МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения решению показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики»

Студент Ю.А. Афоничева
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент Н.А. Демченкова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.. 4

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И НЕРАВЕНСТВАМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.. 10

§1. Роль и место уравнений и неравенств в школьном курсе математики 10

§2. Понятие показательных уравнений и неравенств, их связь со свойствами показательной функции 16

§3. Требования к предметным результатам освоения по ФГОС...................... 22

§4. Содержание теоретического материала темы «Показательные уравнения и неравенства» в учебниках разных авторов... 26

§5. Методы решения показательных уравнений... 37

§6. Методы решения показательных неравенств... 49

§7. Уровневая и профильная дифференциация при обучении 58

Выводы по первой главе 63

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И НЕРАВЕНСТВАМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.. 66

§8. Анализ типичных ошибок при решении показательных уравнений и неравенств 66

§9. Прикладной аспект обучения показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики.. 71

§10. Дифференцированная система показательных уравнений и неравенств при подготовке к Единому государственному экзамену 76

§11. Нестандартные задачи по теме «Показательные уравнения и неравенства» 98

§12. Методические рекомендации обучения показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики......................... 103

§13. Описание проведенного педагогического эксперимента 106

Выводы по второй главе 113

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 115
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 117
Приложение А. Примеры задач по теме «Показательные уравнения и неравенства» 126
Приложение Б. Контрольная работа по теме «Показательные уравнения и неравенства» 129

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В настоящее время, время активной математизации науки и техники, роль и значение прочных и глубоких математических знаний выпускников школы особенно велики. Математическое образование становится существенным фактором адаптации личности к новым условиям. Это находит свое отражение в государственных документах: Концепции развития математического образования в Российской Федерации [30], Федеральном законе «Об образовании в РФ» [70]. Именно поэтому вопросы математического образования вызывают пристальное внимание педагогической и научной общественности.

В школьном курсе математики ряд традиционных разделов на протяжении длительного времени сохраняют свое важнейшее положение. Однако, переход к новой образовательной парадигме, введение инновационных методов обучения и новых программ по математике заставляют пересмотреть роль, место и объем некоторых традиционных разделов, уточнить подходы к изучению входящих в них понятий, более тщательно исследовать методические особенности преподавания математического материала в контексте междисциплинарных связей, прикладного значения и соотнесения с другими разделами в рамках единого предмета школьной математики. Сказанное, безусловно, относится и к такой центральной для школьной математики теме, как решение уравнений и неравенств, изучение которой осуществляется на протяжении всех лет пребывания учащихся в школе. Совокупность относящихся к этому вопросу знаний, умений и навыков учащихся образует определенную содержательно-методическую линию курса математики, пронизывающую весь материал обучения и тесно связанную с другими основными линиями курса – функциями, тождественными преобразованиями, числовой линией и др. Умение учащихся решать уравнения и неравенства является обязательным компонентом при проведении итоговой государственной аттестации учащихся.

Изучение данной темы дает учащимся мощный метод решения многочисленных практических задач, позволяет объединить разделы курса математики, показать описание жизненных процессов и явлений на языке математики, способствует развитию логических приемов мышления учащихся. Умения решать показательные уравнения и неравенства являются необходимыми и для успешной сдачи итоговой аттестации, и для дальнейшего изучения математики в высших учебных заведениях.

Аспекты, перечисленные выше, говорят о необходимости ориентироваться в существующих методических подходах к решению показательных уравнений и неравенств, грамотно их применять для достижения образовательных, развивающих целей, предусмотренных ФГОС.

Вопросам решения уравнений и неравенств в школьном курсе математики посвящено большое число диссертационных и других исследований. В частности, в исследовании К.И. Нешкова [45] выделен необходимый и достаточный объем материала по теме, в том числе по упражнениям. Проблема прикладной направленности темы «Показательные уравнения и неравенства», рассмотрена в работах С.И. Величко [17], Е.В. Возняк [18], В.А. Гусева [20], Л.И. Закарлюк [24], Ю.М. Колягина [29], И.А Лурье [55], Т.В. Малковой [32] и др. Вопросы взаимосвязи понятий неравенства, уравнения и функции освещены М.В. Паюл [50], И.М. Степуро [63]. Важность овладения учащимися теоретически обобщенных способов решения уравнений отмечал В.В. Давыдов [21]; основные положения методики обучения решению уравнений исследованы А.Ш. Блох [39], В.А. Гусевым [39], Ю.М. Колягиным [28], Г.И. Саранцевым [59] и др.

Несмотря на наличие большого количества исследований по решению показательных уравнений и неравенств можно отметить ряд вопросов, которые требуют дальнейшего детального исследования. Например, введение уровневой дифференциации при изучении показательных уравнений и неравенств. А также школьная практика свидетельствует о наличии типичных ошибок в решении данного вида уравнений, неравенств, их систем и совокупностей.

Таким образом, обнаруживается **противоречие** между необходимостью научно-обоснованного изучения показательных уравнений и неравенств учащимися средней школы и недостаточной методической разработанностью данной темы в условиях дифференцированного обучения математике. Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему исследования**: выявление методических основ обучения теме «Показательные уравнения и неравенства» в общеобразовательной школе в условиях дифференцированного обучения.

Объект исследования: процесс обучения алгебре и началам математического анализа учащихся средней школы.

Предмет исследования: методика обучения показательным уравнениям и неравенствам в средней школе.

Цель исследования: выявление основ обучения решению показательным уравнениям и неравенствам, разработка методики ее реализации в условиях дифференцированного обучения в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования состоит в том, что обучение решению показательным уравнениям и неравенствам в курсе алгебры и начал математического анализа средней школы будет более эффективным, если:

– при обучении решению показательным уравнениям и неравенствам взять за основу дифференцированное обучение, то она будет способствовать повышению качества математической подготовки учащихся.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Определить понятие показательных уравнений и неравенств и их связь с показательной функцией.

2. Выделить основные методы решения показательны уравнений и неравенств.

3. Рассмотреть прикладной аспект изучения темы.

4. Выполнить анализ содержания теоретического материала по данной теме на основании различных учебных пособий.

5. На основании анализа литературы, собственного педагогического опыта выявить типичные ошибки учащихся при изучении данной темы.

6. Разработать дифференцированную систему задач по теме.

7. Провести и описать педагогический эксперимент по теме исследования.

Теоретико-методологическую основу исследования составили: основные положения дифференцированного обучения математике Р.А. Утеева [66].

Базовыми для настоящего исследования явились также: основные положения методики преподавания математики А.Ш. Блох, В.А. Гусева, Ю.М. Колягина [38,39] и методики решения уравнений и неравенств М.Э. Григоряна, Д.Х. Манаевой [19,33].

Методы исследования: анализ состояния изучаемого вопроса в практике работы школы; анализ состояния его изучения в специальной математической, методической, психолого-педагогической литературе; анализ ФГОС, учебно-программной документации для общеобразовательных школ, школьных учебников анализ и вузов; обобщение и систематизация опыта преподавания показательных уравнений и неравенств в общеобразовательной школе.

Опытно-экспериментальная база исследования, состоящая из экспериментальной проверки предлагаемых методических рекомендаций, была осуществлена в период педагогической и преддипломной практик на базе СОШ №2 Тверской области г. Торопец.

Основные этапы исследования:

1. Анализ педагогических исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ).

2. Определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3. Разработка методики обучения решению показательных уравнений и неравенств, дифференцированной системы задач по теме «Показательные уравнения и неравенства».

4. Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Научная новизна исследования заключается в:

– разработке дифференцированной системы задач по теме исследования;

– разработке методических рекомендаций обучения показательным уравнениям и неравенствам.

Теоретическая значимость исследования заключается в:

– определении методических особенностей обучения решению показательным уравнениям и неравенствам.

Практическая значимость исследования заключается в том, что представленные дидактические материалы, методические рекомендации, разработанная дифференцированная система заданий могут быть использованы в работе учителей математики, студентов педагогических вузов и колледжей.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались:

– сочетанием теоретических и практических методов исследования;

– результатами педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит во включенном участии на всех этапах процесса, личном участие в апробации результатов исследования, подготовке публикаций.

Апробация результатов исследования осуществлялась путём выступлений на: II Международной заочной научно-практической конференции «Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях» на базе Луганского национального университета (ЛНУ) имени Тараса Шевченко 3–9 июня 2019, г. Луганск; Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество». Некоторые теоретические положения были представлены в научном издании «Вестник магистратуры» (январь 2019).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения теме «Показательные уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

2. Дифференцированная система задач по теме «Показательные уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 18 рисунков, 14 таблиц, список используемой литературы (81 источник), 2 приложения. Основной текст работы изложен на 125 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И НЕРАВЕНСТВАМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§1. Роль и место уравнений и неравенств в школьном курсе математики

Уравнения и неравенства являются одним из основных разделов курса математики. Уравнения и неравенства используются в решении задач различных разделов математики, а также прикладных задач в других областях.

Можно выделить три основные направленности изучения уравнений и неравенств в школьном курсе:

– Теоретико-математическое направление линии уравнений и неравенств, которая определяется двумя аспектами. Один из них характеризуется изучением основных классов уравнений и неравенств, их систем. Второй аспект связан с изучением понятий, обобщенных методов, имеющих отношение к линии уравнений и неравенств.

– Прикладная направленность, которая состоит в изучении приемов, используемых в прикладных задачах. Это направление освещается в решении текстовых задач алгебраическим методом [76]. Например, уравнения, неравенства и их системы лежат в основе таких математических средств, как математическое моделирование [57, 246].

– Линия уравнений и неравенств характеризуется направленностью на установление связей с другими разделами математики. Существует тесная связь между этой линией и так называемой числовой линией, взаимосвязь этих линий заключается в последовательном расширении числовой системы.

Решение определенных уравнений и неравенств, и их систем приводит к появлению различных числовых областей (за исключением области действительных чисел), рассматриваемых в школьном курсе алгебры и начал анализа. Связь линии уравнений и неравенств и числовой линии является двусторонней. Можно рассмотреть и обратное влияние, а точнее, влияние числовой линии на линию уравнений и неравенств. Заключается оно в том, что появление новой числовой области расширяет возможности для решения и составления уравнений и неравенств. На изучение уравнений отводится времени больше, чем на любую другую тему школьного курса математики. Кроме того, при изучении любой темы уравнения могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний [78].

Таблица 1

Этапы введения понятия уравнения в средней школе

Этапы введения понятий	Реализация этапов
1. Рассмотреть жизненные примеры, которые показывают целесообразность этого понятия.	В книге для учителей Козлов В.В. [27] предлагает иллюстрировать уравнение решением следующей задачи. Матери было 25 лет, когда родилась дочь, и 28 лет, когда родился сын. Сколько лет каждому из них, если теперь всем троим вместе 46 лет?
2. Определить существенные и несущественные признаки понятия, ввести термин.	Существенными признаками являются: содержит переменную, равенство. Несущественными признаками считают: какой символ выбран для обозначения неизвестной, в какой части расположена неизвестная.
3. Сформулировать определение.	Уравнением является равенством, которое содержит букву, значение которой подлежит нахождению. Типы заданий: какие из выражений относятся к уравнениям: «$1 + 5 = 6$; $3 + x = 7$;$4 > 2$;$y + 7$;$3 \times x - 4 = 1$? Учащимися может быть предложен ответ: «равенство, содержащее в себе неизвестное число»
4. Разъяснить понятие с помощью конкретных примеров; модели понятия.	Ситуация задачи позволяет определить математическую модель: $x + (x + 3) + (x + 28) = 46$, где х - возраст сына.
5. Отыскание других возможных определений.	Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.

Так же наблюдается тесная взаимосвязь линии уравнений и неравенств и функциональной линии [48, 269]. Например, в задачах, где требуется найти область определения функции. Можно отметить и существенное влияние функциональной линии на изучение темы уравнений и неравенств. Например, для достижения графической наглядности в процессе решения и исследования уравнений, неравенств и их систем лежат функциональные представления.

Понятие уравнения присутствует в процессе всего обучения математики в школе. В начальной школе учащиеся решают уравнения методом подбора. В средней школе уравнения рассматриваются уже не только как самостоятельное понятие, но и как инструмент решения текстовых задач. Также, уравнения формируют вычислительные навыки у учащихся. Рассмотрим этапы введения понятия уравнения в средней школе (таблица 1).

Решение уравнений в пятом классе осуществляется на основе зависимости между результатами действий и их составляющими. Следовательно, в пятом классе рассмотрению подлежат шесть видов уравнений простейшего типа: $a + x = b$, $a - x = b$, $x - a = b$, $x \times a = b$, $\frac{x}{a} = b$, $\frac{a}{x} = b$. Учащиеся совершенствуют навыки использования тождественных преобразований, решая подобные уравнения. При изучении понятия уравнения полезно решать творческие задачи. Например, задачи на составление уравнения с определенным корнем или подбор слагаемого уравнения, при условии, что его корнем является определенное число ($4x + * = 30$, корнем уравнения является число 12).

В шестом классе неизвестное может располагаться в обеих частях уравнения, в уравнениях появляется модуль, решение осуществляется на множествах Q и Z. Для того, чтобы понять процесс переноса из одной части уравнения в другую используется свойство противоположных чисел $\left(a + (-a)\right) = 0$. Предлагается задача про весы: на одной из чаш весов расположена дыня и гиря в 5 кг, на другой – гиря в 9 кг. Состояние весов – равновесие. Найти вес дыни. Учащиеся строят математическую модель ситуации и решают уравнение. Данная задача помогает понять смысл рассмотренного выражения.

В седьмом классе рассматривается понятие равносильности, изучаются первое и второе свойства равносильности. Данные свойства применяются в ходе решения уравнений. Решению линейных уравнений с одной переменной уделяется особое внимание. В пятых и шестых классах учащиеся уже решали такие уравнения. В седьмом классе учащиеся исследуют линейное уравнение $ax + b = 0$ в соответствии с параметрами a и b: $ax = -b$ (если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение имеет вид $0x = 0$ и x может быть любым числом; если $a = 0$, $b \neq 0$, то решения у уравнения отсутствуют; если $a \neq 0$, то уравнение обладает единственным решением $x = -\frac{b}{a}$). Изучаются также уравнения с двумя переменными и системы линейных уравнений. Для решений уравнений вида $ax^2 + bx = 0$ используется разложение на множители: $x^2 - a^2 = 0$.

Определение квадратного уравнения следующего вида: «Уравнение вида, $ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0$ является квадратным уравнением» дается в учебниках восьмого класса. Учащиеся уже используют формулы корней приведенного квадратного уравнения, определяют существование корней и их количество, пользуясь вычислением дискриминанта, рассматриваются полные и неполные квадратные уравнения. Изучаются различные методы решения полного квадратного уравнения: графический метод, метод выделения полного квадрата, по теореме, являющейся обратной теореме Виета, через дискриминант в соответствии с формулой корней; изучаются уравнения, которые содержат переменную в знаменателе.

В курсе девятого класса учащиеся рассматривают графический способ решения уравнений. Смысл данного способа заключается в построении обоих графиков функций заданного уравнения $f(x) = g(x)$, находятся точки их пересечения. Используя данный способ учащиеся получают возможность решения таких уравнений, которые на данном этапе не смогли бы решить аналитическим способом.

В курсе старшей школы вырабатываются навыки решения различных видов уравнений и систем уравнений: тригонометрических, иррациональных, показательных, логарифмических.

Теперь следует кратко остановиться на линии неравенств. Решение всех основных типов задач с помощью алгебраического метода и при решении задач графическим методом развивает у учащихся навыки алгоритмического и аналитического мышления. Учащиеся усваивают приемы решения неравенств, позволяющие решать прикладные задачи из смежных областей.

Если рассмотреть изучение неравенств в школьной программе, то можно выделить несколько этапов: 1-6 класс (пропедевтический этап), 7-9 классы средней школы (основной этап), 10-11 классы старшей школы (завершающий этап).

1-6 класс (пропедевтический этап). В начальной школе и 5-6 классах учащиеся знакомятся с понятиями: больше, меньше, увеличение, уменьшение. После представления об этих элементарных понятиях появляются навыки сравнения. Сначала сравнение происходит на примерах из жизни. Позже происходит сравнение величин, выражений, знакомство с обозначениями «=», «<», «>», формируется понимание терминов «на сколько» и «во сколько» больше или меньше. Далее формируется геометрическое определение неравенства, изучение понятия модуля числа, которое играет важную роль в теории неравенств.

В курсе алгебры 7-9 классов средней школы (основной этап) учащиеся сталкиваются с неравенствами в процессе изучения функций, нахождения области определения функций и построения графиков. Навыки решения неравенств помогают учащимся решать задачи и выполнять построение функций, их изучение закладывает фундамент к решению задач линейного программирования и решения систем неравенств.

Таблица 2

Место уравнений и неравенств в программе школьного обучения

Этап	Класс	Темы программы
Пропедевтический (начальная школа, курс математики 5-6 классов основной школы)	1-4, 5, 6	Обозначение неизвестных компонентов действий посредством переменной и нахождение их, основываясь на свойствах действий. Натуральные числа. Сложение и вычитание натуральных чисел. Решение линейных уравнений, основываясь на зависимости между компонентами действий (сложения и вычитания). Умножение и деление натуральных чисел. Решение линейных уравнений, основываясь на зависимостях между компонентами (умножения и деления). Действия с рациональными числами. Общие методы решения линейных уравнений при помощи преобразований выражений простейшего характера. Составление уравнения для решения текстовых задач
Основной (курс алгебры 7-9 классов основной школы)	7, 8, 9	Уравнения. Основные понятия, линейное уравнение с одним неизвестным. Решение задач методом уравнений. Системы линейных уравнений. Решение задач путем составления систем уравнений. Уравнения и системы уравнений. Целое уравнение и его корни. Решение уравнений третьей и четвертой степени с одним неизвестным с помощью разложения на множители и введения вспомогательной переменной. Уравнение с двумя переменными и его график. Решение систем уравнений второй степени с двумя переменными. Решение текстовых задач методом составления систем. Квадратные уравнения. Решение рациональных уравнений. Решение задач, которые приводят к рациональным и квадратным уравнениям. Квадратичная функция. Неравенства. Линейное неравенство с одной переменной. Система линейных неравенств с одной переменной. Решение неравенств второй степени с одной переменной. Решение рациональных неравенств методом интервалов.
Завершающий	10	Периодичность тригонометрических функций (четность, нечетность). Свойства тригонометрических функций: гармонические колебания. Решение простейших тригонометрических уравнений с графиками и примерами. Решение простейших тригонометрических неравенств (с алгоритмами и примерами). Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений
	11	Иррациональные уравнения: примеры и алгоритм решения. Степень с рациональным показателем: основные свойства. Показательная функция: основные свойства и график. Решение показательных уравнений и неравенств (алгоритм решения, примеры)

Позже происходит изучение свойств неравенств, методов приближенных вычислений. В итоге, учащиеся должны владеть навыком проведения равносильных преобразований неравенств и, как результат, решения неравенств с одной и двумя переменными, систем неравенств.

10-11 классы старшей школы (завершающий этап) позволяет освоить учащимся решение различных видов неравенств: показательных, логарифмических, иррациональных, неравенств с модулями.

Место уравнений и неравенств в школьной программе представлено в таблице 2.

Решая показательные уравнения и неравенства учащийся неизбежно столкнется с необходимостью решения различных видов уравнений и неравенств. Среди них можно выделить иррациональные, рациональные, логарифмические, содержащие абсолютные величины (модули), тригонометрические, а также комбинированного типа.

Проанализировав роль и место изучения показательных уравнений и неравенств в школьном курсе математики, можно сделать следующие выводы. Можно выделить три ключевых (основных) направления линии уравнений и неравенств в школьном курсе: прикладное направление, теоретико-математической направление, установление связей с остальным содержанием курса математики. Изучение данной темы затрагивает такие важные вопросы, как, степень, квадратные уравнения, показательная функция и т.д. Показательные уравнения имеют важное теоретическое значение, служат практическим целям.

§2. Понятие показательных уравнений и неравенств, их связь со свойствами показательной функции

В данном параграфе рассмотрению подлежат вопросы, связанные с со связью показательных уравнений и неравенств со свойствами показательной функции. Уравнения, в которых переменные находятся только в показателях степени относятся к показательным (степенным) уравнениям. Уравнения вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a>0, a≠1 называются показательными уравнениями.

Для решения такого вида уравнений учащимся необходимо знать и уметь применять теорему о равносильности.

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0$ и $a \neq 0)$ является равносильным уравнению $f(x) = g(x)$.

Для изучения данной темы необходимо знать основные формулы действий со степенями, а именно: $a > 0$, $b > 0$: $a^0 = 1, 1^x = 1$; $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}, (k \in Z, n \in N)$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^x a^y = a^{x+y}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $a^x b^x = (ab)^x$; $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$.

Понятие показательного уравнения тесно связано с показательной функцией. В некоторых учебных пособиях, прежде чем приступить к изучению показательных уравнений и неравенств, учащимся предлагается усвоить показательную функцию. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 0$ является показательной функцией. Ключевые свойства показательной функции $y = a^x$ представлены в таблице 3.

Таблица 3

Основные свойства показательной функции

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная
Монотонность	Возрастает	Убывает

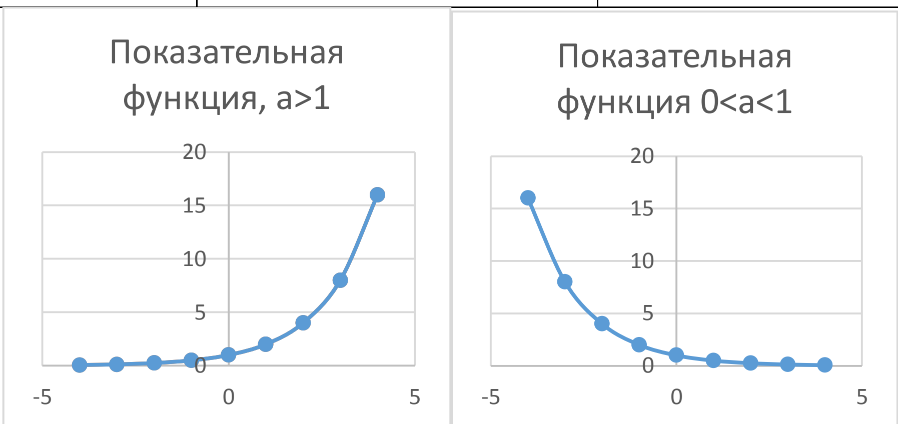


Рис. 1. График показательной функции.

График показательной функции представляет из себя экспоненту (рис.1).

При решении показательных уравнений и неравенств часто приходится прибегать к анализу свойств показательной функции. Целесообразно привести несколько примеров решения показательных уравнений.

Задача 2.1. $2^{2\cdot x+1} - 5\cdot 2^x - 88 = 0$. При решении данной задачи потребуется использовать свойства степеней и показательной функции, метод замены переменной: $t = 2^x$. Уравнение можно переписать следующим образом: $2\cdot t^2 - 5\cdot t - 88 = 0$. $D = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 5^2 - 4\cdot 2\cdot(-88) =$

$= 729 = 27^2 > 0$. Поэтому можно сделать вывод, что уравнение имеет два корня: $t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2\cdot 2} = 8$, $t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2\cdot 2} = -5{,}5$. Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -5{,}5. \end{array}\right.$ Решим первое уравнение:$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3$. Учитывая утверждение теоремы 1, можно осуществить переход к эквивалентному уравнению $x = 3$. Здесь потребуется знание свойств показательной функции: показательная функция является строго положительной на всей области определения, поэтому можно сделать вывод, что второе уравнение не имеет решений. Корень $x = 3$ и является решением исходного уравнения.

Задача 2.2. $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$. На первом этапе необходимо проанализировать ОДЗ. Для анализа используем свойства показательной функции. В данном случае никаких ограничений на ОДЗ не накладывается, так как показательная функция $y = 9^{4-x}$ положительна и не равна нулю. Применим равносильные преобразования: $3^{x-1} - 3^{x-3} = \sqrt{3^{2\cdot x-8}} + 207 \Leftrightarrow$ $3^{x-1} - 3^{x-3} - 3^{x-4} = 207 \Leftrightarrow 3^x\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81}\right) = 207 \Leftrightarrow 3^x\cdot\frac{23}{81} = 207 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x = 3^6 \Leftrightarrow x = 6$.

Задача 2.3. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Так как показательная функция положительна при любом значении x, то можем применить равносильное преобразование, разделив обе части на $0,2^x$. После преобразования решение уравнения становится очевидным: $\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Задача 2.4. $3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$. Воспользуемся правилами умножения и деления степеней, разделим обе части на 4^x: $49 \cdot 3^x \cdot 7^x = 49 \cdot 4^x \Leftrightarrow 21^x = 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{21}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Задача 2.5. $3^x = -x - \frac{2}{3}$. Проанализировав функции, можно сделать вывод, что графики функций $y = 3^x$ и $y = -x - \frac{2}{3}$ имеют только одну точку пересечения, так как $y = -x - \frac{2}{3}$- убывающая функция, а $y = 3^x$- возрастающая функция. В данном случае очевидно, что точкой пересечения графиков будет $x = -1$. Другие корни у данного уравнения отсутствуют.

Задача 2.6. $18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0$. Воспользуемся правилами вычисления произведения и частного степеней, преобразование будет равносильным, так как показательная функция строго положительна. $2^x \cdot 3^{2 \cdot x} - 8 \cdot 2^x \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x \cdot (3^{2 \cdot x} - 8 \cdot 3^x - 9) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 0 \\ 3^{2 \cdot x} - 8 \cdot 3^x - 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 3^x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Примеры решения показательных уравнений мы рассмотрели. Теперь можно перейти к рассмотрению показательных неравенств. По аналогии с уравнениями, будем использовать свойства показательной функции. Дадим определение показательным неравенствам.

Неравенство называется показательным, если переменная находится только в показателе степени. Простейшее показательное неравенство имеет вид: $\mathrm{a}^{\mathrm{x}} < \mathrm{b}$ или $\mathrm{a}^{\mathrm{x}} > \mathrm{b}$, где a>0, a $\neq 1$, x-неизвестное.

Рассмотрим теорему о равносильности неравенств.

Теорема 2. При $a > 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ является равносильным неравенству $f(x) > g(x)$. При $0 < a < 1$ показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ является равносильным неравенству $f(x) < g(x)$. Следует проиллюстрировать вышесказанное о неравенствах рядом примеров.

Задача 2.7. Решить неравенство $16^x - 2 \cdot 12^x \leq 3^{2 \cdot x+1}$. Представим неравенство в другом виде $4^{2 \cdot x} - 2 \cdot 4^x \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{2 \cdot x} \leq 0$. Проанализируем функцию $y = 3^{2 \cdot x}$, она всегда положительна, следовательно, после деления обоих частей на $3^{2 \cdot x}$ изменения знака не произойдет. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2 \cdot x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - -3 \leq 0$. Выполняется подстановка: $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. Следовательно, неравенство может быть записано в виде: $t^2 - 2 \cdot t - 3 \leq 0$. Графическое решение последнего неравенства представлено на рисунке 2.

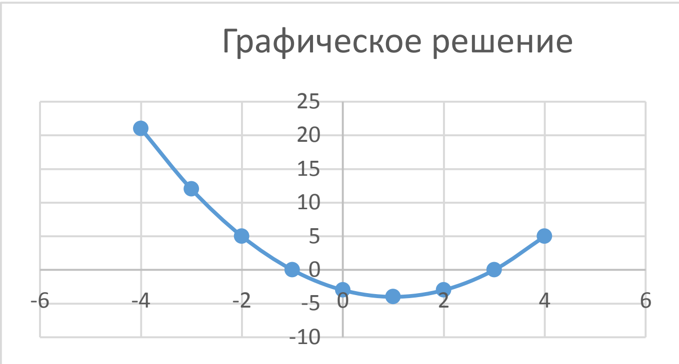


Рис. 2. Графическое решение неравенства.

В итоге решением неравенства является интервал: $-1 \leq t \leq 3$, Выполнив обратную подстановку, можно перейти к: $-1 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 3$.

Так как показательная функция всегда положительна, левое неравенство можно считать автоматически выполненным. Сделаем равносильное преобразование, воспользовавшись свойством логарифма: $\left(\frac{4}{3}\right)^x \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{log_{\frac{4}{3}} 3}$. Воспользуемся рассмотренной теоремой 2 перейдем к следующему неравенству: $x \leq log_{\frac{4}{3}} 3$. Ответ: $x \in -\infty; log_{\frac{4}{3}} 3$.

Задача 2.8. $\frac{7^x-30}{7^{x-1}+1} \leq -14$. Воспользуемся свойствами степеней: $\frac{7^x-30}{\frac{1}{7} \cdot 7^x+1} \leq -14$. Сделаем замену: $t = 7^x$. Неравенство примет вид: $\frac{t-30}{\frac{1}{7} \cdot t+1} + 14 \leq$ ≤ 0. Умножим числитель и знаменатель на 7: $\frac{7 \cdot t-210}{t+7} + 14 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{21 \cdot t-112}{t+7} \leq$ $\leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot t-16}{t+7} \leq 0$. Неравенству удовлетворяют следующие значения переменной t: $-7 \leq t \leq \frac{16}{3}$. Выполним обратную замену и получим неравенство: $-7 \le 7^x \le \frac{16}{3} \Leftrightarrow 7^x \le 7^{log_7\frac{16}{3}}$. По теореме 2 получим следующее неравенство: $x \le log_7\frac{16}{3}$. Ответ: $x \in -\infty; log_7\frac{16}{3}$.

Задача 2.9. $2^{2\cdot x^2-6\cdot x+3} + 6^{x^2-3\cdot x+1} - 3^{2\cdot x^2-6\cdot x+3} \ge 0$. Выполним преобразования: $2\cdot 2^{2\cdot x^2-6\cdot x+2} + 2^{x^2-3\cdot x+1}\cdot 3^{x^2-3\cdot x+1} - 3\cdot 3^{2\cdot x^2-6\cdot x+2} \ge 0$. Так как $3^{2\cdot x^2-6\cdot x+2}$ является положительным, можем разделить обе части уравнения на $3^{2\cdot x^2-6\cdot x+2}$, не меняя знак неравенства. Получается: $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot x^2-6\cdot x+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1} - 3 \ge 0$. Далее следует выполнить замену переменной: $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1}$. Тогда исходное неравенство можно записать в виде: $2\cdot t^2 + t - 3 \ge 0$. Графическое решение данного неравенства представлено на рисунке 3. Значения t, принадлежат интервалу: $t \in -\infty; -\frac{3}{2} \cup 1; +\infty)$. После обратной замены получим два неравенства.

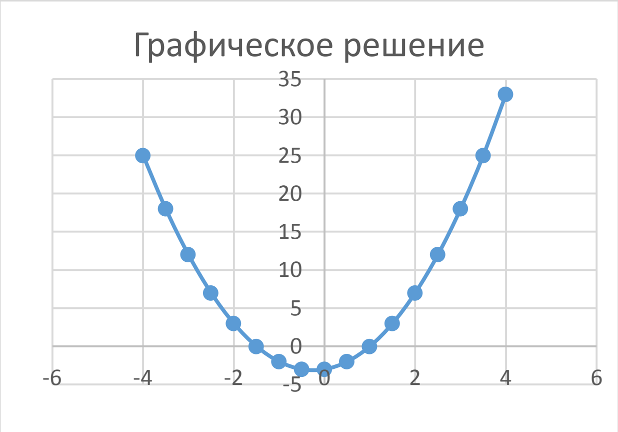


Рис. 3. Графическое решение неравенства.

Так как показательная функция положительна, первое неравенство не имеет решений. $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1} \le -\frac{3}{2},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1} \ge 1\end{array}\right.$. Рассмотрим второе неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1} \ge 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1} \ge \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

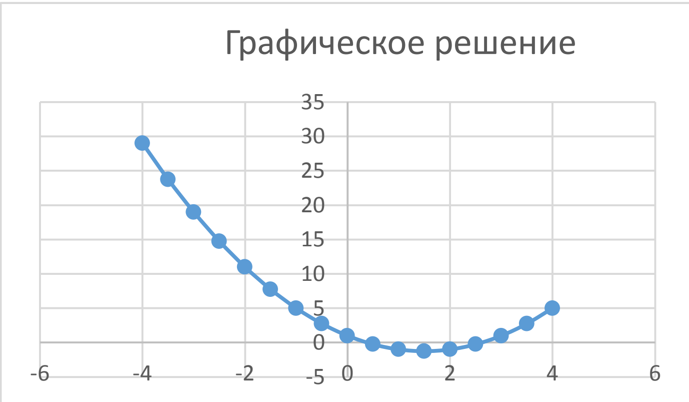


Рис. 4. Графическое решение неравенства

Так как $0 < \frac{2}{3} < 1$, то по теореме 2, перейдем к следующему неравенству: $x^2 - -3\cdot x + 1 \le 0$. Графическое решение данного неравенства приведено на рисунке 4. Таким образом, решением исходного неравенства будет являться интервал: $x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Задача 2.10. $2 \cdot x + 2 - x^2 \geq 3^{x^2-2\cdot x+2}$. Рассмотрим левую часть уравнения: функция $y = 2 \cdot x + 2 - x^2$- это парабола, вершиной является точка с координатами: $x_t = -\frac{b}{2\cdot a} = 1$, $y_t = 3$. Ветви направлены вниз, данная точка является высшей точкой. Рассмотрим функцию в показателе степени в правой части неравенства: $y = x^2 - 2 \cdot x + 2$. Вершиной является точка с координатами: $x_t = -\frac{b}{2\cdot a} = 1$, $y_t = 1$. Ветви направлены вверх, данная точка является низшей точкой. Наименьшее значение функции $y = 3^{x^2-2\cdot x+2}$ равно $3^1 = 3$, аналогично функции параболы, находящееся в показателе степени.

Ограниченной снизу является и функция $y = 3^{x^2-2\cdot x+2}$, которая стоит в правой части неравенства. Ее наименьшее значение достигается в той же точке, что и у параболы, располагающейся в показателе степени, и это значение равно $3^1 = 3$. Следовательно, исходное неравенство может быть верным только в случае, в котором значение функций, находящихся слева и справа совпадают, и эти значения равны 3 (поскольку только это число является пересечением областей значений данных функций). Легко проверить, что данное условие справедливо в единственной точке $x = 1$. Таким образом, именно $x = 1$ и является решением исходного неравенства.

Итак, уравнения и неравенства называются показательными, если переменная находится только в показателе степени. Понятие показательного уравнения тесно связано с показательной функцией. Для решения данного вида уравнений и неравенств используются свойства показательной функции, теоремы о равносильности.

§3. Требования к предметным результатам освоения по ФГОС

Изучение математики в основной школе направлено на развитие математического мышления, на овладение основными навыками и развитие творческих способностей учащихся. Изучение предметной области «Математика», в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта [69], должно сформировать у учащихся: «осознание значения математики в повседневной жизни человека; представления о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки; представления о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [69].

Изучая математику на базовом уровне учащиеся достигают следующих целей: «Формируют общие представления о математике как универсальном научном языке и исключительно об общих методах и идеях математики; развивают пространственное воображение и логическое мышление исключительно на необходимом для будущей профессиональной деятельности и дальнейшего обучения уровне». Изучая предмет на профильном уровне учащиеся: «Формируют представления о методиках и идеях математики, о математике, как универсальном научном языке, как средство моделирования явлений и процессов; формируют владение математическим языком в устной и письменной форме, математическими знаниями и умениями, которые необходимы для изучения школьных естественнонаучных дисциплин, продолжения образования и обучения по выбранной специальности на современном уровне; развивают логику, алгоритмическое мышление, пространственное воображение, математический склад и интуицию, творческие способности, необходимые для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и её использования в будущей профессиональной деятельности; воспитывают культуру личности средствами математики через знакомство с историей развития математики, развивают математические идей, формируют осознание значимости математики для научно-технического прогресса» [69]. Сам учебный процесс нужно акцентировать на рациональное сочетание как устных, так и письменных видов работы при изучении теории или при решении задач. Внимание должно быть направлено на развитие правильной и грамотной речи учащихся, на формирование у них навыков умственной деятельности, т.е. планирование работы, поиск решения тех или иных задач, способность давать критическую оценку полученных результатов [79,80,81].

Можно выделить ряд целей обучения показательным уравнениям и неравенствам. При изучении темы «Показательные уравнения и неравенства» учащиеся развивают навыки решения не только показательных уравнений и неравенств, но других видов, таких как: тригонометрические, логарифмические. При решении данных задач учащиеся развивают логическое мышление, развивают навыки самостоятельной работы, изучают алгоритмы и приемы, которые в дальнейшем могут использоваться при изучении других разделов математики, развивают творческие способности и познавательную деятельность. Решая задачи различных типов, учащиеся расширяют и систематизируют свои знания, оттачивают навыки решения уравнений и неравенств в целом.

Таким образом, можно сформулировать следующие учебные задачи:

– формулировать определение понятий показательное уравнение и показательное неравенство;

– оформлять решение показательных уравнений и неравенств различных типов, формулировать план решения задачи;

– принимать решение о выборе метода решения показательного уравнения и неравенства;

– решать показательные уравнения и неравенства и задачи, основанные на их решении в соответствии со своим уровнем сложности.

Можно выделить требования ФГОС предъявляемые к предметным результатам, применимые к теме «Показательные уравнения и неравенства» на базовом уровне: «владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств» [69]. Требования к предметным результатам освоения углубленного курса должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать: «сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач» [69].

Можно сформулировать основные навыки, которые приобретают учащиеся после изучения темы «Показательные уравнения и неравенства» на разных уровнях. На базовом уровне учащиеся умеют:

– решать показательные уравнения вида $a^{bx+c} = d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a) и неравенства вида $a^x < d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a);

– решать несложные показательные уравнения, неравенства и их системы.

На профильном уровне учащиеся:

– имеют представление об основных типах показательных уравнений и неравенств;

– имеют представление о различных методах решений показательных уравнений и неравенств;

– могут выбирать метод решения показательных уравнений и неравенств в соответствии с типом задачи.

Из вышеизложенного, можно сделать вывод, что цели учащегося – изучить понятие показательного уравнения и неравенства, изучить основные теоремы и методы решения показательных уравнений и неравенств, выбирать и применять конкретный метод к решению показательного уравнения или неравенства в соответствии с типом задачи. Для этого необходимо иметь представление о равносильных преобразованиях, о свойствах степеней, о свойствах показательной функции и владеть умением решать уравнения и неравенства.

§4. Содержание теоретического материала темы «Показательные уравнения и неравенства» в учебниках разных авторов

Если сравнить программы базового и профильного уровней в рамках темы «Показательные уравнения и неравенства», то можно отметить, что различия содержания, обязательных умений учащихся обусловлены различием целей профильного и базового уровня обучения математике.

Требования к знаниям учащихся на базовом уровне: решать показательные уравнения вида $a^{bx+c} = d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a) и неравенства вида $a^x < (>, \leq, \geq) d$ (где d можно представить в виде степени с основанием a); решать простейшие уравнения методом замены; решать несложные показательные уравнения, неравенства и их системы.

Требования к знаниям учащихся на профильном уровне: овладеть основными типами показательных уравнений и неравенств и стандартными методами их решений и применять их при решении задач; свободно определять тип и выбирать метод решения показательных уравнений и неравенств, их систем; решать уравнения и неравенства усложненной структуры; решать уравнения и неравенства смешанного типа, совмещающие в себе тригонометрические, логарифмические и показательную функцию.

Содержание материала темы «Показательные уравнения и неравенства» на базовом и профильном уровнях различается глубиной изучения материала. На изучение показательных уравнений и неравенств на базовом уровне отводится в общей сложности 4-5 часов, в профильном классе – 6-8 часов [15]. Начинают изучение данной темы с показательной функции и ее свойств. Простые показательные уравнения и неравенства изучают в 10 или 11 классе, в зависимости от учебного пособия. Более сложные уравнения, неравенства и системы, содержащие показательные уравнения и неравенства, в 11 классе. При этом рассматриваются только некоторые методы решения уравнений и неравенств.

Таблица 4

Сравнение содержания образовательных программ базового и профильного уровней по теме «Показательные уравнения и неравенства»

<table>
<tr><td rowspan="2">Содержание</td><td colspan="2">Характеристика основных видов деятельности ученика</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень</td><td>Профильный уровень</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Показательная функция, ее свойства и график</td><td colspan="2">- по графикам показательной функции описывать её свойства (монотонность, ограниченность);
- приводить примеры показательной функции (заданной с помощью формулы или графика), обладающей заданными свойствами (например, ограниченности);
- разъяснять смысл перечисленных свойств.;
- применять свойства показательной функции при решении прикладных задач.</td></tr>
<tr><td>- анализировать поведение функций на различных участках области определения;</td><td>- анализировать поведение функций на различных участках области определения, сравнивать скорости возрастания (убывания) функций;
- формулировать определения перечисленных свойств;</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Показательные уравнения и неравенства</td><td colspan="2">- решать простейшие показательные уравнения, неравенства и их системы;</td></tr>
<tr><td></td><td>- решать показательные уравнения, неравенства и их системы повышенного уровня сложности методами разложения на множители, способом замены неизвестного, с использованием свойств функции, решать уравнения, сводящиеся к квадратным, задания с параметром.</td></tr>
</table>

Перед тем, как начать решать показательные уравнения и неравенства, обучающиеся знакомятся с показательной функцией, ее свойствами, графиком. Не имея представления о показательной функции сложно представить изучение материала по решению показательных уравнений и неравенств.

А.Н. Бекаревич [15] считает, что для того чтобы избежать противоречий в школьном курсе математики, достаточно несколько изменить определение показательной функции. Оно может быть сформулировано так: «Показательной функцией от независимого переменного x называют функцию вида $y=a^x$, где a – данное число, причем если x принимает дробные значения с четными знаменателями, то соответствующие значения корня считаются арифметическими».

Таким образом, можно выделить следующие основные подходы к изучению темы «Показательные уравнения и неравенства»:

– классический, использующий показательную функцию как вступление к разъяснению решений показательных уравнений и неравенств;

– прикладной, ориентированный на решение задач, связанных с исследованием функции.

Рассмотрим несколько учебников, которые рекомендованы на данный момент [71].

Таблица 5 представляет перечень учебников, ориентированных на прохождение базового и углубленного уровней [71], который включает рекомендованные учебники за исключением учебников под редакцией В.В. Козлова [36, 37], которые отсутствуют в свободном доступе.

Очевидно, что учебники одного автора, разделенные на курсы 10 и 11 классов необходимо рассматривать целостно.

Рассматривая тему «Показательные уравнения и неравенства» в процессе изучения курса алгебры необходимо выделить следующие вопросы анализа учебников:

– подход к изучению показательной функции;

– описание свойств показательной функции;

– наличие примеров использования вводимых понятий в прикладных областях;

– изучение материала в рамках 10-го или 11-го класса;

– изложение методов решения показательных уравнений и неравенств.

Таблица 5

Список анализируемых учебников

Учебник	Класс	Уровень
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. [35]	10-11	Базовый, углубленный
Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : базовый и профил. уровни / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. А.Б. Жижченко [4]. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : базовый и профил. уровни / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. А.Б. Жижченко [1].	10-11	Базовый, профильный
Муравин Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс [41] Муравин Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс [42]. Муравин Г.К. Муравина О.В. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс [43] Муравин Г.К., Муравина О.В. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс [44]	10 11 10 11	Базовый Базовый Углубленный Углубленный
Пратусевич М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Профильный уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. [53,54] Пратусевич М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Профильный уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. [54]	10-11	Углубленный
Алгебра и начала математического анализа. 10 класс / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [2]. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [6]	10-11	Базовый, профильный
Ч.1.: Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Ч.2.: Мордкович А.Г. и др. под ред. Мордковича А.Г. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровень) (в 2 частях) [3, 4] Ч.1.: Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Ч.2.: Мордкович А.Г. и др. под ред. Мордковича А.Г. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровень) (в 2 частях) [7, 8]	10-11	Базовый, углубленный

После анализа теоретического изложения данной темы в указанных учебниках и методических материалах для учителей можно выделить следующие подходы к изучению показательной функции:

– классический, использующий показательную функцию как вступление к решению показательных уравнений и неравенств;

– прикладной, ориентированный на решение задач, связанных с исследованием функции.

Использование классического подхода к изучению показательной функции отражено в большинстве учебников, среди них учебник следующих авторов: Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Ш.А. Алимова.

При этом показательная функция вводится на базе усвоенного учениками понятия степени с действительным показателем и ее свойств.

Например, в учебнике Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой [35] определение показательной функции вводится как бы из частного случая. «В практике часто используются функции $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 0{,}1^x$ и т.д., т.е. функция вида $y = a^x$, где a - заданное положительное число, x - переменная. Такие функции называются показательными. Это название объясняется тем, что аргументом показательной функции является показатель степени, а основанием степени – заданное число» [35].

Далее приводятся свойства показательной функции, которые формулируются без исследования. Потом демонстрируется пример, связанный с моделированием физического процесса полураспада.

В учебнике Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой для базового и углубленного уровней показательные уравнения и неравенства рассматриваются отдельно, также нет явного выделения методов, но приведено много примеров решений различными методами: методом уравнивания показателей, методом введения новой переменной, методом вынесения общего множителя.

В методических указаниях к учебнику Н.Е. Федовой и М.В. Ткачевой [72] предлагается перед решением показательных уравнений остановиться на основных методах, которые позволяют упрощать уравнение при помощи равносильных преобразований. С такими комментариями структура изложения учебного материала в книгах [1-35] становится более понятной и последовательной. Однако самостоятельное изучение этой главы учебника становится проблематичным из-за отсутствия таких пояснений.

Такие же комментарии можно отнести и к методике изложения решения показательных неравенств в учебниках [1-35].

В учебниках Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина [1,4] также используется классический подход к изучению показательной функции. Применение показательной функции в разных областях науки отражено в примерах учебника Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина [4]. Однако приложения связаны с ростом популяции бактерий, измерением атмосферного давления и расчетом объема газа, находящегося под давлением, и они далеки от реальных потребностей обычного человека, а имеют чисто научный интерес.

В учебнике Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина для базового и углубленного уровня показательные уравнения и неравенства рассматриваются в 10 классе, приведены примеры решений методами уравнивания показателей и введения новой переменной.

Принципиально иное изложение демонстрируют учебники авторов Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [41-44]:

– понятие показательной функции водится вместе с логарифмической функций, что позволяет сразу указать операцию обращения;

– определение показательной функции водится на основании выполненного исследования графика с использованием табулирования функции, что демонстрирует сразу часть свойств показательной функции;

Определение показательной функции вводится на основании обобщения степени с рациональным показателем. «В предыдущей главе вы познакомились с понятием степени с рациональным показателем. Это позволяет нам рассматривать функции вида $y = a^x$, аргумент которых может принимать любые рациональные значения. Аргументом функции $y = a^x$, является показатель степени, поэтому такие функции получили название показательных» [41].

Благодаря построению изложения на основе исследования поведения именно функций, а не решения уравнений в процессе которых используются свойства функции, определение показательной функции у авторов Г.К. Муравина и О.В. Муравиной становится более логичным и понятным.

В учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной в качестве примеров приводятся не только иллюстрации биологических и физических законов, но и практическое применение свойств показательной функции в экономике.

Например, используется следующая задача, связанная с расчетом сложных процентов. «Банковский вклад с начальной суммой в s_0 рублей положили под р% годовых, следовательно, через x лет сумма вырастет до $s_0(1+\frac{p}{100})^x$. Необходимо найти, как возрастет сумма вклада за 10 лет, если начисление проводится в 12% годовых» [43].

В учебнике Г.К. Муравина, О.В. Муравиной 10-го класса в рамках изучения темы «Показательная и логарифмическая функция» рассматривается несколько примеров уравнений и один пример системы методом введения новой переменной. В учебнике 11-го класса данных авторов нет явного выделения показательных уравнений и неравенств. В параграфе рассматриваются разные виды уравнений и неравенств. Явного выделения методов решения также нет.

В учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [41,39,40,44], а также М.Я. Пратусевича [53,54] методика решения показательных уравнений и неравенств отнесена к 11 классу. Однако в учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [41,39,40,44] нет явного выделения именно показательных уравнений, так как принцип построения материала связан с изучением сначала свойств различных функций: степенной, показательной, логарифмической.

В результате, для решения показательных уравнений и неравенств применяются такие же методы как для других уравнений:

- использование равносильных преобразований;

– применение свойств всех известных ученику 11 класса функций.

В учебниках М.Я. Пратусевича [53,54] показательные уравнения и неравенства выделены в отдельный параграф. Рассмотрение материала сразу начинается с введения определения показательного уравнения. Определение вводится также через логарифм. Далее, автор сразу переходит к рассмотрению примеров уравнений с некоторыми указаниями и решению задач. Аналогично рассматриваются и показательные неравенства. Вводится основная теорема о показательных неравенствах, о равносильности переходов к степеням при равенстве оснований. Рассматривается несколько примеров с указаниями автора.

Необходимо также отдельно отметить технику изложения в учебниках С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина за 10-11 класс [2, 6]. Здесь, понятие показательной функции и ее свойства вводятся с использованием понятия предела. Использование показательной функции в прикладных областях в рамках ее изучения не рассматриваются. Показательная функция рассматривается как один из видов функции, основное внимание уделено исследованию поведения функции.

Отдельно стоит отметить технологию построения изложения методов решения уравнений и неравенств в блоке учебников С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина за 10-11 класс [2, 6], которая формируется на общих принципах решения с использованием понятий о равносильном переходе в уравнении и неравенстве.

Кроме этого для профильных классов учебники [2, 6] предлагают также введение понятия равносильности на множествах и изложение специализированных методов:

– умножение уравнений и неравенств на функцию;

– применение преобразований при дополнительных условиях;

– использование свойств функции;

– применение последовательности преобразований для получения равносильного уравнения или неравенства.

В учебниках А.Г. Мордковича, П.В. Семенова [3,7] изучению показательной и логарифмической функции посвящен также отдельный параграф. Понятие показательной функции вводится после рассмотрения нескольких конкретных примеров функций и их подробного исследования. Далее рассматриваются свойства и график данной функции, следуют указания автора на что стоит обращать внимание при работе с данным типом функций. Стоит отметить, что в данном учебном пособии показательная функция рассматривается очень подробно и изобилует примерами.

Таблица 6

Сравнительный анализ учебников 10 класс (окончание)

Учебник	Изложение материала	Изложение методов решения
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. [32]	10 класс – основной материал по теме «Показательные уравнения и неравенства»;	Нет явного выделения методов, на базе примеров без выделения самих методов
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко [1,4]	10 класс – основной материал по теме «Показательные уравнения и неравенства»;	На базе примеров без выделения самих методов, приведены примеры решений методами уравнивания показателей и введения новой переменной
Муравин Г.К. Муравина О.В. Углубленный уровень.[41, 42,43 ,44]	10 класс – показательная функция, простейшие уравнения и неравенства;	На базе примеров с указанием используемых методов решения и выделения принципов их применения в каждом конкретном случае;
М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. Профильный уровень [53,54]	10 класс – показательная функция, простейшие уравнения и неравенства;	На теоретической базе с использованием примеров и указанием методов решения
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [2,6]	10 класс – показательная функция, простейшие уравнения и неравенства, метод замены переменной;	На теоретической базе, включающей общую методику решения уравнений и неравенств с введением понятия равносильного перехода и т.п.

Продолжение Таблицы 7

Сравнительный анализ учебников 11 класс (окончание)

Учебник	Изложение материала	Изложение методов
Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. [32]	11 класс – только повторение; показательная функция вводится на базе понятия степени с действительным показателем; определение показательной функции вводится из частного случая; свойства формулируются без исследования; рассматривается пример прикладной направленности	На базе примеров без выделения самих методов
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко [1,4]	11 класс – только в разделе повторение; используются показательную функцию как вступление к решению показательных уравнений и неравенств; рассматриваются примеры прикладной направленности, но они далеки от реальных потребностей обычного человека	На базе примеров без выделения самих методов
Муравин Г.К. Муравина О.В. Углубленный уровень.[41,42 ,43,44]	11 класс – решение показательных уравнений и неравенств как одного из видов; Определение показательной функции вводится на основании обобщения степени с рациональным показателем; рассматривается практическое применение в различных областях; нет явного выделения именно показательных уравнений и неравенств, рассматриваются как один из видов уравнений неравенств	Применение свойств известных ученику 11 класса функций
М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. Профильный уровень [53,54]	11 класс – решение показательных уравнений и неравенств как одного из видов; показательные уравнения и неравенства выделены в отдельный параграф; определение показательной функции вводится через логарифм; рассматривается несколько примеров показательных уравнений и неравенств с указаниями автора	На теоретической базе с использованием примеров и указанием методов решения
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [2,6]	11 класс – решение уравнений и неравенств как одного из видов; изложение формируется на общих принципах решения с использованием понятий о равносильном переходе в уравнении и неравенстве, рассматривается общая методика решения уравнений и неравенств	На теоретической базе
А.Г. Мордкович, П.В. Семенов и др. под ред. Мордковича [3, 4, 7,8]	11 класс – основной материал; изучению показательной и логарифмической функции посвящен параграф; показательная функция рассматривается очень подробно; показательные уравнения и неравенства изучаются сразу после изучения показательной функции; большое количество примеров	На базе примеров с указанием используемых методов решения; выделены основные методы решения

В учебниках А.Г. Мордковича, П.В. Семенова [3,7] методика решения показательных уравнений и неравенств отнесена к 11 классу, теоретическая часть вынесена в отдельную часть учебного пособия. Показательные уравнения и неравенства изучаются сразу после изучения показательной функции. Представлено большое количество примеров, выделены основные методы решения. Решение примеров сопровождается комментариями автора по выбору метода их решения и важными моментами при решении, что делает разбор более понятным и структурированным. Таблица 6 и таблица 7 описывает результаты анализа выбранных учебников согласно последовательности изложения, описания показательной функции и описания свойств показательной функции. В таблице 6 представлены учебники 10 класса, в таблице 7 представлены учебники 11 класса.

В результате проведенного анализа теоретического материала учебников можно констатировать, что предложенные в федеральном перечне учебники очень разнообразны по представлению теоретического материала и изложению методов решения показательных уравнений и неравенств, а также распределению материала в рамках 10-11 классов.

Можно сделать следующие выводы:

– Первая группа (учебники Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой и др. [35], Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина [1,4]) используют классическую схему изложения, которая подразумевает использование показательной функции для решения показательных уравнений и неравенств. Методика решения уравнений излагается в 10 классе и предполагает только демонстрацию примеров.

– Вторая группа (учебники Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [41, 42, 43, 44, 49, 53, 54] используют исследовательскую схему изложения, которая ориентирована на решение задач, связанных с исследованием функции, формируют основные понятия в 10 классе, а полная методика изложения техники решения показательных уравнений и неравенств переносится в 11 класс.

– Третья группа (учебники С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина [2,6]) предполагают достаточно высокий уровень изложения даже в рамках базового варианта с использованием понятий предела в 10 классе, равносильности преобразований уравнений и неравенств в 11 классе. В этой группе изложены методы решения показательных уравнений и неравенств углубленного уровня. При этом использование этого учебника для базового уровня сомнительно, так как принцип изложения материала предполагает достаточно высокий начальный уровень подготовки школьников.

– Четвертая группа (учебники А.Г. Мордковича, П.В. Семенова и др. под ред. Мордковича [3, 4, 7, 8]) используют схему изложения, которая основана на исследовании функции. Показательная функция и решение показательных уравнений и неравенств относится к 11 классу, теоретический и задачный материал разделен по отдельным частям учебного пособия (учебник, задачник).

§5. Методы решения показательных уравнений

Существует достаточно большое количество методов решения показательных уравнений, которые зависят от конкретного типа показательного уравнения [34].

Таблица 8

Типы простейших показательных уравнений

<table>
<tr><th>Номер</th><th>Тип уравнения</th><th colspan="3">Метод решения</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$</td><td colspan="3">$f_1(x) = f_2(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">$a^{f(x)} = b$</td><td>$b = a$</td><td>$b \neq a$,
$b > 0$</td><td>$b \neq a$,
$b \neq a$</td></tr>
<tr><td>$a^{f(x)} = a^1$,
$f(x) = 1$</td><td>$f(x) = log_a b$</td><td>Решений нет</td></tr>
</table>

Все простейшие показательные уравнения могут быть сведены в Таблицу 8. Приведем несколько примеров задач.

Задача 5.1. Решить уравнение $3^{4\cdot x-5} = 3^{x+4}$

Решение: $3^{4\cdot x-5} = 3^{x+4} \Leftrightarrow 4\cdot x - 5 = x + 4 \Leftrightarrow 3\cdot x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$

Задача 5.2. Решить уравнение $4^{x-3} = 4.$

Решение: $x - 3 = 1; x = 4.$

Задача 5.3. Решить уравнение $2^{x-4} = 3.$

В соответствии с данными, приведенными в таблице 8: $2^{x-4} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4 = log_2 3 \Leftrightarrow x = log_2 3 + 4 \Leftrightarrow x = log_2 3 + log_2 16 \Leftrightarrow x = log_2 48.$

Задача 5.4. Решить уравнение $7^{x^2-3\cdot x} = -7.$

Решение: $7^{x^2-3\cdot x} = -7$, корней (решений) нет, поскольку $7^{x^2-3\cdot x} > 0$ для $x \in R.$

Существует несколько методов, позволяющих выполнить преобразование показательных уравнений к простейшим [34]. Одним из таких методов является метод уравниваний оснований. Далее следуют несколько примеров, иллюстрирующих использование данного метода:

Задача 5.5. Решить уравнение $27\cdot 3^{4\cdot x-9}\cdot 9^{x+1} = 0.$

Решение: $27\cdot 3^{4\cdot x-9} - 9^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^3\cdot 3^{4\cdot x-9} - (3^2)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{3+(4\cdot x-9)} - 3^{2\cdot(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 3^{4\cdot x-6} - 3^{2\cdot x+2} = 0 \Leftrightarrow \quad 3^{4\cdot x-6} = 3^{2\cdot x+2} \Leftrightarrow$

$4\cdot x - 6 = 2\cdot x + 2 \Leftrightarrow 2\cdot x = 8 \Leftrightarrow x = 4$

Задача 5.6. Решить уравнение $2^{2\cdot x}\cdot 3^x\cdot 5^x - 60^{4\cdot x-15} = 0.$

Решение данного уравнения следующее: $2^{2\cdot x}\cdot 3^x\cdot 5^x - 60^{4\cdot x-15} = 0 \Leftrightarrow$ $(2^2)^x\cdot 3^x\cdot 5^x = 60^{4\cdot x-15} \Leftrightarrow 4^x\cdot 3^x\cdot 5^x = 60^{4\cdot x-15} \Leftrightarrow (4\cdot 3\cdot 5)^x =$ $60^{4\cdot x-15} \Leftrightarrow 60^x = 60^{4\cdot x-15} \Leftrightarrow x = 4\cdot x - 15 \Leftrightarrow 3\cdot x = 15 \Leftrightarrow x = 5$

Еще один метод решения показательных уравнений – это уравнения, которые решаются путем разложения на множители. Данный метод также целесообразно проиллюстрировать несколькими примерами.

Задача 5.7. Решить уравнение $x\cdot 2^x = 2\cdot 2^x + 8\cdot x - 16.$

Решение данного уравнение следующее: $x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x + 8 \cdot x - 16 \Leftrightarrow x \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 8 \cdot (x-2) \Leftrightarrow (x-2) \cdot (2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2^x - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x = 2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$.

Задача 5.8. Решить уравнение $5^{2 \cdot x} - 7^x - 5^{2 \cdot x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$.

Решение данного уравнения:

$$5^{2 \cdot x} - 7^x - 5^{2 \cdot x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0 \Leftrightarrow (5^{2 \cdot x} - 7^x) - (5^{2 \cdot x} \cdot 35 - 7^x \cdot 35)$$

$$\Leftrightarrow (5^{2 \cdot x} - 7^x) - 35 \cdot (5^{2 \cdot x} - 7^x) = 0 \Leftrightarrow (5^{2 \cdot x} - 7^x) \cdot (1 - 35) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5^{2 \cdot x} - 7^x) \cdot (-34) = 0 \Leftrightarrow 5^{2 \cdot x} - 7^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5^2)^x = 7^x \Leftrightarrow \frac{25^x}{7^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{25}{7}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{25}{7}\right)^x = \left(\frac{25}{7}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$$

Еще один метод решения показательных уравнений связан с уравнениями, которые при помощи подстановки $\alpha^{f(x)} = t$, $t > 0$ могут быть преобразованы к квадратным уравнениям (или к уравнениям, имеющим более высокие степени).

Пусть $A \cdot \alpha^{2 \cdot f(x)} + B \cdot \alpha^{f(x)} + C = 0$, где $A,\ B,\ C$ являются некоторыми числами. Необходимо выполнить замену $\alpha^{f(x)} = t,\ t > 0$, тогда $A \cdot t^2 + B \cdot t + +C = 0$. После решения полученного уравнения находятся значения t, учитывается условие $t > 0$, после чего осуществляется возврат к простейшему показательному уравнению $\alpha^{f(x)} = t$. Его решение и является решением исходного показательного уравнения. Далее следуют несколько примеров, иллюстрирующих использование этого метода.

Задача 5.9. Решить уравнение $2^{2+x} - 2^{2-x} = 5$.

Решение данного уравнения начинается с определенных преобразований: $2^{2+x} - 2^{2-x} = 5 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^x - \frac{2^2}{2^x} = 15 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 4 = 15 \cdot 2^x$. Далее производится замена: $t = 2^x,\ t > 0$. В результате получается уравнение: $4 \cdot t^2 - 4 = 15 \cdot t \Leftrightarrow 4 \cdot t^2 - 15 \cdot t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$. Корень $t = -\frac{1}{4}$

не подходит, так как не соответствует условию $t > 0$. Далее производится возврат к переменной x: $2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Задача 5.10. Решить уравнение $5^{2\cdot x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$.

Решение осуществляется аналогично с предыдущим примером: $5^{2\cdot x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3 \Leftrightarrow 5^{2\cdot(x-2)+1} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3 \Leftrightarrow 5 \cdot (5^{x-2})^2 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$.

Выполняется замена: $5^{x-2} = t,\ \ t > 0$. Тогда: $(5^{x-2})^2 = t^2$. Получается уравнение: $5 \cdot t^2 - 2 \cdot t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{3}{5} \\ t = 1 \end{array}\right.$. Первый корень не подходит, так как не соответствует условию $t > 0$. Возвращаясь к переменной x: $5^{x-2} =$ $= 1 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Отдельный класс представляют собой методы решения показательных уравнений, левую часть которых можно представить в виде:

$A \cdot a^{n\cdot x} + B \cdot a^{k\cdot x} \cdot b^{m\cdot x} + C \cdot b^{n\cdot x}$, где $k,\ m \in N,\ k + m = n$.

Чтобы правильно решить уравнение подобного типа необходимо выполнить деление обеих частей уравнения либо на $a^{n\cdot x}$, либо на $b^{n\cdot x}$, после чего исходное уравнение преобразуется к уравнению, требующего замены переменной. Примеры, представленные ниже, иллюстрируют использование данного метода.

Задача 5.11. Решить уравнение $2 \cdot 2^{2\cdot x} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 3^{2\cdot x} = 0$.

Решение данного уравнения: $2 \cdot 2^{2\cdot x} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 3^{2\cdot x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2\cdot x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2\cdot x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2^{2\cdot x}}{3^{2\cdot x}} - \frac{5\cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2\cdot x}} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 =$ $= 0$. Выполняется замена переменной: $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x,\ t > 0$. Тогда получается уравнение: $2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = 1 \end{array}\right.$. Оба найденных значения соответствуют условию $t > 0$. Далее осуществляется возврат к переменной x: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$. Именно эти два найденных значения и являются корнями исходного уравнения.

Задача 5.12. Решить уравнение $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

Решение данного уравнения следующее: $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0 \Leftrightarrow (2^3)^x + $ $+(2 \cdot 3^2)^x - 2 \cdot (3^3)^x = 0 \Leftrightarrow 2^{3 \cdot x} + 2^x \cdot 3^{2 \cdot x} - 2 \cdot 3^{3 \cdot x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2^{3 \cdot x}}{3^{3 \cdot x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2 \cdot x}}{3^{3 \cdot x}} -$ $-2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \cdot x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$. Выполняется замена: $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $t > 0$. Получается уравнение: $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t^3 - 1) + (t - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 1) \cdot$ $(t^2 + t + 1) + (t - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 1) \cdot (t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t^2 + t + 2 = 0 \\ D = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ $(t > 0)$. После возврата к переменной x уравнение приобретает вид: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$.

К рассматриваемому типу уравнений можно отнести также уравнения, левая часть которых представляет из себя: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot b^{n \cdot x} + C$, где $A,\ B,\ C$ являются некоторыми числами, причем $a \cdot b = 1$.

Для решения уравнений такого типа необходимо выполнить подстановку: $a^{n \cdot x} = t$, тогда: $b^{n \cdot x} = \frac{1}{t}$. Следующий пример иллюстрирует все вышесказанное.

Задача 5.13. Решить уравнение $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = 4$.

При решении данного уравнения следует вначале отметить, что произведение оснований степени соответствует единице:$\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot$ $\left(2 - \sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1$. Следовательно, появляется возможность введения новой переменной: $t == \left(2 + \sqrt{3}\right)^x$, тогда: $\left(2 - \sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{t}$, причем $t > 0$. Получается следующее уравнение: $t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4 \cdot t + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} t = 2 + \sqrt{3} \\ t = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right.$. Оба корня соответствуют условию $t > 0$. Далее осуществляется возврат к переменной

$$x = \left[\begin{array}{l} \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 2 + \sqrt{3} \\ \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = \left(2 + \sqrt{3}\right)^1 \\ \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \left(2+\sqrt{3}\right)^{x} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$. Именно эти два значения и являются корнями исходного уравнения.

Другим классом являются уравнения, которые имеют вид: $A \cdot a^{m} = B \cdot b^{m}$. Для корректного решения необходимым является деление обеих частей уравнения либо на a^{m}, либо на b^{m}. В результате осуществляется переход к простейшему уравнению, что показывают примеры, приведенные ниже.

Задача 5.14. Решить уравнение $7^{x} = 5^{x}$.

Решение данного уравнения: $7^{x} = 5^{x} \Leftrightarrow \frac{7^{x}}{5^{x}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{x} = \left(\frac{7}{5}\right)^{0} \Leftrightarrow x = 0$.

Задача 5.15. Решить уравнение $4^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$.

Алгоритм решения данного уравнения выглядит следующим образом: $4^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} \Leftrightarrow 4^{x-2} = 3^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow x - 2 =$

$= 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Еще один метод решения показательных уравнений в основе своей использует свойство монотонности показательной функции. Нижеследующие примеры раскрывают особенности его использования.

Задача 5.16. Решить уравнение $5^{x} + 7^{x} = 12^{x}$.

Для решения этого уравнения необходимо заметить, что при $x = 1$ уравнение превращается в тождество. Поэтому $x = 1$ является корнем уравнения. Далее уравнение переписывается в виде: $\left(\frac{5}{12}\right)^{x} + \left(\frac{7}{12}\right)^{x} = 1$. Поскольку при основании, являющемся меньше единицы, показательная функция монотонно убывает на R, то при $x < 1$ левая часть последнего уравнения больше единицы, другими словами: $\left(\frac{5}{12}\right)^{x} + \left(\frac{7}{12}\right)^{x} > 1$. При $x > 1$ значение левой части будет меньше единицы, то есть: $\left(\frac{5}{12}\right)^{x} + \left(\frac{7}{12}\right)^{x} < 1$. Следовательно, другие корни, кроме $x = 1$, у равнения $5^{x} + 7^{x} = 12^{x}$ отсутствуют.

Задача 5.17. Решить уравнение $2^{x} + 3^{x} = 5^{x}$.

Данное уравнение, очевидно, является тождеством при $x = 1$. Далее необходимо переписать уравнение в виде: $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$. При основании, которое меньше единицы, показательная функция является убывающей на R. Следовательно, при $x < 1$: $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x > 1$, а при $x > 1$: $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < 1$. Значит, другие корни, помимо $x = 1$, у уравнения $2^x + 3^x = 5^x$ отсутствуют.

Большое распространение получил графический способ решения показательных уравнений. Особенно целесообразным является его использование к уравнениям вида: $a^{\phi(x)} = f(x)$. Для графического решения уравнения подобного вида необходимо осуществить построение графиков функций $y = a^{\phi(x)}$ и $y = f(x)$ в единой системе координат и найти точки пересечения этих графиков (если они существуют). Именно абсциссы этих точек и будут являться корнями исходного уравнения. Все вышесказанное иллюстрируется приведенными ниже примерами.

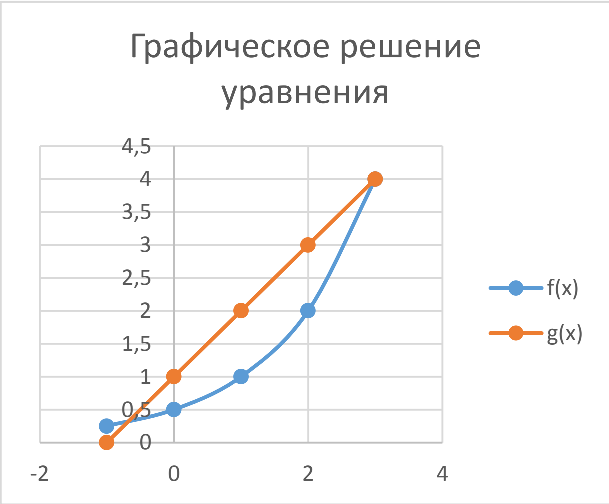
Задача 5.18. Решить уравнение $2^{x-1} = x + 1$.

Решение уравнения начинается с рассмотрения двух функций: $f(x) = 2^{x-1}$, $g(x) = x + 1$. График функции $f(x) = 2^{x-1}$ представляет из себя кривую, которая располагается в верхней полуплоскости, график функции $g(x) = x + 1$ - прямую. Необходимо задать таблицы значений данных функций (таблица 9).

Таблица 9

Таблица значений функций $f(x)$ и $g(x)$

x	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^{x-1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
x	0			3	
$g(x) = x + 1$	1			4	



Графическое решение данного уравнения представлено на рис. 5.

Из графика видно, что у кривой и прямой существуют две точки пересечения. В соответствии с графиком находятся абсциссы этих точек: $x_1 = 3$ и $x_2 \approx -\frac{3}{4}$.

Рис. 5. Графическое решение уравнения $2^{x-1} = x + 1$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня, причем корень $x_1 = 3$ является точным корнем уравнения, поскольку при подстановке в уравнение обращает его в тождество: $2^{3-1} = 3 + 1 \Leftrightarrow 4 = 4$. Второй корень уравнения является приближенным.

В этом и заключается основной недостаток графического метода решения показательных уравнений: некоторые корни могут быть найдены только с определенной погрешностью, то есть приближенно.

Задача 5.19. Решить уравнение $2^{-x} = \frac{1}{2} \cdot x$.

Решение уравнения начинается с рассмотрения двух функций: $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x$. Используя свойство степени можно преобразовать первую из функций: $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Функция $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ является показательной по основанию $\frac{1}{2}$ и ее график представляет из себя кривую, которая располагается в верхней полуплоскости. Функция $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x$ является прямой пропорциональностью, ее график – прямая, которая проходит через точку (0;0). Необходимо задать таблицы значений данных функций (таблица 10).

Таблица 10

Таблица значений функций $f(x)$ и $g(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^{x-1}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x	1			4		
$g(x) = x + 1$	$\frac{1}{2}$			2		

Графическое решение данного уравнения представлено на рисунке 6. Из графика очевидно, что существует только одна точка пересечения кривой и прямой, и именно x=1 является единственным корнем исходного уравнения.

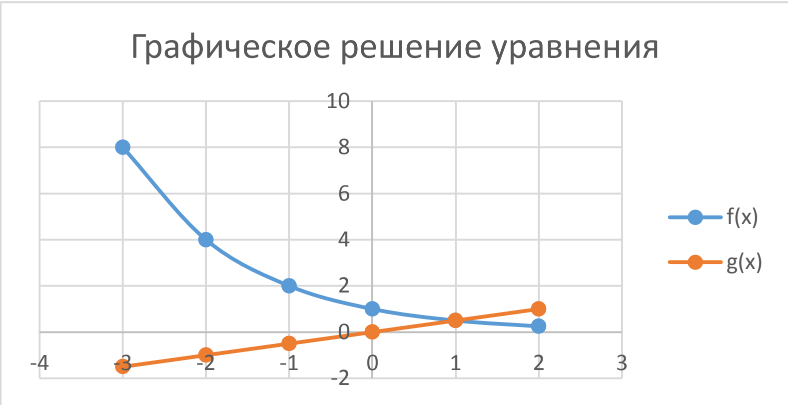


Рис. 6. Графическое решение уравнения $2^{-x} = \frac{1}{2}$x.

В данном параграфе рассмотрены следующие типы показательных уравнений:

1. $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$;
2. $a^{f(x)} = b$;
3. Уравнения, которые при помощи подстановки $\alpha^{f(x)} = t,\ \ t > 0$ могут быть преобразованы к квадратным уравнениям;
4. Уравнений, левую часть которых можно представить в виде: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot a^{k \cdot x} \cdot b^{m \cdot x} + C \cdot b^{n \cdot x}$, где $k,\ m \in N$, $k + m = n$;
5. Уравнения, левая часть которых представляет из себя: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot b^{n \cdot x} + C$, где $A,\ B,\ C$ являются некоторыми числами, причем $a \cdot b = 1$;
6. Уравнения, которые имеют вид: $A \cdot a^m = B \cdot b^m$;
7. Уравнениям вида: $a^{\phi(x)} = f(x)$.

Рассмотрены методы решения показательных уравнений, которые зависят от конкретного типа показательного уравнения и включают сведение к одному основанию или степени, выполнение замен, приводящих к известным видам уравнений (линейным, квадратичным), использование свойств показательной функции:

– метод уравниваний оснований;

– метод разложения на множители;

– метод подстановки $\alpha^{f(x)} = t,\ t > 0$, с помощью данного метода уравнение может быть преобразовано к квадратному уравнению;

– деление обеих частей уравнения либо на $a^{n \cdot x}$, либо на $b^{n \cdot x}$для уравнений вида: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot a^{k \cdot x} \cdot b^{m \cdot x} + C \cdot b^{n \cdot x}$, где $k,\ m \in N, k + m = n$;

– деление обеих частей уравнения либо на a^m, либо на b^m для уравнений вида: $A \cdot a^m = B \cdot b^m$;

– графический метод решения показательных уравнений (особенно целесообразным является его использование к уравнениям вида: $a^{\phi(x)} = f(x)$.

Рассмотрим задачный материал в учебниках разных авторов.

В учебнике Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой и др. [35] задачный материал можно разделить на блоки. Первый блок уравнений привязан к простейшим операциям со степенью и использованием сведения к одному основанию. Представители данного блока: $4^{x-1} = 1$; $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$.

Такие уравнения сводятся к простейшим путем несложных преобразований, опирающихся на свойства степени и показательной функции.

Второй блок уравнений представлен вариантами, которые сводятся к квадратному уравнению путем замены или равносильного преобразования уравнения. Варианты условий: $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 = 0$; $3^{x^2+x-12} = 1$.

Третий блок уравнений предполагает усложнение самой структуры уравнения и включения в выражение иррациональностей и модулей. Этот блок ориентирован на усвоение необходимости учета области определения функции, а также применения методов, основанных на разбиение координатной прямой на интервалы и решение уравнения с учетом изменения значений функции на каждом из интервалов.

Примеры таких уравнений: $3^{\sqrt{x-6}} = 3^x$; $3^{|x+1|} = 3^{2-|x|}$.

Четвертый блок, содержащий примеры на доказательство связан с использованием изученных свойств показательной функции.

В учебниках Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина под ред. А.Б. Жижченко [1,4] структура задачного материала представлена аналогичным образом. Сначала рассматриваются простейшие уравнения, решаемые с помощью элементарных преобразования со степенями и приведению к одинаковому основанию. Далее, представлены уравнения, сводящиеся к квадратным, методом замены и задачи, где усложняется сама структура уравнений. И, наконец, задачи на доказательство с использованием свойств показательной функции.

В учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [41-44], а также М.Я. Пратусевича [53,54] уравнения отдельно отнесены к 11 классу, поэтому в рамках учебника 10 класса решаются простые показательные уравнения типа: $2^x = 0{,}25$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$.

А также подобные второму и третьему блокам, сводимые к квадратным заменой или равносильным преобразованием: $2^x - 13 \cdot 2^{\frac{x}{x-2}} - 12 = 0$; $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 = 0$.

Показательные уравнения с модулем и иррациональностями в [40] не представлены, вместо этого делается акцент на свойства показательной функции и предлагается построение графика функций: $y = 3^{|x|}$; $y = 1,5^{x+1}$.

В результате уже в 11 классе решаются следующие уравнения, совмещающие в себе тригонометрические, логарифмические и показательную функции: $sin\,\pi\,x + cos\,\pi\,x = 2^{log_3\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{49}{16}}}$; $cos\,2^x -$ $-2tg^2 2^{x-1} + 2 = 0$; $\sqrt{8\cdot 3^{x+2} - 23} = 2 - 3^{x+1}$ [42]; $2^{sin^2 x} + 2^{cos^2 x} = 3$ [54].

Методика группировки задачного материала в учебниках С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина [2,6] аналогична вышеизложенной, предполагающей решение простых показательных уравнений в 10 классе и использование знаний о свойствах показательной функции.

В 11 классе задачный материал соответствует теоретическому и предполагает применение общего подхода ко всем видам уравнений, следовательно, и задачный материал не распределен по видам уравнений.

Примеры, которые демонстрируют сложность решаемых уравнений [6]: $(x^2 - 8^x + 2^x - 1)^7 = (x^2 - 2^x - 1)^7$; $5^{x+1} = 2^{x+2}$; $\begin{cases} x^{2y^2-1} = 5, \\ x^{y^2+2} = 125 \end{cases}$.

Для углубленного изучения предлагаются более сложные варианты заданий: $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$; $(4^{5-x} - 2^{x-1})\,log_3 x = 0$.

Задачный материал в учебных пособиях А.Г. Мордковича, П.В. Семенова и др. под ред. Мордковича [3,4,7,8] отнесен в отдельные задачники, которые являются 2-й частью учебных пособий. Стоит отметить, что наличие отдельного задачника позволило авторам выстроить полноценную по объему и содержанию систему упражнений для работы в классе, дома, а также для организации повторения. В пособии представлены задачи трех уровней сложности и отмечены отдельными значками. В раздел «Дополнительные задачи» включены задания с нестандартными формулировками, идеи которых навеяны материалами ЕГЭ. Все задачи по данному материалу, в соответствие с теоретическим материалом, включены в задачник 11-го класса. Задачи также разделены на исследование и построение показательной функции, решение показательных уравнений, решение показательных неравенств. Представлены задания на решение уравнений и неравенств с помощью различных методов, задания с параметром, системы.

§6. Методы решения показательных неравенств

Все показательные простейшие неравенства могут быть сведены в таблицу.

Таблица 11

Типы простейших показательных неравенств

Номер	Тип неравенства	Метод решения
1	$a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f_1(x) > f_2(x)$, $a > 1$ - сохранение знака; $f_1(x) < f_2(x)$, $0 < a < 1$ - изменение знака на противоположный
2	$a^{f(x)} > b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$	$f(x) > log_a b$, $a > 1$ - сохранение знака; $f(x) < log_a b$, $0 < a < 1$ - изменение знака на противоположный

Для наглядности ниже приведено несколько примеров простейших неравенств.

Задача 6.1. Решить неравенство $5^{3\cdot x+1} > 5^{7-x}$.. Поскольку основание степени $5 > 1$, то показательную функцию $y = 5^t$ можно смело считать возрастающей, следовательно, большему значению функции соответствует большее значение аргумента, другими словами: $5^{3\cdot x+1} > 5^{7-x} \Leftrightarrow 3 \cdot x + 1 >$ $> 7 - x \Leftrightarrow 4 \cdot x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. Таким образом результат решения неравенства – интервал $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Задача 6.2. Решить неравенство $(0{,}3)^{2\cdot x} \leq 7$.. Применив основное логарифмическое тождество ($a^{log_a b} = b, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \ \ b > 0$), можно представить правую часть неравенства в виде $7 = 0{,}3^{log_{0,3} 7}$, тогда решение исходного неравенства выглядит следующим образом: $(0{,}3)^{2\cdot x} \leq 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0{,}3)^{2\cdot x} \leq (0{,}3)^{log_{0,3} 7} \Leftrightarrow 2 \cdot x \geq log_{0,3} 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \cdot log_{0,3} 7 \Leftrightarrow x \geq log_{0,3} 7^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \geq log_{0,3} \sqrt{7}$. Необходимо упомянуть о том, что в ходе решения данного неравенства было применено свойство убывания показательной функции

$y = (0{,}3)^t$. Следовательно, результат решения неравенства – интервал $x \in log_{0,3}\sqrt{7}\,; +\infty)$.

Задача 6.3. Решить неравенство $2^{4-x^2} < -9$.

Это неравенство не имеет решений, поскольку $2^{4-x^2} > 0$ для любого значения $x \in R$.

Задача 6.4. Решить неравенство $6^{\sqrt{9-x^2}} > -3$.

Областью определения данного неравенства является выражение: $9 - x^2 \geq 0$. Поскольку правая часть неравенства является отрицательной, а $6^{\sqrt{9-x^2}} > 0$ при любом значении x, принадлежащем области определения, то решением неравенства $6^{\sqrt{9-x^2}} > -3$ будет решение неравенства $9 - x^2 > 0$. $9 - x^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3) \cdot (x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$. Таким образом, решением исходного неравенства будет интервал $x \in [-3;\ 3]$.

Решение большей части произвольных показательных неравенств можно свести к решению показательных неравенств.

Существует достаточно большое число методов решения показательных неравенств, соответствующих типу неравенства. В основном, они аналогичны методам решения показательных уравнений. Одним из методов является метод уравнивания оснований. Ниже представлены примеры реализации данного метода.

Задача 6.5. Решить неравенство $0,5^{2^{\frac{1}{x}}} \leq 0{,}0625$.

Область определения данного неравенства: $x \neq 0$. Поскольку $0{,}0625 = 0,5^4$, то исходное неравенство может быть записано в виде: $0,5^{2^{\frac{1}{x}}} \leq 0,5^4$.

Показательная функция $y = 0,5^t$, $(0 < 0{,}5 < 1)$ монотонно убывает на R, следовательно меньшему значению функции ставится в соответствие большее значение аргумента, то есть: $2^{\frac{1}{x}} \geq 4$. Однако $4 = 2^2$, тогда $2^{\frac{1}{x}} \geq 2^2$. В то же время показательная функция $y = 2^t$, $(2 > 1)$ монотонно возрастает на R, следовательно большему значению функции ставится в соответствие большее значение аргумента. Учитывая все приведенные рассуждения, необходимо решить следующее неравенство $\frac{1}{x} \geq 2$: $\frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1-2\cdot x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-2\cdot x \geq 0\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}1-2\cdot x \leq 0\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cdot x \leq 1\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}2\cdot x \geq 1\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq \frac{1}{2}\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x \geq \frac{1}{2}\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}.$ Следовательно,

решением исходного неравенства будет интервал $x \in 0;\ \frac{1}{2}$.

Задача 6.6. Решить неравенство $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3} \cdot (10^{3-x})^2$.

Область определения неравенства: $x \in R$. $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3} \cdot (10^{3-x})^2 \Leftrightarrow$ $(2\cdot 5)^{x^2} < 10^{-3} \cdot 10^{6-2\cdot x} \Leftrightarrow$ $10^{x^2} < 10^{-3+(6-2\cdot x)} \Leftrightarrow 10^{x^2} < 10^{3-2\cdot x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 < 3-2\cdot x \Leftrightarrow x^2+2\cdot x-3<0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-1)<0 \Leftrightarrow -3<x<$ <1.

Таким образом, решением исходного неравенства будет интервал $x \in (-3;\ 1)$.

В основе еще одного метода решения показательных неравенств лежит разложение на множители. Ниже представлено несколько примеров реализации этого метода.

Задача 6.7. Решить неравенство $x \cdot 3^x \leq 2\cdot 3^x + 27\cdot x - 54$.

Область определения неравенства: $x \in R$. $x \cdot 3^x \leq 2\cdot 3^x + 27\cdot x - 54 \Leftrightarrow$ $x\cdot 3^x - 2\cdot 3^x - 27\cdot x + 54 \leq 0 \Leftrightarrow (x\cdot 3^x - 2\cdot 3^x) - (27\cdot x - 54) \leq 0 \Leftrightarrow$ $3^x\cdot(x-2) - 27\cdot(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(3^x-27) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2 \leq 0\\ 3^x-27 \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-2 \geq 0\\ 3^x-27 \leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq 2\\ 3^x \geq 27\end{cases}\\ \begin{cases}x \geq 2\\ 3^x \leq 27\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq 2\\ 3^x \geq 3^3\end{cases}\\ \begin{cases}x \geq 2\\ 3^x \leq 3^3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq 2\\ x \geq 3\end{cases}\\ \begin{cases}x \geq 2\\ x \leq 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$

Следовательно, решением исходного неравенства будет интервал $x \in [2;\ 3]$.

Задача 6.8. Решить неравенство $3\cdot 2^{x+1} + 2\cdot 5^{x-2} > 5^x + 2^{x-2}$.

Решение данного неравенства: $3\cdot 2^{x+1} + 2\cdot 5^{x-2} > 5^x + 2^{x-2} \Leftrightarrow 3\cdot 2^{x+1} +$ $+2\cdot 5^{x-2} - 5^x - 2^{x-2} > 0 \Leftrightarrow (3\cdot 2^{x+1} - 2^{x-2}) + (2\cdot 5^{x-2} - 5^x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 02^{x-2} \cdot (3 \cdot 2^3 - 1) + 5^{x-2} \cdot (2 - 5^2) > 0 \Leftrightarrow 23 \cdot (2^{x-2} - 5^{x-2}) > 0 \Leftrightarrow$ $2^{x-2} - 5^{x-2} > 0 \Leftrightarrow 2^{x-2} > 5^{x-2} \Leftrightarrow \frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Leftrightarrow x - 2 <$

$< 0 \Leftrightarrow x < 2$. Таким образом, решением исходного неравенства будет интервал $x \in (-\infty;\ 2)$.

Еще одним распространенным методом решения показательных неравенств является метод введения вспомогательной переменной.

Неравенство можно привести к квадратному или другому понятному виду, используя данную подстановку $t = a^{f(x)}$, где $t > 0$. Полученное неравенство уже будет решаться относительно переменной t. После нахождения значений t, необходимо сделать обратную замену и найти решения относительно x. Приведем примеры решений неравенств описанным методом.

Задача 6.9. Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$.

Область определения неравенства: $x \in R$. Выполняется замена переменной: $t = 4^x$, $t > 0$. Тогда неравенство приобретает вид: $t^2 + t - 2 > 0 \Leftrightarrow (t + 2) \cdot (t - 1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t + 2 > 0 \\ t - 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t + 2 < 0 \\ t - 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > -2 \\ t > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t < -2 \\ t < -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 1 \\ t < -2 \end{array}\right.$.

Далее выполняется возврат к переменной x. Получаются два неравенства:

1. $4^x > 1 \Leftrightarrow 4^x > 4^0 \Leftrightarrow x > 0$.
2. $4^x < -2$ - решений нет, поскольку $4^x > 0$ для $\forall x \in R$.

Это означает, что решением исходного неравенства будет интервал $x \in (0;\ +\infty)$

Задача 6.10. Решить неравенство $4 \cdot (9^x - 3^x) < \frac{5}{3^{x-2}} + 3^{x+1}$.

Данное неравенство решается следующим образом: $4 \cdot (9^x - 3^x) < \frac{5}{3^{x-2}} + {}$ $+ 3^{x+1} \Leftrightarrow 4 \cdot (3^{2 \cdot x} - 3^x) < \frac{5}{3^x \cdot 3^{-2}} + 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow 4 \cdot ((3^x)^2 - 3^x) < \frac{5 \cdot 3^2}{3^x} + 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow$ $4 \cdot ((3^x)^2 - 3^x) < \frac{45}{3^x} + 3 \cdot 3^x$. Далее выполняется замена переменной: $t = 3^x$,

$t > 0$. Неравенство приобретает вид: $4 \cdot (t^2 - t) < \frac{45}{t} + 3 \cdot t \Leftrightarrow \frac{4 \cdot t^3 - 4 \cdot t^2 - 3 \cdot t^2 - 45}{t} < 0 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot t^3 - 7 \cdot t^2 - 45}{t} < 0 \Leftrightarrow$ $\frac{4 \cdot t^3 - 12 \cdot t^2 + 5 \cdot t^2 - 45}{t} < 0 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot t^2 \cdot (t-3) + 5 \cdot (t-3) \cdot (t+3)}{t} > 0 \Leftrightarrow \frac{(t-3) \cdot (4 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 15)}{t} > 0$. После этого необходимо выделить из многочлена $4 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 15$ квадрат двучлена: $4 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 15 = \left((2 \cdot t)^2 + 2 \cdot 2 \cdot t \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 15 =$ $= \left(2 \cdot t + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + 15 = \left(2 \cdot t + \frac{5}{4}\right)^2 + 13\frac{7}{16}$, другими словами $4 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 15 > 0$ для любого $t > 0$. Следовательно, дробь: $\frac{(t-3) \cdot (4 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 15)}{t} > 0$ если $t - 3 > 0 \Leftrightarrow t > 3$, однако $t = 3^x$, тогда: $3^x > 3 \Leftrightarrow$ $3^x > 3^1 \Leftrightarrow x > 1$. Таким образом, решением исходного неравенства будет интервал $x \in (1;\ +\infty)$.

Отдельный класс представляют собой методы решения показательных неравенств, левую часть которых можно представить в виде: $A \cdot a^{m \cdot x} + B \cdot a^{k \cdot x} \cdot b^{n \cdot x} + C \cdot b^{m \cdot x}$, где $k,\ m \in N, k + n = m$.

Для решения неравенств такого типа необходимо выполнить деление обеих частей на $a^{m \cdot x}$ или на $b^{n \cdot x}$. Ниже приведены два примера использования данного метода решения показательных неравенств.

Задача 6.11. Решить неравенство $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$. Решение выглядит следующим образом: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 \cdot 4^{2 \cdot x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{2 \cdot x} < 0$. Далее требуется выполнить деление обеих частей последнего неравенства на $9^{2 \cdot x}$, $9^{2 \cdot x} \neq 0,\ 9^{2 \cdot x} > 0$ для $\forall x \in R$. Таким образом получается неравенство: $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2 \cdot x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 < 0$. После этого вводится новая переменная: $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x$, $t > 0$, тогда: $3 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 <$ $< 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (t-1) \cdot \left(t - \frac{2}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < t < 1$. Выполняется обратный переход к переменной x: $\frac{2}{3} < \left(\frac{4}{9}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{4}{9}\right)^x < \left(\frac{4}{9}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$. Следовательно, решением исходного неравенства будет интервал $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Задача 6.12. Решить неравенство $9 \cdot 7^x - 49 \cdot 3^x > 0$.

Алгоритм решения данного неравенства следующий: $9 \cdot 7^x - 49 \cdot 3^x > 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 7^x > 49 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{9 \cdot 7^x}{49 \cdot 3^x} > 1 \Leftrightarrow \frac{3^2 \cdot 7^x}{7^2 \cdot 3^x} > 1 \Leftrightarrow \frac{7^{x-2}}{3^{x-2}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^{x-2} > \left(\frac{7}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x - -2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Таким образом, решением исходного неравенства будет интервал $x \in (2;\ +\infty)$.

Как и при решении показательных уравнений, нельзя не упомянуть о таком распространенном методе решения показательных неравенств, как графический.

Решением неравенства будут значения аргумента, при которых значения одной функции будут больше (меньше), в зависимости от знака неравенства, значений другой функции. Для нахождения таких значений данным методом, необходимо построить графики функций в единой системе координат. Рассмотрим примеры использования данного метода.

Задача 6.13. Решить неравенство $3^x > 11 - x$.

Рассмотрим функции: $f(x) = 3^x$ и $g(x) = 11 - x$, $D(f) = R$, $D(g) = R$. $f(x) = 3^x$- показательная функция по основанию «3». $g(x) = 11 - x$ - линейная функция, графиком является прямая.

Далее выполняется построение графиков этих функций в единой системе координат с последующим выяснением, при каких значениях переменной x справедливо неравенство $f(x) > g(x)$ (рис. 7). Следует рассмотреть два промежутка $(-\infty;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$. При $x \in (-\infty;\ 2)$, $f(x) < g(x)$. При $x \in (2;\ +\infty)$, $f(x) > g(x)$.

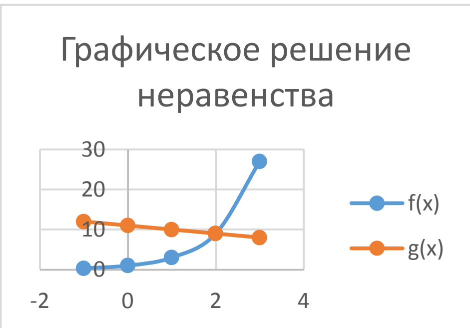


Рис.7. Графическое решение неравенства $f(x) > g(x)$.

Следовательно, решением неравенства $3^x > 11 - x$ является интервал $x \in (2;\ +\infty)$.

Задача 6.14. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le -\frac{3}{x}$.

Рассмотрим функции: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $g(x) = -\frac{3}{x}$, $D(f) = R$, $D(g) = R$, $x \neq 0$.

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ - показательная функция по основанию «$\frac{1}{3}$». $g(x) = -\frac{3}{x}$ - гипербола, которая расположена во второй и четвертой координатных четвертях. Выполняется построение графиков этих функций в единой системе координат с последующим выяснением, при каких значениях переменной x справедливо неравенство $f(x) \le g(x)$. Рассмотрению подлежат три промежутка: $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$ и $(0;\ \infty)$. При $x \in (-\infty;\ -1)$, $f(x) > g(x)$. При $x \in (-1;\ 0)$, $f(x) < g(x)$.

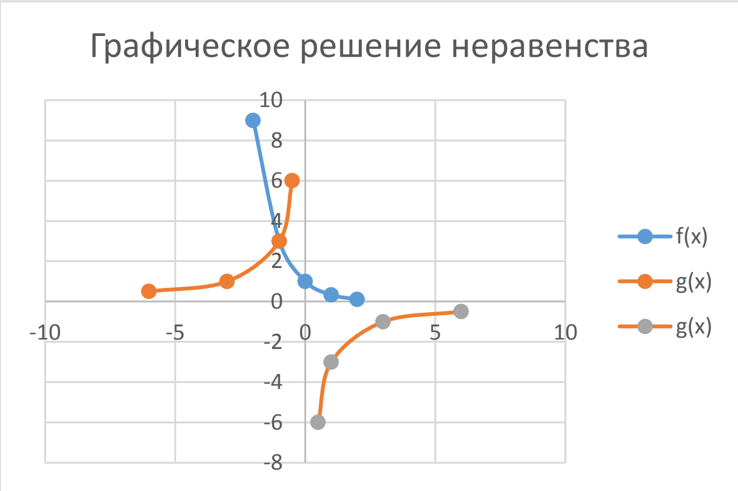


Рис.8. Графическое решение неравенства $f(x) \le g(x)$.

При $x \in (0;\ +\infty)$, $f(x) > g(x)$. При значении $x = -1$, $f(x) = g(x)$. Таким образом, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le -\frac{3}{x}$ является интервал $x \in -1;\ 0)$.

В данном параграфе рассмотрены следующие типы показательных неравенств:

1. $a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)}$,$a > 0$,$a \neq 1$;
2. $a^{f(x)} > b$, $a > 0$,$a \neq 1$,$b > 0$;
3. Неравенства, которые при помощи подстановки $\alpha^{f(x)} = t,\ t > 0$ могут быть преобразованы к квадратным;
4. Неравенства, левую часть которых можно представить в виде: $A \cdot a^{n \cdot x} + +B \cdot a^{k \cdot x} \cdot b^{m \cdot x} + C \cdot b^{n \cdot x}$, где $k,\ m \in N$, $k + m = n$;

5. Неравенства, левая часть которых представляет из себя: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot b^{n \cdot x} + C$, где $A,\ B,\ C$ являются некоторыми числами, причем $a \cdot b = 1$.

Рассмотрены методы решения данных типов показательных неравенств:

– метод уравниваний оснований;

– метод разложения на множители;

– метод подстановки;

– деление обеих частей неравенства либо на $a^{n \cdot x}$, либо на $b^{n \cdot x}$для неравенств, левая часть которых представлена в виде: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot a^{k \cdot x} \cdot b^{m \cdot x} + C \cdot b^{n \cdot x}$, где $k,\ m \in N, k + m = n$;

– графический метод решения показательных неравенств.

Методики решения показательных неравенств в целом отражают те же технологии, что применяются при решении показательных уравнений.

Если рассмотреть задачный материал в учебниках разных авторов, то он представлен следующими блоками.

Первый блок неравенств предполагает использование при решении простейших операций со степенью или сведением к одному основанию. Представители данного блока: $4^x < \frac{1}{2}$; $5^{x-1} \le \sqrt{5}$.

Такие неравенства сводятся к простейшим путем несложных преобразований, опирающихся на свойства степени и показательной функции.

Второй блок неравенств представлен вариантами, которые сводятся к квадратному уравнению путем замены или равносильного преобразования уравнения. Варианты условий: $9^x - 3^x - 6 > 0$; $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x} \le 7\frac{1}{9}$.

Третий блок неравенств предполагает усложнение самой структуры неравенства и включения в выражение иррациональностей. Этот блок ориентирован на усвоение необходимости учета области определения функции в процессе решения. Примеры таких уравнений: $11^{\sqrt{x+6}} > 11^x$; $0,3^{\sqrt{30-x}|} > 0,3^x$.

Четвертый блок, содержащий примеры, ориентированные на поиск области определения функции.

В учебниках Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [41-44] неравенства отдельно отнесены к 11 классу, поэтому в рамках учебника 10 класса решаются простые неравенства типа: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 16$.

Второй блок в 10 классе представлен задачами о нахождении области определения функции, которые в себе содержат, конечно, решение неравенства, но с учетом исследования функции: $y = \sqrt{9^x - 28 \cdot 3^x + 27}$.

В учебниках с углубленным изучением от Г.К. Муравина и О.В. Муравиной представлены такие же варианты неравенств, как и для базового уровня, при этом на обоих уровнях рассматриваются неравенства и уравнения с параметром, которые всегда вызывают сложности у школьников. Примеры заданий с параметром:

Найти все значения a, при которых уравнение $4^x - a \cdot 2^x + a - 1 = 0$ а) имеет два корня; б) не имеет корней; в) имеет единственный корень [43].

Решить неравенство $a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0$ [54].

В результате уже в 11 классе решаются следующие неравенства, совмещающие в себе тригонометрические и показательную функции: $cos\, x \geq 1 + 2^x\, cos\, x \geq 1 + 2^x$.

Аналогичным образом представлен задачный материал в учебниках М.Я. Пратусевича [53,54]. Здесь, также неравенства отдельно отнесены к 11 классу, поэтому в рамках учебника 10 класса решаются простые неравенства типа: $\sqrt{3^x} < 27$. Далее, в 10 классе представлены задачи на нахождение области определения функции и исследование функции, которые в себе содержат решение уравнений и неравенств: $y = \frac{1}{\sqrt{0{,}5^x - \frac{4}{0{,}5^x} - 3}}$. В рамках 11 класса решаются уже неравенства, в том числе, смешанного типа, содержащие тригонометрическую, логарифмическую и показательную функцию.

Задачный материала в учебниках С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина [2,6] состоит из простых показательных уравнений и неравенств в 10 классе, используются знания о свойствах показательной функции.

В 11 классе задачный материал соответствует также теоретическому и предполагает применение общего подхода ко всем видам неравенств. Примеры неравенств [6]: $(x^2)^{log_2 x^2} > x$. Для углубленного изучения предлагаются более сложные варианты заданий:

$$\sqrt[11]{9^x - 3^x + 5^{2x}} > \sqrt[11]{9^x - 3^x + 5^{3x}}.$$

В учебных пособиях А.Г. Мордковича, П.В. Семенова и др. под ред. Мордковича [3,4,7,8] в разделе «Дополнительные задачи» представлена задача на решение показательных неравенств:

«а) Найдите количество всех целых решений неравенства

$4^{x-1} - 9 * 2^x + 32 \leq 0$.

б) Найдите сумму всех целых положительных чисел, которые являются решениями неравенства $14^{x-1} < 5^{x+1}$.

в) Из всех целых чисел, которые не являются решениями неравенства $(10^{4x-9} - 1)(3^{5x-21} - 1) \geq 0$ найдите число, наименее удаленное от множества решений этого неравенства.

г) Укажите наименьшее натуральное число х, при котором число $3 * 2^x$ составляет менее 50% от числа $3^x + 5$» [8].

§7. Уровневая и профильная дифференциация при обучении данной теме

Важным условием успешного развивающего образовательного процесса, учитывающего индивидуальные особенности учащихся в современном математическом образовании, является ориентация на личность. Одним из таких путей ориентации на личность обучающихся является дифференциация обучения. Дифференциация дает возможность учитывать интересы и индивидуальные особенности учащихся и получать математическую подготовку разного уровня, в соответствии с ними. Дифференциация обучения (дифференцированный подход в обучении) - это создание разнообразных условий обучения для различных групп учащихся с учетом их особенностей; комплекс методических, психолого-педагогических и организационно управленческих мероприятий, обеспечивающих обучение в однородных группах. Выделим два основных вида дифференциации: профильная и уровневая. Профильная дифференциация предполагает создание особых школ или классов, с учетом индивидуальных особенностей учащихся. К этому виду можно отнести как гимназии и школы с углубленным изучением каких-либо дисциплин, так и коррекционные школы разных типов. Уровневая дифференциация предполагает разделение учащихся на группы по некоторым критериям внутри класса. Дифференцированные задания мотивируют учащихся переходить на новые уровни знаний, привлекая их в процесс организации классной и домашней работы.

Рассмотрим, что понимают под дифференцированным заданием в современной научно-методической и педагогической литературе.

Дифференцированное задание – это задание, выполняемое определенной типологической группой и составленное с учетом особенностей данной группы обучающихся. Данное определение дано в методике дифференцированного обучения математике Р.А. Утеевой [66, С. 91]. Типологическая группа – группа обучающихся, которые объединены одинаковым фактическим уровнем знаний и умений по математике и достигающие одинакового уровня их усвоения [66, С. 88].

Автором отмечаются различные приемы дифференциации заданий. В данном пособии выделены основные приёмы дифференциации заданий [66, С. 95]. Для групп, изучающих предмет на углубленном уровне предлагается усложнение числовых данных в задачах и вопросов для обучающихся. Данный прием углубляет и расширяет их знания и умения по изучаемой теме. Одинаковые по содержанию задачи могут предлагаться в разных формулировках, разными по уровню сложности методами, на разных уровнях усвоения, обобщения материала и проблемности. Также, рассмотрена дифференциация заданий в зависимости от оказываемой учителем помощи. Учителем может быть указан общий принцип решения или подробный порядок действий, показан образец по выполнению рисунков или построений, указаны теоремы или правила, которые необходимо использовать при решении, указан промежуточный или конечный ответ. Все перечисленные действия могут варьироваться в зависимости от типологической группы.

В методике обучения математике в средней школе в качестве дифференцированных заданий Г.И. Саранцев [58, С. 98] предлагает выполнение многовариативных самостоятельных работ, которые также имеют разный уровень сложности, или карточки с заданиями и указаниями, планом решения.

Авторы А.Я. Блох [39, С. 249], В.А. Гусев [39, С. 249], Г.В. Дорофеев [39, С. 249] определяют дифференциацию обучения как использование методов и форм организации учебной деятельности с учётом индивидуальных особенностей обучающихся. Они предлагают использование дифференцированных самостоятельных работ и карточек-заданий, с указаниями учителя. В таких материалах они предусматривают указания учителя в зависимости от уровня дифференциации. Работа может быть организована как по группам, так и индивидуально. Они выделяют дифференциацию оказываемой помощи обучающимся со стороны учителя как основной прием дифференциации.

Дифференциация заданий для самостоятельных работ по трем уровням сложности рассмотрена в методике преподавания математики в средней школе Ю.М. Колягина [38].

Необходимость использования групповых форм обучения с использованием дифференциации подчеркивается в учебниках по педагогике

[51,52,74]. При решении задач повышенного уровня сложности успевающие ученики развивают способности, в то время как неуспевающие ученики при решении тренировочных заданий избавляются от пробелов по отдельным темам и вырабатывают необходимые навыки. В процессе такой совместной работы у неуспевающих учеников возникает возможность перенять знания у успевающих учеников и стремится к более высокому уровню знаний. Хорошо успевающие учащиеся мотивируют неуспевающих учеников, в процессе групповой работы.

Т.Л. Овсянникова в исследовании 1998 г. [47] выделяет три подгруппы обучающихся в соответствии с учебными (высокими, средними, низкими) возможностями и излагает методику построения систем предметных и дифференцированных заданий к ним. Учебные возможности подразделяются на высокие, средние, низкие и определяются сочетанием уровней обученности и мотивации.

В пособии по подготовке будущего учителя математики к использованию задач как средства дифференциации обучения учащихся средней школы Н.В. Никаноркиной (2006) [46] анализируются индивидуальные особенности обучающихся и выделяются виды задач, позволяющие учитывать данные особенности. Виды задач подразделяются по составу исходных данных; по способам формулировки; по уровню усвоения учебного материала; по соотношению репродуктивных и творческих операций, приёмов анализа и синтеза при поиске решения задач; в зависимости от целей использования на уроке.

Для реализации дифференциации обучения в данном пособии выделяются определенные критерии отбора и составления задачного материала по изучаемой теме: набор задач по теме должен быть полным, разнообразным; количество задач должно быть достаточным для всех типологических групп обучающихся для формирования у них прочных умений и навыков; задачи должны быть доступными и посильными; мера помощи должна быть продумана учителем и др.

Т.К. Смыковская, Ю.А. Машевская, О.М. Вихляева [61] рассмотрели технологию дифференцированного обучения учащихся 7–9 классов по решению текстовых задач алгебраическим способом. В данной технологии основным компонентом является цикл взаимосвязанных систем разноуровневых задач. Данную систему основывают типовые задачи. Далее, для проведения тренинга подбираются аналогичные по содержанию задачи. Далее, для увеличения уровня сложности производится изменение данных в задачах, и система дополняется задачами с трансформацией условия, задачами с параметром. Уровень сложности структуры задачи и уровень трудности решения подразделяют задачи на разные уровни.

Г.А. Атаманская [9] для организации уровневой дифференциации предлагает учителю разделять учащихся на базовую, прикладную и творческую (исследовательскую) группы. Задания для базовой группы представляют собой типовые задания по теме основных видов. В задания для прикладной группы включены различные прикладные задачи по изучаемой теме. Творческо-исследовательская группа формирует раздаточный, дидактический, прикладной материал по теме, подготавливают доклады, самостоятельно изучают материал на 2-3 урока вперед. В итоге, учащиеся разделяются по функциям: одни подбирают раздаточный материал, дополнительны материал, классифицируют его по уровню сложности, другие знакомят с интересными фактами, третьи проводят индивидуальную работу с отстающими учащимися.

Учащиеся, не увлекающиеся математикой, но интересующиеся естественнонаучными дисциплинами, поймут смысл изучения предмета, таким образом будут мотивированы на его дальнейшее изучение. Учащиеся, изучающие математику на более высоком уровне, будут задействованы в исследовательской деятельности.

Можно сделать вывод, что проблеме дифференциации посвящено большое количество работ, где даны определения понятия, рассмотрены приемы и способы дифференциации по математике, виды дифференцирования задачного материала, принципы отбора и работы с такими системами задач, предлагаются новые методы дифференциации.

В научно-исследовательских работах раскрывается положительный опыт и эффективность использования системы дифференцированных заданий в обучении школьников в соответствии с разработанной методикой. Однако, можно так же отметить, недостаточное методическое обеспечение дифференцированными заданиями по математике в современных условиях информационного образовательного пространства. В рамках данной работы будет разработана система заданий по теме «Показательные уравнения и неравенства» для уровневой и профильной дифференциации. Данная система будет состоять из трех типологических групп (первый, второй, третий уровень сложности задач).

Выводы по первой главе

Рассмотрим основные выводы по теме исследования, полученные в первой главе.

1. Выделены три ключевых (основных) направления линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики: прикладное направление, теоретико-математической направление, установление связей с остальным содержанием курса математики. Изучение данной темы затрагивает важные темы такие, как, степень, квадратные уравнения, показательная функция и тд. Показательные уравнения имеют не только важное теоретическое значение, но и служат практическим целям.

2. Уравнения и неравенства называются показательными, если переменная находится только в показателе степени. Уравнения вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называются показательными уравнениями. Понятие показательного уравнения тесно связано с показательной функцией. Для решения данного вида уравнений и неравенств используются свойства показательной функции, теоремы о равносильности.

3. Выделены основные цели и задачи обучения показательным уравнениям и неравенствам, проанализированы требования к предметным результатам освоения по ФГОС.

4. Рассмотрены учебные пособия 10-11 классов, входящие в комплект учебных материалов, рекомендованных министерством науки и высшего образования. Данные учебные пособия проанализированы и сделаны выводы об отличии последовательности изложения материала, введения определений и рассмотрения методов решения показательных уравнений и неравенств.

5. Рассмотрены следующие типы показательных уравнений: $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$; $a^{f(x)} = b$; уравнения, которые при помощи подстановки $a^{f(x)} = t$, $t > 0$ могут быть преобразованы к квадратным уравнениям; уравнения, левую часть которых можно представить в виде: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot a^{k \cdot x} \cdot b^{m \cdot x} + C \cdot b^{n \cdot x}$, где $k,\ m \in N$, $k + m = n$; уравнения, левая часть которых представляет из себя: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot b^{n \cdot x} + C$, где $A,\ B,\ C$ являются некоторыми числами, причем $a \cdot b = 1$; уравнения, которые имеют вид: $A \cdot a^m = B \cdot b^m$; уравнениям вида: $a^{\phi(x)} = f(x)$.

Рассмотрены методы решения показательных уравнений, которые зависят от конкретного типа показательного уравнения и включают сведение к одному основанию или степени, выполнение замен, приводящих к известным видам уравнений (линейным, квадратичным), использование свойств показательной функции.

6. Рассмотрены следующие типы показательных неравенств: $a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)}$, $a > 0,\ a \neq 1$; $a^{f(x)} > b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$; неравенства, которые при помощи подстановки $a^{f(x)} = t,\ t > 0$ могут быть преобразованы к квадратным; неравенства, левую часть которых можно представить в виде: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot a^{k \cdot x} \cdot b^{m \cdot x} + C \cdot b^{n \cdot x}$, где $k,\ m \in N$, $k + m = n$; неравенства, левая часть которых представляет из себя: $A \cdot a^{n \cdot x} + B \cdot b^{n \cdot x} + C$, где $A,\ B,\ C$ являются некоторыми числами, причем $a \cdot b = 1$.

Рассмотрены методы решения данных типов показательных неравенств.

Проанализирован задачный материал учебных пособий, выделены основные типы задач на решение показательных неравенств.

7. Рассмотрена трактовка понятия «дифференциация обучения» в современной научно-методической и педагогической литературе, выделены основные виды дифференциации: профильная и уровневая. Из анализа рассмотренной литературы можно сделать вывод, что проблеме дифференциации посвящено большое количество работ. В научно-исследовательских работах раскрывается положительный опыт и эффективность использования системы дифференцированных заданий в обучении школьников.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И НЕРАВЕНСТВАМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

§8. Анализ типичных ошибок при решении показательных уравнений и неравенств

При решении показательных уравнений и неравенств у школьников возникают как субъективные ошибки, связанные со случайными некорректными преобразованиями и ошибками в вычислениях, так и типичные ошибки, которые повторяются из года в год и характеризуют недостаточный уровень усвоения материала школьниками.

Условно ошибки, которые встречаются не только в показательных уравнениях и неравенствах и не являются для них специфическими, но встречаются достаточно часто, можно разделить на несколько видов:

– потеря корней или решений уравнений и неравенств;

– получение посторонних корней или интервалов;

– некорректность использования замены переменной;

– проведение подбора корней без достаточных оснований [26-31].

Суть указанных типов ошибок можно продемонстрировать на следующих примерах.

Решение уравнения вида $2^x(x^2-5x+4)=16(x^2-5x+4)$. Вариант некорректного решения предполагает деление обоих частей уравнения на (x^2-5x+4), что является неравносильным преобразованием. В результате школьник получает: $2^x=16$. Откуда $x=4$. Однако, такое преобразование является равносильным системе: $\left[\begin{aligned} x^2-5x+4=0; \\ 2^x=16. \end{aligned}\right.$ $x=4,\ x=1$. Таким образом, в первом случае из-за неравносильного преобразования потерян один корень уравнения.

Методы решения показательных уравнений приводят и к особенным ошибкам, связанным с некорректным применением свойств показательной функции при сведении членов уравнения к одному основанию или одному показателю. Например, используется свойство показательной функции: если $a > 0$, $a^n = a^m$, $a \neq 1$, то $n = m$. Большинство учащихся запоминают данное свойство без указанных условий, и, следовательно, не обращают внимания на случай $a = 1$, при котором равенство выполняется при любых показателях. В итоге уравнение вида $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+8} = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$ решается путем приравнивания показателей степени, откуда корень уравнения находится из соотношения: $x^2 - 5x + 8 = 2$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Таким образом, из четырех корней уравнения два будут потеряны. А необходимо учесть также условие: $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = 1$; $x_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Подобный пример уравнения: $x^{2\,cos\,3x-5/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Основные корни получаются приравниванием показателей степени, при основании не равном единице: $2\,cos\,3\,x - 5/4 = -1/4$; $cos\,3\,x = 1/2$; $x = \frac{\pi}{9}$; $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in N$. И случай, когда основание равно единице является тривиальным. Следовательно, корни уравнения: 1; $\frac{\pi}{9}$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in N$.

Одним из вариантов решения такого уравнения является логарифмирование. Например, рассматривается уравнение $(x^2 - 3)^{x-8} = 1$.

Стандартная ошибка ведет к уравниванию оснований и получению уравнения вида $(x^2 - 3)^{x-8} = (x^2 - 3)^0$. Откуда корень уравнения $x = 8$. Логарифмирование позволяет избавиться от этого пробела в решении:

$(x - 8)\,lg(x^2 - 3) = 0$; $(x - 8) = 0,\ x = 8$; $lg(x^2 - 3) = 0$;

$x^2 - 3 = 1$; $x = \pm 2$. Значит, корни уравнения ± 2; 8.

Неравенства как наиболее сложные конструкции для усвоения учащимися проверять значительно сложнее. Если для уравнения посторонние корни могут быть удалены при помощи дополнительной проверки, то реализация такого плана для неравенств может потерпеть крах. Неравенства требуют более тонкого отношения к равносильным преобразованиям и постоянного соблюдения правила учета области определения, которая может меняться в ходе преобразований. Несмотря на кажущуюся простоту свойств показательной функции при основании меньшем единицы, более трети обучаемых делают ошибки при использовании свойств монотонности показательной функции. Например, решение неравенства вида $0,5^{x+2} \leq 0,5^{-3}$ часто выполняется следующим образом: $0,5^{x+2} \leq 0,5^{-3}$; $x+2 \leq -3$; $x \leq -5$.

Однако, показательная функция, при основании меньшем единицы, убывает, и необходимо из неравенства заключить, что: $x+2 \geq -3$; $x \geq -5$.

Часто ошибка вызвана не столько незнанием свойств функции, сколько шаблонным мышлением, которое не позволяет учащемуся выполнить решение. Например, рассматривается неравенство следующего вида: $3^{\sqrt{5-x}} - (x-4)\,lg(x-4) > 0$. Решение такого сложного неравенства стандартными методами невозможно. Однако достаточно простые рассуждения приводят к решению. Найдем область определения неравенства, согласно свойств функций квадратного корня и логарифма имеем: $\begin{cases} 5-x \geq 0; \\ x-4 > 0. \end{cases}$ $x \in (4;5]$. На указанном промежутке показательная функция положительна, так как область ее значений – положительные числа, а логарифм принимает только отрицательные значения на этом промежутке. Следовательно, на всем промежутке сумма таких функций положительна.

Использование свойств показательной функции без учета специфики уравнения может привести также к потере решений. Например, $x^{2x+1} > x^5$. Использование монотонности показательной функции, но без учета того факта, что если основание меньше единицы, то характер монотонности меняется, приводит к решению: $\begin{cases} x > 0; \\ 2x+1 > 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0; \\ x > 2; \end{cases}$ В результате решением неравенства является интервал $(2;+\infty)$. Корректный вариант позволяет получить иное решение: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1;\\2x+1>5;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1;\\2x+1<5;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1;\\x>2;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1;\\x<2;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>2\end{array}\right.$.

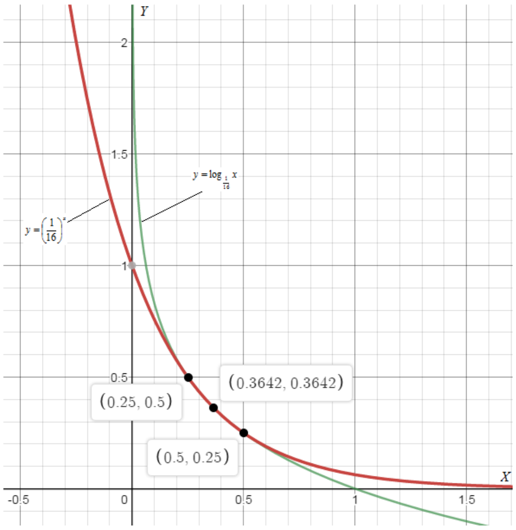
Учащиеся также сталкиваются с затруднениями при решении следующего вида неравенств: $64^{x^2-3\cdot x+20}-0{,}125^{2\cdot x^2-6\cdot x-200}\le 0$. Чаще всего учащиеся осуществляют приведение степени к одному основанию, а затем применяют свойство монотонности показательной функции: $64^{x^2-3\cdot x+20}-0{,}125^{2\cdot x^2-6\cdot x-200}\le 0 \Leftrightarrow 2^{6\cdot x^2-18\cdot x+120}\le 2^{-6\cdot x^2+18\cdot x+600}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6\cdot x^2-18\cdot x+120\le -6\cdot x^2+18\cdot x+600 \Leftrightarrow 12\cdot x^2-36\cdot x-480\le$ $\le 0\Leftrightarrow x^2-3\cdot x-40\le 0$. Решением последнего неравенства является интервал $x\in[-5;\ 8]$.

Метод рационализации применяется некоторыми из учащихся с учетом того, что знак выражения $\square^f-\square^g$, $\square>0$ в области его допустимых значений должен совпадать со знаком выражения $(\square-1)\cdot(f-g)$. В данном случае: $64^{x^2-3\cdot x+20}-0{,}125^{2\cdot x^2-6\cdot x-200}\le 0\Leftrightarrow (2-1)\cdot$ $(12\cdot x^2-36\cdot x-480)\le 0$ на множестве действительных чисел.

Недостатками такого решения является потеря первого множителя (хотя в данном случае ответ получается правильным и ответ не искажается, но это является недопустимым), отсутствие обоснования того, что данный множитель не оказывает никакого влияния на знак произведения.

С решением показательных уравнений графическим методом связана одна из типичных ошибок.

В качестве примера можно привести уравнение: $\left(\frac{1}{16}\right)^x=log_{\frac{1}{16}}x$. Отметим, что решение данного уравнения возможно только графическим методом, с помощью других элементарных методов решить данное уравнение не представляется возможным. Часто, учащиеся в ходе решения этого уравнения графическим методом получают только один корень (а именно,



абсциссу точки, которая располагается на прямой $y = x$), так как графики функций $y = log_{\frac{1}{16}} x$ и $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ являются графиками взаимно обратных функций. При правильном решении данного уравнения должно получиться три корня: первый – это абсцисса точки, которая расположена на биссектрисе

Рис. 9. Графическое решение

первого координатного угла $y = x$, второй корень равен $x = \frac{1}{4}$ и третий корень равен $x = \frac{1}{2}$. Выполнив подстановку чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ в исходное уравнение можно убедиться в вышесказанном. Данное решение представлено на рисунке 9.

Можно отметить, что уравнения следующего вида: $log_a x = a^x$ при $0 < a <$ $< e^{-e}$, $\left(e^{-e} \approx 0{,}06598 \approx \frac{1}{15}\right)$ всегда будет содержать ровно три действительных корня. В данном случае рассмотренный пример удачно демонстрирует следующий вывод: графическое решение уравнения $f(x) = g(x)$ считается недостаточно корректным с математической точки зрения в случае одномонотонности функций (обе либо одновременно возрастают, либо одновременно убывают), решение можно считать «безупречным» только в случае разномонотонности обеих функций (одна из них возрастает, а другая - убывает).

Не совсем корректное использование учащимися функционального подхода при решении показательных уравнений и неравенств служит причиной целого ряда типичных ошибок. Приведем типичные ошибки подобного рода.

Пример: Решить уравнение $x^x = x$. В связи с тем, что функция, находящаяся в левой части уравнения, является показательно-степенной, на основание степени должны быть наложены следующие ограничения: $x > 0$, $x \neq 1$. После логарифмирования обеих частей рассматриваемого уравнения, получится следующее: $x \cdot lg\, x = lg\, x$, $x \cdot lg\, x - lg\, x = 0$, $lg\, x \cdot (x - 1) = 0$, $lg\, x = 0$ или $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$. Отсюда получается $x = 1$. Несмотря на то, что сужения области определения исходного уравнения после операции логарифмирования не произошло, тем не менее, в процессе было потеряно два корня уравнения: $x = 1$ и $x = -1$.

Таким образом, можно сделать вывод, что ошибки при решении показательных уравнений и неравенств возникают из-за недостаточной глубины и системности знаний, недостатка четкого понимания алгоритма действий при решении показательных уравнений и неравенств.

§9. Прикладной аспект обучения показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики

Показательная функция, а, следовательно, показательные уравнения и неравенства, широко используется в различных отраслях науки и техники таких, как: физика, медицина, социология, математика, биология, а также используется при решении некоторых задач, связанных с судовождением. Множество явлений природы выражаются посредством показательной функции. Например, такие процессы, как, размножение живых организмов, процесс радиоактивного распада.

Для ясного понимания важности показательной функции, показательных уравнений и неравенств целесообразно привести пример из жизни. Любой человек мог наблюдать ситуацию, в которой, при снятии кипящего чайника с огня вначале происходит его быстрое остывание, а затем остывание замедляется (причем значительно). Суть процесса состоит в том, что скорость остывания является пропорциональной разности температуры чайника и температуры окружающей среды. При уменьшении вышеуказанной разности уменьшается и скорость остывания чайника. Если начальная температура чайника составляла T_0, а температура воздуха была равна T_1, то через t секунд закон изменения температуры T чайника будет выражаться формулой: $T = (T_1 - T_0) \cdot e^{-k \cdot t} + T_1$, где k - числовой коэффициент, который зависит от материала, из которого сделан чайник, формы чайника, а также количества воды, которое содержится внутри чайника.

Тема «Показательная функция» относится к основным при изучении таких тем физики, как, «Термодинамика», «Ядерная физика», «Электромагнетизм», «Колебания». Задачи, как правило, сводятся к составлению и решению показательного уравнения или неравенства. Один из таких примеров связан с падением тел. Как известно, при падении тел в безвоздушном пространстве наблюдается непрерывное возрастание их скорости. При падении тел в воздушном пространстве также происходит увеличение скорости падения, однако, при этом она не может превосходить некоторой определенной величины.

Существует известная задача о падении парашютиста. Если условиться, что сила сопротивления воздуха является прямо пропорциональной скорости падения парашютиста, то есть: $F = k \cdot v$, где k - коэффициент пропорциональности (числовой), то через интервал в t секунд скорость падения будет составлять: $v = \left(\frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot \left(1 - e^{\frac{-k \cdot t}{m}}\right)$, где m является массой парашютиста. Через определенный временной интервал значение $e^{\frac{-k \cdot t}{m}}$ достигнет очень малой величины и падение может считаться практически равномерным. На величину коэффициента пропорциональности k оказывают влияние размеры парашюта.

Следует отметить, что использование вышеприведенной формулы целесообразно не только при исследовании падения парашютиста, но и при изучении падения, например, пушинки, капель дождевой воды и т.д.

Другой пример из физики касается изменения атмосферного давления p в соответствии с высотой □ над уровнем моря, который можно описать по следующей формуле: $p = p_0 \cdot a^{\square}$, где p_0 - атмосферное давление над уровнем моря; a - некоторая постоянная. При создании вакуума конечное давление p в определенной емкости связано с начальным давлением p_0 в соответствии со следующим выражением: $p = \left(\frac{V}{V+q}\right)^{\frac{n \cdot t}{3}} \cdot p_0$, где V - объем газа, который необходимо откачать; q - объем газа, который откачивается за один шаг насоса; n - количество шагов поршня насоса за единицу вакуумирования; t - время, в течение которого производится вакуумирование.

С помощью показательной функции можно выразить ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения, зависимость давления воздуха от высоты подъема и т.д.

Если рассмотреть область медицины, то пример использования показательной функции связан со сферой диагностики заболеваний. В процессе диагностики почечных заболеваний достаточно часто выполняется определение способности почек к выводу из крови радиоактивных изотопов, причем их количество в крови падает (уменьшается) в соответствии с показательным законом.

Показательная функция описывает один из процессов социологии, такой как рост народонаселения. Как известно, изменение численности населения в стране на небольшом интервале времени можно описать в соответствии со следующей формулой: $N = N_0 \cdot e^{a \cdot t}$, где N_0 - число людей на момент времени $t = 0$; N - число людей на момент времени t; a - константа; $e \approx 2{,}718$.

Далее приведен ряд других типичных примеров использования показательной функции в области биологии.

Число бактерий N в определенной среде за время t определяется в соответствии с формулой $N = N_0 \cdot a^{k \cdot t}$, где N_0 является начальным количеством бактерий; a и k являются некоторыми постоянными.

В питательной среде время деления бактерии кишечной палочки составляет 20 минут. Очевидно, что общее количество бактерий за каждый час увеличивается в 8 раз. Если в начале процесса существовала одна бактерия, то через x часов их количество p_0N будет составлять 8^x: $N(x) = 8^x$.

Будущим экономистам важно уметь производить расчеты по банковским процентам, необходимым для расчета ежемесячного платежа по кредитованию. Навык выражения и применения формул для решения таких задач может быть отработан на уроках алгебры и начала анализа как раз в рамках рассматриваемой темы [77].

Далее приведем примеры прикладных задач из различных областей науки, которые могут быть мотивирующими при изучении темы «показательная функция».

Задача 9.1. Время, за которое происходит распад половины массы радиоактивного вещества, называется периодом его полураспада. У цезия-137, который является одним из основных компонентов радиоактивного заражения местности после Чернобыльской катастрофы, это период составляет 30 лет. Следовательно, от начальной массы m_0 цезия через x лет останется $m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$: $m(x) = m_0 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}\right)^x$.

Задача 9.2. Период полураспада плутония составляет $T = 140$ суток. Какой будет масса m плутония через 10 лет, если его начальная масса составляла $m_0 = 8$г. Решение данной задачи начинается с определения временного интервала: $t = 10 \cdot 365$ (считается что в году 365 дней). Далее: $\frac{t}{T} = \frac{10 \cdot 365}{140} = \frac{365}{14}$. Вычисление массы плутония осуществляется в соответствии с формулой радиоактивного распада: $m = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{365}{14}} \approx 1{,}1345 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, можно сделать вывод, что через 10 лет останется приблизительно $1{,}1345 \cdot 10^{-7}$г плутония.

Задача 9.3. Процент инфляции определяет, насколько процентов (в среднем) произошел рост цен. Каждый месяц показатель инфляции равен 30%. Определить индекс инфляции за x месяцев и вычислить годовой уровень инфляции.

Решение:

1) определим индекс инфляции за x месяцев: $In = (1 + r_x)^x = (1 + + 0{,}03)^x$. 2) индекс инфляции за 12 месяцев: $(1 + 0{,}03)^{12} = 1{,}47$; уровень инфляции за год составит: $\mathrm{r} = \mathrm{In} - 1 = 1{,}47 - 1 = 0{,}47 = 47\%$. Ответ: уровень инфляции за год составит 47%.

Задача 9.4. Население Земли в 2000году составляло 6 миллиардов человек. Делается допущение, что оно увеличивается в два раза каждые 35 лет. Произвести вычисление населения Земли к 2020 г.

Решение: P_0=6 млд. численность в 2000 году, -численность в 2020 году. Найдем годовой прирост: $k = \left((\frac{f}{s})^{\frac{1}{y}} - 1\right) \times 100\%$, где f – конечное значение, s – начальное значение, а y – количество лет оцениваемого периода. Таким образом: $k = \left((\frac{12}{6})^{\frac{1}{35}} - 1\right) \times 100\% \approx (1{,}02 - 1) \times 100\% \approx 2{,}00016\%$. То есть, за первый год население увеличится на 0,02*6 млд., то есть через год население составит $P_1 = 6$ млд.+0,02*6 млд.=6 млд.*1,02. За второй год $P_2 = 0{,}02P_1$. Таким образом, $P_{20} = (1{,}02)^{20}6\text{ млд.} \approx 8{,}9156\text{ млд.}$

Задача 9.5: На некотором лесном участке существует возможность заготовки $4 \cdot 10^5$ м^3 древесины. Каждый год прирост деревьев составляет 4%. Какой объем древесины можно будет заготовить на данном участке через 5лет.

Решение: По условию задачи за каждый год прирост деревьев составляет 4%. Пусть $\mathrm{a} = 4 \cdot 10^5$ м^3 . За первый год количество деревьев изменится на 0,04a (4% от первоначального количества), то есть $x_1 = a + 0{,}04\,a = 1{,}04a$ – количество деревьев через год. За второй год количество деревьев изменится на $0{,}04x_1$. То есть, через n лет количество деревьев на

участке будет $x_n = (1{,}04)^n a$. Следовательно, через пять лет на участке деревьев будет $(1{,}04)^5 a = (1{,}04)^5 * 4 * 10^5$ м^3 $= 486661$ м^3.
Ответ: 486661 м^3.

Таким образом, показательная функция используется в различных областях знаний, таких как: физика, медицина, социология, математика, биология, множество практических задач из различных областей сводится к решению показательного уравнения или неравенства.

§10. Дифференцированная система показательных уравнений и неравенств при подготовке к Единому государственному экзамену

Обобщение и систематизация показательных уравнений и неравенств предполагает использование материала учебников 10-11 класса, а также разделов «Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал математического анализа». Уровень усвоения этого материала должен быть достаточно высоким, так как задания, содержащие простые показательные уравнения и неравенства представлены уже в базовом уровне.

В данном параграфе предлагается дифференцированная система заданий, присутствует уровневая и профильная дифференциация. Уровневая дифференциация состоит в разделении задач по трем уровням сложности, профильная – в разделении задач на профильный и базовый уровень.

Система задач для базового уровня включает в себя следующие типы уравнений и неравенств:

– простейшие показательные уравнения и неравенства;

– показательные уравнения и неравенства, требующие для решения некоторые преобразования;

– смешанные показательные уравнения и неравенства, простейшие системы.

Система профильного уровня включает в себя следующие типы уравнений и неравенств:

– показательные уравнения и неравенства усложненной структуры;
– смешанные показательные уравнения и неравенства усложненной структуры, задачи с параметром и прикладные задачи;
– решение систем уравнений и неравенств сложной структуры.

В базовых задачах используются три основных способа решения:
– приведение к одинаковому основанию;
– вынесение общего множителя за скобки;
– приведение показательного уравнения к квадратному, кубическому (уравнению 4-й, 5-й степени и т.д.)

В задачах профильного уровня, как правило, усложняется сама структура задачи, добавляются задачи с параметром и сюжетные задачи с прикладным содержанием, решение которых сводится к составлению показательных уравнений и неравенств и нахождению их корней. Также, в показателе степени уже задействованы логарифмическая, тригонометрическая функция, модули.

Задачи повышенной сложности по данной теме чаще всего представлены системой показательных уравнений или неравенств, или же сама структура уравнений и неравенств усложняется, и их решение сводится к решению системы уравнений или неравенств.

В рамках данной работы разработана дифференцированная система задач. При составлении системы задач были использованы следующие материалы: открытый банк заданий ЕГЭ [49] и пособие для подготовки к ЕГЭ авторов Б.В. Соболь, И.Ю. Виноградова, Е.В. Рашидова [62]. Данная система содержит задания по возрастанию сложности от простого к сложному и может быть использована для подготовки к ЕГЭ. Представленные задачи разнообразны по содержанию и способу решения и охватывают все основные типы задач по теме «Показательные уравнения и неравенства». Система задач направлена на формирование умения применять тот или иной способ решения, усвоение основных формул, приемов решения различных задач по данной теме.

Разработанная система удовлетворяет следующим требованиям: уровень сложности нарастает от простого к сложному, в системе представлены основные типы задач по теме, содержит серии однотипных заданий для тренинга.

Система задач для базового уровня.

Блок простейших показательных уравнений для базового уровня первого уровня сложности.

Задача 10.1. Решить уравнение $3^{x-3} = 81$.
Решение: $3^{x-3} = 3^4, x - 3 = 4$, откуда: $x = 7$. Ответ: 7.

Задача 10.2. Решить уравнение $4^{x-6} = 64$.
Решение: $4^{x-6} = 64$, $4^{x-6} = 4^3, x - 6 = 3, x = 9$. Ответ: 9.

Задача 10.3. Решить уравнение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-9} = \frac{1}{9}$.

Решение: $-x + 9 = -2, -x = -2 - 9, x = 11$. Ответ: 11.

Задача 10.4. Решить уравнение: $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-5} = 49$.

Решение: $-(x-5) = 2;\ 5 - x = 2;\ -x = 2 - 5;\ x = 5 - 2;\ x = 3$. Ответ:3.

Блок показательных уравнений для базового уровня второго уровня сложности.

Задача 10.5. Найдите корень уравнения $7^{18,5x+0,7} = \frac{1}{343}$.

Решение: Перейдем к одному основанию степени: $7^{18,5x+0,7} = \frac{1}{343} \Leftrightarrow 7^{18,5x+0,7} = 7^{-3} \Leftrightarrow 18,5x + 0,7 = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{37}{185} = -0,2$. Ответ: $-0,2$.

Задача 10.6. Решим уравнение $5^{x+2} - 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x+1} = 200$.
Так как $5^{x+2} = 25 \cdot 5^x, 5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$, то уравнение может переписаться в виде $5^x(25 - 2 - 15) = 200$ или в виде $5^x = 5^2$. Очевидно, что уравнения имеют единственный корень $x_0 = 2$. Ответ: 2.

Задача 10.7. Решим уравнение $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0$.
Так как $2^x \neq 0$ для любого числа x, то уравнение можно переписать в виде $2^x \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 9\right) = 0$, откуда видно, что корни уравнения совпадают с

корнями уравнения $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 9 = 0$. Уравнение можно переписать в виде $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Так как уравнение имеет единственный корень $x_0 = 2,$ то и равносильное ему уравнение имеет единственный корень $x_0 = 2$. Ответ: 2.

Задача 10.8. Решить уравнение $5^x - 5^{x-1} = 100$.

Решение: $5^x - 5^{x-1} = 100; 5^x - 5^x \cdot \frac{1}{5} = 100; 5^x\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100; 5^x = 125$

$x = 3$.

Задача 10.9. Решить уравнение $9^{x+1} + 3^{2x+4} = 30$.

Решение: $9^{x+1} + 3^{2x+4} = 30;\ 9 \cdot 9^x + 81 \cdot 9^x = 30;\ 9^x(9 + 81) = 30; 9^x = \frac{1}{3};$

$x = -\frac{1}{2}$.

Задача 10.10. Решить уравнение $3^{2x+1} - 9^x = 18$.

Решение: $3^{2x+1} - 9^x = 18;\ \ 3 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} = 18;\ \ 3^{2x}(3 - 1) = 18;\ \ 3^{2x} = 9;$

$x = 1$.

Задача 10.11. Решить уравнение $4^{x+1} - 2^{2x-2} = 60$.

Решение: $4^{x+1} - 2^{2x-2} = 60; 4 \cdot 4^x - 0{,}25 \cdot 4^x = 60; 4^x = 16; x = 2$.

Задача 10.12. Решить уравнение $5^{3x-2} = 5^{10-x}$.

Решение: Данное уравнение равносильно уравнению $3x - 2 = 10 -$ $-x,\ \ 4x = 12, x = 3$. Ответ: 3.

Задача 10.13. Решить уравнение $2^{2x^2-6x-2{,}5} = 16\sqrt{2}$.

Решение: $2^{2x^2-6x-2{,}5} = 2^4 \cdot 2^{0{,}5}; 2^{2x^2-6x-2{,}5} = 2^{4{,}5};\ 2x^2 - 6x - 2{,}5 = 4{,}5;$

$2x^2 - 6x - 7 = 0; D = (-6)^2 - 4 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 = 8^2$

$x_1 = \frac{6+8}{2} = 7; x_2 = \frac{6-8}{2} = -1$. Ответ: -1; 7.

Задача 10.14. Решить уравнение $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}$.

Решение: $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}; x^2 = -4 + 5x; x^2 - 5x + 4 = 0,$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9; x_1 = 4; x_2 = 1$. Ответ: 1; 4.

Задача 10.15. Решить уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

Решение: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$; $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

Задача 10.16. Решить уравнение $2^x + 5\cdot 2^{x+1} + 7\cdot 2^{x+2} = 312$.

Решение: Выноси в левой части уравнения за скобки 2^x, получим
$2^x(1 + 5\cdot 2^1 + 7\cdot 2^2) = 312;\ 2^x(1 + 10 + 28) = 312;\ 2^x\cdot 39 = 312;$
$2^x = 8; 2^x = 2^3; x = 3$. Ответ: 3.

Задача 10.17. Решить уравнение $3^x - 2\cdot 3^{x-2} = 63$.

Решение: $3^{x-2}(3^2 - 2) = 63;\ 3^{x-2}\cdot 7 = 63;\ 3^{x-2} = 9;\ 3^{x-2} = 3^2;\ x - 2 =$
$= 2;\ x = 4$. Ответ: 4.

Задача 10.18. Решить уравнение $7^{2x} - 8\cdot 7^x + 7 = 0$.

Решение: Данное уравнение имеет вид $A\cdot a^{2x} + B\cdot a^x + C = 0$. Пусть $7^x = y$, тогда $7^{2x} = y^2$ и для определения y получим квадратное уравнение
$y^2 - 8y - 7 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 7; y_2 = 1$ имеем: 1) $7^x = 7; 7^x = 7^1 \Rightarrow x = 1$
2) $7^x = 1; 7^x = 7^0 \Rightarrow x = 0$. Ответ: 0,1.

Блок простейших показательных неравенств для базового уровня первого уровня сложности.

Задача 10.19. Установить соответствие между решениями и неравенствами:

A) $2^x \geq 4$ 1) $(-\infty; -2]$

Б) $0{,}5^x \geq 4$ 2) $[2; +\infty)$

В) $0{,}5^x \leq 4$ 3) $(-\infty; 2]$

Г) $2^x \leq 4$ 4) $[-2; +\infty)$

A) $2^x \geq 4$: представим 4 в виде степени с основанием 2. $2^2 = 4$. Неравенство примет вид: $2^x \geq 2^2$. Основания степеней одинаковы, следовательно, степени соотносятся так же. $x \geq 2$ то есть, $[2; +\infty)$ – вариант под номером 2.

Б) Число 0,5 можно представить как $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, значит $(0{,}5)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$

Неравенство примет вид: $2^{-x} \geq 2^2$. Основания степеней одинаковы, следовательно, степени соотносятся так же. $-x \geq 2$. Если умножить и правую и левую часть неравенства на -1, то знак изменится на противоположный $x \leq -2$, то есть, $(-\infty; -2]$ – вариант под номером 1.

В) Аналогично с вариантом Б. Число 0,5 можно представить как $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, значит $(0{,}5)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$. Неравенство примет вид: $2^{-x} \leq 2^2$. Основания степеней одинаковы, следовательно, степени соотносятся так же $-x \leq 2$. Если умножить и правую и левую часть неравенства на -1, то знак изменится на противоположный $x \geq -2$, то есть, $[-2; +\infty)$ – вариант под номером 4.

Г) Представим 4 в виде степени с основанием 2: $2^2 = 4$.

Неравенство примет вид: $2^x \leq 2^2$. Основания степеней одинаковы, следовательно, степени соотносятся так же $x \leq 2$ и $(-\infty; 2]$ – вариант под номером 3.

Ответ: 2,1,4,3.

Задача 10.20. Установить соответствие между решениями и неравенствами

А) $2^x \geq 4$ $(-\infty; 2]$;

Б) $0.5^{\,x} \geq 4$ $[-2; +\infty)$;

В) $0.5^x \leq 4$ $(-\infty; -2]$;

Г) $2^x \leq 4$ $[2; +\infty)$.

Рассмотрим первое неравенство: $2^x \geq 4$, представим 4 как 2^2, тогда: $2^x \geq 2^2$, $x \geq 2$. Остальные неравенства решаются аналогичным образом, достаточно вспомнить, что $0{,}5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$; $2^{-x} \geq 4$; $2^{-x} \geq 2^2$; $-x \geq 2; x \leq -2$. Ответ: $А - 4, Б - 3, В - 2, Г - 1$.

Блок показательных неравенств для базового уровня второго уровня сложности.

Задача 10.21. Решить неравенство $16^x > \frac{1}{8}$.

Решение: Преобразуем неравенство: $2^{4x} > 2^{-3}$. Так как $2 > 1$, то $4x > -3; x > -\frac{3}{4}$

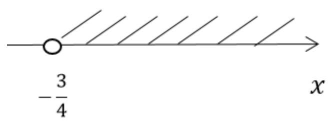


Рис.10 Решение неравенства

Ответ: $(-\frac{3}{4};\ +\infty)$

Задача 10.22. Решить неравенство $(0{,}3)^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243.$

Решение: $(0{,}3)^{2x^2-3x+6} < (0{,}3)^5$. Так как $0 < 0{,}3 < 1,$ то $2x^2 - 3x + 6 > 5;$ $2x^2 - 3x + 1 > 0.$ Последнее неравенство решаем методом интервалов

$2x^2 - 3x + 1 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{2}$

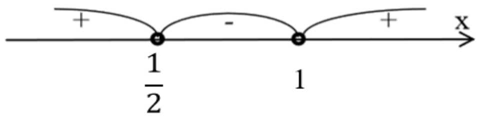


Рис.11 Решение неравенства.

$\frac{1}{2} < x < 1$. Ответ: $x\epsilon\left(\frac{1}{2};1\right)$

Задача 10.23. Решить неравенство $2^x - 2^{x-2} \leq 3$

Решение: $2^x - 2^{x-2} \leq 3;\ 2^{x-2}(2^2-1) \leq 3;\ 2^{x-2}\cdot 3 \leq 3;\ 2^{x-2} \leq 1;\ 2^{x-2} \leq$ $\leq 2^0$, так как $2 > 1$, то $x - 2 \leq 0;\ x \leq 2$

Ответ: $x\epsilon(-\infty;2]$

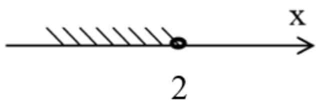


Рис.12 Решение неравенства

Задача 10.24. Решить неравенство $5^{2x+1} > 5^x$

Решение: Пусть $5^x = y$, тогда $5^{2x+1} = 5\cdot 5^{2x} = 5y^2$ и данное равенство примет вид: $5y^2 > y + 4$ или $5y^2 - y - 4 > 0.$

Решим его методом интервалов $5y^2 - y - 4 =$ $0;\ y_1 = 1;\ y_2 = -\frac{4}{5}$ Нашли $y < -\frac{4}{5};\ y > 1.$

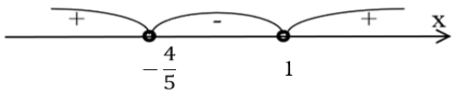


Рис.13 Решение неравенства.

Перейдем к исходной переменной x

1) $5^x < -\frac{4}{5}$ – решений нет, т. к. $5^x > 0, x\epsilon R.$
2) 2)$5^x > 1;\ 5^x > 5^0;\ x > 0,$ так как $5 > 1$. Ответ: $(0;+\infty)$

Задача 10.25. Решить неравенство $9^x - 10\cdot 3^{x+1} + 81 \leq 0$

Решение: Пусть $3^x = y$, тогда данное равенство примет вид: $y^2 - 30y + 81 \leq$ ≤ 0. Применим метод интервалов:

$y^2 - 30y + 81 = 0;\ y_1 = 27;\ y_2 = 3$

$3 \leq y \leq 27;\ 3 \leq 3^x \leq 27;\ 3^1 \leq 3^x \leq 3^3$, т.к. $3 > 1,$ то $1 \leq x \leq 3$

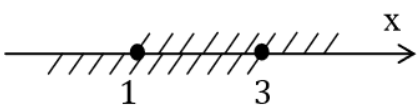


Рис.14 Решение неравенства

Ответ: $[1;3]$.

Система задач для профильного уровня

Блок показательных уравнений первого уровня сложности для профильного уровня

Задача 10.26. Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$

Решение: Данное уравнение относится к показательным. Поэтому решаем его, приведя к виду: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Представляем правую часть уравнения 81 в виде степени с основанием $3: 81 = 3^4$. Тогда уравнение примет вид: $3^{x-5} = 3^4$. Так как основания одинаковы, можно отбросить их. Получаем: $x - 5 = 4$. Решаем полученное уравнение: $x = 4 + 5$, $x = 9$. Ответ: 9.

Задача 10.27. Найдите корень уравнения $9^{6+x} = 81^{2x}$

Данное уравнение является показательным. Решаем его, приводя к виду: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Число 81 справа представить в виде 9^2, откуда получаем в правой части $81^{2x} = 9^{2\cdot 2x} = 9^{4x}$. Исходное уравнение принимает вид: $9^{6+x} = 9^{4x}$. Так как у степеней в обеих частях уравнения равны, можно перейти к равенству степеней и решить уравнение: $6 + x = 4x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 6: 3 = 2$. Ответ: 2.

Задача 10.28. Решить уравнение $10^{\frac{21x^2-23}{3}} = \frac{1}{\sqrt{10\sqrt[3]{10}}}$

Решение: $10^{\frac{21x^2-23}{3}} = \frac{1}{\sqrt{10\cdot 10^{\frac{1}{3}}}}; 10^{\frac{21x^2-23}{3}} = \frac{1}{10^{\frac{2}{3}}};\ 10^{\frac{21x^2-23}{3}} = 10^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{21x^2-23}{3} = -\frac{2}{3};\ 21x^2 - 23 = -2; 21x^2 = 21; x^2 = 1; x = \pm 1.$

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 10.29. Решить уравнение $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = (0{,}01^{1-x})^3$.

Решение: $10^{x^2-3} = \left(10^{-2(1-x)}\right)^3; 10^{x^2-3} = 10^{-6(1-x)}$; $x^2 - 3 = -6 + 6x; x^2 - -6x + 3 = 0$; $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-3} = 3 \pm \sqrt{6}$. Ответ: $x_1 = 3 + \sqrt{6}$; $x_1 = 3 - \sqrt{6}$.

Задача 10.30. Решить уравнение $7^{x^2-2x-3} = 8^{x^2-2x-3}$

Решение: По свойству показательной функции $a^x > 0$, где $a > 0, a \neq 1$, для любого $x \in R$. Поэтому $8^{x^2-2x-3} \neq 0$, если $x \in R$, и обе части данного уравнения можно разделить на 8^{x^2-2x-3}, тогда $\frac{7^{x^2-2x-3}}{8^{x^2-2x-3}} = \frac{8^{x^2-2x-3}}{8^{x^2-2x-3}}; \left(\frac{7}{8}\right)^{x^2-2x-3} = 1;$ $\left(\frac{7}{8}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\frac{7}{8}\right)^0;$ $x^2 - 2x - 3 = 0;$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) = 16 = 4^2$. $x_1 = 3; x_2 = -1$. Ответ: $-1; 3$.

Задача 10.31. Решить уравнение $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$

Решение: $2^2 \cdot 2^x - 2^2 \cdot 2^{-x} = 15; 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x} = 15$. Получим уравнение $A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} + C = 0$. Используя подстановку: $2^x = y$ и $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{y}$, переходим к уравнению $4y - \frac{4}{y} = 15$ или $4y^2 - 15y - 4 = 0$ находим корни $y_1 = 4; y_2 = -\frac{1}{4}$. 1) $2^x = 4; 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2;$ 2) $2^x = -\frac{1}{4}$ – корней нет, тк как $2^x = 0, x \in R$. Ответ: 2.

Задача 10.32. Решить уравнение $4^x + 6^x = 2 \cdot 3^{2x}$

Решение: $2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$, т.е. получим уравнение вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x \cdot b^x + C \cdot b^{2x} = 0$. Разделим обе части последнего уравнения почленно на 3^{2x}, тогда $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x}{3^x} - 2 = 0; \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$. Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, тогда $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = y^2;$ $y^2 + y - 2 = 0; y_1 = 1; y_2 = -2; \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0; x = 0;$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x =$
$= -2$ – корней нет. Ответ: 0.

Блок показательных уравнений второго уровня сложности для профильного уровня.

Задача 10.33. «При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5 \text{Па} \cdot \text{м}^5$, где p – давление в газе в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объем V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3{,}2 \cdot 10^6$Па.

Решение: Поскольку произведение давления на степень объема постоянно, а давление не ниже $3{,}2 \cdot 10^6$, при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и

$const = 10^5$Па $\cdot$ м^5 имеем неравенство: $3{,}2 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} = 10^5 \Leftrightarrow V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow$

$V = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow V = \frac{1}{8}$м^3. Ответ: 0,125.» [49]

Задача 10.34. «а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Решение: а) Преобразуем исходное уравнение: $3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$; $5^{\cos x} = 5^{\sin x}$; $\cos x = \sin x$; $tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$. Получим: $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z\right\}$; б) $\frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}$.» [49]

Задача 10.35. «а) Решить уравнение $(25^{\cos x})^{\sin x}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

а) Запишем исходное уравнение в виде: $5^{2\ \sin x\ \cos x} = 5^{\cos x} \Leftrightarrow$

$2\ \sin x\ \cos x = \ \cos x \ \Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x - 1) = 0 \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\cos x = 0, \\ &\sin x = \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ &x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, \\ &x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z. \end{aligned}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \colon n \in Z\right\}$ б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.» [46]

Задача 10.36. «а) Решить уравнение $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$.

а) Перейдем к новому основанию: $36^{\sin 2x} = 36^{\sin x} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x =$
$= \sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z,\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число: -3π.

Ответ: $\left\{\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in Z\right\}$; б) -3π» [49] .

Задача 10.37. «а) Решить уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Решение: а) Преобразуем исходное уравнение $3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$. Пусть $t = 3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2 - 8t + 5 = 0$, откуда $t = 1$ или $t = \frac{5}{3}$. При $t = 1$ получим: $3^{x-1} = 1$ откуда $x = 1$. При $t = \frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1} = \frac{5}{3}$ откуда $x = \log_3 5$. б) Корень $x = 1$ не принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1 < \log_3 5$ и $\log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \frac{7}{3}$, корень $x = \log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.» [49]

Задача 10.38. «а) Решить уравнение $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

Решение: а) Преобразуем уравнение: $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0 \Leftrightarrow 7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 12 \cdot 4^{x^2-3x+1} = 0 \Leftrightarrow 7 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1} + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow 7 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 1,\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = -\frac{12}{7}.\end{array}\right.$

У второго уравнения решений нет. Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 3x +$ $+1 = 0$, откуда $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

б) Оценим $\sqrt{5}$ целыми числами: $2 < \sqrt{5} < 3$. Тогда $\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$ и $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} <$ $< \frac{1}{2}$. Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.» [49]

Задача 10.39. а) Решите уравнение $4 \cdot 16^{\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение: Пункт а) 1. Вводим замену $t = 4^{\cos x}$. Тогда уравнение примет вид: $4t^2 - 9t + 2 = 0$. 2. Решаем квадратное уравнение с помощью формул дискриминанта и корней: $D = b^2 - c = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$, $t_1 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{9+7}{8} = 2$. 3. Возвращаемся к переменной x: $4^{\cos x} = \frac{1}{4}$; $4^{\cos x} = 4^{-1}$; $\cos x = -1$; $x = -\pi + 2\pi k, k\epsilon Z$; $4^{\cos x} = 2$; $4^{\cos x} = 4^{\frac{1}{2}}$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$

Пункт б) 1. Строим координатную плоскость и окружность единичного радиуса на ней. 2. Отмечаем точки, являющиеся концами отрезка.

3. Выбираем те значения, которые лежат внутри отрезка. Это корни $-\frac{5\pi}{3}$; $-\pi$. Их два.

Ответ: а) $-\pi + 2\pi k, k\epsilon Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; $-\pi$.

Задача 10.40. а) Решите уравнение $36^{\sin x} + 36^{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{37}{6}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$.

Решение: а) 1. По формулам приведения $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

2. Тогда данное уравнение примет вид: $36^{\sin x} + 36^{-\sin x} = \frac{37}{6}$

3. Вводим замену $t = 36^{\sin x}, t > 0$. Получаем: $t + \frac{1}{t} = \frac{37}{6}$; $t^2 + 1 = \frac{37t}{6}$;

$6t^2 - 37t + 6 = 0$. Решаем обычное квадратное уравнение с помощью формул дискриминанта и корней: $D = 1369 - 144 = 1225$, $\sqrt{D} = 35$, $t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{37+35}{12} = 6$, $t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{37-35}{12} = \frac{1}{6}$. Оба корня положительны.

3. Возвращаемся к переменной x: $36^{\sin x} = 6 = 36^{\frac{1}{2}}$. Тогда $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\epsilon Z$. $36^{\sin x} = 6^{-1} = 36^{-\frac{1}{2}}$. Тогда $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\epsilon Z$

Получили четыре семейства корней. Их бесконечно много.

б) 4. С помощью неравенств находим те корни, которые принадлежащие отрезку$\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$: Для корней $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $7\pi < \frac{\pi}{6} + 2\pi n < \frac{17\pi}{2}$

Получаем одно значение $\frac{49\pi}{6}$. Для корней $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\epsilon Z$; $7\pi < \frac{5\pi}{6} + 2\pi m < \frac{17\pi}{2}$ ни одного значения корней нет. Для корней $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $7\pi < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n < \frac{17\pi}{2}$ есть одно значение $\frac{47\pi}{6}$; Для корней $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\epsilon Z$; $7\pi < -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m < \frac{17\pi}{2}$ есть одно значение $\frac{43\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\epsilon Z$; б) $\frac{49\pi}{6}, \frac{47\pi}{6}, \frac{43\pi}{6}$.

Задача 10.41. а) Решите уравнение $\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x$. .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение: а) Запишем исходное уравнение в виде: $2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 4^x$. Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, приравнено к положительному числу, поэтому исследовать ОДЗ не требуется.

Для решения полученного тригонометрического уравнения используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2\cos x \sin x$,откуда получаем $\cos x\left(-2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ находим: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Из уравнения $\cos x = 0$ находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi n\,;-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\colon n\in Z\right\}$; б) $-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}$.

Блок показательных уравнений третьего уровня сложности для профильного уровня

Задача 10.42. При каких значениях p уравнение $3\cdot 3^{2x}+p\cdot 3^{x}+p-3=0$ имеет один корень.

Решение: Уравнение имеет один корень, если квадратное уравнение $3\cdot y^2+p\cdot y+p-3=0$, этот корень положительный, если квадратное уравнение имеет два корня, эти корни имеют разные знаки при $y=6$ корней не имеет, при $y<3$ имеет один корень.

Задача 10.43. «а) Решить уравнение $5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=25^{\frac{\sin 2x}{2}}$.

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{1}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение: а) $5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=25^{\frac{\sin 2x}{2}}\Leftrightarrow 5^{1-\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=5^{\sin 2x}\Leftrightarrow 5^{1-1+\cos 2x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=5^{\sin 2x}\Leftrightarrow 5^{\cos 2x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=5^{\sin 2x}\Leftrightarrow$
$5\cdot 5^{\cos 2x}=5^{\sin 2x}\Leftrightarrow 5^{1+\cos 2x}=5^{\sin 2x}\Leftrightarrow 1+\cos 2x=\sin 2x\Leftrightarrow$
$2\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x=0\Leftrightarrow$

$$2\cos x(\cos x-\sin x\,)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z\end{array}\right.$$

б) Выборка корней. Будем искать строго положительные корни. Из серии $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z$. При $n=0, x_1=\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>\frac{1}{2}$; при $n=1, x_2=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$. Дальнейшие поиски корней из данной серии смысла не имеют.

Из серии $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z$. При $n = 0, x_3 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} > \frac{1}{2} = \frac{2}{4}; \pi > 2$ (неравенство очевидно). При $n = 1, x_4 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}; \frac{1}{2} < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{4} < \frac{5\pi}{4} < \frac{6\pi}{4} \Leftrightarrow 2 < 5\pi < 6\pi$ (неравенство очевидно). При $n = 2, x_5 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} > \frac{3\pi}{2} = \frac{6\pi}{4}$

Дальнейшие поиски корней из данной серии смысла не имеют.

Итак: $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{4}, x_4 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z$; б) $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{4}, x_4 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$» [62]

Задача 10.44. «а) Решить уравнение $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение: а) $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18 \Leftrightarrow 4^{\sin x} + \frac{32}{4^{\sin x}} - 18 = 0 \Leftrightarrow 4^{2\sin x} - 18 \cdot 4^{\sin x} + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{\sin x} = 16 \\ 4^{\sin x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 2 \\ 2^{2\sin x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z \end{array}\right.$$

б) $x_1 = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6}; x_2 = \frac{\pi}{6}; x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \epsilon Z$; б) $-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.» [62]

Задача 10.45. Дано уравнение $(0{,}25)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = 2^{\cos 2x - 1}$

а) Решить уравнение б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\frac{15\pi}{4}; -3\pi\right]$.

Решение: а) последовательно получаем: $(0{,}25)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = 2^{\cos 2x - 1} \Leftrightarrow 2^{-2\sin x} = 2^{\cos 2x - 1} \Leftrightarrow -2\sin x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow$
$2\sin x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \epsilon Z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z \end{array}\right.$

б) Найдем искомые корни с помощью двойных неравенств. Решим неравенства относительно целых n. Из серии корней $\pi n, n \epsilon Z$: $-\frac{15\pi}{4} \leq \pi n \leq -3\pi \Leftrightarrow -3{,}75 \leq n \leq -3 \Leftrightarrow n = -3.\ x_1 = -3\pi$.

Из серии корней $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\epsilon Z$: $-\frac{15\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\le-3n\Leftrightarrow-3{,}75\le0{,}5+2n\le-3\Leftrightarrow-4{,}25\le2n\le-3{,}5\Leftrightarrow-2{,}125\le n\le-1{,}75\Leftrightarrow n=-2$. $x_2=\frac{\pi}{2}-4\pi=-\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\pi n, n\epsilon Z; \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\epsilon Z$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -3\pi$.

Задача 10.46. Дано уравнение $2015^x+2016\cdot2015^{1-x}-4031=0$

а) Решить уравнение б) Найдите все корни на промежутке $[\log_{2017}2016; \log_{2016}2017]$.

Решение: а) последовательно получаем: $2015^x+2016\cdot2015^{1-x}-4031=0\Leftrightarrow2015^x+2016\cdot\frac{2015}{2015^x}-4031=0\Leftrightarrow2015^{2x}-4031\cdot2015^x+2016\cdot2015=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2015^x=2015\\2015^x=2016\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=1\\x=\log_{2015}2016\end{array}\right.$.

б) $\log_{2017}2016<1, \log_{2016}2017>1$, $1\epsilon[\log_{2017}2016; \log_{2016}2017]$.

Докажем, что корень $\log_{2015}2016\notin[\log_{2017}2016; \log_{2016}2017]$, для чего достаточно доказать неравенство $\log_{2016}2017<\log_{2015}2016$

В ходе доказательства мы будем пользоваться следующими известными фактами: 1) $\log_{2015}2016>0, \log_{2016}2017>0$; 2) Для любых двух различных положительных чисел их про изведение меньше квадрата полусуммы этих же чисел $\frac{\log_{2016}2017}{\log_{2015}2016}=\log_{2016}2017\cdot\log_{2016}2015<\left(\frac{\log_{2016}2015+\log_{2016}2017}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_{2016}2015\cdot2017}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_{2016}((2016+1)(2016-1))}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_{2016}(2016^2-1)}{2}\right)^2$. Из полученного ясно: $\log_{2016}(2016^2-1)<2$, откуда: $\frac{\log_{2016}(2016^2-1)}{2}<1\Leftrightarrow\left(\frac{\log_{2016}(2016^2-1)}{2}\right)^2<1$. И при этом будет выполнено равенство: $\frac{\log_{2016}2017}{\log_{2015}2016}<1$. А это означает, что $\log_{2015}2016>\log_{2016}2017$

Ответ: а) 1; $\log_{2015}2016$; б) 1.

Блок показательных неравенств для профильного уровня первого уровня сложности

Задача 10.47. Решите неравенство: $2^{x^2}\le4\cdot2^x$

Решение: $2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{x^2} \leq 2^{x+2} \Leftrightarrow x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$. Ответ: $[-1; 2]$

Задача 10.48. Решите неравенство: $6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2$

$$6^x + \frac{1}{6^x} > 2 \Leftrightarrow 6^{2x} + 1 > 2 \cdot 6^x \Leftrightarrow (6^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 6^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Задача 10.49. «Решите неравенство: $\frac{9^x - 23^x + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$

Вводим замену $t = 3^x$. Тогда исходное неравенство примет вид: $\frac{t^2 - 6t + 4}{t-5} + \frac{6t - 51}{t-9} \leq t + 5$. Преобразуем его: $\frac{(t-1)(t-5)}{t-5} - \frac{1}{t-5} + \frac{6(t-9)}{t-9} + \frac{3}{t-9} \leq t + 5$; $-\frac{1}{t-5} + \frac{3}{t-9} \leq 0$; $\frac{t-3}{(t-5)(t-9)} \leq 0$. Отсюда получаем решение $t \leq 3$; $5 < t < 9$. Возвратимся к переменной x. При $t \leq 3$ получим: $3^x \leq 3$, следовательно $x \leq 1$. При $5 < t < 9$ получим: $5 < 3x < 9$, следовательно $\log_3 5 < x < 2$. Решение исходного неравенства: $x \leq 1$ и $\log_3 5 < x < 2$. Ответ: $(-\infty; 1], (\log_3 5; 2)$ » [62]

Задача 10.50. «Решите неравенство: $2^x + 32 \cdot 2^{-x} \geq 33$.

Решение: Пусть $y = 2^x$, тогда: $y + \frac{32}{y} \geq 33 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 33y + 32}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-32)}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < y \leq 1, \\ y \geq 32. \end{array}\right.$ Вернемся к исходной переменной. Имеем: $\left[\begin{array}{l} 0 < 2^x \leq 1, \\ 2^x \geq 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 5. \end{array}\right.$ Ответ: $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$» [49]

Задача 10.51. Решите неравенство: $36^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x-1} \geq 0$.

Решение: Пусть $t = 6^x > 0$, тогда имеем: $\frac{1}{6}t^2 - \frac{7}{6}t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 1, \\ t \geq 6. \end{array}\right.$ Откуда $\left[\begin{array}{l} 6^x \leq 1, \\ 6^x \geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$ Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Блок показательных неравенств для профильного уровня второго уровня сложности

Задача 10.52. Решите неравенство: $3^{-2x+4} - 81 \cdot 3^{-x+3} - 3^{-x+1} + 81 \leq$
≤ 0.

Решение: Решим первое неравенство: $3^{-2x+4} - 81 \cdot 3^{-x+3} - 3^{-x+1} + 81 \le 0 \Leftrightarrow 3^4 \cdot 9^{-x} - 3^7 \cdot 3^{-x} - 3 \cdot 3^{-x} + 3^4 \le 0 \Leftrightarrow 3^3 \cdot 9^{-x} - (3^6 + 1) \cdot 3^{-x} + 3^3 \le 0 \Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^{-x}(3^{-x} - 3^3) - (3^{-x} - 3^3) \le 0 \Leftrightarrow (3^3 \cdot 3^{-x} - 1)(3^{-x} - 3^3) \le 0 \Leftrightarrow 3^{-3} \le 3^{-x} \le 3^3 \Leftrightarrow -3 \le -x \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$. Ответ: $[-3; 3]$.

Задача 10.53. Решите неравенство: $\frac{11-5^{x+1}}{25^x-5(35\cdot5^{x-2}-2)} \ge 1{,}5$.

Решение: Относительно $t = 5^x$ неравенство имеет вид: $\frac{11-5t}{t^2-7t+10} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2(11-5t)-3(t^2-7t+10)}{(t-2)(t-5)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-3t^2+11t-8}{(t-2)(t-5)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(8-3t)}{(t-2)(t-5)} \ge 0.$ По методу интервалов, $1 \le t < 2$ или $\frac{8}{3} \le t < 5$. Возвращаясь к xб получаем $0 \le x \le \log_5 2, \log_5 \frac{8}{3} \le x < 1$. Ответ: $[0; \log_5 2) \cup \left[\log_5 \frac{8}{3}; 1\right)$

Задача 10.54. «В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t– время, прошедшее от начального момента, T– период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

Решение: Задача сводится к решению неравенства $m(t) \ge 5$ при заданных значениях параметров $m_0 = 40$мг и $T = 10$мин: $m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \ge 5 \Leftrightarrow 40 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \ge 5 \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{10}} \ge \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} \ge -3 \Leftrightarrow t \le 30$ мин. Ответ:30.» [62]

Задача 10.55. «Уравнение процесса, в котором учувствовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) – давление в газе, V – объем газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Решение: Пусть p_1 и V_1 –начальные, а p_2 и V_2 – конечные значения объема и давления газа, соответственно. Условие $pV^a = const$ означает, что $p_1V_1^a =$

$p_2V_2^a$,откуда $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1^a}{V_2^a} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a$. Задача сводится к решению неравенства $\frac{p_2}{p_1} \geq 4$, причем по условию $\frac{V_1}{V_2} = 2$: $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geq 4 \Leftrightarrow 2^a \geq 4 \Leftrightarrow a \geq 2$. Ответ:2.» [62]

Задача 10.56. «Решите неравенство $\log_2((7^{-x^2} - 3)(7^{-x^2+16} - 1)) + \log_2 \frac{7^{-x^2}-3}{7^{-x^2+16}-1} > \log_2\left(7^{7-x^2} - 2\right)^2$.

Решение: Пусть $t = 7^{-x^2}, 0 < t \leq 1$, тогда неравенство примет вид: $\log_2((t-3)(7^{16}t - 1)) + \log_2 \frac{t-3}{7^{16}t-1} > \log_2(7^7 t - 2)^2$. Так как $t - 3 < 0$, имеем $7^{16}t - 1 < 0$, а значит $0 < t < \frac{1}{7^{16}} < \frac{2}{7^7}$. Получим систему:

$$\begin{cases} \log_2\left((t-3)\right)^2 > \log_2(7^7 t - 2)^2 \\ 0 < t < \dfrac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7 t - 2| \\ 0 < t < \dfrac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t > 2 - 7^7 t \\ 0 < t < \dfrac{1}{7^{16}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}$$

$3 - t > 2 - 7^7 t$ равносильно $(7^7 - 1)t > -1$ и выполнено для всех t. Таким образом, $7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < -4. \end{array}\right.$ Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.» [49]

Задача 10.57. Решите неравенство: $\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right)\sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} \geq 0$.

Решение: Найдем, при каких значениях x подкоренное выражение неотрицательно. Пусть $\sqrt{3^x} = t$: $t^2 - 10t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-9) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 1, \\ t \geq 9. \end{array}\right.$ Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{3^x} \leq 1, \\ \sqrt{3^x} \geq 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \leq 1, \\ 3^x \geq 81 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{array}\right.$

Тем самым, область определения неравенства: $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули левой части:

$3^{\frac{x-2}{2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $3^x - 10\sqrt{3^x} + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Расставим точки на прямой и определим знаки на области определения:

Рис. 15 Числовая прямая

Таким образом, решение исходного неравенства: $\{0\} \cup [4; +\infty)$. Ответ: $\{0\} \cup [4; +\infty)$

Задача 10.58. Решите неравенство: $\frac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04}{3-x} \leq 0$.

Решение: Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули числителя: $0,2^{|x^2-4x+2|} - 0,04 = 0 \Leftrightarrow 0,2^{|x^2-4x+2|} = 0,2^2 \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 2| = 2 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 = 2 \\ x^2 - 4x + 2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Расставим знаки на числовой прямой:

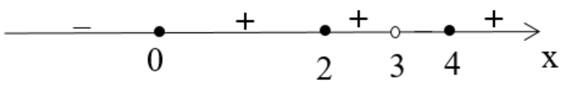


Рис. 16 Числовая прямая

Таким образом, множество решений второго уравнения: $(-\infty; 0] \cup \{2\} \cup (3; 4]$. Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{2\} \cup (3; 4]$.

Задача 10.59. Решить неравенство: $9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \geq 6$.

Решение: Решение неравенства ищем при условии $x > 0$. При этом условии $x^{2\lg 3} = x^{\lg 9} = 9^{\lg x}$, откуда $9^{\lg x} \geq 3 \Leftrightarrow \lg x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{10}$. Ответ: $\left[\sqrt{10}; +\infty\right)$.

Задача 10.60. Решить неравенство: $(x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)} + (7x^2 - 3x + 1)^{\lg(x^2+1)} \leq 2$.

Решение: Так как $x^2 + 1 > 0$ и $7x^2 - 3x + 1 > 0$ для любого x, так как $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$, методом интервалов: $(x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)} + (7x^2 - 3x + 1)^{\lg(x^2+1)} \leq 2 \Leftrightarrow (x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)} \leq 1 \Leftrightarrow \lg\left((x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)}\right) \leq \lg 1 \Leftrightarrow \lg(7x^2 - 3x + 1)\lg(x^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{7}$.

Ответ: $\left[0; \frac{3}{7}\right]$.

Задача 10.61. Решить неравенство: $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-7x+6>0 \\ 2x^2-7x+6\neq 1, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-2)>0 \\ (2x-5)(x-1)\neq 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ 1<x<\frac{3}{2}, \\ 2<x<\frac{5}{2}, \\ \frac{5}{2}<x<+\infty. \end{array}\right.$

Рассмотрим исходное неравенство на множестве $(0;1)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$, тогда $2x^2-7x+6>1$, откуда $\frac{x}{3}>1$, то есть $3<x<+\infty$. Рассмотрим исходное неравенство на множестве $\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)$, тогда $2x^2-7x+6<1$, откуда $0<\frac{x}{3}<1$, то есть $1<x<\frac{3}{2}$ или $2<x<\frac{5}{2}$. Ответ: $\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)\cup(3;+\infty)$.

Задача 10.62. Решить систему неравенств $\begin{cases} 6^{\mathrm{x}}+\left(\frac{1}{6}\right)^{\mathrm{x}}>2, \\ 2^{\mathrm{x}^2}\leq 4\cdot 2^{\mathrm{x}} \end{cases}$

Решение: Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 6^{\mathrm{x}}+\dfrac{1}{6^x}>2, \\ 2^{\mathrm{x}^2}\leq 4\cdot 2^{\mathrm{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{2\mathrm{x}}+1>2\cdot 6^x, \\ 2^{\mathrm{x}^2}\leq 2^{\mathrm{x}+2} \end{cases} 2>1 \Leftrightarrow \begin{cases} (6^{\mathrm{x}}-1)^2>0, \\ x^2\leq x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6^x\neq 1, \\ x^2-x-2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ -1\leq x\leq 2. \end{cases}$$ Ответ: $[-1;0)\cup(0;2]$.

Задача 10.63. Решить систему неравенств $\begin{cases} 5^{\mathrm{x}}+\left(\frac{1}{5}\right)^{\mathrm{x}}>2, \\ 2^{\mathrm{x}^2}\leq 64\cdot 2^{\mathrm{x}} \end{cases}$

Решение: Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 5^{\mathrm{x}}+\dfrac{1}{5^x}>2, \\ 2^{\mathrm{x}^2}\leq 64\cdot 2^{\mathrm{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2\mathrm{x}}+1>2\cdot 5^x, \\ 2^{\mathrm{x}^2}\leq 2^{\mathrm{x}+6} \end{cases} 2>1 \Leftrightarrow \begin{cases} (5^{\mathrm{x}}-1)^2>0, \\ x^2\leq x+6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x\neq 1, \\ x^2-x-6\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ -2\leq x\leq 3. \end{cases}$$ Ответ: $[-2;0)\cup(0;3]$.

Задача 10.64. Решить систему $\begin{cases} 2^{\mathrm{x}}+6\cdot 2^{-\mathrm{x}}\leq 7, \\ \frac{2^{\mathrm{x}^2}-4x}{x-4}\leq 0 \end{cases}$

Решение: Произведем эквивалентные преобразования:

$$\begin{cases} 2^{x} + 6 \cdot 2^{-x} \le 7, \\ \dfrac{2^{x^2} - 4x}{x-4} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x} - 7 \cdot 2^{x} + 6 \le 0, \\ \dfrac{x^2 - 2x}{x-4} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^{x} - 6)(2^{x} - 1) \le 0, \\ \dfrac{x(x-2)}{x-4} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \log_2 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ 2 \le x < 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0, \\ 2 \le x \le \log_2 6. \end{array}\right.$$ Ответ: $\{0\} \cup [2;\ \log_2 6]$.

Блок показательных неравенств для профильного уровня третьего уровня сложности

Задача 10.65. Решить систему неравенств $\begin{cases} 6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2; \\ 2^{x^2} \le 4 \cdot 2^x. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} 6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2; \\ 2^{x^2} \le 4 \cdot 2^x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{2x} + 1 > 2 \cdot 6^x; \\ 2^{x^2} \le 2^{x+2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6^x - 1)^2 > 0; \\ x^2 \le x + 2. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 6^x \ne 1; \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0; \\ -1 \le x \le 2. \end{cases}$ Ответ: $[-1; 0) \cup (0; 2]$.

Задача 10.66. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \le 7; \\ \frac{2x^2 - 4x}{x-4} \le 0. \end{cases}$

Решение: преобразуем систему $\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \le 7; \\ \frac{2x^2 - 4x}{x-4} \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^x + 6 \le 0; \\ \frac{x^2 - 2x}{x-4} \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (2^x - 1)(2^x - 6) \le 0; \\ \frac{x(x-2)}{x-4} \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \log_2 6; \\ \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ 2 \le x < 4 \end{array}\right. . \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2 \le x \le \log_2 6. \end{array}\right.$ Ответ: $\{0\} \cup [2; \log_2 6]$

Задача 10.67. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \le 0; \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x-3} \le \frac{8x+1}{x}. \end{cases}$

Решение: Рассмотрим первое неравенство: $2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \le 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 10 \le 0$. Произведем замену $t = 2^x$, тогда получим: $t^2 - 7t + 10 \le 0$, отсюда $2 \le t \le 5$, вернемся к исходному: $2 \le 2^x \le 5 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 5$. Решение первого неравенства исходной системы: $1 \le x \le \log_2 5$.

3. Решим второе неравенство системы: $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x-3} \le \frac{8x+1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2 - 2x} + 7 + \frac{2}{x-3} - 8 - \frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)} +$

$\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 0 < x \le 1, \\ 2 < x < 3. \end{array}\right.$ 3. Поскольку $2 < \log_2 5 < 3,$ множество решений исходной системы неравенств: $\{1\} \cup (2; \log_2 5]$. Ответ: $\{1\} \cup (2; \log_2 5]$

§11. Нестандартные задачи по теме «Показательные уравнения и неравенства»

В книге «Как научиться решать задачи» авторов Л.М. Фридмана, Е.Н. Турецкого дано следующее определение нестандартной задачи: «Нестандартные задачи - это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [73]. В рамках данного параграфа будут рассмотрены следующие типы нестандартных задач, которые редко встречаются в рамках общеобразовательной программы по теме «Показательные уравнения и неравенства»: задачи на сложные проценты; задачи с использованием теории многочленов; задачи с использованием монотонности функций; показательные уравнения и неравенства, основания степени которых представлены иррациональными числами; задачи, связанные с прогрессиями; задачи с параметрами. Рассмотрим тип задач на сложные проценты.

Задача 11.1. Через сколько лет удвоится вклад вкладчика в размере 10000 руб., если он положил его в банк под 12% годовых.

Решение: При решении данного типа задач используется формула сложных процентов: $S = S_{\text{нач}}(1 + \frac{P_{\text{год}}}{100})^n$, где $S_{\text{нач}}$ – начальная сумма вклада, $P_{\text{год}}$ – процентная ставка за год, n – срок хранения вклада в годах, -итоговая накопительная сумма вклада. По формуле получаем: $20000\ = 10000(1 + \frac{12}{100})^n$. Необходимо найти n, при котором данное показательное уравнение будет верным: 2= $(1 + \frac{12}{100})^n$. По определению логарифма, получаем: $n = \log_{(1+\frac{12}{100})} 2 = \log_{1,12} 2$. Таким образом: $\log_{1,12} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,12} \approx \frac{0,3010}{0,0492} \approx 6,12.$

Ответ: удвоение вклада произойдет примерно через 6 лет и полтора месяца.

Тип заданий, который можно предлагать учащимся – это решение показательных уравнений и неравенств и с использованием теории многочленов. Для таких задач учащимся необходимо расширить знания по сравнению с базовым уровнем. Потребуется дополнительно изучить основные теоремы теории многочленов, схему Горнера, так как такие типы задач связаны с частными случаями решения уравнений 3-й и 4-й степени. Они расширяют возможности учащихся при решении задач, но в то же время не являются сложными. Необходимыми элементами для изучения являются теорема о целых корнях многочлена, Теорема Безу, схема Горнера. Теперь рассмотрим примеры таких типов задач, связанных с использованием теории многочленов.

Задача 11.2. Решить уравнение $\frac{15 \times 3^x + 27}{9^x} = 11 - 3^x$. [60]

Решение: Заметим, что $9^x \neq 0$, умножим на 9^x: $15 \times 3^x + 27 = 11 \times 9^x - 27^x$; $3^x + 27 = 11 \times (3^x)^2 - (3^x)^3$; $(3^x)^3$-$11 \times (3^x)^2 + 15 \times 3^x + 27 = 0$; Сделаем замену: $t = 3^x$ $(t > 0)$, получим $t^3 - 11t^2 + 15t + 27 = 0$. Найдем корень $t = 3$ среди делителей свободного члена. Разделим на $t - 3$ по схеме Горнера. Полученный квадратный многочлен приравняем к нулю и решим квадратное уравнение: $t^2 - 8t - 9 = 0$, корни $t_1 = 1$ и $t_2 = 9$, но t_1 не удовлетворяет условию. Таким образом получим только $3^x = 9$, x=2. Ответ: x =2.

	1	-11	15	27
3	1	-8	-9	0

Рис. 17 Таблица значений.

Рассмотрим пример неравенства повышенного уровня сложности, для решения которого используется монотонность функции.

Задача 11.3. Решить неравенство $25 \times 2^x - 10^x + 5^x > 25$. [60]

Решение: Сгруппируем $25 \times (2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) > 0$; $(2^x - 1)(5^x - 25) < 0$. По свойству монотонности функций y=2^x и y=5^x, можно сделать вывод, что в точках, где множители $(2^x - 1)$ и $(5^x - 25)$ обращаются в ноль, то есть при x=0 и x=2 соответствующие выражения меняют знак. Таким образом можем найти ответ

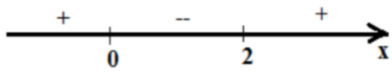


Рис. 18 Числовая прямая.

Ответ: x $\in (0; 2)$.

Следующий тип задач – это уравнения и неравенства, где в основании степени присутствуют иррациональные числа. Решения данного типа задач базируются на знании и использовании некоторых свойств иррациональных чисел. Для успешного решения таких задач необходимо знать определение: «Два иррациональных числа вида $a - b\sqrt{c}$ и $a + b\sqrt{c}$ называются сопряженными». Следующее, что необходимо помнить, это свойство сопряженных чисел, которое основано на формуле сокращенного умножения «разность квадратов»: $\left(a - b\sqrt{c)}(a + b\sqrt{c}\right) = a^2 - b^2c$. Данное свойство позволяет избавится от иррациональности. И, наконец, третье свойство, которое используется при решении таких задач: каждое из сопряженных чисел можно представить в виде степени с основанием, равным второму сопряженному числу, если их произведение равно 1. Например: $(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) = 49 - 48 = 1$, => $(7 - 4\sqrt{3}) = \frac{1}{(7+4\sqrt{3})} = (7 + 4\sqrt{3})^{-1}$. Преобразование подкоренного выражения, представленного иррациональным числом к виду квадрата разности или суммы, также часто является полезным при решении таких задач. Приведем пример: $49 - 12\sqrt{5}$ можно представить в виде $(2 - 3\sqrt{5})^2$. По свойству $\sqrt{a^2} = |a|$ и определению модуля получим: $\sqrt{49 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - 3\sqrt{5})^2} = \left|2 - 3\sqrt{5}\right| = 3\sqrt{5} - 2$. Рассмотрим задачу данного типа.

Задача 11.4. Решить неравенство $(2 + \sqrt{3})^{x+3} \geq (2 - \sqrt{3})^{-\frac{5x-1}{x-2}}$.

Решение: Заметим, что основания степеней – сопряженные числа и их произведение равно 1: $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1$. Получаем: $\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{(2+\sqrt{3})}=(2+\sqrt{3})^{-1}$. Преобразуем исходное неравенство: $(2+\sqrt{3})^{x+3}\geq(2+\sqrt{3})^{\frac{5x-1}{x-2}}$. Функция y=$(2+\sqrt{3})^{t}$ возрастающая => $2+\sqrt{3}>1$ => можем привести неравенство к виду: $x+3\geq\frac{5x-1}{x-2}$; $\frac{x^2+x-6-5x+1}{x-2}\geq 0$; $\frac{x^2-4x-5}{x-2}\geq 0$; $\frac{(x-5)(x+1)}{x-2}\geq 0$; $x\in[-1;2)\cup[5;\infty)$. Ответ: $x\in[-1;2)\cup[5;\infty)$.

Интересно рассмотреть нестандартные задачи, связанные с прогрессиями. Задания такого типа требуют понятие прогрессии и умений решать показательные уравнения смешанного типа.

Задача 11.5. Даны три первых члена арифметической прогрессии: $\log_4(5-5^x)$, $\log_{16}(1+3\times 5^x-25^x)$, $\log_4(3-5^x)$, требуется найти сумму пяти первых членов арифметической прогрессии. [56]

Решение: $a_1=\log_4(5-5^x)$, $a_2=\log_{16}(1+3\times 5^x-25^x)$, $a_3=\log_4(3-5^x)$. По свойству арифметической прогрессии $2a_2=a_1+a_3$, => $2\log_{16}(1+3\times 5^x-25^x)=\log_4(5-5^x)+\log_4(3-5^x)$. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases}5-5^x>0\\3-5^x>0\\1+3\times 5^x-25^x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5^x<3\\(5^x)^2-3\times 5^x-1<0\end{cases}$$

Преобразовав исходное выражение получим: $\log_4(1+3\times 5^x-25^x)=\log_4((5-5^x)\,(3-5^x))$; $1+3\times 5^x-25^x=(5-5^x)(3-5^x)$; $1+3\times 5^x-(5^x)^2=15-8\times 5^x+(5^x)^2=2\times(5^x)^2-11\times 5^x+14=0$;

$\begin{cases}5^x=2\\5^x=3{,}5\end{cases}$. Отсюда $5^x=3{,}5$ – не удовлетворяет ОДЗ. $5^x=2$ – удовлетворяет ОДЗ, => x $=\log_5 2$. Тогда $a_1=\log_4 3$, $a_2=\log_{16}3$, $a_3=\log_4 1$. Разность арифметической прогрессии равна d=$\log_{16}3-\log_4 3=\log_{16}3-\log_{16}9=\log_{16}\frac{1}{3}=-\log_{16}3$. Тогда $S_5=\frac{2\log_4 3-\log_{16}3\times 4}{2}\times 5=\frac{\log_4 9-\log_4 9}{2}\times 5=0$. Ответ: S=0.

Традиционно считаются сложными задания с параметром. Рассмотрим задачи на нахождение значений параметра по заданному количеству корней.

Несмотря на то, что они имеют четкий алгоритм решения, они вызывают трудности у учеников [25]. Приведем примеры заданий данного типа.

Задача 11.6. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$ будет иметь один корень.

Решение: Начнем с замены $2^x = t.$ $E(a^x) = R_+$ => $t > 0$. После замены получим квадратное уравнение $t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0$. Здесь нас будут интересовать только положительные корни. $D = (a+3)^2 - 4(4a-4) = a^2 - 10a + 25 = (a-5)^5 \geq 0$. Так как $D \geq 0$, то уравнение имеет один или два корня. Рассмотрим первый случай $D = 0$: необходимо чтобы $t = -\frac{b}{2a} > 0$, так как в данном случае уравнение будет иметь корень, что соответствует условию. $D = 0$ при a=5, при a=5 имеем t=4. Так как корень положительный, то исходное уравнение имеет один корень при a=5. Второй случай $D > 0$: $(a-5)^5 > 0$ – это верно при всех значениях кроме a=5. Тогда квадратное уравнение, полученное после замены имеет два корня. По теореме Виета $\begin{cases} x_1x_2 = 4a - 4 \\ x_1 + x_2 = a + 3 \end{cases}$. Чтобы исходное уравнение имело один корень необходимо выполнение одного из двух условий. Первый вариант: один из корней квадратного уравнения > 0, второй < 0. В этом случае необходимо и достаточно, чтобы $x_1x_2 < 0$, $4a - 4 < 0 \Leftrightarrow a < 1$, что удовлетворяет условию $a \neq 5$. При $a < 1$ уравнение $t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0$ будет иметь один корень > 0 => $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$ будет иметь один корень. Во втором варианте, один корень > 0, второй = 0. Это условие будет выполнено в случае: $\begin{cases} x_1x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 4 = 0 \\ a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a > -3 \end{cases}$, то есть при $a = 1$, что удовлетворяет $a \neq 5$. Получаем, что в данном варианте исходное уравнение будет иметь один корень. Получаем: $a = 1$, $a < 1$, a=5. Ответ: $(-\infty; 1] \cup [5]$.

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод, что нестандартные задачи по теме «Показательные уравнения и неравенства» вызывают трудности чаще всего не по причине их объективной сложности, а по причине недостаточного или полного отсутствия их в рамках учебного курса. Решение нестандартных задач развивает интеллектуальные и творческие способности учащихся, повышает уровень усвоения материала по изучаемой теме.

§12. Методические рекомендации обучения показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики

Знания свойств показательной функции активно используются при решении показательных уравнений и неравенства, поэтому без данной базы усвоение темы «Показательные уравнения и неравенства» сложно представить. Поэтому перед изучением темы, есть смысл предложить учащимся порешать задания на уже полученные знания по теме «Показательная функция» для закрепления изученной темы и введения новой темы. Необходимо сразу сформировать навык использования свойств показательной функции.

Возникает необходимость напомнить о равносильности (неравносильности) осуществляемых преобразований при решении уравнений и неравенств. Для успешного решения показательных уравнений и неравенств смешанных типов учащимся необходимо вспомнить тригонометрическую и логарифмическую функции. Учащиеся должны хорошо знать основные действия со степенями для изучения данной темы.

Следующей возможной причиной, по которой возникают сложности с усвоением темы у учащихся, является многообразие задачного материала по данной теме. Довольно часто учащийся не может четко систематизировать свои знания и выстроить четкий алгоритм решения задачи. Если обобщить и сформировать некоторую последовательность действий при решении задач, возможно, учащимся будет легче структурировать работу.

Как уже было рассмотрено ранее простейшие показательные уравнения и неравенства решаются с использованием методов приведения к одинаковому основанию, вынесения общего множителя за скобки и приведение показательного уравнения и неравенства к квадратному. Таким образом, приступая к решению уравнения или неравенства, учащиеся должны проанализировать, можно ли привести уравнение или неравенство к степени с одинаковым основанием, получить квадратное уравнение или неравенство. Если это возможно, то учащиеся получают простейший вид и без труда смогут получить результат. Было бы полезным обратить внимание учащихся на некоторые отличительные особенности и дать полезные рекомендации. Например, метод вынесения общего множителя успешно используют тогда, когда при вынесении за скобки степени с переменным показателем, мы получаем алгебраическую сумму в скобках, которая является определенным числом или выражением. Например: $3^{2x+1} - 9^x = 18$. Преобразовав, получим $3^{2x}(3-1) = 18$. Данный способ в итоге приводит нас к простейшему виду степеней с одинаковыми основаниями.

Что касается приведения к квадратному уравнению или неравенству, то здесь можно рассматривать несколько вариантов. К такому виду относительно новой переменной t сводятся: $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ подстановкой a^x= t, при этом $a^{2x} = t^2$; $Aa^x + Ba^{-x} + C = 0$ подстановкой a^x= t, при этом $a^{-x} = \frac{1}{t}$; $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$ с предварительным делением обеих частей на b^{2x} и подстановкой $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ = t. Данный способ приводит уравнение или неравенство к виду со степенями с одинаковым основанием.

Используя данный подход к решению показательных уравнений и неравенств учащийся сможет решить любое показательное уравнение, неравенство или систему базового уровня, при условии наличия базовых знаний для работы с уравнениями, неравенствами и степенями.

Чуть сложнее дело обстоит со смешанными показательными уравнениями и неравенствами, где могут присутствовать тригонометрические или логарифмические функции. Но, как правило, такие задачи только выглядят сложно, а на самом деле представляют из себя такие же показательные уравнения и неравенства, только с большим количеством необходимых предварительных преобразований. Для успешного решения учащимися таких задач необходимо обратить их внимание на несколько аспектов. Первое, что необходимо помнить, что, решая уравнение, всегда необходимо анализировать ОДЗ (в том числе ОДЗ логарифма в смешанных задачах, где он фигурирует). Далее, необходимо проанализировать, можно ли привести уравнение или неравенство к простейшему виду с помощью равносильных преобразований с использованием свойств степеней. Если это возможно, то приводим уравнение или неравенство к уже стандартному виду. В случае если данный прием не приводит к стандартному виду, то переходим к следующим действиям. Если члены уравнения или неравенства представляют собой степени с одинаковыми показателями, но различными основаниями, то такое выражение можно попытаться привести к простейшему с помощью деления на одно и то же число или выражение (в большинстве случаев это деление на степень с большим показателем). Здесь нужно помнить о возможной смене знака неравенства и ОДЗ. Возможно, используя данный прием, удастся привести уравнение или неравенство к уже известному виду. Например, уравнение $7^{x^2-2x-3} - 8^{x^2-2x-3} = 0$ можно разделить на 8^{x^2-2x-3}. Бывает другой случай, в уравнении или неравенстве есть повторяющиеся степени. В таком случае можно попытаться привести уравнение или неравенство к простейшему виду с помощью замены переменной. Если данное преобразование приводит к простейшему виду, то, соответственно, можно перейти к решению задачи уже известными методами. Часто этот прием эффективно применяется тогда, когда в уравнении или неравенстве присутствует тригонометрическая, логарифмическая функция в показателе степени. Например, в таком случае: $4 \cdot 16^{cosx} - 9 \cdot 4^{cosx} + 2 = 0$.

Такие рекомендации к решению задач по теме «Показательные уравнения и неравенства» дают возможность систематизировать знания и убедить учащихся в том, что решение даже сложных на первый взгляд показательных уравнений и неравенств сводится к решению простейших типов и не является невыполнимой задачей.

§13. Описание проведенного педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе СОШ №2 Тверской области г. Торопец в период с декабря 2017 по июнь 2018 года.

В данном эксперименте принимало участие 47 учеников 11-го класса, которые учатся по программе для общеобразовательных классов по учебному пособию Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина Алгебра и начала математического анализа [5]. Данный эксперимент состоял из обучающего и контролирующего этапов.

Обучающий этап состоял в изучении темы «Показательные уравнения и неравенства», разработке и внедрении методики решения задач по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Данная методика состояла проработке заданий по следующему плану. Последовательность действий при работе с показательным уравнением:

1. Проанализируем, можем ли мы привести его к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, если можем, то решаем его способом приведения к общему основанию и по теореме приравниваем показатели. В противном случае переходим к следующему пункту.

2. Проанализируем можем ли решить данное уравнение вынесением общего множителя за скобки. В противном случае переходим к следующему пункту.

3. Проанализируем можем ли решить данное уравнение приведением к квадратному уравнению. К такому виду уравнения относительно новой переменной t сводятся уравнения: $Aa^{2x} + Ba^{x} + C = 0$ подстановкой a^{x}= t,

при этом $a^{2x} = t^2$; $Aa^x + Ba^{-x} + C = 0$ подстановкой a^x= t, при этом $a^{-x} = \frac{1}{t}$; $Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0$ с предварительным делением обеих частей на b^{2x} и подстановкой $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ = t. Данный способ приводит уравнение также к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, этот вариант рассмотрен в пункте 1.

4. В случае если представлена задача на решение уравнения, представляющего из себя *стандартное показательное уравнение усложненной структуры (возможно с присутствием тригонометрической и логарифмической функции),* то оно решается с помощью 1,2 и 3 пунктов с предварительным использованием некоторых приемов. Необходимо помнить, что, решая уравнения или неравенства всегда необходимо анализировать ОДЗ (в том числе ОДЗ логарифма в смешанных задачах, где он фигурирует). Перейдем к пункту *«Задачи с усложненной структурой»*. В случае если представлена *текстовая задача* переходим к пункту 5 *«Текстовая задача»*. В случае если представлена *задача с параметром* переходим к пункту «*Задача с параметром*».

Задачи с усложненной структурой. Если уравнение можно привести к простейшему с помощью равносильных преобразований с использованием свойств степеней, то приводим уравнение к уже понятному виду и переходим к алгоритму решения задач базового уровня. Иначе, переходим к следующему пункту. *Если члены уравнения представляют собой степени с одинаковыми показателями, но различными основаниями*, то такое уравнение можно попытаться привести к простейшему с помощью деления обеих частей уравнения на одно и то же число или выражение (в большинстве случаев это деление на степень с большим показателем). Если, используя данный прием, получается привести уравнение или неравенство к уже понятному виду, то после данных преобразований можно перейти к алгоритму решения задач базового уровня. Иначе, переходим к следующему пункту. *Если в уравнении есть повторяющиеся степени*, то можно попытаться привести уравнение или неравенство к простейшему с помощью замены переменной. Если данное преобразование приводит к понятному виду, то можно перейти к алгоритму решения задач базового уровня.

5. *Текстовая задача.* Как правило, текстовая задача в рамках темы «Показательные уравнения и неравенства» представлена прикладной задачей, где участвует физический или химический процесс, уравнение которого описывается показательным уравнением. Часто такие задачи решаются обычной подстановкой данных условия в заданное уравнение. Подставив известные данные задание также решается элементарными вычислениями.

6. *Задача с параметром.* Задания с параметром по теме «Показательные уравнения и неравенства», как правило, выглядят однообразно. Для решения такого рода задач необходимы навыки решения квадратных уравнений. План действий в таких задачах следующий:

– рассматриваем уравнение на предмет возможности замены переменной для того чтобы получить квадратное уравнение, с которым в последствии можно будет работать (в примерах, приведенных выше $t=3^x$ и $t=2^x$);

– вычисляется дискриминант;

– в зависимости от условия задачи получаем уравнение, в котором фигурирует дискриминант;

– из уравнения с дискриминантом, данных условия, ОДЗ получается система уравнений или неравенств, решение и анализ которой будет решением задачи.

В случае если решаем неравенство, то необходимо напомнить один нюанс, после чего можно переходить по пунктам аналогично уравнениям, с поправкой на то, что происходит решение неравенства. Здесь учащиеся должны помнить, что при переходе к неравенству относительно показателей степени знак неравенства сохраняется в случае, если основание степени больше 1, в противном случае знак неравенств меняется на противоположный. При $a > 1$ неравенство $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ является равносильным неравенству $f(x) = g(x)$. При $0 < a < 1$ показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ является равносильным неравенству $f(x) < g(x)$. С учетом данного нюанса переходим к решению.

1. Необходимо понять можем ли привести неравенство к простейшему виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ с помощью элементарных преобразований. Если можем, то решаем способом приведения к общему основанию. Иначе, переходим к следующему пункту.

2. Анализируем можем ли решить данное неравенство вынесением общего множителя за скобки. Если данный способ в итоге приводит нас к виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то мы уже можем решить данную задачу. Иначе, переходим к следующему пункту.

3. Проанализируем можем ли привести данное неравенство к квадратному.

В случае если представлена задача на решение неравенства, представляющего из себя *стандартное показательное неравенство усложненной структуры (возможно с присутствием тригонометрической и логарифмической функции)*, то оно решается с помощью 1,2 и 3 пунктов с предварительным использованием некоторых приемов.

Необходимо помнить, что, решая неравенства всегда необходимо анализировать ОДЗ (в том числе ОДЗ логарифма в смешанных задачах, где он фигурирует). Перейдем к пункту «*Задачи с усложненной структурой*». В случае если представлена *текстовая задача* переходим к пункту «*Текстовая задача*».

4. *Задачи с усложненной структурой.* Любое неравенство можно привести к простейшему с помощью равносильных преобразований с использованием свойств степеней, замены переменной или других преобразований. Таким образом, приводим неравенство к уже понятному виду и переходим к алгоритму решения задач базового уровня.

Текстовая задача. В зависимости от того, что требуется найти необходимо по заданному процессу составить показательное неравенство.

Все примеры представлены в Приложение 1.

Целью обучающего этапа являлось внедрение данной методики в процесс изучения темы «Показательные уравнения и неравенства». Целью контролирующего этапа являлось определение результативности проведенной работы. В исследовании приняли участие два 11-х класса:

– работающий по обычной программе (23 ученика);
– использующий новую методику (24 ученика).

Таблица 12

Результаты контрольной работы на тему «Показательные уравнения и неравенства»

№ задания	Выполнили верно		Выполнили не верно		Не приступали к решению	
	Класс 1	Класс 2	Класс 1	Класс 2	Класс 1	Класс 2
1	78%(18)	87%(21)	22%(5)	13%(3)	0	0
2	96%(22)	96%(23)	4%(1)	4%(1)	0	0
3	74%(17)	83%(20)	26%(6)	17%(4)	0	0
4	52%(12)	67%(16)	48%(11)	33%(8)	0	0
5	48%(11)	79%(19)	43%(10)	21%(5)	9%(2)	0
6а	26%(6)	58%(14)	52%(12)	29%(7)	22%(5)	13%(3)
6б	22%(5)	58%(14)	56%(13)	29%(7)	22%(5)	13%(3)

В ходе контролирующего этапа учащимся 11 классов, обучающимся на базовом уровне предлагалось за 40 минут решить контрольную работу, которая состояла из следующих типов задач:

– задачи на решение простейших показательных уравнений;
– задачи на решение показательных уравнений, сводящихся к простейшим;
– задачи на решение простейших показательных неравенств;
– задачи на решение показательных неравенств, сводящихся к простейшим;

задачи на решение уравнений, совмещающих в себе тригонометрическую, логарифмическую и показательную функции.

Контрольная работа представлена в Приложение 2. Приведем результаты данной контрольной работы (таблица 12). Класс 1 - работающий по обычной программе (23 ученика), Класс 2 - использующий новую методику (24 ученика).

Результаты без разбиения по задачам представлены в Таблице 13.

Таблица 13

Результаты контрольной работы на тему «Показательные уравнения и неравенства» без разбиения по задачам

Выполнили все задания верно		Допустили ошибку в каком либо задании		Не приступили к решению какого-либо задания	
Класс 1	Класс 2	Класс 1	Класс 2	Класс 1	Класс 2
22%(5)	*58%(14)*	*56% (13)*	*29%(7)*	*22%(5)*	*13%(3)*

По результатам контрольной работы можно сделать выводы: простейшие уравнения (задание №1 и №2) и неравенства (задание №3) верно решили 78% и 87%, 96%, 74% и 83%, соответственно. Из этого можно сделать вывод, что знания, необходимые для решения базовых задач по данной теме имеют подавляющее большинство учащихся как в контрольном, так и в экспериментальном классе. Задание №4 верно решили 52% и 67% процентов учащихся. Отметим, что к решению первых четырех заданий приступали все учащиеся. Пятое задание успешно выполнили 48% и 79% учащихся. Хотя процент верно выполнивших это задание больше, чем, например, задания №4, но к выполнению данного задания не приступили 9% учащихся по обычной программе. Части задания №6 верно выполнили 26% и 22% учащихся по обычной программе и 58% учащихся с применением новой методики, соответственно. 22% и 13% учащихся не приступали к решению Задания №6. Следует отметить, что задание №6 является заданием профильного уровня и такие результаты достаточно высокие для не профильного класса.

В ходе решения задач, учащимися были допущены следующие виды ошибок: не верно записано условие, допущена вычислительная ошибка, произведен неравносильный переход, не верное использование формулы. Процентное отношение допущенных ошибок представлено в Таблице 14.

Таблица 14

Ошибки, допущенные в контрольной работе на тему «Показательные уравнения и неравенства»

Номер задания Вид ошибки	Количество человек	
	Класс 1	Класс 2
№1. Вычислительная ошибка Не верно записано условие	*17%(4)* *4%(1)*	*13%(3)*
№2. Не верное использование формулы Не верно записано условие	*4%(1)*	 *4%(1)*
№3. Вычислительная ошибка Не верно записано условие	*22%(5)* *4%(1)*	*13%(3)* *4%(1)*
№4. Не верное использование формулы Не верно записано условие	*43%(10)* *4%(1)*	*33%(8)*
№5. Произведен неравносильный переход Вычислительная ошибка	*17%(4)* *26%(6)*	*4%(1)* *17%(4)*
№6 а) Не верное использование формулы Вычислительная ошибка Не верно записано условие	*4% (1)* *43%(10)* *4%(1)*	*4%(1)* *21%(5)* *4%(1)*
№6 б) Вычислительная ошибка Ошибка-следствие части а)	*4%(1)* *52%(12)*	 *29%(7)*

Результаты показали, что при решении простых задач преобладают вычислительные ошибки, что указывает на недостаточность внимательности и автоматизма. При решении более сложных задач присутствуют уже ошибки, вызванные неправильным применением свойств, правил, алгоритмов, что указывает на недостаточный уровень знаний для решения данных задач. Также, эксперимент показал, что количество ошибок у учащихся, которые использовали рассмотренную методику решения задач меньше по сравнению с учащимися, не использовавшими данный план действий, количество приступивших к решению задач также возросло.

В целом, представленные результаты проведенного эксперимента, целью которого было выявить у учащихся навыки решения задач и уровень знаний по теме «Показательные уравнения и неравенства», показали, что большинство учащихся владеет навыками решения задач по данной теме, но изучение данной темы требует дополнительного времени для проработки применения различных методов и приемов решения задач.

Выводы по второй главе

Рассмотрим основные выводы по теме исследования, полученные во второй главе.

1. Проанализированы типичные ошибки, которые возникают у школьников при решении показательных уравнений и неравенств. Выделены ошибки, связанные со случайными некорректными преобразованиями, ошибками в вычислениях, систематическими ошибками. Также выделены несколько видов ошибок и рассмотрены примеры: потеря корней или решений неравенства; получение посторонних корней или интервалов; некорректность использования замены переменной; проведение подбора корней без достаточных оснований.
2. Показательная функция используется в различных областях знаний, таких как: физика, медицина, социология, математика, биология, множество практических задач из различных областей сводится к решению показательного уравнения или неравенства.
3. Разработана дифференцированная система заданий с уровневой и профильной дифференциацией. Уровневая дифференциация состоит в разделении задач по трем уровням сложности, профильная – в разделении задач на профильный и базовый уровень.
4. Рассмотрены следующие типы нестандартных задач, которые редко встречаются в рамках общеобразовательной программы по теме «Показательные уравнения и неравенства»: задачи на сложные проценты; задачи с использованием теории многочленов; задачи с использованием монотонности функций; показательные уравнения и неравенства, основания степени которых представлены иррациональными числами; задачи, связанные с прогрессиями; задачи с параметрами.

5. Изложены методические рекомендации обучения показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики. Данные рекомендации к решению задач по теме «Показательные уравнения и неравенства» дают возможность систематизировать знания и убедить учащихся в том, что решение даже сложных на первый взгляд показательных уравнений и неравенств сводится к решению простейших типов и не является невыполнимой задачей.

6. Проведен педагогический эксперимент, который состоял из обучающего и контролирующего этапов. Обучающий этап состоял в изучении темы «Показательные уравнения и неравенства», разработке и внедрении методики решения задач по теме «Показательные уравнения и неравенства». Контролирующий этап состоял в определении результативности проведенной работы. В целом, представленные результаты проведенного эксперимента, целью которого было выявить у учащихся навыки решения задач и уровень знаний по теме «Показательные уравнения и неравенства», показали, что большинство учащихся владеет навыками решения задач по данной теме, но изучение данной темы требует дополнительного времени для проработки применения различных методов и приемов решения задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенного исследования были проанализированы роль и место изучения показательных уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Сделаны выводы, что можно выделить три ключевых (основных) направления линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики: прикладное направление, теоретико-математической направление, установление связей с остальным содержанием курса математики. Показательные уравнения имеют не только важное теоретическое значение, но и служат практическим целям. Большое количество задач сводится к решению показательных уравнений и неравенств.

В данной работе раскрыты понятия показательных уравнений и неравенств, выделены основные цели и задачи обучения показательным уравнениям и неравенствам, проанализированы требования к предметным результатам освоения по ФГОС.

Проанализированы учебные пособия 10-11 классов в рамках изучения темы «Показательные уравнения и неравенства», сделаны выводы об отличии последовательности изложения материала, введения определений и рассмотрения методов решения показательных уравнений и неравенств.

В данном исследовании выделены типы показательных уравнений и неравенств и методы их решения, выделены основные типы задач на решение показательных уравнений и неравенств, рассмотрена трактовка понятия «дифференциация обучения» в современной научно-методической и педагогической литературе.

Во второй главе исследования проанализированы типичные ошибки, которые возникают у школьников при решении показательных уравнений и неравенств. Выделены ошибки, связанные со случайными некорректными преобразованиями, ошибками в вычислениях, систематическими ошибками.

Также, освящен прикладной аспект обучения показательным уравнениям и неравенствам.

Разработана дифференцированная система заданий с уровневой и профильной дифференциацией.

Рассмотрены нестандартные задачи, которые редко встречаются в рамках общеобразовательной программы по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Изложены методические рекомендации обучения показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математики.

Проведен педагогический эксперимент, который состоял из обучающего и контролирующего этапов, результаты которого позволяют утверждать, что большинство учащихся владеет навыками решения задач по данной теме, но изучение данной темы требует дополнительного времени для проработки применения различных методов и приемов решения задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2011. – 368 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин– М.: Просвещение,2018.– 432 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / Мордкович А.Г., Семенов П.В. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник (базовый и углублённый уровни) / Мордкович А.Г., Семенов П.В. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. - 264 с.

5. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин; под ред. А. Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2010. – 336 с.

6. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни /С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин–М.: Просвещение,2018. – 464 с.

7. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / Мордкович А.Г., Семенов П.В. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

8. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник (базовый и углублённый уровни) / Мордкович А.Г., Семенов П.В. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 264 с.

9. Алимов, Ш.А. Рабочая программа по алгебре к учебнику «Алгебра и начала математического анализа» для 10–11 кл /Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, и др. — Просвещение, 2016 – 36 с.

10. Атаманская, Г.А. Организация уровневой дифференциации учащихся в процессе обучения математике/ Г.А. Атаманская// Международный студенческий научный вестник. – 2014. – № 4. – С. 11.

11. Афоничева, Ю.А., Методика обучения решению показательным уравнениям и неравенствам в школьном курсе математике/ Ю.А. Афоничева// Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция «Молодежь. Наука. Общество». – 2019.

12. Афоничева, Ю.А., Методика решения задач по теме «Показательные уравнения» / Ю.А. Афоничева // II Международная заочно научно-практическая конференция «Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях» на базе Луганского национального университета (ЛНУ) имени Тараса Шевченко, г. Луганск. – 2019–С. 93-96.

13. Афоничева, Ю.А., Некоторые аспекты изучения показательных уравнений и неравенств в средней школе / Ю.А. Афоничева // Научный журнал Вестник магистратуры. – 2019. – №2-1–С. 76-79.

14. Бабенко, А.С. Анализ результатов проверки заданий с развернутым ответом единого государственного экзамена по математике за 2015 год / А.С. Бабенко, Н.Л. Марголина, Т.Н. Матыцина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2016. – №2–С. 14-16.

15. Бекаревич, А.Н. Уравнения в школьном курсе математики. Книга для учителей математики / А.Н. Бекаревич – Минск– М.: Народная асвета, 1968. – 152 с.

16. Бурмистрова, Т.А. Учебное пособие – Программы общеобразовательных учреждений Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс / Т.А. Бурмистрова – М.: Просвещение, 2009. – 159 с.

17. Величко, Е.В. Реализация прикладной направленности курса алгебры неполной средней школы: автореф. дисс. канд. пед. наук. / Е.В. Величко. – М., 1987. – 15 с.

18. Возняк, Г.М. Прикладные задачи в мотивации обучения / Г.М Возняк // Математика в школе. –1990. – № 2– С. 9-11.

19. Григорян, М.Э. Теория и методика обучения школьников решению уравнений / М.Э. Григорян, П.Б. Болдыревский, М.Л. Залесский, Р.В. Троицкий // Международный журнал экспериментального образования – 2017– № 8– С. 28-33.

20. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В.А. Гусев – М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003. – 432 с.

21. Давыдов, В.В. Обучение математике / В.В. Давыдов, С.Ф. Горбов и др.. - М.: Мирос, 1994. – 192 с.

22. Далингер, В.А. Типичные ошибки учащихся по математике и их причины / В.А. Далингер // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12-1. – С. 94-97.

23. Далингер, В.А. Типичные ошибки учащихся при решении логарифмических уравнений, неравенств и их систем, и пути их предупреждения/ В.А. Далингер// Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4-2. – С. 445-450.

24. Закарлюк, JI.И. Реализация прикладной направленности изучения функций в курсе алгебры 6-8 (7-9) классов Текст. / Л.И. Закарлюк // Дис. канд. пед. наук. М., 1989. - 171 с.

25. Иванов, А.А Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ / А.А. Иванов, А.П. Иванов. –М.: Физматкнига, 2011. –52 с.

26. Кисельников, И.В. Типичные ошибки при решении задания 17 участниками ЕГЭ по математике профильного уровня в Алтайском крае/ И.В. Кисельников // Современные проблемы науки и образования. – 2016. – № 4 – С. 64-65.

27. Книга для учителя к учебнику «Математика». 5 класс. Под редакцией акад. РАН В.В. Козлова и акад. РАО А.А. Никитина /авт.-сост. В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др. – М.: ООО «Русское слово – учебник», 2013. – 256 с. – (ФГОС. Инновационная школа).

28. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2-х ч. Ч I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. / Ю.М. Колягин– М.: Просвещение, 1977. – 110 с.

29. Колягин, Ю.М. О прикладной и практической направленности обучения математике/ Ю.М. Колягин, В.В. Пикан //Математика в школе.1985 –№6 –С.26-32.

30. Концепции развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/.

31. Крутихина, М. В. Типичные ошибки и затруднения школьников при решении неравенств различными способами на едином государственном экзамене по математике / М.В. Крутихина, Н.А. Зеленина, М.Ю. Здоровенко // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2014. – № 10 (октябрь). – С. 176-180.

32. Малкова, Т.В. Математическое моделирование необходимый компонент современной подготовки школьников/ Т.В. Малкова, В.М. Монахов // Математика в школе. - 1984. №3. – С. 19-21.

33. Манаева, Д.Х. Некоторые аспекты решения систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств по ЕГЭ / Д.Х. Манаева// Новая наука: Теоретический и практический взгляд, 2017 – С. 16-18.

34. Марчевская, Е.В. Элементарная алгебра. Методы решения уравнений и неравенств: Учеб. пособие / Е.В. Марчевская, И.К. Марчевский. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 232 с.

35. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для

общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровени / Ш. А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев и др. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

36. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 10 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни /В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова, А.А. Никитина – М.: «Русское слово - учебник», 2014 – 464 с.

37. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 11 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова, А.А. Никитина –М.: «Русское слово - учебник»,2013– 464 с.

38. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

39. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Уч. пос. для студ. пед. инст-в по физ-мат. спец-м/А. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. Сост. В.И. Мишин. –М.: Просвещение,1987–416 с.

40. Моисеева, В.А. Методика формирования у старшеклассников логических приемов мышления при решении уравнений и неравенств: дисс. на соиск. к.п.н. / В.А. Моисеева. – М., Астрахань, 2010 – 25 с.

41. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: ДРОФА, 2013. – 287 с.

42. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: ДРОФА, 2013. – 253 с.

43. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс. Учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина – М.: ДРОФА, 2013. – 318 с.

44. Муравин, Г.К. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс. Учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина – М.: ДРОФА, 2014. – 318 с.

45. Нешков, К.И. Неравенства в курсе математики средней школы: автореф. дис. канд. пед. наук / К.И. Нешков – М., 1956. – 20 с.

46. Никаноркина, Н.В. Подготовка будущего учителя математики к использованию задач как средства дифференциации обучения учащихся средней школы: дис. канд. пед. наук / Н.В. Никаноркина – М., 2006. – 212 с.

47. Овсянникова, Т.Л. Дифференцированные учебные задания как средство систематизации знаний студентов при изучении аналитической геометрии: дис. канд. пед. наук / Овсянникова Т.Л. – Орел, 1998. – 153 с.

48. Оганесян, В.А. Методика преподавания математики в средней школе. / В.А. Оганесян – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

49. Открытый банк заданий ЕГЭ [Электронный ресурс] /. — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: fipi.ru, свободный.

50. Паюл, М.В. Методика изучения уравнений и неравенств в 6-8 классах: Дис. канд. пед. наук. / М.В. Паюл. – Киев: 1985. - 198 с.

51. Педагогика: Учебное пособие для студентов педагогических учебных заведений / В.А. Сластенин, И.Ф. Исаев, А.И. Мищенко, Е.Н. Шиянов. – М.: Школа-Пресс, 1997. – 512 с.

52. Подласый, И.П. Педагогика. Новый курс: Учебник для студ. пед. вузов: В 2-ух кн. Кн. 1: Общие основы. Процесс обучения / И.П. Подласый – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. – 576 с.

53. Пратусевич, М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2018. – 416 с.

54. Пратусевич, М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2017. – 464 с.

55. Пути усиления прикладной и практической направленности обучения математике: Сб. науч. тр. / под ред. И.А. Лурье – М.: изд. АПН СССР,1988 –88 с.

56. Рисберг, В.Г. Решение показательных, логарифмических, степенных и степенно-показательных уравнений, неравенств и систем уравнений / В.Г. Рисберг – Пермь: ПКИПКРО, 2011. –52 с.

57. Сабинина, Л.В. Методика в понятиях и терминах. Ч.1. / Л.В. Сабинина– М.: Просвещение, 1978. – 320 с.

58. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев – М.: Просвещение. – 2002. – 224с.

59. Саранцев, Г.И. Методология обучения математике / Г.И. Саранцев – Саранск: 2001. –141 с.

60. Сборник задач по математике для поступающих во втузы/ Под редакцией М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1988. – 516 с.

61. Смыковская, Т.К. Технология дифференцированного обучения учащихся 7-9 классов решению текстовых задач алгебраическим методом/ Т.К. Смыковская, Ю.А. Машевская, О.М. Вихляева // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 12-11. – С. 2468-2472.

62. Соболь, Б.В. Пособие для подготовки к ЕГЭ и Централизованному тестированию по математике / Соболь Б.В., Виноградова И. Ю., Рашидова Е. В. – М.: Феникс. – 2004.

63. Степуро, И.М. Взаимная связь в процессе изучения понятий алгебраической функции, алгебраического уравнения и алгебраического функционального неравенства действительного переменного: автореф. дис. канд. пед. наук / И.М. Степуро. - Москва: 1970. – 21 с.

64. Темербекова, А.А. Методика преподавания математики: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. / А.А. Темербекова – М.: ВЛАДОС. – 2003. – 176 с.

65. Титарева, Г.А. Роль и место функций в школьном курсе математики / Г.А. Титарева // Современные научные исследования и инновации. – 2016. – № 6. – С. 17-18

66. Утеева, Р.А. Дифференцированное обучение математике учащихся средней школы: Пособие по спецкурсу и спецсеминару для студентов математических специальностей педагогических вузов / Р.А. Утеева – М.: Прометей. – 1996. – 118 с

67. Утеева, Р.А. Дифференцированные задания по математике: 6 класс: Пособие для учителя / Р.А. Утеева – Тольятти, 1996. – 53 с.

68. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. / Р.А. Утеева – М.: Прометей. – 1997. – 230 с.

69. Федеральный государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. URL: http://fgos.ru.

70. Федеральный закон «Об образовании в РФ» https://fzrf.su/zakon/ob-obrazovanii-273-fz/.

71. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования [Электронный ресурс]. URL: http://www.fpu.edu.ru.

72. Федорова, Н.Е. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации 10 – 11 классы: учебное пособие для общеобразоват. организаций / Н.Е. Федорова, М.В. Ткачева. – М.: Просвещение, 2017. – 172 с.

73. Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи. / Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. – М.: Просвещение. – 1989. – 192 с.

74. Харламов, И.Ф. Педагогика / И.Ф. Харламов – М.: Гардарики. – 1999. – 520 с.

75. Чулков П.В. Уравнения и неравенства в школьном курсе математики. – URL: https://курсы.1сентября.рф/каталог/ED-11-004 (Дата обращения 05.12.2018)

76. Шарова, О.П. О некоторых аспектах методики обучения учащихся решению сюжетных задач арифметическим методом/ Вопросы методики обучения математике в средней школе: Учебное пособие/ отв. ред. Т.Н. Карпова, Т.М. Корикова. – Ярославль: Издательство ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2002

77. Caroline Chen. The Paradox of the Proof. [Electronic resource] // Project Wordsworth, 2013. – URL: http://projectwordsworth.com/ the-paradox-of-the-proof.

78. Daniel J. Brahier. Teaching Secondary and Middle School Mathematics [Text]/ J. Brahier. Daniel // The Teaching of Number Sense, 2016. – PP. 235-244

79. Smith, Mark. K. Keeping a learning journal. A guide for educators and social practitioners [Электронный ресурс] / Smith, Mark K // The encyclopaedia of informal education. – 2013.

80. Stephen Wolfram. My Life in Technology—As Told at the Computer History Museum. [Electronic resource] // Stephen Wolfram, 2016.

81. Thompson, P.W. The design of tasks in support of teachers’ development of coherent mathematical meanings [Электронный ресурс]/ Thompson, P.W., Carlson, M.P. & Silverman, J. J // Math Teacher Educ. – 2007. – № 4. – с. 415-432.

Приложение А

Примеры задач по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Пример уравнения, решение которого происходит *вынесением общего множителя за скобки*. Например: $3^{2x+1} - 9^x = 18$, преобразовав, получим $3^{2x}(3-1) = 18$.

Пример уравнения, решаемого *приведением к квадратному уравнению*. $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$. Данное уравнение имеет вид $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$. В данном случае замена: $7^x = y$.

Задачи с усложненной структурой. Если уравнение можно привести к простейшему с помощью равносильных преобразований с использованием свойств степеней, то приводим уравнение к уже понятному виду и переходим к алгоритму решения задач базового уровня. Например: $9^{6+x} = 81^{2x}$ приводится к виду $\mathrm{a}^{f(x)} = a^{g(x)}$ с помощью элементарных преобразований $81^{2x} = 9^{2 \cdot 2x} = 9^{4x}$, таким образом уравнение примет вид $9^{6+x} = 9^{4x}$.

Если члены уравнения представляют собой степени с одинаковыми показателями, но различными основаниями, то такое уравнение можно попытаться привести к простейшему с помощью деления обеих частей уравнения на одно и то же число или выражение (в большинстве случаев это деление на степень с большим показателем). С помощью деления на 8^{x^2-2x-3}, например, можно привести к простейшему виду уравнение $7^{x^2-2x-3} = 8^{x^2-2x-3}$. В случае если данный прием не приводит к стандартному виду, то переходим к следующему пункту.

Если в уравнении есть повторяющиеся степени, то можно попытаться привести уравнение или неравенство к простейшему с помощью замены переменной. Например: $4 \cdot 16^{cosx} - 9 \cdot 4^{cosx} + 2 = 0$.

Примеры задач по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Текстовая задача. Пример такой задачи: «При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 10^5$Па $\cdot$ м^5, где p – давление в газе в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{5}{3}$. Найдите, какой объем V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3{,}2 \cdot 10^6$Па» В данной задаче ключевым моментом является понять то, что поскольку произведение давления на степень объёма постоянно, а давление не ниже $3{,}2 \cdot 10^6$Па, при заданных значениях параметров k и const= 10^5Па $\cdot$ м^5, таким образом мы придем к уравнению $3{,}2 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} = 10^5$. Ответ дает решение данного уравнения с помощью элементарных преобразований.

Задача с параметром. Задания с параметром по теме «Показательные уравнения и неравенства», как правило, выглядят однообразно, например: «При каких значениях p уравнение $3 \cdot 3^{2x} + p \cdot 3^x + p - 3 = 0$ имеет один корень» или «Найти множество значений параметра a, при которых уравнение $4^x + (3a+2)2^x + 2a^2 - 2a - 24 = 0$». Очевидно, что для решения такого рода задач необходимы навыки решения квадратных уравнений.

Пример неравенства, решаемого с помощью вынесения общего множителя за скобки: $2^x - 2^{x-2} \leq 3$. Здесь при вынесении множителя с переменным показателем за скобки получим в скобках выражение, являющееся определенным числом.

Неравенство, решаемое приведением к квадратному. Как правило, чтобы привести неравенство к такому виду, аналогично уравнениям, необходимо использовать способ замены переменной. Например: $5^{2x+1} > 5^x + 4$, $5^x = y$ замена.

Продолжение Приложения А

Примеры задач по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Задачи с усложненной структурой. Любое неравенство можно привести к простейшему с помощью равносильных преобразований с использованием свойств степеней, замены переменной или других преобразований. Например: $3^{-2x+4} - 81 \cdot 3^{-x+3} - 3^{-x+1} + 81 \leq 0$ приводится к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ с помощью элементарных преобразований $3^4 \cdot 9^{-x} - 3^7 \cdot 3^{-x} - 3 \cdot 3^{-x} + 3^4 \leq 0$, таким образом, неравенство примет вид $3^{-3} \leq 3^{-x} \leq 3^3$.

Текстовая задача. Пример такой задачи: «При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон 2.56$\cdot 10^6$ Па·м^4, где p – давление в газе в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объём V(в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном 6.25$\cdot 10^6$Па.» В данной задаче ключевым моментом является понять то, что поскольку произведение давления на степень объёма постоянно, а давление не ниже 6.25$\cdot 10^6$Па, при заданных значениях параметров $k = \frac{4}{3}$ и const= 2.56$\cdot 10^6$ Па·м^4 , таким образом мы придем к неравенству 6.25$\cdot 10^6 \cdot V^{\frac{4}{3}} \leq 2.56 \cdot 10^6$. Ответ дает решение данного неравенства с помощью элементарных преобразований.

Приложение Б

Контрольная работа по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Контрольная работа

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $3^{x-3} = 81$ (7)
2. Решить уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-9} = \frac{1}{9}$ (11)
3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

   A) $2^x \geq 4$ 1) $(-\infty; 2]$

   Б) $0{,}5^x \geq 4$ 2) $[-2; +\infty)$

   В) $0{,}5^x \leq 4$ 3) $(-\infty; -2]$

   Г) $2^x \leq 4$ 4)$[2; +\infty)$

   (Ответ: А-4, Б-3, В-2, Г-1.)
4. Решите неравенство: $6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2$

   (Ответ: (-∞;0)∪(0;+∞))
5. $2^x + 32 \cdot 2^{-x} \geq 33$

   (Ответ:$(-\infty; 0] \cup (5; +\infty)$)
6. а) Решите уравнение $36^{\sin x} + 36^{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{37}{6}$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$.

   (Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$;б) $\frac{49\pi}{6}$; $\frac{47\pi}{6}$; $\frac{43\pi}{6}$)

Контрольная работа по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Вариант 2

1. *Найдите корни уравнения* $4^{x-6} = 64$. *(9)*
2. Решить уравнение $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-5} = 49$ (3)
3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

   A) $2^x \geq 2$ 1) $x \geq 1$

   Б) $0{,}5^x \geq 2$ 2) $x \leq 1$

   В) $0{,}5^x \leq 2$ 3) $x \leq -1$

   Г) $2^x \leq 2$ 4) $x \geq -1$

   (Ответ: А–1, Г–2, Б–3, В–4)
4. Решите неравенство: $2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x$

   (Ответ: $[-1; 2]$)
5. Решите неравенство: $36^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x-1} + 1 \geq 0$

   (Ответ: $(-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$)
6. а) Решите уравнение $4 \cdot 16^{\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 2 = 0$.

   б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$.

   (Ответ: а) $-\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{5\pi}{3};\ -\pi$)