолжения образования и освоения избранной специальности на современном уровне»;

– «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, развитие математического мышления и интуиции, творческих способностей на уровне, необходимом для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности» [10];

– воспитание средствами математики культуры личности через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей; понимание значимости математики для научно-технического прогресса.

Принимая во внимание общие цели и специфику изучения ПМИ, можно обозначить запланированные результаты изучения ПМИ в школе.

Математическая подготовка и освоение ММИ задается следующими требованиями:

Обучаемые должны:

- знать и уметь четко и верно понимать и использовать в речи термины, связанные с понятием ПМИ;

- понимать суть требований в задачах;

- знать и понимать алгоритм ПМИ;

- уметь применять алгоритм ПМИ в решении задач;

- уметь пользоваться приемом ПМИ при доказательстве разных типов утверждений- тождеств, равенств и неравенств при заданных значениях неизвестной.

Таким образом, можно говорить о необходимости изучения ПМИ в школе как одного из путей решения существующего противоречия между значимостью принципа математической индукции в математической науке, огромном его потенциале в плане развития логического, алгоритмического мышления, кругозора, математической культуры и недостаточным вниманием к его изучению в современной школе.

§3. Содержательный компонент изучения принципа математической индукции

Содержательный компонент изучения принципа математической индукции определяется рядом факторов: областью применения ПМИ, профилирующими направлениями конкретного образовательного учреждения, запросами учащихся.

Область применения ПМИ довольно широка:

1) применение ММИ при решении задач на делимость;

2) применение ММИ к примерам на нахождение сумм рядов;

3) применение ММИ для установления справедливости гипотез;

4) применение ММИ к доказательству формул дифференцирования;

5) применение ММИ к доказательству некоторых математических теорем;

6) применение ММИ к доказательству равенств и неравенств;

7) применение ММИ в геометрических задачах;

8) применение ММИ в стохастике и др.

Содержание программы для классов с углубленным изучением математики ограничивается, в основном, задачами, где ПМИ используется как метод доказательства:

1) отдельных теорем (например, нахождения суммы первых членов арифметической прогрессии или формулы Бинома Ньютона);

2) делимости некого выражения на число;

3) равенств и неравенств.

Объем изучения темы в процессе дополнительного образования может быть различным. Обзор и анализ действующих элективных курсов по изучению ПМИ показывает, что количество часов, отводимых на изучение темы, различается и варьируется от 12 ч до 24 ч. Выбор содержания осуществляется по усмотрению учителя, администрации школ в зависимости от целей обучения, профиля обучения, запросов и особенностей контингента учащихся.

В зависимости от кол-ва запланированных часов определяется широта демонстрации областей применения ПМИ, при этом обязательные остаются те, которые предусмотрены программой, а именно:

- применение ММИ при решении задач на делимость;

- применение ММИ к доказательству равенств и неравенств.

Приведем примеры применения ПМИ.

Задача 1. Доказать, что $\sum_1^n n2$ = n(n+1)(2n+1)/6 или

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*)

Доказательство:

1) Докажем справедливость (*) для n = 1.

Левая часть равенства $1^2 = 1$,

Правая часть (*): 1 ·2 ·3 :6 = 1т.е. для n =1 (*) верна.

2) Допустим, что (*) справедлива при n = k,

т.е. $\sum_{1}^{n} n2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Исходя из этого допущения, проверим справедливость (*)для n = k+1.

Имеем: $\sum_{1}^{k+1} (n+1)2 =$

$= 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = ((k+1)(2\ k^2 + 7k+6)/6$,

т.е. правую часть формулы (*) при n = k+1.

Оба условия ПМИ выполнены, значит, согласно теореме о ПМИ, (*) выполняется для ∀n ∈ N.

Задача 2. Доказать, что выражение $7^{n+1}+8^{2n-1}$ кратно числу 19.

Доказательство:

Обозначим данное выражение за A(n)

1) A(1) $=7^2+8^1=57$, т.е. A(1) кратно 19.

2) Пусть верно A (n=k), т.е. $7^{k+1}+8^{2k-1}$ кратно 19.

Докажем A(n=k) ⇒ A(n=k+1).

$7^{(k+1)+1}+8^{2(k+1)-1} = 7^{k+2}+8^{2k+1} = 7*7^{k+1}+64*8^{2k-1} = 7(7^{k+1}+8^{2k-1}) + 57*8^{2k-1}$.

Видим, что каждое слагаемое $7(7^{k+1}+8^{2k-1})$ и $57*8^{2k-1}$ кратны 19, ⇒ вся сумма также кратна 19, что означат, что A(n) – верно при всех натуральных n.

Задача 3. Доказать, что при ∀n ∈ N имеет место неравенство

$\frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \frac{5}{6} * \ldots * \frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$(B(n)).

Проведем доказательство с помощью ПМИ:

Истинность B(n) при n = 1 очевидно левая часть:1/2; правая часть ½,

Индуктивный переход. Пусть (B(n)) выполняется при n=k.

Проверим выполнение B(n=k) ⇒ B(n=k+1).

Фактически, нужно доказать, что $b_{k+1} \le \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Т.к. $b_{k+1} =$ $= b_k * \frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}} * \frac{2k+1}{2k+2}$, то в этом случае достаточно доказать $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} * \frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$..

Так как 2 части данного неравенства являются положительными, то можно возвести данное неравенство в квадрат. После всех упрощений мы получим $n \geq 0$ -верно.

Задача 4. Необходимо доказать то, что модуль суммы n чисел не превосходит суммы модулей данных чисел**:** $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + +|a_2| + \cdots + |a_n|$ (*).

Доказательство:

1) первый шаг ПМИ выполняется, при n =1 получаем верное равенство, если n = 2, то получаем неравенство треугольника, которое справедливо для любых a_1 и a_2:$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.

2) допустим, что **(*)** верна для $\forall k \geq 2$, $k \in N$.

По алгоритму ПМИ докажем выполнимость **(*)** для k+1 слагаемого.

Если a_1, a_2, a_3,…, a_k, a_{k+1} - произвольные числа, то используя свойство модуля суммы можно записать:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}|$$
$$\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$

Неравенство (*) доказано.

Задача 5. Доказать, что, каковы бы ни были натуральное *n* и вещественное $q \neq 1$, выполняется равенство:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Доказательство. Индукция по *n*.

База, *n* = 1:

$$1 + q = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{1+1}}{1 - q}.$$

Переход: предположим, что

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Тогда

$$1 + q + \cdots + q^n + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= \frac{1 - q^{n+1} - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q},$$

что и требовалось доказать.

Задача 6. Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна 180 (n – 2).

Очевидно, что речь идет об утверждении, которое рассматривается на множестве $n \in N$, $n \geq 3$

И в этом случае первым шагом ПМИ станет проверка утверждения для п = 3. Его истинность вытекает из теоремы о сумме внутренних углов треугольника, известной из курса планиметрии. Значит, утверждение справедливо для n = 3.

2. Допускаем, что теорема верна для некоторого $k \geq 3$.

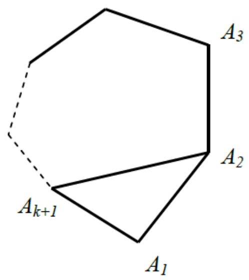

Рис. 4. Выпуклый (k+1) - угольник

3. Рассмотри произвольный выпуклый k+1 – угольник с вершинами A_1, A_2 ,..., A_{k+1}, условно изображенный на рисунке с направлением обхода контура против часовой стрелки. Построим диагональA_2A_{k+1},врезультате чего многоугольникA_1, A_2 ,..., A_{k+1} разобьется на два выпуклых многоугольника, а именно: треугольник $A_1A_2 A_{k+1}$, и второй выпуклый n-угольник$A_2A_3...A_{k+1}$.

По рисунку видно, что сумма внутренних углов выпуклого (k + 1)–угольника A_1 $A_1...A_{k+1}$ находится как сумма внутренних углов $\Delta A_1A_2 A_{k+1}$, и выпуклого k–угольника A_2 $A_3...A_{k+1}$, иначе говоря,

180+180 (k – 2) =180 ((k + 1) – 2),что и требовалось доказать.

Выводы по первой главе

Проведенный анализ теоретических и методических основ ПМИ позволяет прийти к следующим выводам:

1. ПМИ – особый метод доказательства, синтезирующий индуктивный и дедуктивный подходы, а поэтому является методом, приводящим к достоверному выводу. В основе метода лежит третья аксиома Пеано.

2. В программе школьной математики изучение ПМИ предусмотрено только в классах с углубленным изучением математики, вместе с тем, в силу важности метода, он широко отражен в элективных курсах и программах факультативных занятий, при этом объем и глубина изучения выбирается каждой школой самостоятельно в рамках тех часов, которые отводятся на дополнительное изучение предмета.

3. Область применения ПМИ достаточно широка. В работе представлены типы задач, решаемые с помощью ПМИ и разобраны отдельные задачи.

Проведенное теоретическое исследование проблемы изучения ПМИ в школе подтвердило, что эффективное изучение данной темы возможно при разработке и реализации в учебном процессе соответствующего элективного курса.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ПРИНЦИПУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§4. Дифференцированные задания по применению принципа математической индукции для углубленного уровня

Характеристикой парадигмы современного образования сегодня является личностно-ориентированный подход к обучению. Принятые ориентиры, в соответствии с которыми ученик выступает в качестве субъекта образовательного процесса, привели к трансформации принципов реформирования системы образования, и, как следствие, традиционных методов обучения. Ключевым признаком личностно-ориентированного подхода является, прежде всего, поддержка неповторимой индивидуальности учащегося путем внедрения дифференциации обучения.

Сегодня для педагога принципиально важным становится принятие педагогической установки относительно автономии учащихся и их самостоятельного выбора, иными словами, принятие того, что каждый обучаемый может добровольно избрать для себя образовательный маршрут, уровень освоения дисциплин, и соответствующий уровень отчетности по результатам своей учебной деятельности. С одной стороны, ученик обязан к выполнению установленных требований, что позволяет ему получить положительную аттестацию по предмету. С другой – ученик получает для себя право самостоятельно принимать решение относительно того, ограничиться ли ему уровнем образовательных требований или подниматься выше заданных стандартов. Такой подход кардинально меняет традиционные методы организации обучения: учитель не может решать за ученика, какой уровень усвоения тот может избрать и какому уровню соответствует его способности, при этом администрация школы и учитель обязаны создавать в школе условия, которые обеспечат достижение обязательного уровня и создадут возможности для тех, которые способны двигаться дальше, будут заинтересованы в этом продвижении.

К исследованию проблемы дифференциации обучения в психологическом и педагогическом аспектах обращены работы многих известных методистов, ученых, экспертов, среди которых особое место заслуживают труды Ю.К. Бабанского, В.А Гусева, В.А. Крутецкого, И.Я. Лернера, И.С. Якиманской и др. Авторами разрабатываются различные стратегии, формы и методы организации обучения, соответствующие склонностям обучаемых.

Несомненно, что особую значимость вопрос дифференциации приобретает в обучении математике, поскольку данная учебная дисциплина объективно является одной из самых сложных школьных предметов, вызывая трудности субъективного и объективного характера у многих учеников. С другой стороны, немало детей имеют достаточно ярко выраженные способности к данному предмету. В результате нередко наблюдается существенный разрыв в возможностях восприятия, желаниях к изучению и темпах освоения курса у разных детей даже в пределах класса. Очевидно, что проблема требует своего решения и разработки особой методической системы обучения.

Данная проблема неоднократно поднималась в научных кругах, проблема построения дифференцированной системы обучения математике рассматривалась в работах В.А. Гусева, Г.В. Дорофеева, изучение дифференцированного подхода в контексте разноуровневых математических обнаруживается в работах Л.О. Денищевой, В.М. Монахова, В.А. Орлова, и др.

К дифференциации образования подходят с разных позиций и точек зрения, в частности, с позиции:

– процесса обучения (отбор форм, методов и приемов обучения);

– содержания образования (создание учебных планов, программ, учебной литературы и составления заданий, предъявляемых учащимся);

– построения школьной системы (формирование различных типов школ и классов).

Сегодня, в целом, осуществляется два основных вида дифференциации: уровневая и профильная.

Первая выражена в том, что, обучаясь внутри одного класса, по одной программе и учебнику, учащиеся имеют возможность усваивать материал на разных уровнях.

Успешность и эффективность реализации подобной дифференциации обеспечивается рядом условий:

– Различные уровни усвоения материала и прежде всего, базовый уровень, обязательные результаты обучения должны быть открытыми для учащихся.

Если цели обозначены и видятся привлекательными для ученика, а их достижения поощряется, то он будет стремится к их достижению, таким образом, развиваются положительные мотивы учения, сознательность выбора и серьезность в отношении к учебной работе; можно привлечь самооценку ученика для организации дифференцированной работы.

– Создание «ножниц» между уровнем требований и уровнем обучения. В этом случае уровневая дифференциация реализуется не за счет того, что одни получают меньше, а другие больше, а за счет того, что, при равном объеме учебного материала обучаемым выставляют различающиеся уровни требований к его освоению. Сегодня многие учебники разработаны именно с этих позиций и содержат материал, который соответствует различному уровню – от минимального и обязательного до продвинутого. Углубление изучаемого материала возможно и другими способами.

– Обучение должно предусматривать последовательность в продвижении ученика по уровням. Не целесообразно заранее предъявлять более высокие требования тем из учащихся, которые не достигли уровня обязательной подготовки, с другой стороны, необоснованное задерживание других также на этом этапе также не конструктивно.

– Необходимость отражения принятого уровневого подхода в содержании контроля и оценки. Учебный отчет должен предполагать проверку степени достижения всеми учащимися обязательных результатов обучения как государственных требований, при этом дополняться проверкой усвоения материала на более высоких уровнях. Фиксация обязательных результатов рекомендовано в формате «зачтено» – «не зачтено», для более высоких уровней шкала оценивания рекомендована в баллах (например, отметка «4», «5»).

– Принцип добровольности при избрании уровня усвоения и отчетности. Уровневую дифференциацию можно организовать в разнообразных формах. Основное направление здесь – создание мобильных групп учеников, которые могут меняться по мере продвижения (снижения) уровня освоения.

Профильная дифференциация (или дифференциация по содержанию) предполагает обучение разных групп школьников по программам, отличающимися глубиной изложения материала, объемом сведений или даже номенклатурой включенных вопросов.

Ключевые принципы профильной дифференциации:

– Выбор профильного направления лишь после того, как школьниками будет получено единое базовое образование, и они смогут утвердиться в своих наклонностях.

– Обеспечение на старшей ступени обучения достаточно большого количества направлений профилей обучения в соответствии с запросами или возможностями продолжения образования через широкую систему учебных заведений различных типов.

– Модульный(блочный)принцип построения учебных программ на основе сходства целей и задач обучения в каждом блоке.

– Компетентностный подход к освоению каждого модуля.

– Учет возрастных особенностей школьников в процессе составления программ и учебников, при выборе форм и методов обучения.

– Возможность изменения профиля обучения.

– Математика как обязательный компонент обучения независимо от направления профиля, т.е. она должна входить в набор обязательных учебных предметов всех профилей (физико-математического, технического и гуманитарного).

– Отражение специфики выбранного профильного направления в содержании и объеме учебного математического материала [18].

«Реализация дифференциации может осуществляться различными путями. На основании анализа работ Н.М. Шахмаева, С.В. Алексеева и авторского коллектива, в который вошли А.М. Абрамов, Д.В. Алексеевский, А.М. Гольдман и другие, можно выделить следующие формы дифференциации обучения» [18] (Таблица 2).

Таблица 2

Реализация дифференциации обучения

Дифференциация обучения	
Внешняя дифференциация	Внутренняя дифференциация
- Специальные школы. - Классы с углубленным изучением математики. - Альтернативные занятия. - Математические кружки. - Дополнительные занятия по математике.	– Самодифференцировка учащихся в соответствии с их уровнем обученности (по решению задач различной сложности) – Учитель определяет уровень развития учащихся. Предлагает задания, исследовательскую работу, соответствующие их возможностям – Различается степень самостоятельности и оказываемой помощи

Таким образом, оба вида дифференциации – уровневая и профильная – взаимосвязаны и сосуществуют на всех ступенях школьного математического образования (МО).

«На уроке математики дифференцированное обучение предполагает вариативность темпа обучения, выбор разных видов деятельности, определение характера и дозировки помощи со стороны учителя. Класс делится на группы с целью осуществления учебной работы с ними на разных уровнях. Эти группы, как правило, мобильны, подвижны. При этом дифференциация должна быть направлена не только на детей, испытывающих трудности в обучение, но и на одарённых детей» [42].

Дифференциация обучения, как правило, осуществляется через использование дифференцированных заданий.

В учебной деятельности проявляется широкий диапазон индивидуальных особенностей. На сегодняшний момент разработаны различные классификации, в зависимости от тех критериев, которые берутся за основу распределения школьников в группы.

В работе остановимся на отдельных из них:

А.А. Бударный в качестве ведущего критерия берет ««способность учащихся к учению» и «работоспособность». Автором выделены три группы учеников: с высокими, средними и низкими учебными возможностями. Эти критерии определяют различия учащихся в процессе обучения, но носят довольно общий характер» [10].

Основным показателем, согласно Л.В. Виноградовой, может рассматриваться «уровень развития мышления, так как необходимо организовать индивидуальный подход так, чтобы он не просто обеспечивал усвоение знаний, но и способствовал бы развитию учащихся. В пользу выделения в качестве основного именно этого фактора говорят следующие аргументы. У школьников по-разному развиты мыслительные операции, сформированы приемы умственной деятельности, у каждого учащегося своя «зона ближайшего развития»» [10].

Покажем примеры дифференциации на примере изучения ПМИ.

Внешняя дифференциация осуществляется путем:

1. Реализации профильного обучения и выбора соответствующего содержания, включающего изучение метода математической индукции.

2. Введение в дополнительное образование элективных курсов, факультативных занятий по данной теме.

Внутренняя уровневая дифференциация осуществляется на занятиях в классах с углубленным изучением математики путем применения различных методических приемов, форм и методов обучения. В частности, путем предъявления задач различной сложности, разноуровневых заданий, разной степени педагогической помощи.

«Составление и предъявление заданий, активизирующих учебно-познавательную деятельность учащихся, является содержательной стороной активизации. Например:

– Двух или трехвариантные задания по степени трудности. Выбор варианта предоставляется ученику.

– Общее для всего класса задание с предложением системы дополнительных заданий возрастающей степени трудности.

– Индивидуальные дифференцированные задания.

– Групповые дифференцированные задания с учетом различной подготовки учащихся (вариант определяет учитель).

– Равноценные двухвариантные задания с приложением к каждому варианту системы дополнительных заданий постепенно возрастающей трудности.

– Общие практические задания с указанием минимального и максимального количества задач или примеров для обязательного выполнения» [10].

– Индивидуально-групповые задания различной степени трудности.

Покажем это на примере содержания самостоятельной работы:

1 уровень:

Докажите, что при всех натуральных n

1) n^3+11n кратно 6,

2) $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$,

3) $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$,

4) $5^n > 7n-3$.

2 уровень:

Докажите, что при всех натуральных n

1) $5^n - 3^n + 2n$ кратно 4,

2) $5 + 45 + 325 + \ldots + (4n+1)*5^{n-1} = n*5^n$,

3) $\frac{1}{1*3} + \frac{7}{3*5} + \frac{17}{5*7} + \cdots + \frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2}{2n+1}$,

4) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$,

– Индивидуально-групповые задания, предлагаемые ввиде запрограммированных карточек. Задания должны быть подготовлены к уроку заранее: записаны на доске, карточках, плёнках. Их можно разделить на два вида:

1. «Обязательные задания. Они способствуют умению правильно применять изучаемое правило для выработки навыка. Их должно быть ограниченное количество. Они должны быть посильны для выполнения каждым учащимся» [10].

2. «Дополнительные задания рассчитаны на тех детей, которые справились с обязательными заданиями и из них есть время для самостоятельной работы. Эти задания повышенной трудности, которые требуют сравнения, анализа и прочего» [10].

«**Задача 1.** *Бизнесмен заключил с чёртом такую сделку: он может любую имеющуюся у него купюру обменять у чёрта на любой набор купюр любого меньшего достоинства (по своему выбору, без ограничения общей суммы).Он может также тратить деньги, но не может получать их в другом месте (кроме как у чёрта). При этом каждый день на еду ему нужен рубль. Сможет ли он так жить бесконечно долго?»* [10].

Можно предлагать дифференцированное домашнее задание, которое является логическим продолжением заданий, которые решали на уроке. Например, на занятии можно разобрать задачу:

Задача 2. *Доказать, что если для n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n > 1$) выполнено условие $a_1a_2\ldots a_n = 1$, то*

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$ (*).

В качестве домашней самостоятельной работы для сильных учащихся предложить, используя неравенство (*), доказать известное неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое n положительных чисел:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}.$$

Приведем материалы дифференцированных заданий по применению принципа математической индукции, которые могут использоваться при проведении практических занятий и самостоятельных работ.

1. Использование принципа математической индукции в задачах на суммирование.

Задача 3. Доказать $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

Решение.

Шаг 1. Проверим тождество при n=1. Имеем: $1^3=1, 1^2=1$. Верно.

Шаг 2. Предположим, что тождество выполняется для все n = k, то есть $1^3+2^3+\ldots+k^3=(1+2+\ldots+k)^2$, где k – натуральное число.

Шаг 3. Докажем выполнимость тождества для n=k+1 на основе введенного предположения.

Так как в правой части в скобках имеем арифметическую прогрессию, суммы которой вычисляется по формуле $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, где a_1=1, d=1, то получим равенство

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left(\frac{(1+k)\cdot k}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(1+k)\cdot k}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\left(k^2+2k+4\right)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Получили верное равенство. Таким образом, тождество доказано.

2. Использование принципа математической индукции в задачах на доказательство неравенств.

Задача 4. Доказать, что при любом натуральном n>1 справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Решение.

Шаг 1. Пусть S_n – сумма *n*-х членов в левой части неравенства, тогда при n = 2 имеем $S_2=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$.

То есть при *n* = 2 неравенство выполняется.

Шаг 2. Предположим, что неравенство выполняется для всех натуральных n = k, где k > 2, то есть $S_k>\frac{13}{24}$.

Шаг 3. Докажем теперь на основе нашего предположения, что $S_{k+1}>\frac{13}{24}$. Имеем:

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k},\ S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Сравним полученные суммы:

$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$, то есть $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+2)}$.

Подставляя различные натуральные k, получим, что правя часть последнего неравенства положительна, а значит $S_{k+1}>S_k$. Согласно шагу 2 $S_k>\frac{13}{24}$, следовательно $S_{k+1}>\frac{13}{24}$. Что и требовалось доказать.

Задача 5. Доказать, что $(1+\alpha)^n>1+n\cdot\alpha$, где $\alpha>-1,\quad \alpha\neq 0$, n>1 – натуральное число.

Решение.

Шаг 1. Проверим справедливость неравенства при n=2. Имеем: $\alpha^2>0$.

Шаг 2. Предположим, что неравенство выполняется для все натуральных n = k, то есть $(1+\alpha)^k > 1+k\cdot\alpha$.

Шаг 3. Докажем теперь на основе нашего предположения, что неравенство выполняется при n=k+1, то есть

$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\cdot\alpha$.

Действительно, согласно условию задачи

$1+\alpha > 0$,

поэтому справедливо неравенство

$(1+\alpha)^{k+1} > (1+k\cdot\alpha)(1+\alpha)$,

которое мы получили, умножив каждую часть неравенства шага 2 на выражение (1+α).

Преобразуем последнее неравенство:

$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(1+k)\cdot\alpha + k\alpha^2$.

Так как последнее слагаемое положительное для любого α, то отбрасывая его, получим неравенство:

$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\cdot\alpha$. Что и требовалось доказать.

3. Использование принципа математической индукции в задачах на делимость.

Задача 6. Докажите, что $n^2 - n$ является четным числом (кратно двум) при любом натуральном n.

Решение.

Шаг 1. Проверим справедливость утверждения при n=1:

1^2–1 = 0 – четное число – кратно двум.

Шаг 2. Предположим, что утверждение справедливо для натурального n=k, то есть

$k^2 - k$ – четное число (кратно двум).

Шаг 3. Проверим выполнимость утверждения для n=k+1 на основе нашего предположения. Имеем:

$(k+1)^2-(k+1)-(k^2-k)=2k$ есть четное число (кратно двум).

Что и требовалось доказать.

Задача 7. Доказать, что $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\vdots 19$, где n – натуральное число (знак $\vdots 19$ читается как «кратно числу 19 или делится на 19 нацело».

Решение.

Шаг 1. Проверим выполнимость делимости при n=1, имеем;

$5\cdot 2^{3\cdot 1-2}+3^{3\cdot 1-1}\vdots 19$, или $5\cdot 2+3^2\vdots 19$, или $19\vdots 19$ - верно.

Шаг 2. Предположим, что делимость выполняется при $n=k$, то есть

$5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1}\vdots 19$.

Шаг 3. Докажем справедливость утверждения на основе нашего предположения, то есть

$5\cdot 2^{3(k+1)-2}+3^{3(k+1)-1}\vdots 19$.

Преобразуем выражение в левой части, получим:

$5\cdot 2^3\cdot 2^{3k-2}+3^3\cdot 3^{3k-1}\vdots 19$,

$5\cdot 8\cdot 2^{3k-2}+27\cdot 3^{3k-1}\vdots 19$,

$8(5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1})+19\cdot 3^{3k-1}\vdots 19$.

Так как в полученном выражении в левой части выражение в скобках делится на 19 согласно нашему предположению и второе слагаемое делится на 19, то и вся сумма делится на 19. Что и требовалось доказать.

4. Использование принципа математической индукции в задачах на доказательство.

Задача 8. Докажите, что для всех допустимых действительных значений переменной x и натурального числа n выполняется тождество

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1.$$

Решение.

Шаг 1. Докажем, что тождество выполняется для все действительных x, кроме 0; 1; –1 при n=1. Получим:

$$\frac{1}{x^2-1}\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)-3=\left(\frac{x^3-1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2,$$

То есть при n=1 тождество справедливо.

Шаг 2. Предположим, что тождество выполняется для всех допустимых x при $n=k$, то есть

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^k-\frac{1}{x^k}\right)^2=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+2}-\frac{1}{x^{2k}}\right)-2k-1.$$

Обозначим сумму в левой части тождества S_k. Тогда выполняется:

$$S_k=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^k-\frac{1}{x^k}\right)^2=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+2}-\frac{1}{x^{2k}}\right)-2k-1.$$

Шаг 3. Докажем выполнимость тождества при n=k+1 на основе нашего предположения, то есть

$$S_{k+1}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^k-\frac{1}{x^k}\right)^2+\left(x^{k+1}-\frac{1}{x^{k+1}}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+4}-\frac{1}{x^{2k+2}}\right)-2(k+1)-1.$$

Преобразуя правую часть последнего тождества, имеем:

$$S_{k+1}=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+2}-\frac{1}{x^{2k}}\right)-2k-1+\left(x^{k+1}-\frac{1}{x^{k+1}}\right)^2=$$
$$=\frac{x^{4k+4}-x^2+x^{4k+6}+x^2-1}{(x^2-1)x^{2k+2}}-2(k+1)-1=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2k+4}-\frac{1}{x^{2k+2}}\right)-2(k+1).$$

Получили верное тождество для любого натурального n и действительного $x\neq 0;1;-1$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, приведенные выше задания помогут каждой группе учащихся глубоко освоить навыки и на их основе сформировать мыслительные действия.

§5. Методические рекомендации по реализации принципа математической индукции на углубленном уровне

Общая схема изучения метода математической индукции состоит в том, что сценарий проигрывается на нескольких ключевых задачах, отражающих своего рода «абстрактные ядра» рассуждений. Группа израильских ученых дает описание того, что же такое «ключевая задача» применительно к методу математической индукции [20].

1. Это задача *оптимальной сложности.* Если задача слишком простая, то она выглядит недостаточно убедительно и не раскрываются рассуждения, если слишком сложная, то трудности самого предмета начинают отвлекать.

2. Основное содержание решения составляет применение индукции, нет сильно отвлекающих от него посторонних трудностей.

3. Хорошо иллюстрирует метод. В данном случае легко разворачиваются в цепочки *неочевидных* утверждений. По нескольким первым утверждениям, естественно, разворачивается вся цепочка.

4. Задача интересна ученикам.

Оформление метода индукции через «базу» и «переход» следует осуществить позднее. При этом все начинается с интуитивного образа: идя по цепочке, мы сможем дойти до любого утверждения.

Вначале разбирается, например,

Задача 1. *Известно, что*

$$1^3+2^3+\ldots+99^3=\left(\frac{99\cdot 100}{2}\right)^2.$$

Как доказать, что

$$1^3+2^3+\ldots+99^3+100^3=\left(\frac{100\cdot 101}{2}\right)^2?$$

Или:

Задача 2. *Число составлено из 27 единиц, идущих подряд. Доказать, что оно делится на 27.*

Идея доказательства состоит в разбиении на 3 блока по 9 единиц идущих подряд. Каждый из них делится на 9, а произведение такого бока на число 1000000001000000001 делится на 27.

Далее можно разобрать следующую:

Задача 3. *Число составлено из 81 единицы, идущих подряд. Доказать, что оно делится на 81.*

Далее, идет работа с аналогичной задачей о числе, составленном из 243 единиц и т. д. В конце концов, обучающимся надоедает решать задачи-близнецы, и они захотят рассуждать «в общем виде». Но как сформулировать «общий вид» утверждения? Натуральный ряд 1, 2, 3,... бесконечен, так как за каждым натуральным числом n всегда следует натуральное число $n + 1$. Поэтому утверждение, что некоторое свойство имеет место *для любого натурального числа n*, мы не можем доказать перебором всех натуральных чисел. Для этих целей используется особый метод, который называется *методом математической индукции.* С этого начинается осознание. Разбирается также еще несколько серий задач похожего рода. К примеру:

«**Задача 4.** *4 прямые разбивают плоскость на области. Доказать, что можно покрасить ее в черный и белый цвет так, чтобы соседние области были раскрашены в разные цвета» [10].*

«Идея решения состоит в том, что разбиение плоскости тремя прямыми порождает раскраску для разбиения плоскости четырьмя прямыми. Далее обсуждается случай большего числа прямых, и работа производится по той же схеме, что и для предыдущей серии. Точно так же у учащиеся формируется потребность рассуждать в общем виде. Математическая индукция» [10] служит средством проверки предварительно угаданных закономерностей. Такого рода деятельность помогает осознать метод.

После введения алгоритма ПМИ переходят к применению его к решению различных типов задач.

После разобранных примеров целесообразно прийти к формулировке и демонстрации обобщенного принципа математической индукции. Примером может служить следующий:

Доказать, что при $n > 6$ *справедливо неравенство*

$$3^n > n \cdot 2^{n+1}.$$

Доказательство:

1) при $n = 7$ мы имеем $3^7 > 7 \times 28$ или $2187 > 1792$ – верно;

2) допустим, что неравенство верно при $n = k$ ($k \in \mathbf{N}$, $k > 7$), т.е. верно неравенство

$3^k > \times 2^{k+1}k$,

докажем, что тогда верно неравенство при $n = k+1$:

$3^{k+1} > (k+1) \times 2^{k+2}$.

Домножим верное, по допущению, неравенство на 3

$3 \times 3^k > 3k \times 2^{k+1}$ или $3^{k+1} > 3 \times 2^{k+1}k$

и рассмотрим разность

$$3k \cdot 2^{k+1} - (k+1) \cdot 2^{k+2} = 2^{k+1}(3k - 2 \cdot (k+1)) = 2^{k+1}(k-2) > 0,$$

т.к. разность положительная, то уменьшаемое больше вычитаемого, т.е.

$3 \times 2^{k+1} > (k+1) \times 2^{k+2}k$.

С одной стороны из предположения известно, что верно неравенство

$3^{k+1} > 3 \times 2^{k+1}k$, с другой стороны доказали, что $3 \times 2^{k+1} > (k+1) \times 2^{k+2}k$, записываем двойное неравенство

$3^{k+1} > 3 \times 2^{k+1} > (k+1) \times 2^{k+2}k$,

из которого по свойству транзитивности получаем, что

$3^{k+1} > (k+1) \times 2^{k+2}$.

Оба условия обобщенного принципа математической индукции выполнены, следовательно, неравенство верно для всех натуральных $n > 6$.

Повторение и закрепление материала должно основываться на его показе с другой стороны, в непривычном ракурсе. Например,

Доказать, что квадрат суммы n *чисел равен сумме квадратов этих чисел,* *сложенной со всевозможными их удвоенными попарными произведениями, т.е. доказать формулу*

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n .$$

Или: *Доказать, что любую сумму денег, большую 7 копеек, можно разменять трехкопеечными и пятикопеечными монетами.*

§6.Элективный курс «Принцип математической индукции при решении задач»

Как было «отмечено ранее, новые целевые установки в системе образования основываются на приоритете индивидуализации и дифференциации обучения, что проявляется в различных направлениях построения системы образования, реализации продуктивных форм обучения, разработку новых подходов к формированию содержания образования и т.д. Важным аспектом организации профильного обучения в старшей школе является проектирование и реализация элективных курсов в образовательном процессе» [10]. Вслед за рядом выдающихся ученых, в частности, А.Н. Колмогорова, который считал, что «понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику» [21], полагаем, что изучение ПМИ в рамках элективного курса будет способствовать развитию мыслительных навыков, основательнее усвоить математический материал, позволит полнее учесть интересы и профессиональные намерения старшеклассников, следовательно, сделать обучение более интересным для учащихся и, соответственно, получить более высокие результаты. В этой связи был разработан и апробирован Э К: «Метод математической индукции при решении задач».

Данный курс предназначен для учащихся 10-х классов. Программа курса ориентирована на учащихся, проявляющих увлечение математикой, связывающих дальнейшее образование с ней, заинтересованных в подготовке к олимпиадам, успешной сдаче заданий повышенной сложности на ЕГЭ. Материал данного курса также может быть адресован учащимся предпрофильных классов, при организации дифференцированной работы на уроках и факультативных занятиях.

Цели курса:

– ***Образовательные:*** формирование у учащихся знаний об алгоритме ПМИ и навыков по его использованию при решении задач, расширение и углубление знаний по способам доказательств утверждений; подготовка к ЕГЭ, олимпиадам, централизованному тестированию и к вступительным экзаменам в вузы.

– ***Развивающие****:* развитие математической речи, интереса к предмету; математических способностей, логического мышления, исследовательской и познавательной деятельности учащегося; развитие навыка к самостоятельной и творческой работе.

– ***Воспитательные****:* воспитывать любовь к предмету, формирование навыка осуществлять выбор образовательного и профессионального пути.

Задачи курса:

1. Знакомство учащихся с ПМИ. Демонстрация возможностей метода применительно к решению математических задач.

2. Освоение учащимися понимания различия между индуктивными и дедуктивными рассуждениями.

3. Развитию математической интуиции учащихся и способности предвидения в процессе формулирования математических гипотез.

4. Выработка навыков к использованию терминов, правильной речи учащихся.

5. Воспитание математической культуры и мировоззрения, формирование у учащихся представлений о математике, как о науке, её методах и построении.

6. Расширение математического кругозора и интереса к познанию.

В результате прохождения курса учащиеся должны:

- уметь пользоваться техникой доказательства тождеств, равенств и неравенств при заданных значениях неизвестной;

-уметь пользоваться простейшими приёмами применения ПМИ;

- знать и уметь правильно употреблять термины, связанные с понятием ПМИ;

- уметь представлять алгоритм применения ПМИ;

- уметь понимать смысл условий задач;

- уметь самостоятельно работать с дополнительной литературой и другими ресурсами для углубления знаний;

- знать и уметь правильно переходить от одного шага алгоритма к другому шагу.

Продолжительность курса составляет 14 часов. Программа рассчитана на 16 учебных недель по 1 часу в неделю в течение одного учебного полугодия.

Итоговая аттестация по окончанию курса предусмотрена в виде зачета

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Доказательства. Индуктивные и дедуктивные рассуждения.

Частные и общие суждения. Проверка верности суждений. Индукция и дедукция. Роль индукции в построении гипотезы. Неполная и полная индукция.

Метод математической индукции.

Понятие ПМИ. Обобщенный ПМИ. Алгоритм ПМИ и примеры его применения.

Доказательство тождеств.

Использование ПМИ для доказательства тождеств.

Задачи на доказательство неравенств.

Использование ПМИ для доказательства рациональных и иррациональных неравенств.

Задачи на делимость.

Применение ММИ к задачам на делимость

Свойства числовых последовательностей.

Использование ММИ для изучения свойств числовых последовательностей. Доказательство свойств последовательности Фибоначчи с помощью математической индукции. Применение ПМИ к доказательству формул арифметической и геометрической прогрессии.

Применение ММИ для изучения свойств конечных множеств.

Индукция в геометрии.

Применение ММИ к геометрическим задачам

Каждое занятие «направлено на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, познакомить их с новыми идеями и методами, расширить представление об изучаемом в основном курсе материале. В процессе изучения элективного курса предполагается применение дифференцированного подхода, использование различных форм самостоятельной деятельности учащихся».

Основными *методами обучения*, отвечающими целям изучения дисциплины, являются:

– элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;

– элементы учебно-исследовательской деятельности, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе;

– коммуникативные технологии.

Таблица 3

Тематический план курса

№	Тема	Кол-во часов	
		Лекции	Практич. занятия
1	Доказательство. Виды доказательств. Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция	1	-
2	Метод математической индукции	1	1
3	Применение метода математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств	-	2
4	Применение метода математической индукции к доказательству неравенств		1
5	Применение метода математической индукции к задачам на делимость	1	1
6	Применение метода математической индукции для изучения свойств числовых последовательностей	1	1
7	Применение метода математической индукции для изучения свойств конечных множеств		1
8	Индукция в геометрии	-	1
9	Самостоятельная работа - Зачет		2
10	**Итого**	**4**	**8**

Перечень учебно-методических средств обучения.

«Основным дидактическим средством для предлагаемого курса являются тексты рассматриваемых типов задач, которые могут быть выбраны из разнообразных сборников, различных вариантов ЕГЭ или составлены самим учителем. Курс обеспечен раздаточным материалом, подготовленным на основе прилагаемого ниже списка литературы».

Литература:

1. Башмаков М.И. Методические разработки для учащихся ВЗМШ по теме: «Последовательности» и «Метод математической индукции». – М.: Изд-во АПН СССР,1976.

2. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика: пособие для учителей /Н.Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1976.

3. Галицкий М.Л. и др. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа/ Пособие для учителей. - М.: Просвещение. - 1986. - стр.11-19.

4. Депман И.Я. Метод математической индукции: пособие для учителей / И.Я Депман. – Л.: Гос. учеб.-пед. изд-во Мин-ва просвещения РСФСР, 1957.

5. Дидактическое обеспечение Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл.: В 2 ч.Ч.2: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович и др. Под ред. А.Г. Мордковича.– 6-е изд. –М.: Мнемозина, 2012. – 264с.

6. Единый государственный экзамен по математике (Демонстрационный вариант КИМ 2015г.-2019 г.), подготовлен Федеральным государственным научным учреждением « ФИПИ»

7. Колмогоров А.Н. Математика - наука и профессия / Сост. Г.А. Гальперин. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. - 288 с. - (Б-чка «Квант». Вып.64.)

8. Леонтьева А.В. СБОРНИК ЗАДАЧ (МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 19 с.

9. Метод математической индукции: методическое пособие для учителей и учащихся/ Автор-сост. С.А. Николаева. - Ядрин, 2015. - 28 с.

10. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М., 1975.

11. Соминский И.С. Метод математической индукции. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 64 с.

12. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности. – М.: Издательство ЛКИ. – 2008. – 197 с.

13. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств. - 2-е изд., стереотипное, - М.: Изд-во МЦНМО, 2012, - 56 с.

14. Шень А. Ш. Математическая индукция. - 5-е изд., стереотип. - М.: МЦНМО, 2016. - 32 с.

§7. Результаты педагогического эксперимента

Подтверждение гипотезы, достижение цели исследования нуждается в проведении эксперимента и проверки эффективности реализации элективного курса в процессе математической подготовки учащихся. Организация исследования строилась в соответствии с логикой решения поставленной проблемы и была направлена на проверку гипотезы о том, разработка и реализация элективного курса, посвященного методу математической индукции, даст положительный эффект в плане:

- понимания принципа математической индукции и использования его при доказательстве утверждений и решении задач;

- формирования мотивации к изучению математики и личностному самоопределению, построению индивидуальной траектории в изучении предмета.

В качестве базы исследования был выбран 10 класс общеобразовательной школы. В классе обучается 22 человека, из них 12 девочек и 10 мальчиков. По результатам изучения журнала и беседы с классным руководителем установлено, что 8 человек успевают на «5» и «4», 8 – на «4» и «3», 6 учеников – на «3». Неуспевающих учащихся в данном классе нет.

В экспериментальном исследовании условно выделялось ряд этапов:
Первый этап– аналитический включал: изучение состояния проблемы, предмета исследования, выявление сущностных характеристик объекта исследования и описание концептуальных основ изучения ПМИ в школе. Цель этого этапа достигалась путем использования методов теоретического анализа литературы и эмпирического наблюдения. На этом же этапе осуществлялась постановка целей и задач, разработана и выдвинута гипотеза

исследования, формирование методики исследования, подбиралась база исследования, изучались государственные образовательные стандарты, содержание учебников и учебных программ по математике с целью отыскания возможных путей и средств повышения эффективности изучения ПМИ в школьной математике. Результатом этапа явилась разработка содержания элективного курса «Метод математической индукции при решении задач».

На втором – формирующем этапе – задачей эксперимента стала реализация элективного курса и проверка его эффективности. На этом этапе изучалась и анализировалась сформированность у учащихся знаний и навыков применения ПМИ в процессе решения математических задач, влияние курса на мотивацию учащихся.

Для проверки эффективности разработанного курса было предпринято специальное психолого-педагогическое исследование, требующее статистической проверки эмпирических выводов. При проведении педагогического эксперимента мы руководствовались известными в науке положениями, которые предъявляются к эксперименту такого вида, в частности, процесс наблюдений должен быть организован так, чтобы обеспечить постоянство, неизменность в течение наблюдения всех факторов, которые могут влиять на свойства и ход наблюдаемых явлений, то есть стабилизацию условий наблюдений.

В этой связи нами преднамеренно не создавались никакие идеальные условия. Вся опытно-экспериментальная работа осуществлялась методом естественного педагогического эксперимента, построенного на неизменном учебно-воспитательном процессе, вливаясь в него и переплетаясь с ним. Мы использовали учебную группу, сформированную в административном порядке. Активный формирующий эксперимент осуществлялся в течение четырех месяцев, в рамках часов, выделенных на вариативную часть математического образования. Автор исследования выступал в роли непосредственного организатора и регулятора организованного экспериментального обучения в тесном взаимодействии с преподавательским коллективом и администрацией.

Диагностические измерения формирующего воздействия осуществлялись на «входе» и «выходе». О количественных и качественных изменениях, произошедших в результате формирующего эксперимента, автор судил на основе динамики изменений показателей мотивации, самоопределения и учебных достижений по математике.

Заключительный этап исследования, перекрываясь по времени с предыдущим, включал систематизацию материалов исследования, осуществления их научной интерпретации и обобщений, выводов, оформления рукописи работы.

Основываясь на положениях психологии, мы установили ряд критериев эффективности реализуемого курса, а именно:

– интерес к изучению математики; уровень мотивации

– сформированность знаний по теме «Метод математической индукции «и навыков использования ПМИ в решении задач;

– самоопределение учащихся в отношении будущей образовательной (профессиональной) сферы.

Для выяснения меры проявления исследуемых зависимых переменных был применен ряд специальных методов и методик (табл. 4.)

Таблица 4

Критериально-диагностический инструментарий

Критериально-ориентировочная основа	Показатели	Методы и методики диагностики
Уровень и характер учебных мотивов	Соотношение внешних и внутренних мотивов	Методика Т. Д. Дубовицкой
	Целеполагание	Методика М. И. Лукьяновой и Н. В. Калининой
Интерес к изучению математики,	Отношение учащихся к изучению элективного курса в контексте будущей деятельности	Анкета, опрос
Учебные достижения по математике, качество знаний	Успеваемость, объем усвоенных знаний	Результаты контрольных работ, экспертные оценки

С помощью использования методики Т.Д. Дубовицкой, которая представлена в приложении Г, можно определить «направленность и уровень развития внутренней мотивации учебной деятельности учащихся при изучении математических дисциплин, проследить динамику изменения направленности мотивации на внешнюю или внутреннюю мотивацию» [10].

Для получения более детального представления о основных особенностях сферы мотивации студентов использовалась методика М.И. Лукьяновой и Н.В. Калининой. С помощью данной методики можно изучить достаточно подробно мотивационную сферу сразу по различным компонентам. Во-первых, это присутствие личностного смысла учения, который является внутренними субъективным отношением к учебному процессу. Также его можно охарактеризовать как ««прикладывание» учащимся процесса обучения к себе, своему опыту и своей жизни, и важно проанализировать, насколько содержание и методы обучения соответствуют личностным смыслам учащихся» [10]. Согласно психологическим исследованиям, «при осознании смысла учения у обучаемого возрастают успехи в учебной деятельности, легче усваивается и становится более доступным учебный материал, эффективнее происходит его запоминание, активно концентрируется внимание, возрастает работоспособность. Смысл учения, его значимость являются основой мотивационной составляющей личности учащегося» [10].

«Содержательная сторона предлагаемой методики изучения учебной мотивации отражает сущность обоснованных компонентов мотивации и взаимосвязь между ними: наличие личностного смысла учения, выраженность тех или иных видов мотивов, целеполагание, реализация доминирующих мотивов в поведении» [10].

Динамика в показателях качества знаний и степени усвоения темы изучалась на основании сравнения двух показателей: на входном измерении-оценки усвоения темы в процессе изучения основного курса математики; на выходном, контрольном измерении – результатов зачетной контрольной работы по типовым задачам элективного курса.

Отношение к изучаемому курсу исследовалось с помощью опросника.

Результаты по данному опросу представлены в Таблице 5:

Таблица 5

Анализ результатов опроса по вопросам отношения
к изучению элективного курса

1. ***Как Вы относитесь к необходимости изучения математики:***

Варианты ответа	До эксперимента	После эксперимента
	Доля уч-ся, выбравших ответ(в%)	Доля уч-ся, выбравших ответ
1) затрудняюсь ответить;	15 %	0
2)я не люблю математику, но изучать её необходимо;	8 %	6
3) я не люблю математику и не хочу её изучать, потому что она не пригодится мне в будущей профессии;	0	0
4) я изучаю математику, потому что она пригодится мне в будущей профессии;	50 %	60
5) я изучаю математику, потому что она мне нравится	27%	34
Не ответили	0%	0

2. ***Пригодится ли Вам математика в будущей профессии?***

Варианты ответа	Доля уч-ся, выбравших ответ	Доля уч-ся, выбравших ответ
1) не могу ответить	15 %	5
2) совсем нет	5 %	5
3)маловероятно	15 %	10
4)пригодится	60 %	80
Не ответили	5 %	0

Продолжение Таблицы 5

***3. Интересен ли Вам м*атериал и задания курса математики, изучаемые в школе?**

Варианты ответа	Доля уч-ся, выбравших ответ	Доля уч-ся, выбравших ответ
1) не могу ответить	20 %	10
2) нет	0	0
3) интересен, если они не сложные	30 %	20
4) интересен	45 %	65
Не ответили	5 %	5

4. Имеете ли Вы трудности при решении заданий на метод математической индукции?

Варианты ответа	Доля уч-ся, выбравших ответ	Доля уч-ся, выбравших ответ
1) не имею	5%	35
2) имею	35 %	0
3) имею, но с помощью учителя они преодолимы	55 %	60
4) затрудняюсь ответить	5 %	5
Не ответили	0 %	0

5. С чем связаны трудности при решении задач, для решения которых необходимы знания по ПМИ?

Варианты ответа	Доля уч-ся, выбравших ответ	Доля уч-ся, выбравших ответ
1) нет трудностей	5 %	35
2) нет достаточного уровня математической подготовки	25 %	20
3) меня не научили их решать	5 %	0
4) эти задачи каждый раз новые,не могу понять чёткого алгоритма их решения	65 %	45
Не ответили		0

Продолжение Таблицы 5

6. Достаточен ли уровень Ваших знаний по математике?

Варианты ответа	Доля уч-ся, выбравших ответ	Доля уч-ся, выбравших ответ
1)нет	28 %	20
2)частично	62 %	60
3)да	10 %	20
Не ответили		0

7. Полезны ли вам будут элективные курсы поматематике?

Варианты ответа	Доля уч-ся, выбравших ответ	Доля уч-ся, выбравших ответ
1)нет	0	0
2)возможно	45 %	25
3)да	55 %	75
Не ответили		0

8. Как Вы считаете, полезны ли задачи на доказательство для Вас и будущей деятельности (учебы)?

Варианты ответа	Доля уч-ся, выбравших ответ	Доля уч-ся, выбравших ответ
1)нет	0%	0
2)возможно	32 %	16
3)да	68 %	84
Не ответили	0 %	0

По данным анкетирования учащихся было выявлено, что до изучения элективного курса только 50% учеников считают знания по математике необходимыми для их дальнейшей профессиональной деятельности; 8% обучаемых воспринимают математику как элемент общей образованности. 22% проявляют интерес к математике, 15% затруднились с ответом. После изучения элективного курса число учащихся, выразили определенное отношение к предмету, выросло, число неопределившихся стало нулевым. Следует отметить рост числа детей, проявляющих интерес к предмету. До начала изучения курса только 10% считают достаточными свои знания по математике, 28% отметили недостаточную математическую подготовленность, 95% испытывают трудности по решению задач с помощью ПМИ. 55% человек отметили полезность элективного курса, 68 % указали полезность знакомства с задачами на доказательство. Данные ответы свидетельствуют о том, что в данной аудитории есть запрос на элективный курс данной тематики, при этом следует отметить невысокий процент, проявляющих интерес к математике и определившихся с будущей деятельностью и востребованием в этом аспекте математического образования.

По окончанию эксперимента доля учащихся, которые определились вопросе о нужности математики в будущем, выросла до 80%, при этом интерес к предмету стали проявлять 65%. Считаем такое изменение очень важным, поскольку именно это и являлось одной из задач, в целом, профильного обучения, и элективного курса, в частности.

Необходимо отметить, что после изучения курса 35% учащихся (против ранее названных 5%) указали, что у них нет трудностей при решении задач на ПМИ. Полезность курса отметили 75%.

Соотношение внутренней и внешней мотивации в группе учащихся до и после эксперимента, выявленные по методике Т.Д. Дубовицкой, отражены в Таблице 6.

Таблица 6

Соотношение внутренней и внешней мотивации в контрольной и экспериментальной группе

Внутренняя мотивация		Внешняя мотивация	
До эксперимента	После эксперимента	До эксперимента	После эксперимента
67 %	79 %	33 %	21 %

Из таблицы видно, что в классе «до и после эксперимента преобладает внутренняя мотивация, наблюдается положительная динамика роста относительного числа» учащихся с преобладанием внутренней мотивации. Прирост составляет 12 %, что говорит о том, что учащихся, для которых учеба стала приобретать личностный смысл, стало больше.

Сравнительный анализ распределения по уровням внутренней мотивации представлено на диаграмме (рис. 5).

Диаграмма показывает рост в мотивации высокого уровня, незначительное изменение в положительную сторону по среднему уровню и заметное снижение учащихся с низким уровнем внутренней мотивации. Это говорит о том, что у учеников в большей степени побуждения к учебе стали обуславливаться внутренними причинами (желанием, интересом, познавательной активностью), нежели внешними (оценкой, ожиданием одобрения и пр.)

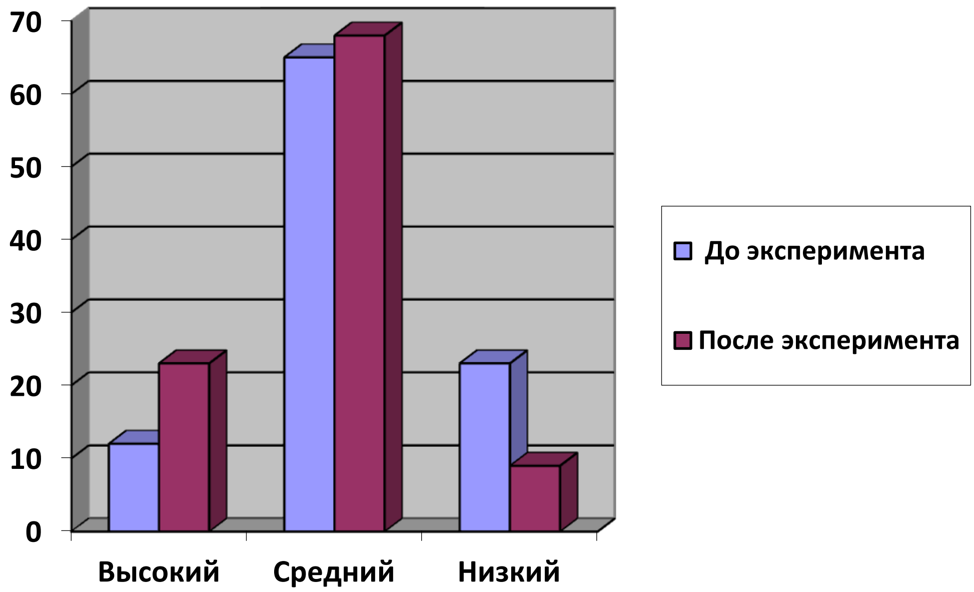

Рис.5. Уровневое распределение внутренней мотивации учащихся класса до и после эксперимента

С помощью методики Н.В. Калининой была исследована динамика в мотивации целеполагания. Применительно к учебному процессу цель — это направленность на выполнение отдельных действий, относящихся к учебной деятельности. Поэтому можно говорить, что цель — это направленность на промежуточный результат учебной деятельности. Распределение учащихся по уровням мотивации в целеполагании представлено на рис. 6. Видим, что после эксперимента выросло количество учеников с очень высоким (с 0 до

5), высоким уровнем (с 20до 27%) целеполагания и средним уровнем (с 63 до 71%), соответственно снизилось количество учащихся со сниженным уровнем. Низкого уровня целеполагания не зафиксировано ни до, ни после экспериментальной работы. Данные показывают, что учащиеся приобрели навыки ставить цель, осознавать, что и зачем они делают.

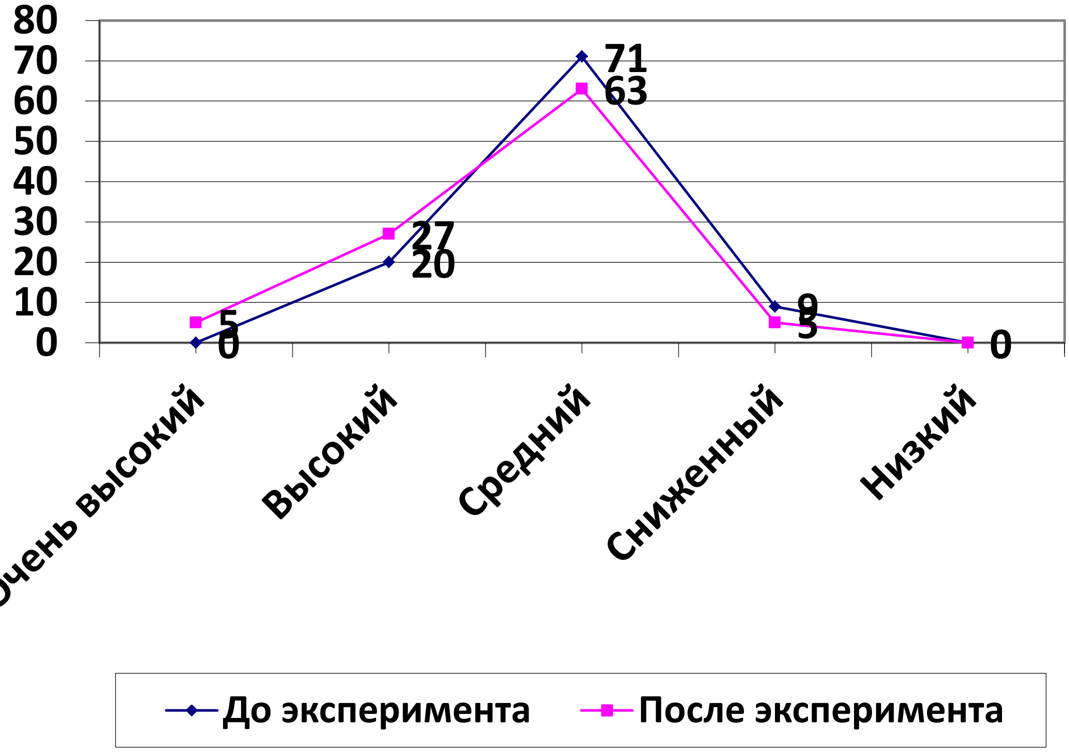

Рис. 6. Распределение учащихся по уровням мотивации в целеполагании

Сравнение качества освоения математических знаний в группе оценивалось по результатам контрольных срезов. Анализ уровней сформированности знаний, умений и навыков учащихся по математике после изучаемого курса показало наличие отличий уровней математической подготовки в группе. В таблице 7 представлены результаты, полученные при обработке данных до и после эксперимента. На основании результатов можно констатировать явную положительную динамику: число учащихся, выполнивших более 90%, выросло на 10%, справившихся от 75 до 90 %общего объема заданий, с 13 до 18%, справившихся от 50 до 75 % от общего объема заданий, увеличилось на 5 %. В целом, число справившихся с работой, увеличилось на 20%.

Таблица 7

Сравнительный анализ результатов контрольных работ

	до эксперимента	после эксперимента
Справились с контрольной работой (%): Из них:	80	100
Выполнили более 90% от общего объема работы	0	10
от 75 до 90% от общего объема работы	13	18
от 50 до 75% от общего объема работы	67	72
менее 50% от общего объема работы	20	0

Для проверки значимости отличий были сформулированы рабочие гипотезы:

H_0 – уровни освоения математических знаний в обеих группах не отличаются. H_1 – уровни математических знаний в двух группах различны.

Проверка гипотез проводилась с помощью программы для автоматического расчета t-критерия Стьюдента. Расчеты представлены в приложении Д. Полученный результаты свидетельствуют о значимых различиях в уровнях математических знаний в группе до и после проведения эксперимента.

Выводы по второй главе

1. Метод математической индукции традиционно вызывает трудности у учащихся в его освоении, что было подтверждено в процессе «входного» измерения. В этой связи актуализируется вопрос о поисках эффективных направлений и методических средств, способствующих более качественному изучению темы. В работе выбраны и обоснованы следующие меры:

Дифференцированный подход к организации математической подготовки;

Проблемно-поисковый метод при развертывании содержания темы, решение ключевых задач, помогающих осознать ПМИ.

Создание и внедрение в учебный процесс элективного курса, посвященного изучению ПМИ и использованию его в решении задач разного типа.

2. Представлена методическая разработка элективного курса «Метод математической индукции при решении задач», направленного на формирование умений и алгоритмов действий по применению ПМИ и ставшего содержанием формирующего эксперимента.

3. Гипотеза исследования подтвердилась. Статистическими и математическими методами обоснован формирующий эффект реализованного курса. Экспериментальная проверка полученных в исследовании результатов показала, что целенаправленное обучение ПМИ посредством элективного курса способствует повышению глубиныи качества усвоения темы, а также уровня учебной мотивации и личностному самоопределению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создание высокого качества знаний и заинтересованного отношения к учению – проблема, проходящая через всю историю школьного образования, не только не теряющая актуальности сегодня, а, напротив, в свете происходящих социально-экономических процессов, приобретающая особое значение. Перед теоретиками и практиками стоит задача совершенствования математической подготовки учащихся, выявление условий повышения качества образования.

Изучение математических методов, в том числе, метода математической индукции, играет ключевую роль в системе математического образования: с одной стороны, выступают в роли системообразующего звена, существенно влияя на интеллектуальное развитие учащихся; с другой стороны, обеспечивает готовность к применению математики в различных областях. В этом контексте считаем, что исследование методических особенностей изучения темы «Принцип математической индукции» обусловлено практическими запросами системы математического образования, социальным заказом общества и насущной потребностью, способствующей становлению личности, ее самореализации в настоящем и будущем. С этой точки зрения следует отметить, что цель и поставленные задачи исследования были достигнуты и решены, что позволило сформулировать основные выводы:

1. Анализ психолого-педагогической и методико-математической литературы позволил сделать вывод о том, что тема, связанная с ПМИ, исключительной важности, является своего рода маркером сформированности логического мышления и широко используется при решении различных задач. Вместе с тем в силу сложности восприятия тема не находит достаточного отражения в школьной программе, что обуславливает необходимость ее изучения в системе дополнительного математического образования.

2. На основе всестороннего анализа методологической, методической, психолого-педагогической литературы по проблеме исследования выявлены и обоснованы возможности метода математической индукции как средства повышения уровня математической подготовки. Показано, что метод математической индукции выступает как общий способ решения целого класса задач, повышая тем самым эффективность и прочность усвоения математического материала. В работе описана концепция, методические особенности изучения ПМИ и представлены широкие области ее использования.

3. В исследовании разработан комплекс психолого-педагогических воздействий в контексте обеспечения качества усвоения темы и личностного развития учащихся. Среди них: дифференциация и индивидуализация изучения темы, проблемно-поисковый метод изложения материала, создание элективного курса. В работе представлена разработка элективного курса «Метод математической индукции при решении задач», в процессе реализации которого главный фокус сосредоточен на обучении алгоритма ПМИ и его применении при решении разного типа задач. Методический материал курса содержит примеры решения задач в разной области применения, материал для организации самостоятельной работы и содержание отдельных занятий.

4. Экспериментально проверена эффективность внедрения разработанного курса в процесс обучения математике учащихся математического профиля. Результаты, полученные в ходе педагогического эксперимента, позволяют признать верность исходной гипотезы исследования и эффективность разработанного курса. Выявлено, что целенаправленное обучение методу математической индукции существенно повышает качество усвоения темы, изменяет характер учения, делая его сознательным и осмысленным для ученика, повышает интерес к обучению математике и способствует самоопределению учащихся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авторская программа: Программы. Математика. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы (профильный уровень) / авт.- сост. И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2009. – 63 с.

2. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. – 6-е изд. стер М.: Мнемозина, 2012. – 287с.

3. Алгебра и начала анализа.10-11 классы: рабочие программы по учебникам Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина: базовый и профильный уровни/авт.-сост. Н.А. Ким.- Волгоград: Учитель, 2016.

4. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ .10-11 классы: учеб. пособие для учителей общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни/ Сост. Т.А. Бурмистрова - М.: Просвещение,2016.

5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровни)/ А. Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3 изд., стер. – М.: Мнемозина, 2015. - 264 с.

6. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3 изд., стер. – М.: Мнемозина, 2015.

7. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразоват. учреждений : базовый и профильный уровни / Ю.М. Колягин [и др.] ; под ред. А.В. Жижченко. - М.: Просвещение, 2014.

8. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2-х ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и

углубленный уровни) /А.Г. Мордкович, П. В. Семенов. - 3-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2013. - 287 с.:

9. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / Ю.М. Колягин [и др.] ; под ред. А. В. Жижченко. - М.: Просвещение, 2016.

10. Башмаков М.И. Методические разработки для учащихся ВЗМШ по теме: «Последовательности» и «Метод математической индукции». – М.: Изд-во АПН СССР,1976.

11. Барышников А.Н. Особенности изучения принципа математической индукции в школьной математике// Вестник магистратуры. 2019. №12 (99) [Электронный ресурс]. URL: http://www.magisterjournal.ru/ (дата обращения: 23.12.2019).

12. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика: пособие для учителей /Н.Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1976.

13. Галицкий М.Л. и др. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа/ Пособие для учителей. - М.: Просвещение. - 1986. - с.11-19.

14. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 269 с.

15. Глушков А.И., Шенцева Л.Н. Методические подходы к выводу формулы числа сочетаний с повторениями при изучении элементов комбинаторики //Colloquium-journal. 2019. №16 (40). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-podhody-k-vyvodu-formuly-chisla-sochetanii-s-povtoreniyami-pri-izuchenii-elementov-kombinatoriki (дата обращения: 25.11.2019).

16. Депман И.Я. Метод математической индукции: пособие для учителей/ И.Я Депман. – Л.: Гос. учеб.-пед. изд-во Мин-ва просвещения РСФСР, 1957.

17. Дидактическое обеспечение Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл.: В 2 ч.Ч.2: Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович и др. Под ред. А.Г. Мордковича.– 6-е изд. –М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.

18. Дробышева Ирина Васильевна Технология дифференцированного обучения математике// Финансовый журнал. 2010. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-differentsirovannogo-obucheniya-matematike (дата обращения: 29.11.2019).

19. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 432 с.

20. Канель-Белов А. Я., Явич Р. Проблема одарённости и стадийность математического обучения (к работе И.С. Рубанова «Как обучать методу математической индукции»)// Вопросы дополнительного образования одарённых школьников в области точных и естественных наук: тез. Всеросс. конф. - С. 4-9.

21. Колмогоров А.Н. Математика - наука и профессия / Сост. Г.А. Гальперин. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. - 288 с. - (Б-чка «Квант». Вып.64.)

22. Корикова Т.М. Справочные материалы по общей методике преподавания математики: Учебное пособие/ Т.М. Корикова, А.В. Ястребов.– Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009.– 60 с.

23. Леонтьева А.В. СБОРНИК ЗАДАЧ (МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 19 с.

24. Лушникова Н.В., Зайкин М.И. К вопросу о структуре метода математического доказательства// Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: Мат-лы всерос. науч.-практ. конф. - Пенза, 2006. - С.102 - 105.

25. Малых А. Е., Данилова В. И. Из истории формирования, развития и приложений основных математических методов // Вестник ПГГПУ. Серия №2. Физико-математические и естественные науки. 2017. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/iz-istorii-formirovaniya-razvitiya-i-prilozheniy-osnovnyh-matematicheskih-metodov (дата обращения: 20.11.2019).

26. Метод математической индукции: методическое пособие для учителей и учащихся/ Автор-сост. С.А. Николаева. - Ядрин, 2015. - 28 с.

27. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл.: В 2 ч.ч.2:Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович и др. Под ред. А.Г. Мордковича.– 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.

28. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) 10класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) – М. Мнемозина 2011. – 424 с.

29. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень) 10класс. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) – М. Мнемозина 2011. – 343 с.

30. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М., 1975.

31. Примерная программа среднего (полного) общего образования по математике на профильном уровне, рекомендованная Министерством образования и науки РФ / Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. - 2-е изд. стереотип. – М.: Дрофа, 2008.

32. Программа для общеобразовательных учреждений: Алгебра и начало математического анализа для 10-11 классов, составитель Т.А. Бурмистрова.- М.: Просвещение, 2017.

33. Программа элективного курса: Логические основы математики.10-11 классы..- автор А.Д. Гетманова. –М., Дрофа, 2015.

34. Программы для школ (классов) с углублённым изучением математики/ Авторы Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашов-Мусатов и С.И. Шварцбурд. - 10-11 класс.- М: Дрофа, 2002.

35. Рубанов И.С. Как обучать методу математической индукции // Математика в школе. - 1996. - №1. - С.14 - 20.

36. Соминский И.С. Метод математической индукции. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1965. - 56 с.

37. Соминский И.С. Метод математической индукции. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 64 с.

38. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: задачи повышенной сложности. – М.: Издательство ЛКИ. – 2008. – 197 с.

39. Тимофеева И.Л. Несколько замечаний об изложении метода математической индукции в школьных учебниках по математике // Наука и школа. 2015. №6. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/neskolko-zamechaniy-ob-izlozhenii-metoda-matematicheskoy-induktsii-v-shkolnyh-uchebnikah-po-matematike (дата обращения: 20.11.2019).

40. Требования к организации и проведению школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по общим образовательным предметам в 2018-2019 учебном году. Приложение №8 к приказу управления образования от 28.08.2018 № 439-Д.

41. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств. - 2-е изд., стереотипное, - М.: Изд-во МЦНМО, 2012, - 56 с.

42. Хайрутдинова Г.Х. Дифференцированное обучение как средство математического развития школьника // Russian Journal of Education and Psychology. 2011. №2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/differentsirovannoe-obuchenie-kak-sredstvo-matematicheskogo-razvitiya-shkolnika-2 (дата обращения: 29.11.2019).

43. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования / М-во образования и науки РФ. — М.:

Просвещение, 2012. — (Стандарты второго поколения). Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012. - № 413.

44. Цатурян А. М. Применение математических знаний учащихся при решении физических задач в процессе завершающего повторения учебного материала // Сибирский педагогический журнал. 2012. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-matematicheskih-znaniy-uchaschihsya-pri-reshenii-fizicheskih-zadach-v-protsesse-zavershayuschego-povtoreniya-uchebnogo (дата обращения: 20.11.2019).

45. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. – 2-е изд., стереотип. – Минск: Высшая школа, 1965. – 523 с.

46. Шень А.Ш. Математическая индукция. - 5-е изд., стереотип. - М.: МЦНМО, 2016. - 32 с.

47. Элективные курсы в профильном обучении : Образовательная область »Математика»/ Министерство образования РФ; Национальный фонд подготовки кадров. – М.; Вита-Пресс, 2004. - 96 с.

48. Энциклопедический словарь юного математика/ Сост. Савин А.П. – М.: Педагогика, 1989 г.

49. Ярыгин О.Н., Кондурар М.В. Индуктивное мышление как компонент интеллектуальной компетентности// КНЖ. 2012. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/induktivnoe-myshlenie-kak-komponent-intellektualnoy-kompetentnosti (дата обращения: 21.11.2019).

50. Acerbi, F. Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction? Archive for History of Exact Sciences, 55, 2000, p. 57–76.

51. Fowler D. Could the Greeks Have Used Mathematical Induction? Did They Use It? Physis. XXXI, 1994, p. 253–265.

52. Hermes Hans Introduction to Mathematical Logic. Hochschultext. London: Springer, 1973, p.143.

53. Knuth, Donald E. The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms (3rd ed.), Addison-Wesley, 1997, p. 11-21.

54. Öhman, Lars–Daniel. Are Induction and Well-Ordering Equivalent? The Mathematical Intelligencer, 41 (3), 2019, p. 33–40.