МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Уравнения как средство реализации внутрипредметных связей курса математики общеобразовательной школы»

Студент М.Г. Пугачева
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент Н.А. Демченкова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Обоснование целей и задач современного образования на базе федерального государственного образовательного стандарта требует такой организации процесса обучения, которая обеспечивает изучение тем во взаимосвязи как межпредметной, так и внутрипредметной, а также предусматривает усиление их прикладной направленности.

Главные задачи современного образования заключаются в том, чтобы обучить учащихся умению учиться, совершенствовать учебный материал и повысить качество образования школьников. Поэтому в последнее время создается много новых концепций, технологий, методов и форм обучения. У современного школьника должен формироваться стойкий интерес к предмету с ориентацией на профессию, особенно если он связан с математикой и подготовкой к поступлению и обучению в вузе.

«Математика, как один из самых важных школьных предметов, содержит большой теоретический материал для усвоения обучающимися, определенную связь, которая сохраняет логику данной науки и объединят все элементы знаний. Математический курс пронизан внутрипредметными связями, которые являются фундаментом учебного предмета. Благодаря внутрипредметным связям, начиная с первых уроков, реализуется преемственность в обучении математике. Реализация внутрипредметных связей, относительно учебной деятельности обучающегося, находит отражение в его деятельности по усвоению и осознанию связей в изученном материале, а так же при обобщении и систематизации знаний. С позиции педагога реализация внутрипредметных связей состоит в его функциональной работе по отбору материала, выбору организационных форм, методов и приемов обучения» [27].

«Уравнение – это ведущее понятие курса математики, поэтому оно должно способствовать полной реализации внутрипредметных связей. Оно прослеживается во всём курсе математики» [16, С. 10]. «Ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике математики организовано в содержательно-методическую линию – линию уравнений и неравенств. Для линии уравнений и неравенств характерна направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики. Эта линия тесно связана с числовой линией. Основная идея, реализуемая в процессе установления взаимосвязи этих линий, – это идея последовательного расширения числовой системы. Все числовые области, рассматриваемые в школьной алгебре и началах анализа, возникают в связи с решением каких-либо уравнений, неравенств, систем. Линия уравнений и неравенств тесно связана также и с функциональной линией. Одна из важнейших таких связей – приложения методов, разрабатываемых в линии уравнений и неравенств, к исследованию функции (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, промежутков их знакопостоянства и т.д.)» [13, С. 106].

«В качестве последнего примера отметим взаимосвязь линии уравнений и неравенств с алгоритмической линией. Само содержание понятия алгоритма может быть в значительной мере выделено на основе анализа процесса решения уравнений различных классов» [13, С. 107].

«В научно-методических работах разных лет, связанных с методикой обучения математике, достаточно большое внимание уделялось исследованиям проблем межпредметных связей. Это можно отметить и по современным научным статьям, учебникам, пособиям и монографиям в данной области. Однако, реализация внутрипредметных связей в школьном курсе математики недостаточно хорошо освещена» [27].

В своей работе В.А. Далингер отмечает: «Наиболее важной стороной внутрипредметных связей в школе является возможность рассматривать их как средство повышения эффективности учебного процесса» [17]. Проблемы, связанные с реализацией внутрипредметных связей в курсе математики общеобразовательной школы, особенно остро стоят в старших классах. Это обусловлено тем, что освоение нового материала должно опираться на уже усвоенный материал, кроме того, материал усложняется, а его объем увеличивается.

На наш взгляд решить эту проблему можно с помощью реализации внутрипредметных связей при решении задач, так как задача – это самое важное средство обучения математике.

В своих работах российский математик-педагог Ю.М. Колягин утверждает, что задача – это основное средство обучения [22, 23, 24, 25, 26]. В настоящее время обучение решению математических задач вызывает наибольшие затруднения.

Что касается самой проблемы реализации внутрипредметных связей, то ей посвящены различные научные труды, результаты которых представлены в виде книг, статей и диссертаций [9, 15, 16, 21, 33, 37, 39, 40, 49, 62, 64]

Успехов в решении этой проблемы можно добиться, научившись глубоко и эффективно использовать внутрипредметные связи на протяжении всего курса обучения.

В данной работе мы будет основываться на созданных Ю.М. Колягиным, Г.И. Саранцевым и В.И. Крупичем методиках обучения решению математических задач [22, 59, 29].

Анализ исследований в педагогической науке показывает, что сложились определенные теоретические предпосылки для разработки методики реализации внутрипредметных связей при обучении математике в общеобразовательной школе, достаточно полно определено понятие внутрипредметных связей, рассмотрены особенности реализации внутрипредметных связей при обучении математике в курсе средней школы и методические основы их реализации. Ряд авторов предлагает использовать подходы, связанные с особенностями реализации внутрипредметных связей, при изучении конкретных тем школьного курса математики. Например, включение элементов теории вероятностей в структуру школьного курса математики привели к необходимости выделения специальной стохастической линии [10, 11, 50, 61]. А.А. Аксенов [2] представляет внутрипредметные связи как основной ресурс процесса поиска решения конкретных математических задач. В ряде работ в аспекте некоторых проблем рассматриваются внутрипредметные связи курса геометрии (планиметрии) с курсом алгебры в средней школе [31]. Следует отметить, что до сих пор остаются актуальными проблемы, связанные с пониманием природы внутрипредметных связей, их трактовкой, классификацией и, как следствие, методикой реализации на практике.

Выявляется **противоречие** между потребностями реализации внутрипредметных связей при обучении математике и недостаточной научно-методической разработанностью данной проблемы.

Проблема исследования состоит в поиске методики реализации внутрипредметных связей при обучении математике в общеобразовательной школе при решении уравнений.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика реализации внутрипредметных связей в курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования: разработать методику реализации внутрипредметных связей в курсе математики общеобразовательной школы на примере решения уравнений.

Гипотеза исследования: основана на предположении о том, что реализация внутрипредметных связей будет способствовать повышению качества обучения математике.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Определить основные подходы к понятию внутрипредметных связей, описать основные функции, которые выполняют их реализацию.

2. Представить виды внутрипредметных связей, выделить требования к системам математических задач.

3. Разработать системы задач, в которых уравнения будут являться средством для реализации внутрипредметных связей.

4. Рассмотреть задачи единого государственного экзамена по теме исследования.

5. Разработать элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения» для учащихся математического профиля.

6. Рассмотреть метод алгоритмизации для реализации внутрипредметных связей на примере алгебраический уравнений высших степеней.

7. Провести педагогический эксперимент.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы В.А. Далингера [15, 16, 17], В.И. Крупича [29], А.А. Аксенова [8].

Базовыми для настоящего исследования явились также: работы Л.А. Тереховой [62], А.А. Махсудовой [37], А.П. Назаретова [49].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2018/19уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных и вузовских учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы).

2 семестр (2018/19уч.г уч.г.): определение теоретических или методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2019/20 уч.г.): разработка методики реализации внутрипредметных связей с помощью уравнений при обучении математике в общеобразовательной школе.

4 семестр (2019/20 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБУ Школа №34 г.о. Тольятти.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике в общеобразовательной школе на примере решения уравнений.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены различные подходы к определению внутрипредметных связей, описаны их основные функции, представлены виды внутрипредметных связей, выделены требования к системам математических задач, направленным на реализацию внутрипредметных связей при решении уравнений.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в ней разработаны:

– системы уравнений, реализующие внутрипредметные связи;

– элективный курс «Тригонометрические уравнения» для учащихся математического профиля.

Достоверность и обоснованность результатов исследования, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических особенностей и рекомендаций по реализации внутрипредметных связей при изучении уравнений; разработке системы уравнений, реализующие внутрипредметные связи; разработке элективного курса.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

– XIV всероссийской научно-практической конференции «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (г. Пенза, 18 апреля 2018 г.);

– Международной научно-практической конференции «Современное математическое образование: Опыт, проблемы, перспективы» (посвященной 80-летнему юбилею доктора педагогических наук, профессора К.Г. Кожабаева) (8-9 июня 2018 г., Казахстан, г. Кокшетау);

– Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (ноябрь 2018 г., ТГУ);

– III международной научно-практической конференции «Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях» (1-7 июня 2020, г. Луганск).

По теме диссертации опубликованы 4 статьи [18, 55, 54, 55].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по реализации внутрипредметных связей при обучении математике в общеобразовательной школе на примере уравнений.

2. Системы задач по реализации внутрипредметных связей с помощью уравнений при обучении математике в общеобразовательной школе.

3. Элективный курс «Тригонометрические уравнения» для учащихся математического профиля.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 7 таблиц, списка используемой литературы (70 источников). Основной текст работы изложен на 85 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕАЛИЗАЦИИ ВНУТРИПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ КУРСА МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие внутрипредметных связей

До недавнего времени содержание школьного математического образования ориентировалось в большей степени на усвоение знаний, умений и навыков, а в настоящее время добавилась цель – развитие личности ребенка. «Возможность повышения эффективности обучения состоит не в расширении школьного материала, а в некоторых внутренних резервах. В совершенствовании структуры учебных курсов важную роль играет преемственность, установление связей между различными частями, блоками учебного курса. Другими словами, реализацию внутрипредметных связей имеет смысл считать одним из важнейших направлений методического совершенствования обучения в школе» [60]. Реализация внутрипредметных связей создает конкретную преемственность между разными математическими знаниями.

В.А. Петров определял внутрипредметные связи как «проявление преемственности в развитии научных знаний в учебном процессе (условие развития обучения)» [53].

Анализ исследований и литературы по данной теме, показал, что внутрипредметные связи различными авторами определяются по-разному.

В статье «Об одном методе системного анализа внутрипредметных связей» авторы понимают под внутрипредметными связями: «Множество пар (Ai, Ak) где Ai $и$ Ak - элементы знания (части учебного предмета), i, k – их номера, и первый компонент пары используется при изучении второго компонента» [40].

А.В. Усова под внутрипредметными связями понимает [63] «условие, обеспечивающее последовательное отражение содержания предметов».

Н.И. Резник определяет внутрипредметные связи как [57] «выделение пространственных, временных, энергетических и информационных характеристик содержания учебных дисциплин».

П.И. Образцов пишет, что внутрипредметные связи [52] «это связи содержательные, смысловые связи между темами учебной дисциплины».

Р.Ю. Костюченко утверждает, что внутрипредметные связи [28] это «всевозможное отношение взаимной зависимости, обусловленности, общности между объектами одного учебного предмета».

Ш.А. Бакмаев вывел определение внутрипредметных связей [12]: «Если элемент знаний А необходим для изучения элемента В, то говорят, что между этими элементами существует связь, которую обозначают $A \rightarrow B$. Если А и В изучаются в рамках одного предмета, то эта связь внутрипредметная».

Л.В. Дубовая в диссертации «Информационная модель внутрипредметных связей» определяет внутрипредметную связь как «конструкцию учебного процесса, которая связывает элементы структуры внутрипредметного содержания образования и состоит из:

– объекта связи – любого элемента знаний, навыков и умений, принадлежащих рассматриваемому предмету, и используемого, по крайней мере, в двух элементах его структуры;

– канала связи – одного или нескольких элементов образовательной технологии, адекватной предмету, внутри которого устанавливается связь» [19].

«Если подходить с формальной точки зрения, ни один из данных подходов не решает полностью проблемы определения понятия внутрипредметных связей, но каждый из них точно описывает какую-то часть свойств или проявлений внутрипредметных связей. По сути, нам необходимо рассматривать все эти определения не по отдельности, а в совокупности, именно в таком случае описание будет наиболее полным. Причина этого кроется, конечно же, в многофункциональном характере самих внутрипредметных связей.

В качестве еще одного серьезного недостатка всех определений внутрипредметной связи можно отнести тот момент, что в них совершенно не учитывается деятельность учителя. После анализа достоинств и недостатков приведенных определений, было выдвинуто следующее определение внутрипредметных связей. Под *внутрипредметными связями* мы будем понимать связи между знаниями, объективно существующие в науке, нашедшие свое отражение в системе знаний соответствующей учебной дисциплины (в частности, в школьном курсе математики) и устанавливаемые (реализуемые) в учебном процессе посредством использования соответствующей методики обучения.

Под *реализацией внутрипредметных связей* мы будем далее понимать использование таких связей в планировании, организации и анализе практики обучения, обеспечивающих формирование у учащихся системности знаний по учебному предмету в единстве с действиями, которые они вызывают» [60].

В данной работе выделено три основных подхода к понятию внутрипредметных связей.

Первый подход. А.А. Голубев, утверждает, что: «Внутрипредметные связи – это взаимосвязь и взаимообусловленность математических понятий, разделённых временем их изучения. В данном подходе выделяют два вида внутрипредметных связей: логико-математические и методические. Деятельность учащихся при данном подходе заключается в том, что школьник, решая конкретную задачу пытается установить общие логические закономерности между данной задачей и ранее решёнными задачами, найти основной теоретический факт, необходимый для решения задач. Деятельность учителя при реализации внутрипредметных связей заключается в отборе материала, методов и приемов решения конкретных задач, объяснении нового материала с опорой на ранее изученный» [14].

Второй подход. Л.А. Терехова под внутрипредметными связями понимается согласованность различных компонентов познавательной деятельности (знаний, умений, форм, методов и пр.), обеспечивающую целостность изучаемого предмета. При таком подходе выделяют четыре вида внутрипредметных связей: содержательные, операционные, методические и организационные [62].

Но за основу данной работы был выбран третий подход. А.А. Аксенов написал много методических пособий для учителей по внутрипредметным связям [4, 5, 6, 7]. Автор понимает под внутрипредметными связями наличие общих логических закономерностей в конструировании и решении задач. Он подробно описывает реализацию этих связей: «При полноценной реализации внутрипредметных связей посредством решения задач автоматически создается возможность для обучения учащихся использования в решении задач не только тех средств, которыми она сформулирована, но и средств других математических теорий» [2]. Также он пишет: «Нужно большее внимание уделять внутрипредметным связям. При этом они должны носить не эпизодичный характер и применяться не только на уроках обобщенного повторения, а использоваться практически постоянно в текущей работе» [2].

А.А. Аксёнов в диссертации, опираясь на работу В.И. Крупича [29], сформулировал понятие «внутрипредметные связи» на уровне математических субъектов. Математические субъекты – это неопределяемые понятия, теоремы, определения понятий, конкретные математические задачи и т.д. (обозначение: a, b, c ...). Под постулатом будем понимать утверждение, содержащее определённое требование.

Постулат 1. «Для математических субъектов а и b всегда имеет место одно и только одно из следующих двух утверждений:

1) а и b имеют внутрипредметные связи;

2) а и b не имеют внутрипредметных связей.

При этом если математический субъект а связан с математическим субъектом b, то и математический субъект b связан с математическим субъектом а» [8, С. 36].

Постулат 2. «Пусть а и b - различные субъекты математики. Между ними существуют внутрипредметные связи, если выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий:

1) внутренняя логика, определяющая эти субъекты, имеет общие закономерности (в частности, она может совпадать, или, например, субъект а полностью используется для определения субъекта b (например, прямоугольник определяется с помощью параллелограмма, а квадрат с помощью прямоугольника);

2) логика процесса установления истинности субъектов а и b имеет общие закономерности (в частности, она может совпадать, или, например, субъект а полностью используется для установления истинности субъекта b, при этом общая логика в определении субъектов отсутствует (любые две аналогичные по решению математические задачи служат примером для второго пункта постулата, если нет общей логики в их формулировке);

3) для определения (или установления истинности) одного субъекта необходимо применить какие-либо аналитические выражения, содержащиеся в другом субъекте (в частности, например, субъект а полностью аналитически применяется в субъекте b (Субъект а: найти $f'(x)$, где $f(y) = y^2 - 3, x = 1$. Субъект b: решить уравнение $z^3 + z = f'(x)$. Легко увидеть, что субъект а полностью используется аналитически для установления истинности субъект b)» [8, С. 36].

Постулат 3. «Пусть а$, b, \dots, c$ – различные математические субъекты. Между ними существуют внутрипредметные связи, если между любыми двумя из них существует внутрипредметные связи в строгом соответствии с первым и втором постулатами»[8, С. 37].

Таким образом, можно сделать вывод, что между математическими субъектами может быть установлено только два типа внутрипредметных связей – логический и аналитический.

Так как иногда нужно работать не с одним математическим субъектом, а несколькими, рассмотрим понятие математического объекта. Математический объект – это совокупность математический субъектов (обозначение: A, B, C ...).

Постулат 4. «Пусть A и B – математические объекты. Тогда имеет место одно и только одно из следующих условий:

1) внутрипредметные связи между ними существуют тогда и только тогда, когда $A \cap B \neq 0$;

2) внутрипредметные связи между ними не существуют тогда и только тогда, когда $A \cap B = 0$» [8, С. 39].

Следующее определение является результатом всех предыдущих высказываний.

Определение 1. «Пусть A и B – непустые математические объекты. Между объектами A и B реализуются внутрипредметные связи, если существует, по крайней мере, одна пара субъектов $(a_i;\ b_j)$, где первый компонент принадлежит объекту A, второй – объекту B, между которым существуют внутрипредметные связи в строгом соответствии со вторым постулатом» [8, С. 42].

Определение 2. «Внутрипредметные связи, установленные между двумя субъектами, называются безусловными, если определение или установление истинности (ложности) одного субъекта невозможно без использования другого субъекта» [8, С. 43].

Определение 3. «Внутрипредметные связи, установленные между двумя субъектами, называются условными, если определение или установление истинности (ложности) одного субъекта всегда возможно без использования другого субъекта, при помощи замены последнего каким-либо другим субъектом (несколькими субъектами)» [8, С. 43].

Таким образом, внутрипредметные связи, которые реализуются между математическими субъектами и объектами бывают условным и безусловными.

§2. Функции внутрипредметных связей

Основные функции внутрипредметных связей можно разделить на три класса:

1) «развивающие (способствуют установлению связей между понятиями, развивают математическое мышление, служат средством формирования единой научной картины мира);

2) обучающие (предупреждают формализм путем включения изучаемого понятия в систему понятий и раскрытия его свойств; позволяют сформировать динамическую и качественно изменяющуюся систему знаний, допускающую перенос на новое содержание);

3) воспитательные (экономят время обучающихся, способствуют устранению их перегрузки)» [27].

Рассмотрим, какие функции выполняет реализация внутрипредметных связей посредством решения задач [65].

1. Философская функция. Математика как дисциплина и как академический объект для формирования диалектического миропонимания имеет много возможностей. Осуществление внутрипредметных связей путем выполнения задач является одним из самых мощных инструментов. Непосредственно вследствие осуществления внутрипредметных связей можно понять единство различных математических субъектов, которые часто устанавливают противоречивые факты. Способность определять субъект с помощью другого, а также создавать внутри себя связанный объект, является истинным воплощением закона перехода от количественных изменений к

качественным и наоборот. В создании диалектического миропонимания школьников ведущую роль играет безусловное внутрипредметные связи.

2. Языковая функция. Как вы уже знаете, математика - это язык, на котором разговаривает природа. Также она является инструментом, который используют для построения абстрактных моделей реальных естественных объектов и процессов. Осуществление внутрипредметных связей путем выполнения задач играет большую роль в становлении математики как языка. Это потому, что недостаточно использовать один математический предмет для описания реальных природных объектов и процессов. Для данной цели применяются некоторое количество субъектов, то есть осуществление внутрипредметных связей неизбежно при применении математики в качестве языка.

3. Развивающая функция. Одним из значимых факторов является осуществление внутрипредметных связей путем выполнения задач, который развивает теоретическое, математическое и логическое мышление учащихся, поскольку за счет применения внутрипредметных связей логического типа учащиеся пробуют применять математические установки одной области в её других разделах. Логическое мышление учеников развивается в основном за счет логического вида внутрипредметных связей, виды связи аналитического типа делают более полным курс математики, демонстрируют связь разных областей, что наибольшим образом способствует развитию теоретического и математического мышления, закладывают фундамент для развития сознания в области математики.

4. Функция уменьшения «сброса знаний». Обычное распространенное явление безусловно всех учителей в практической работе это - «сброс знаний». Сущность собственно его в том, что мозг человека склонен забывать информацию, которая не использовалась какой-то период времени. Ученые обнаружили, что невозможно полностью решить проблему сброса знаний. Тем не менее, сброс знаний может быть значительно сокращен. Применение внутрипредметных связей с помощью выполнения задач

является одним из основных способов решения данной проблемы, поскольку необходимо применять одни и те же логические шаблоны при изучении различных тем. Использование учениками аналитического типа внутрипредметных связей даёт им возможность повторять чаще ранее полученные знания и знакомые логические приемы в своей текущей работе.

5. Пропедевтическая функция. Именно эта функция считается одной из главных, поскольку в ней успешно реализуется пропедевтика того или другого материала, что содействует его лучшему усвоению. Применение внутрипредметных связей, при помощи выполнения задач, обеспечивает пропедевтику материала на разделение их на два типа. Внутрипредметные связи логического типа определяет логику выполнения задач на основе свежего материала. Тип аналитический способствует тому, что при выполнении заданий по свежей теме учащиеся используют известные методики. В данном случае, это содействует непрерывности преподавания математики.

6. Интенсифицирующая функция. Применение внутрипредметных связей помогает организации развития образовательного процесса, который собственно играет значимую роль в современном обществе информационных технологий. Это связано с тем, что внутрипредметные связи двух типов помогают сэкономить время, поскольку они позволяют сделать учебный материал более плотным при этом без вреда для его качества. Это можно объяснить тем фактом, что постоянное применение законов общей логики и нередкое использование привычных аналитических методик приводит к возможности их применения к автоматизму, что гарантирует более быстрое изучение свежего материала.

7. Воспитывающая функция. Ввиду того, что применение внутрипредметных связей позволяет «обратные» связи между предметами (темы) и объектами (разделы), для более удачного исследования свежего материала учащийся обязан добросовестно изучить предшествующий

материал. При этом формируются и повышаются трудолюбие, напористость, опрятность и стремление к достижению поставленных целей.

8. Системообразующая функция. Эта функция означает, что применение внутрипредметных связей при помощи выполнения задач делает изученный учебный материал системным, а не фрагментированным. Постоянное предоставление материала улучшает качество знаний учеников. Данная функция объединяет в себе все функции внутрипредметных связей.

§3. Виды внутрипредметных связей

В настоящем учебном процессе у нас есть соответствующие виды внутрипредметных связей [8]:

Первый вид внутрипредметных связей логического типа – закономерная структура задачи, то есть совокупность стабильных связей задачи, которые обеспечивают его целостность и идентичность с самим собой, то есть основные свойства сохраняются даже при воздействии внутренних и внешних изменений. [2]. Если мы рассмотрим определенную задачу, в таком случае под комплексом устойчивых связей необходимо подразумевать логические взаимосвязи между её составляющим, а также между компонентами задачи присутствуют явные и неявные связи.

В.И. Крупич в своей работе [29] даёт следующее истолкование термина логическая структура решения задачи – это некоторый план решения задачи, выполняемого абстрактным субъектом.

Определение 4. «Локальной логической структурой задачи называется её характеристика, которая может быть выявлена в процессе анализа информационной структуры задачи, полностью обуславливается логикой взаимодействия компонентов задачи, чем однозначно детерминирует первую определяющую идею её решения и не зависит от субъекта, решающего задачу» [8, С. 58]. Иными словами, локальная логическая структура задачи является совокупностью тех свойств элементов задачи, которые указывают на реализацию того или иного способа и метода её решения.

Пример 1. а) Во второй коробке было в 2 раза больше килограммов яблок, чем в первой, в третьей – в 3 раза больше, чем в первой, в четвертой – в 4 раза больше, чем в первой. В третьей и четвертой коробке вместе было на 20 кг больше, чем в первой и второй вместе. Сколько килограммов яблок было в каждой коробке?

б) В треугольнике ABC угол B в 4 раза больше угла A, угол C в 7 раз больше угла A. Найти градусные меры всех углов треугольника.

«В обеих задачах имеется несколько неизвестных элементов (в первой задаче – вес яблок в каждой коробке, во второй – градусные меры каждого из углов), причем неизвестны все компоненты. Известны только их соотношения друг с другом, то есть во сколько раз один компонент больше другого, сколько они составляют вместе и т.д. Способ решения этих задач идентичен, они решаются с помощью уравнения, причем в данном случае, никакие другие методы, сильно отличающиеся от решения задач уравнением, здесь недостижимы» [8].

Некоторые задачи могут иметь несколько методов и способов решения математических задач. «Например, $x^3 + x - 2 = 0$ имеет несколько локальных логических структур. В самом деле, если заметить, что левая часть уравнения – строго возрастающая функция, то можно найти подбором единственный корень. Если заметить, что $x^3 + x - 2 = x^3 - 1 + x - 1$, то это уравнение можно решить методом разложения на множители. Можно найти корень подбором и воспользоваться схемой Горнера или поделить многочлен $x^3 + x - 2$ на двучлен $x - 1$ "углом". Можно решить его по формулам Кардано (степень уравнения - это тоже свойство его компонентов) на множестве действительных чисел. Напротив, уравнение $cosx = x^2 + 1$ допускает только одну идею аналитического решения – оценить левую и правую части уравнения, так как не существует формул, позволяющих решить уравнения, в которых присутствуют трансцендентные и алгебраические выражения, следовательно, оно имеет только одну локальную логическую структуру» [8, С. 58-59].

Уравнения $x^3 + x = 10$ и $\log_{0,5}(x - 0,75) = 2^x$ имеют один и тот же способ решения, который определяется свойством строгой монотонности функций, входящих в оба уравнения. К тому же первое уравнение возможно решить еще несколькими способами, а второе уравнение (если его решать аналитически) никакие другие способы невозможны.

«Всякое уравнение вида: $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) \cdot g(x) + c \cdot g^2(x) = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции действительной переменной, является однородным. Рассматривать решения таких уравнений, можно начиная с восьмого класса. Сначала рассматриваются рациональные однородные уравнения, затем тригонометрические, показательные, логарифмические, иррациональные. Так же можно рассмотреть однородные уравнения, в которых $f(x)$ и $g(x)$ – функции разных видов, например, показательная и иррациональная функция. Обучаясь таким образом, ученики с восьмого класса учатся применять при решении уравнений разных видов одну и ту же идею, один и тот же метод. Разумеется, при таком подходе к обучению решению задач его эффективность возрастает. Очевидно, локальная логическая структура может успешно применяться как вид реализации внутрипредметных связей посредством решения задач не только при изучении уравнений, но и при решении других видов задач (текстовых, геометрических и т.д.)» [8, С. 63].

Данный вид реализации внутрипредметных связей осуществляет в основном четыре функции: философскую, развивающую, пропедевтическую, интенсифицирующую. Осуществление философской функции выполняется за счет того, что локальная логическая структура задачи устанавливает на основе общей логики различные математические субъекты (количественного и качественного взаимного перехода). Пропедевтическая функция выражается вследствие способности обуславливать на основе общей логики субъекты, которые учащиеся изучают в различное время и в связи с этим же (общая логика) времени на изучение материала затрачивается гораздо меньше, что и вызывает интенсифицирующую функцию. В конечном итоге, способность «видеть» задачи их локальными логическими структурами, а думать при их выполнении идеями способствует развитию логического и математического мышления учащихся, и это содействует развитию теоретического мышления.

2. Второй вид внутрипредметных связей логического типа – применение аналогичных методов при решении задач. Ранее мы уже отмечали, что данный вид внутрипредметных связей дает возможность устанавливать истинность и ложность первого субъекта практики по аналогии с любым другим субъектом.

Если неотъемлемой частью первого вида внутрипредметных связей считается присутствие общих единых закономерностей при установлении задачи, то во втором виде присутствие общей логики в установлении задачи отсутствует, остаются только аналогичные методы при решении задач. Вот это и является основным отличием второго вида внутрипредметных связей от первого. Этот вид включает в себя четыре функции: развивающую, пропедевтическую, языковую, философскую.

Использование аналогичных методов при решении задач дает возможность объединить их разнообразие в определенную твердость. Зачастую в подобных задачах сам процесс выполнения решения и результат в некотором смысле схожи. За счет этого можно определить языковую и философскую функции. Пропедевтическая функция данного вида внутрипредметных связей имеет возможность использовать идентичные способы и методы решения, но в целом не имеют общей взаимосвязи в определении. Развивающая функция применяется аналогичным образом, как и в первом виде внутрипредметных связей.

Пример 2. а) Решить уравнение $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$

Решение. $x^2(x-4) - 9(x-4) = 0; (x-4)(x^2-9) = 0;\ x_1 = -3,$ $x_2 = 3, x_3 = 4$. Ответ: $-3;\ 3;\ 4$.

б) Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x^2 - 5x + 6 = 0;\ x^2(x^2 - 5x + 6) + +(x^2 - 5x + +6) = 0; (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 1) = 0; x_1 = 2, x_2 = 3$. Ответ: $2;\ 3$.

Если в предыдущем примере обязательным является наличие общих логических закономерностей и при формулировки задачи, то для второго примера достоточно лишь аналогия при решении математических задач. Аналогия в решении этих двух уравнений сразу видна – метод разложения на множители. Только в первом уравнении общий множитель можно было вынести сразу, а во втором уравнении сначала нужно было представить одночлен в виде суммы.

Пример 3. 1) Решить уравнение $log_2(x+3) + log_2 x = 2$. 2) Найти $log_a d$, если $log_a \frac{bc}{d} = 5, log_a b + log_a c = 7$.

Для решения данных задач нужно использованить одни и те же свойства логарифмов.

Сейчас проанализируем аналитический тип внутрипредметных связей.

3. Применение базисных задач при решении некоторого комплекса задач. Чтобы рассмотреть этот вопрос под комплексом задач необходимо понимать неопределенное множество задач с некоторой теоретической основой, которая необходима для их формулирования и выполнения.

Зачастую в методической литературе попадаются разнообразные формулировки задач, в которых результат или способ решения применяется для выполнения иных задач. Некоторые авторы дают им определение — ключевые, иные авторы — опорные. В.И. Крупич в своем исследовании [29] именует данные задачи базисными. В данной работе мы будем принимать концепцию, в соответствии с которой опорные и ключевые задачи будут считаться базисными по отношению к определенному набору задач, в которой они применяются. В то же время мы будем понимать ключевую задачу как задачу, раскрывающую способы решения большого комплекса задач, а под понятием опорной задачи будем понимать, что её результат будет использоваться аналитически для выполнения следующих задач.

Несомненно, что ключевые задачи осуществляют первый вид внутрипредметных связей (его мы уже рассмотрели выше), а сложности возведения концепции задач с учётом данного вида подробно рассмотрим в следующей главе.

Пример 4. (Опорная). Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$. Выразить сумму ${x_1}^2 + {x_2}^2$ через коэффициенты b и c.

Решение. ${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -b,\ x_1x_2 = c$. Тогда ${x_1}^2 + {x_2}^2 = b^2 - 2c$. Ответ: $b^2 - 2c$.

Пример 5. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$. Выразить сумму: а) ${x_1}^3 + {x_2}^3$; б) ${x_1}^4 + {x_2}^4$ через коэффициенты b и c.

Конечно, этот вид внутрипредметных связей возможно использовать и в иных разделах школьного курса математики (пример: геометрия). По сути, он применяет три функции: интенсифицирующую, развивающую и функцию уменьшения сброса знаний. В этом случае развивающая функция применяется за счет того, что данный вид внутрипредметных связей обучает учащихся правильно использовать обстоятельства (т. е. те факты, которые они нашли в процессе выполнения задач). Данный факт позволяет учащимся оптимизировать своё время, делая при этом процесс обучения наиболее интенсивным. Есть две причины для данного вида, которые способствуют внушительному сокращению сброса знаний учащихся. Во-первых, учащимся ни один раз требуется вернуться к одной и той же базисной задаче, а во-вторых, им необходимо применять её для выполнения многих прочих задач системы, за счет этого в памяти ученика закрепляется применяемый факт и ситуации, в которых он использовался.

4. Применение дополнительных задач при выполнении главной задачи. Под понятием дополнительной задачи необходимо подразумевать отдельную математическую задачу, без которой нереально найти решение главной задачи. Дополнительную задачу можно сформулировать явно или неявно, однако в каждом случае, прежде чем решать главную задачу, следует найти решение дополнительной задачи.

Пример 6. Решить уравнение $log_3(x^2-3x-5)=log_3(b-2x)$, где b – корень уравнения $log_7 x=1$.

Решение. $log_7 x=1; x=7^1; x=7$. Получаем уравнение $log_3(x^2-$ $-3x-5)=log_3(7-2x)$. Потенцируя (то есть освобождаясь от знаков логарифмов), получаем $x^2-3x-5=7-2x$; $x^2-x-12=0$; $x_1=4, x_2=$ $=-3$. Проверим найденные корни по условиям $\begin{cases} x^2-3x-5>0, \\ 7-2x>0. \end{cases}$ Значит $x_1=4$ не удовлетворяет этой системе неравенств, $x_2=-3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы. Ответ: -3.

Пример 7. Решить уравнение $x^3+bx-8=0$, где $b=(2-\sqrt{3})^2+$ $+\sqrt{48}$.

Пример 8. Решить уравнение $3x^3-7x^2-7x+(3^{-6}\cdot 9^2)\cdot 3^3=0$.

В данном случае дополнительная задача представлена в неявном виде. Результатом данной задачи всегда является какое-нибудь число.

Данный вид внутрипредметных связей осуществляет три функции: языковую, интенсифицирующую и функцию уменьшения сброса знаний. Роль функции уменьшения сброса данных заключается в том, что дополнительные задачи дают возможность учащимся постоянно применять освоенный прежде материал при изучении текущей темы. Определенное создание математических задач устанавливает осуществление языковой функции. Интенсифицирующая функция осуществляется за счет того, что ученики постоянно возвращаются к прежде использованному материалу, благодаря этому она дает возможность экономить время при изучении материала. Безусловно, данная оптимизация времени не должна быть ущербной.

5. Осуществление внутрипредметных связей на базе переформулировки начальной задачи. Данный вид внутрипредметных связей также принадлежит к типу аналитическому. Внутрипредметные связи здесь играют свою роль вследствие потребности наиболее основательного понимания определения любого математического субъекта. И для того, чтобы более основательно знать и понимать практический и теоретический материал при выполнении задач.

Пример 9. Найдём наибольшее значение функции $y = ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4{,}5; 0]$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = \frac{5}{x+5} - 5$. Найдем нули производной на заданном отрезке: $\begin{cases} \frac{5}{x+5} - 5 = 0, \\ -4{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+5} = 1, \\ -4{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4, \\ -4{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4.$ Определим знаки производной функции на заданном отрезке:

В точке $x = -4$ заданная функция имеет максимум, являющийся её наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(-4) = ln1 - 5 \cdot (-4) = 20.$ Ответ: 20.

Он в основном осуществляет пять функций: пропедевтическую, языковую, интенсифицирующую, развивающую и функцию уменьшения сброса знаний. Языковая функция выражается в способности толковать значение субъектов, развивающая функция определена необходимостью сформулировать задачу, равноценную этой (т. е. один и тот же ответ). Пропедевтическая функция выражается благодаря тому, что усвоенный до этого материал постоянно применяется в текущей теме. По таким же причинам выполняются интенсифицирующая функция и функция уменьшения сброса знаний.

6. Прямой аналитический переход от одного теоретического и практического материала к другому теоретическому и практическому материалу в процессе выполнения задач.

Математическую задачу возможно анализировать как очередность из нескольких подзадач, каждая из них обладает собственным методом и способом решения, теоретическим и практическим материалом. Если подзадачи имеют различный теоретический и практический материал, то в таком случае осуществляются внутрипредметные связи.

Пример 10. Решить уравнение $log_5(6sin^2x - sinx) = log_5(4sinx - 1)$.

Решение. Так как основания логарифмов равны, потенцируя, получаем: $6sin^2x - sinx = 4sinx - 1, 6sin^2x - 5sinx + 1 = 0$. Пусть $sinx = y, |y| \leq 1$. Уравнение примет вид: $6y^2 - 5y + 1 = 0$, откуда $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{3}$, то есть $sinx = \frac{1}{2}$ или $sinx = \frac{1}{3}$. Найдем корни: $x_1 = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x_2 = (-1)^m \cdot$ $\cdot \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \pi m$, где $n, m \in Z$. Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^m \cdot \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) +$ $+\pi m$, где $n, m \in Z$.

Дано логарифмическое уравнение. Вначале идёт переход к тригонометрическому уравнению, затем к алгебраическому уравнению, и в конце решение совокупности простейших тригонометрических уравнений.

Данный вид внутрипредметных связей, в большей степени, осуществляет три функции: интенсифицирующую, пропедевтическую и функцию уменьшения сброса знаний. Пропедевтическая функция выражается благодаря тому, что усвоенный до этого материал постоянно применяется в текущей теме. Данный же факт содействует уменьшению сброса знаний учеников. Вместе это дает возможность увеличить интенсивность процедуры обучения.

7. Решение задач, которые даны на основе одного теоретического и практического материала средствами другого теоретического и практического материала.

Пример 11. Решить уравнение $cos(x-1) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$.

Решение. Так как правая и левая части уравнения – функция разных видов, нужно произвести оценку значение каждой из этих частей. $cos(x - -1) \leq 1$. Для оценки правой части найдём производную. Пусть $f(x) = x^4 - -4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$. Тогда $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$. Приравниваем производную к нулю и решим полученное уравнение. $4x^3 - 12x^2 + 12x - -4 = 0, x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0, (x-1)^3 = 0, x = 1$ – единственная критическая точка. Очевидно, что $f'(x) < 0$ при $x < 1$ и $f'(x) > 0$ при $x > 1$. Данная функция определена для всех действительных чисел, поэтому $x = 1$ – точка минимума. Тогда $f(x) \geq f(1) = 1$ при всех действительных x. Поэтому уравнение равносильно системе: $\begin{cases} cos(x-1) = 1, \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2 = 1. \end{cases}$ Данная система имеет единственное решение $x = 1$. Ответ: 1.

В этом примере задача была сформулирована с использованием алгебры и решена с помощью дифференциального исчисления. Несомненно, данный вид внутрипредметных связей может применяться при анализе других тем школьной программы математики. Он выполняет все восемь функций одинаково. Языковая и философская функции реализуются единством разных теорий, которые обеспечивают выполнение одной и той же задачи, формирование мышления учащихся происходит за счет того, что решения задач отличаются отсутствием очевидных алгоритмов. Частое применение ранее изученного материала уменьшает сброс знаний, благодаря этому увеличивается интенсификация обучения. Пропедевтическая функция реализуется за счет того, что применяются одни теоретические сведения при выполнении задач, которые относятся к другой теории. То есть подобные ситуации возможны в будущем, учащийся постепенно готовится к их восприятию. Это всё помогает воспитывать в учащихся не только личные качества, но и так же закладывает основы математического сознания и содействует систематизации их знаний.

8. Применение одновременно нескольких теоретических и практических сведений при выполнении одной и той же задачи. Данный вид внутрипредметных связей отличается от предшествующего тем, что тут главным считается совокупность свойств частей задачи, которые имеют различный практический и теоретический материал. В этом и заключается значение одновременности.

Пример 12. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - -2(a-2)2^x + 3a - 2 = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Пусть $2^x = y$. Уравнение примет вид: $y^2 - 2(a-2)y + 3a - -2 = 0$. Если $y = 2^x$, то $D(y) = R, E(y) = R$, причем $y = 2^x$ строго возрастает на R. Требование задачи будет выполнено, если уравнение $y^2 - 2(a-2)y + 3a - 2 = 0$ будем иметь единственный положительный корень. В соответствии с теоремой Виета получаем: 1) $\begin{cases} D = 0, \\ y_1 + y_2 > 0, \end{cases}$ 2) $y_1 \cdot y_2 < 0$, 3) $\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = 0, \\ y_1 + y_2 > 0, \end{cases}$ где y_1 и y_2 – корни квадратного уравнения с параметром. Итак: 1) $\begin{cases} a^2 - 7a + 6 = 0, \\ a - 2 > 0, \end{cases}$ 2) $3a - 2 < 0$, 3) $\begin{cases} 3a - 2 = 0, \\ a - 2 > 0. \end{cases}$ Тогда 1) $\begin{cases} a = 1, a = 6, \\ a > 2, \end{cases}$ 2) $a < \frac{2}{3}$, 3) $\emptyset$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \{6\}$.

Данный вид внутрипредметных связей основным способом осуществляет три функции: интенсифицирующую, развивающую и функцию уменьшения сброса знаний. Тут основным фактором развития является одновременное рассмотрение свойств частей задачи. Функция уменьшения сброса знаний осуществляется стандартным образом, именно это дает возможность увеличить интенсивность процедуры обучения.

9. Выполнение одной и той же задачи с помощью разного теоретического и практического материала (сперва целиком с помощью одного материала, а потом полностью с помощью другого материала).

Пример 13. Доказать, что функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 4$ строго возрастает на множестве всех действительных чисел.

Решение 1. Данная функция определена для всех действительных чисел. Пусть $m < n$. Докажем, что $f(m) < f(n)$. Имеем $f(m) - f(n) = m^3 - n^3 - 2(m^2 - n^2) + 7(m - n) = (m - n)(m^2 + mn + n^2) - 2(m - n)(m + n) + 7(m + n) = (m - n)(m^2 + mn + n^2 - 2m - 2n + 7) = 0{,}5(m - n)(2m^2 + 2mn + 2n^2 - 4m - 4n + 14) = 0{,}5(m - n)(m^2 + 2mn + 2n^2 + m^2 - 4m + 4 - 4n + 4 + 6) = 0{,}5(m - n)((m + n)^2 + (m - 2)^2 + (n - 2)^2 + 6) < 0$, так как второй множитель отрицателен, а первый и третий – положительны. Итак, $f(m) - f(n) < 0$, тогда $f(m) < f(n)$.

Решение 2. Докажем, что $f'(x) > 0$ при всех действительных x. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7. D = 16 - 84 = -68 < 0$, тогда $3x^2 - 4x + 7 > 0$ при всех x. Это значит, что данная функция строго возрастает на всей области определения.

Основными функциями данного вида внутрипредметных связей считаются философская и языковая. Помимо этого, этот вид в значительной степени осуществляет интенсифицирующую и развивающую функции, а также функцию уменьшения сброса знаний.

10. Разные варианты выполнения одной и той же задачи при помощи одного и того же теоретического и практического материала. В принципе отличие десятого вида внутрипредметных связей от девятого лишь в том, что тут применяется всего один теоретический и практический материал. В описании использовалось слово «варианты», поскольку в целом разное осуществление выполнения задачи не приводит к решению задачи по-разному. Вариант решения необходимо понимать как любую реализацию, которая отличается от всех других.

Пример 14. Решить уравнение $sin3x + sinx = 4sin^3x$.

Решение 1. Воспользуемся формулой суммы синусов: $2sin2x \cdot cosx = 4sin^3x; sinx \cdot cos^2x = sin^3x;$ $sin^3x - sinx \cdot cos^2x = 0;$ $sinx(sin^2x - cos^2x) = 0;$ $sinx(sinx - cosx)(sinx + cosx) = 0.$ Тогда $sinx = 0$ или

$tgx = 1$ или $tgx = -1$. Находим значения x: $x = \pi n$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m$, где $n, m \in Z$.

Решение 2. Воспользуемся формулой синуса тройного угла: $3sinx - -4sin^3x + sinx = 4sin^3x$; $8sin^3 - 4sinx = 0, sinx(2sin^2x - 1) = 0$. Тогда $sinx = 0$ или $sin^2x = \frac{1}{2}$, следовательно, $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Очевидно, что корни будут записаны в том же виде. Ответ: πn; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m$, где $n, m \in Z$.

В основном этот вид внутрипредметных связей осуществляет две функции: развивающую и пропедевтическую. Развивающая функция определена потребностью применять различные свойства частей задачи для осуществления разных способов решения. Пропедевтическая функция применяется за счет того, что учащиеся обретают навык разновариантного выполнения задач. А так же используют многочисленные свойства компонентов, которые детально изучаются и станут применяться при дальнейшем изучении материала.

Очевидно, что существуют математические задачи, которые реализуют не один вид внутрипредметных связей. Таким образом, делаем выводы:

1. Осуществление внутрипредметных связей с помощью выполнения задач дает возможность убрать перегрузку с учащихся, формулировать материал наиболее интенсивно, в основном, делать упор на его значение.

2. Пропедевтическая функция дает возможность организовать учеников к изучению нового материала, и выполнению задач на его основе. И благодаря этому, дает возможность снижать перегрузки и экономить время.

3. Как уже отмечалось ранее, процесс обучения математики можно охарактеризовать, прежде всего, умением ученика работать самостоятельно. И благодаря этому, осуществление внутрипредметных связей при помощи выполнения задач требует от учащихся постоянной концентрации внимания и отличного знания всех изученных ранее материалов, поскольку они активно используются при изучении текущей темы при таком обучении, а также и дальнейших тем.

Выводы по первой главе

В первой главе рассматриваются теоретические основы реализации внутрипредметных связей с помощью уравнений при обучении математике в общеобразовательной школе.

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

1. Выявлены различные определения внутрипредметных связей, определены основные подходы к понятию внутрипредметных связей.

За основу был выбран подход, выдвинутый А.А. Аксеновым, он понимает под внутрипредметными связями наличие общих логических закономерностей в конструировании и решении задач.

2. Описаны основные функции внутрипредметных связей:

– философская;

– языковая;

– развивающая;

– функция уменьшения «сброса знаний»;

– пропедевтическая функция;

– интенсифицирующая;

– воспитывающая;

– системообразующая.

3. Представлены десять видов внутрипредметных связей, которые могут быть реализованы с помощью решения задач.

Определены два логических вида внутрипредметных связей (закономерная структура задачи, применение аналогичных методов при решении задач) и восемь видов аналитического типа внутрипредметных связей:

– применение базисных задач при решении некоторого комплекса задач;

– применение дополнительных задач при выполнении главной задачи;

– осуществление внутрипредметных связей на базе переформулировки начальной задач;

– прямой аналитический переход от одного теоретического и практического материала к другому теоретическому и практическому материалу в процессе выполнения задач;

– решение задач, которые даны на основе одного теоретического и практического материала средствами другого теоретического и практического материала;

– применение одновременно нескольких теоретических и практических сведений при выполнение одной и той же задачи;

– выполнение одной и той же задачи с помощью разного теоретического и практического материала;

– разные варианты выполнения одной и той же задачи при помощи одного и того же теоретического и практического материала.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕАЛИЗАЦИИ ВНУТРИПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ КУРСА МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§4. Требования к построению систем задач, реализующие внутрипредметные связи

В данном исследовании рассмотрена теория методической реализации внутрипредметных связей с помощью решения задач. К тому же, обращаем внимание, что задачи опираются на общую концепцию теории и методики обучения решению задач, созданную Ю.М. Колягиным [22, 23, 24, 25, 26], Г.И. Саранцевым [58, 59] и В.И. Крупичем [29].

Кратко перечислим пять требований к системам математических задач, которые сформулировал В.И. Крупич:

1) «необходимость составлять её из конкретных математических задач, чтобы обеспечить достижение обобщённой цели учебной деятельности, то есть решение учебной задачи;

2) система задач должна обладать свойством структурной полноты, то есть строиться с учётом принципа целостности [29, С. 125];

3) система задач должна содержать учебные цели по формированию у учащихся теоретических знаний и способов действия на каждом из четырёх этапов решения задачи;

4) система школьных задач должна включать учебные цели по осуществлению действий самоконтроля и самооценки для формирования у школьников способов самостоятельного приобретения знаний и приёмов самообразования;

5) система задач должна обеспечить на основе их систематизации постепенное нарастание сложности задач на базе развития их внутренней

структуры, а на каждом уровне сложности – степень возрастания проблемности» [29].

«Само требование реализации внутрипредметных связей в явном виде В.И. Крупичем не сформулировано, но оно неявно содержится в третьем, четвёртом и пятом требованиях. В этом параграфе необходимо выяснить, какие условия должны быть выполнены, чтобы система задач реализовывала внутрипредметные связи посредством их решения.» [8]. Для решения этой проблемы рассмотрим четыре системы задач, основанные на принадлежности задач к теме и разделу математики:

1) «задачи принадлежат одной теме и одному разделу;
2) задачи принадлежат одной теме и нескольким разделам;
3) задачи принадлежат нескольким темам, но одному разделу;
4) задачи принадлежат нескольким темам и нескольким разделам» [8].

Требования, предъявляемые к системе задач, должны обязательно быть реализованы. Каждый вид внутрипредметных связей, которые мы привели в третьем параграфе, имеет место на определенной системе задач.

1) «Поскольку в школьном курсе математики материал изучается тематически (сначала изучается новая тема, а затем все причастные к ней разделы), в данном исследовании будет соблюдён тот же порядок. В первую очередь при построении системы будет приниматься во внимание теоретический и практический базис задач, а только потом их принадлежность к тому или иному разделу.

2) В данном исследовании было установлено, что все внутрипредметные связи по характеру применения делятся на две части: связи безусловного характера и связи условного характера. Разумеется, при построении системы задач речь пойдёт о связях условного характера, так как связи безусловного характера не могут быть созданы искусственно. Это не исключает их присутствия в системе, но оно не всегда в достаточной мере

выполняет основные функции реализации внутрипредметных связей посредством решения задач.

3) Каждый вид внутрипредметных связей может быть реализован независимо от того, имеет ли место в данной системе какой-либо другой вид внутрипредметных связей. Этот факт строго устанавливается теоремой.

Теорема. В данной научной концепции каждый из десяти видов внутрипредметных связей не зависит от остальных девяти видов» [8].

§5. Системы уравнений, реализующие внутрипредметные связи

Для понимания дальнейшего исследования определим такие термины, как «тема» и «раздел» курса математики.

В данном исследовании, употребляя термин «тема», будем иметь ввиду всеобщую тему, которая состоит из теории и практики школьного курса математики. Совокупность теории позволяет выявить инстинность или ложность практики, то есть решить любую задачу.

Термин «раздел» состоит так же из теории и практику, но обязательным условием является, то что он принадлежит одной и более всеобщей теме.

1) Тема «Логарифмическая функция» является всеобщей, а локальной может быть тема любого конкретного урока, например, «Основное логарифмическое тождество».

2) «Уравнения, неравенство и их системы» - это раздел школьного курса математики. В него входят такие глоблальные темы, как «Рацинальная функция», «Показательная функция», «Логарифмическая функция» и т.д.

Теперь выясним, что необходимо и достаточно для реализации внутрипредметных связей посредством решения задач на уровне одной темы.

Совокупность теории и практики для задач, принадлежащих одной теме, необходимо, но не достаточно для реализации внутрипредметных связей. Нужно чтобы конкретная задача принадлежала к какому-нибудь виду внутрипредметных связей, описанных в третьем параграфе.

На уровне одной темы возможно использвать первый и второй вид логического типа, третий, четвёртый и десятый вид аналитического типа. Так как для остальных видов

Приведём систему, когда задачи принадлежат одной теме и одному разделу (Таблица 1). Тема «Рациональная функция» и раздел «Уравнения, неравенства и их системы» на примере решения уравнений методами разложения на множители и замены неизвестной.

Таблица 1 – Задачи принадлежат одной теме и одному разделу

Работа на уроке	**Домашняя работа**
1-й вид	
1. Решите уравнение: а) $x^3 - 9x^2 + 2x - 18 = 0$; б) $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$.	6. Решите уравнение: а) $2x^3 + 7x^2 + 4x + 14 = 0$; б) $9x^3 - 4x^2 + 9x - 4 = 0$.
2-й вид	
2. Решите уравнение: а) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; б) $x^3 - 5x^2 - 2x + 6 = 0$.	7. Решите уравнение: а) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; б) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$.
4-й вид	
3. Решите уравнение: $x^3 - 5x^2 + 5x - b = 0$, где b – корень уравнения $y^2 - 2y + 1 = 0$.	8. Решите уравнение: $x^3 - 10x^2 + 2x - c = 0$, где c – корень уравнения $y^2 - 40y + 400 = 0$.
10-й вид	
4. Решите уравнение: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.	9. Решите уравнение: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
3-й вид Составить кубическое уравнение, имеющее только один корен:	
5. а) $x^2 + 4 = 0$; б) $(x - 5)(x^2 + 4) = 0$.	10. а) $x^2 + 8 = 0$; б) $(x - 3)(x^2 + 8) = 0$.

Теперь определим какие именно виды внутрипредметных связей могут быть реализованы на уровне одной темы и нескольких разделов. В данной системе возможно использвать так же первый и второй вид логического типа, третий, четвёртый вид аналитического типа. Десятый вид внутрипредметных связей невозможно использовать, так как он гласит, что разные варианты выполнения одной и той же задачи выполнимы при помощи одного и того же теоретического и практического материала. Поэтому на данной системе реализуются только первые четыре вида внутрипредметных связей.

Рассмотрим систему, когда задачи принадлежат одной теме и нескольким разделам (Таблица 2). Тема «Логарифмическая функция» и разделы «Свойства функции», «Преобразование выражений», «Уравнения, неравенства и их системы».

Таблица 2 – Задачи принадлежат одной теме и нескольким разделам

Работа на уроке	**Домашняя работа**
1-й вид	
1. Решите уравнение: а) $log_5(x-3)+log_3(x+1)=3$; б) $log_7(2x-7)+log_4(x-3)=2$.	5. Решите уравнение: а) $log_2(x-3)+log_5(5x)=3$; б) $log_3(x-4)+log_4(x+3)=4$.
2-й вид	
2. а) Найти $log_a d$, если $log_a\left(\frac{bc}{d}\right)=5$, $log_a b+log_a c=7$. б) Решите уравнение: $log_3(x^2+2)+log_3 x=1$.	6. а) Найти k, если $log_3\left(\frac{mn}{k}\right)=4$, $log_3 m+log_3 n=8$. б) Решите уравнение: $log_4(3x^4+13x^2)+log_4 x=2$.
3-й вид	
3. а) Доказать, что $a^{log_c b}=b^{log_c a}$. б) Решите уравнение $x^{log_2 3}+3^{log_2 x}=18$.	7. а) Доказать, что $(a^n)^{log_a b}=b^n$. б) Решите уравнение $27^{log_3 x}=64$.
4-й вид	
4. Решите уравнение $log_2(3x-7)=a$, где $a=log_6 18+log_6 3-log_6 9$	8. Решите уравнение $log_6(x-4)+log_6(x-3)=b$, где $b=log_7 49^{0,5}+log_5(\|2-5\|-2)$

«В качестве задач, не реализаующих внутрипредметные связи, на первом этапе следует рассмотреть построение графиков функций, простейшие вычисления с логарифмами и решение логарифмических уравнений на основе определения логарифма числа» [8].

Привёдем систему, когда задачи принадлежат нескольким темам и одному разделу (Таблица 3). В данной случае возможно реализавоть все виды внутрипредметных связей, кроме пятого и десятого. Темы «Целая функция», «Дробно-рациональная функция», «Тригонометрическая функция», «Показательная функция», «Степенная функция» и раздел

«Уравнения, неравенства и их системы». Данная система задач будет предназначена для уроков обобщающего повторения.

Таблица 3 – Задачи принадлежат нескольким темам и одному разделу

Работа на уроке	**Домашняя работа**
1-й вид	
1. Решите уравнение: а) $x^4 - 5(x+3)x^2 + 4(x+3)^2 = 0$; б) $2sin^2x - 5sinxcosx + 2cos^2x = 0$.	9. Решите уравнение: а) $(3x-1)^4 - 6(3x-1)x^2 + 8x^4 = 0$; б) $3cos^2x - 10sinxcosx + 3sin^2x = 0$.
2-й вид	
2. Решите уравнение: а) $5x^2 - 7x + 2 = 0$; б) $2x^3 - 8x^2 + 4x + 2 = 0$.	10. Решить уравнение а) $3x^2 - 14x + 11 = 0$; б) $2x^3 - 12x^2 + 7x + 3 = 0$.
3-й вид	
3. Доказать неравенство $\frac{a+1}{a} \geq 2$, где $a > 0$ $2^x + 2^{-x} = 2cosx$.	11. Доказать неравенство $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, где $a, b, c > 0$ $(\frac{2}{3})^x + (\frac{3}{5})^x + (\frac{5}{2})^x = 3cosx$.
4-й вид	
4. Решите уравнение $3^{x+b} + 3^x = 12$, где b – корень уравнения $x^3 + 5x - 6 = 0$.	12. Решите уравнение $tg^2\alpha - 3tg\alpha + 2b = 0$, где b – корень уравнения $x^5 + 2x^3 + 4x = 7 = 0$.
6-й вид	
5. Решите уравнение $2^{sinx+cosx} = 2$.	13. Решить уравнение $3\cos(4^x - 7) = 3 + (4^x - 7)^8$.
7-й вид	
6. Решите уравнение $\cos(x+1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$.	14. Решить уравнение $\cos(x-2) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 17$.
9-й вид	
7. Решите уравнение $4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x+3} = 10$.	15. Решить уравнение $5\sqrt{x-3} + 12\sqrt{7-x} = 26$.
8-й вид При каких значениях параметра a уравнение имеет только один корень?	
8. $4^x + 2a \cdot 2^x + a^2 - 1 = 0$.	16. $9^x + (2a+1)3^x + a^2 + a - 2 = 0$.

Теперь рассмотрим четвертую систему, задачи которой принадлежат разным темам и разным разделам (Таблица 4). В этом случае могут быть реализованы все виды внутрипредметных связей, кроме десятого. Темы будут представлены все виды функций школьного курса математики. Разделы «Свойства функций», «Преобразование выражений», «Уравнения, неравенства и их системы».

Таблица 4 – Задачи принадлежат разным темам и разным разделам

Работа на уроке	**Домашняя работа**
5-й вид Найти область определения функции:	
1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{1 - x^2}$.	10. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{1 - x^2}$.
4-й вид Найдите число a, затем решить уравнение:	
2. $a = log_3 18 - log_3 6 + 0{,}5 log_7 49$ $x^3 - 4x^2 + 5x - a = 0$.	11. $a = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(log_2 1024) - 5\sqrt{16} - 3)$ $9^x - 12 \cdot 3^x + a = 0$.
7-й вид	
3. В треугольнике АВС: угол С в два раза больше угла А, угол В в три раза больше угла А. Найти все углы в треугольнике АВС.	12. В ромбе ABCD: угол А минус угол В равно 60 градусов. Найдите все углы ромба.
9-й вид Доказать строгую монотонность функций при помощи производной и без её применения:	
4. $f(x) = x^7 + 3x^2 + x - 1$.	13. $f(x) = (0{,}5)^x \cdot log_{0,4}(x - 4)$, где $x > 4$.
1-й вид Решить уравнение:	
5. а) $lg^2 x - 4lgx \cdot \lg(2x - 1) + $ $+3lg^2(2x - 1) = 0$; б) $sin^2 x - 3sin2x + 5cos^2 x = 0$.	14. а) $log_3 x + log_5(x + 2)^3 + log_7(2x +$ $+1) = 5$; б) $2^x + 3^{x-1} + 4^x + x^3 = 31$.
2-й вид Доказать тождество, затем решить уравнение:	
6. а) $\left(\frac{sin2\alpha}{2cos\alpha}\right) \cdot sin\alpha = 1 - cos^2\alpha$; б) $\left(\frac{2sin4x}{cos2x}\right) + 4cos2x = 4$.	15. а) $sin^2\alpha \cdot tg^2\alpha + sin^2 x - 3tgx + 2 = 0$; б) $sin^2 x \cdot tg^2 x + sin^2 x - 3tg + 2 = 0$.
6-й вид Решить уравнение:	
7. $4^{sinx} - 3 \cdot 2^{sinx + cosx} + 2 \cdot 4^{cosx} = 0$.	16. $log_3(sin^2 x + 2sinx) = log_3(sinx + 2)$
8-й вид Найти все значения параметра a, при которых уравнение не имеет корней:	
8. $9^x - 2a \cdot 3^x + a^2 - 1 = 0$.	17. $log_2^2(x^2 + 4) - 2(a + 1)log_2(x^2 + 4) +$ $+a^2 + 2a - 3 = 0$.
3-й вид	
9. а) Доказать, что в треугольнике АВС: $\frac{sin\alpha}{a} = \frac{sin\beta}{b} = \frac{sin\gamma}{c}$, где a, b, c – его стороны, α, β, γ – противоположные им углы. б) Решить систему уравнений:	18. а) В треугольнике АВС: угол С равен 90 градусам. Доказать, что $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$, где $CD \perp AB, D \in AB$. б) Решить систему уравнений:

$\begin{cases} \frac{\sin x}{5} = \frac{\sin y}{4} = \frac{\sin z}{3}, \\ 0 \le x, y, z \le 0{,}5\pi. \end{cases}$	$\begin{cases} z = \sqrt{xy}, \\ x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + z^2 = 144, x > 0, y > 0. \end{cases}$

§6. Задачи единого государственного экзамена по теме исследования

При анализе задач единого государственного экзамена профильного уровня было выявлено, что уравнения являются средством реализации внутприпредметных связей в заданиях №12, №13 (С1) и №18 (С6).

Задание №12 – наибольшее и наименьшее значение функций можно отнести к пятому виду, а именно осуществление внутрипредметных связей на базе переформулировки начальной задачи.

Задача 1. Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2 e^{2-x}$.

Решение. Для начала найдем производную функции, которая нам дана: $y' = ((x+3)^2)' e^{2-x} + ((x+3)^2)(e^{2-x})' = (2(x+3)e^{2-x} - ((x+$ $+3)^2)e^{2-x} = (x+3)e^{2-x}(2-x-3) = -(x+3)(x+1)e^{2-x}$. Чтобы найти нули произодной, необходимо решить уравнение: $-(x+3)(x+1)e^{2-x} =$ $= 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = -3$. И в конце нужно определить знаки производной функции. Искомая точка минимума $x = -3$. Ответ: -3.

Задача 2. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[-4;\ -1]$.

Решение. Для начала найдем производную функции, которая нам дана: $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$. Чтобы найти нули произодной, необходимо решить уравнение: $3x^2 + 4x + 1 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{3}$. Так как $-4 \le x \le -1$, следовательно $x = -1$. И в конце нужно определить знаки производной функции. В точке $x = -1$ заданная функция имеет максимум, являющийся её наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $f(-1) = -1 + 2 - 1 + 3 = 3$. Ответ: 3.

В задание №13 (С1) встречаются задачи 6го вида - прямой аналитический переход от одного теоретического и практического материала к другому теоретическому и практическому материалу в процессе выполнения задач. Приведём примеры:

Задача 3. а) Решите уравнение $log_2(cosx + sin2x + 8) = 3$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение. а) Из исходного уравнения получаем: $cosx + sin2x + 8 =$ $= 8;\ cosx + 2cosxsinx = 0; cosx(2sinx + 1) = 0; cosx = 0; sinx = -\frac{1}{2}$.

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z;\ x_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим числа: $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$. Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + +2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$.

Задача 4. а) Решите уравнение $2{log_3}^2(2cosx) - 5log_3(2\cos x) + 2 =$ $= 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Пусть $log_3(2\cos x) = t$, тогда $2t^2 - 5t + 2 = 0$, получаем $t_1 = 2;\ t_2 = \frac{1}{2}$. Далее имеем: $log_3(2cosx) = 2; 2cosx = 9; cosx = \frac{9}{2}$ – нет решений, так как $|cosx| \leq 1$. И $log_3(2cosx) = \frac{1}{2}; 2cosx = \sqrt{3}; cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

б) Найдём корни, лежащие на отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$. Заданному отрезку принадлежат корни $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$. Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z\right\}$; б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Задание №18 (С6) – задачи с параметром. Данные задания относятся к восьмому вида, применение одновременно нескольких теоретических и практических сведений при выполнении одной и той же задачи.

Задача 5. Определите, при каких значения параметра a уравнение $|x-2| = alog_2|x-2|$ имеет ровно два решения.

Решение. Пусть $|x-2| = t$, тогда уравнение принимает вид $t = alog_2 t$, где $t > 0$. Чтобы исходное уравнение имело ровно два решения, уравнение должно иметь единственное решение. Если $a = 0$, то уравнение не имеет решений. Если $a < 0$, то уравнение имеет единственное решение. Если $a > 0$, то уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая $y = t$ касается графика функции $t = alog_2 t$, что задаётся системой соотношений: $\begin{cases} t' = (alog_2 t)', \\ t = alog_2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{a}{tln2}, \\ t = alog_2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{a}{ln2}, \\ t = \frac{alnt}{ln2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = fln2, \\ lnt = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = eln2, \\ t = e. \end{cases}$ Заметим, что найденное значение параметра, действительно, положительно. Ответ: $a < 0, a = eln2.$

§7. Элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения» для учащихся математического профиля

Программа элективного курса «Тригонометрические уравнения» предназначена для учащихся 10-11 профильных классов. Она направлена на углубление, обобщение знаний и умений учащихся по одной из содержательных линий математики – линий уравнений. На элективных занятиях появляется возможность изучать программный материал глубже, рассматривать больше задач повышенной трудности, и теоретического материала, можно внедрять принцип опережения. Для реализации этого элективного курса достаточно знаний и умений по математике, полученных в основной школе. Все задачи должны быть по теме основного курса, но повышенного уровня.

Программа данного элективного курса «Тригонометрические уравнения» рассчитана на учеников 11 классов. Она делает упор на обобщение, углубление знаний и умений обучающихся при решении различных уравнений.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1. Рассмотрение ранее известных понятий в ходе повторения позволяет закрепить и осознать данный материал на новом уровне.

2. Задания по теме элективного курса встречаются в ЕГЭ.

3. Материал, предлагаемый в данной программе, расширяет знания учащихся о методах решения тригонометрических уравнений.

Педагогическая целесообразность заключается в следующем:

– данный элективный курс выполняет компенсирующую функцию, а также будет расширять базовый уровень знаний учащихся по предмету, даст учащимся возможность ознакомиться с нестандартными и интересными тригонометрическими уравнениями;

Цель и задачи программы элективного курса:

Цель: Расширение и углубление знаний учащихся по методам решения тригонометрических уравнений, рассматриваемых в данном курсе, направленных на формирование у учащихся предметных компетентностей и успешную сдачу ЕГЭ.

Задачи курса:

1. Повторить и систематизировать знания о тригонометрических уравнениях.

2. Знать основные понятия и результаты, изучаемые в рамках данного элективного курса.

3. Рассмотреть методы решения тригонометрических уравнений.

4. Развитие мыслительных способностей учащихся, математического интереса и пробуждение к получению новых знаний.

5. Сформировать у учащихся представление об тригонометрических уравнениях, как задачах исследовательского характера, показать их многообразие;

6. Научить осуществлять выбор рационального метода решения задач и обосновывать сделанный выбор;

7. Сформировать представление об основных методах решения математических задач, существенно обогатить опыт учащихся по их применению.

8. Систематизировать имеющиеся обширные, но разрозненные теоретические знания из основного курса математики, раскрыть их внутренние взаимосвязи.

9. Способствовать развитию интеллектуальных и творческих способностей учащихся, интереса и практических умений в исследовательской деятельности.

Отличительные особенности данного элективного курса:

– в курсе представлена достаточное количество задачного материала, при помощи которого ученик овладеет приемами решения тригонометрических уравнений.

– в школьную программу математики входят только самые основные, необходимые, упрощённые знания по данному теме. Данный курс поможет ликвидировать этот разрыв и подготовить учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по разделу «Тригонометрия».

Новизна программы состоит в том, что она знакомит учащихся с простотой решения тригонометрических уравнений, несмотря на то, что выглядят сложно решаемыми. Содержание материала, представленного в программе, ранее нигде в курсе математики средней школы не изучалось. Также задания элективного курса обладают практической значимостью для учащихся для решения заданий вступительных испытаний в ВУЗы, олимпиадных заданий, заданий единого государственного экзамена.

Программа элективного курса рассчитана на 17 (1 ч. в неделю).

Форма занятия:

Занятия курса организуются в нескольких формах:

– индивидуальной;

– фронтальной;

– работа в парах.

Особенности организации учебных занятий:

– при проведении элективного курса проводятся викторины, теоретические опросы по знанию основных понятий и формул;

– программа курса составлена так, чтобы последовательность изучения материала была от простого к сложному;

– изучение содержания элективного курса распределено с учетом его достаточности для качественного изучения содержащихся в программе материалов.

Виды деятельности:

– фронтальная работа над решением задач, под руководством учителя;

– фронтальная работа над решением задач, под руководством обучающихся;

– коллективная проверка выполнения упражнений;

– обсуждение способов решения различных уравнений повышенной сложности.

Виды занятий:

– урок-практикум;

– урок-лекция;

– урок-семинар.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

– знать и применять формулы для решения тригонометрических уравнений;

– знать алгоритмы решений тригонометрических уравнений;

– знать и уметь применять различные способы решений тригонометрических уравнений;

– уметь анализировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать, самостоятельно работать с математической литературой и использовать информационные технологии.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

– текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется во время проведения занятий путем проведения теоретических опросов и коллективных проверок выполнения заданий;

– дополнительный контроль проводится с помощью домашних заданий;

– итоговый контроль осуществляется проведением итогового занятия, на котором обучающиеся представляют свои проекты.

Таблица 5 – Учебно-тематическое планирование

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	**Тригонометрические формулы**	**2**	
1	Основные тригонометрические формулы, тождества	1	Урок-практикум
2	Решение простейших тригонометрических уравнений	1	Урок-практикум
I I	**Решение тригонометрических уравнений различными методами**	**12**	
3	Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным. Однородные уравнения	1	Урок-практикум
4	Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение	1	Урок-практикум
5	Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента	1	Урок-практикум
6	Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму	1	Урок-практикум
7	Решение уравнений с применением формул понижения степени	1	Урок-практикум
8	Решение уравнений с применением тройного аргумента	1	Урок-практикум
I I I	**Решение тригонометрических уравнений, встречающихся в заданиях ЕГЭ**	**6**	
9	Тригонометрические уравнения, разложение на множители	1	Урок-практикум
10-11	Тригонометрические уравнения	2	Урок-практикум
12	Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ	1	Урок-практикум

13-14	Уравнения смешанного типа	2	Урок-практикум
IV	**Подведение итогов**	**3**	
15	Контрольный работа	1	Урок-зачет
16-17	Защита проектов	2	Урок-семинар

Данная программа может быть использована, как в общеобразовательных, так и в классах с углубленным или профильным изучением математики. Учебно-тематическое планирование представлено в таблице 5.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

– текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется во время проведения занятий путем проведения теоретических опросов и коллективных проверок выполнения заданий;

– дополнительный контроль проводится с помощью домашних заданий;

– итоговый контроль осуществляется проведением итогового занятия, на котором обучающиеся представляют свои проекты.

Данная программа может быть использована, как в общеобразовательных, так и в классах с углубленным или профильным изучением математики. Учебно-тематическое планирование представлено в таблице 5.

Содержание элективного курса

Раздел 1. Тригонометрические формулы (2 ч.).

Основная цель – расширить и обобщить знания и умения учащихся, связанные с тождественными преобразованиями тригонометрических выражений.

Занятие №1. Урок повторения.

«Тригонометрическими уравнения обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. Простейшие тригонометрические уравнения — это уравнения следующих видов: $cos\,x = a, sin\,x = a, tg\,x = a, ctg\,x = a$. Решить простейшее тригонометрическое уравнение — это значит описать множество значений переменной x, для которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение x.» [46] Решение любого тригонометрического уравнения сводится, как правило, к решению одного или нескольких простейших тригонометрических уравнений.

1. Метод замены переменной. Этот метод вам хорошо известен, вы не раз применяли его при решении различных уравнений.

2. Метод разложения на множители. Суть этого метода заключается в том, чтобы привести уравнение к виду, когда левая часть разложена на множители, а правая часть равна нулю. Уравнение распадается на несколько более простых уравнений, т. к. произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

Способы разложения на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки

а) $\mathrm{asin(x)\cos(x) + bsin(x) = 0}$ выносим общий множитель $\sin(\mathrm{x})$ за скобки: $\mathrm{\sin(x)\,(acos(x) + b) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0}$ или $\mathrm{acos(x) + b = 0; \cos(x) =}$ $= \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$.

б) $\mathrm{asin(x)cos(x) + bcos(x) = 0}$ выносим общий множитель $\cos(\mathrm{x})$ за скобки: $\mathrm{\cos(x)(asin(x) + b) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0}$ или $\mathrm{asin(x) + b = 0;\ \ \sin(x) =}$ $= \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$.

в) $\mathrm{asin(x)\cos(x) + bsin^2(x) = 0}$ выносим общий множитель $\sin(\mathrm{x})$ за скобки: $\mathrm{\sin(x)\left(acos(x) + bsin(x)\right) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0}$ или $\mathrm{acos(x) + bsin(x) =}$ $= 0$.

Сводятся к однородному уравнению первой степени, которое решается делением на $\cos(\mathrm{x}) \neq 0$. Тогда $\mathrm{a + btg(x) = 0;\ tg(x) = \frac{-a}{b}}$.

г) $\mathrm{asin(x)\cos(x) + bcos^2(x) = 0}$ выносим общий множитель $\cos(\mathrm{x})$ за скобки: $\mathrm{\cos(x)\left(asin(x) + bcos(x)\right) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0}$ или

$\mathrm{asin(x) + bcos(x) = 0}$. Сводятся к однородному уравнению первой степени, которое решается делением на $\mathrm{cos(x) \neq 0}$. Тогда $\mathrm{atg(x) + b = 0}$; $\mathrm{tg(x) = \frac{-b}{a}}$.

2. С помощью тригонометрических тождеств: $\mathrm{sin(2x) = 2sin(x)cos(x)s}$; $\mathrm{sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\mathrm{sin\alpha - sin\beta =}$
$\mathrm{= 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\mathrm{cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\mathrm{cos\alpha - cos\beta =}$
$\mathrm{= -2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

3. С помощью формулы разность квадратов $\mathrm{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$.

4. Метод группировки

Занятие №2. Решение тригонометрических уравнений.

Задача 1. Решить уравнение $2\,cos^2\,x\ +\ 5\,sin\,x\ =\ 5$.

Задача 2. Решить уравнение $tg\frac{x}{2} + 3ctg\frac{x}{2} = 4$.

Задача 3. Решить уравнение $sin\,2x\ =\ cos\,x$.

Задача 4. Решить уравнение $sin\,3x\ +\ sin\,7x\ =\ 2\,sin\,5x$.

Задача 5. Решить уравнение $sin\,2x\ -\ cos\,x\ +\ 2\,sin\,x\ =\ 1$.

Задача 6. Решить уравнение $sin4x = 3cox2x$.

Раздел 2. Решение тригонометрических уравнений различными методами (12 ч.).

Основная цель – обучающиеся должны знать основные формулы тригонометрии и научиться применять различные методы решения тригонометрических уравнений.

Занятие №3. Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным. Однородные уравнения.

Задача 1. Решить уравнение $2sinx - 3cosx = 0$.

Задача 2. Решить уравнение $3sin^2 3x - 2\sqrt{3}sin3xcos3x + 5cos^2 3x = 2$ и выделить те его корни, которые принадлежат интервалу $(-\pi;\ \pi)$.

Задача 3. Решить уравнение $sin^2x - 3cosxsinx + 2cos^2x = 0$.

Задача 4. Решить уравнение $3sin^2x - 3sinxcosx + 4cos^2x = 2$.

Задача 5. Решить уравнение: $10\,sin^2 x + 5\,sin\,x\,cos\,x + cos^2 x = 3.$

Задача 6. Решить уравнение: $3\,cos\,x + 2\,sin\,x = 1.$

Занятие №4. Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение.

Формулы: $sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$; $sinx - siny = 2sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+y}{2}$; $cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$; $cosx - -cosy = -2sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}$.

Задача 1. Решить уравнение $cos3x + sin2x - sin4x = 0.$

Задача 2. Решить уравнение $sinx + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Задача 3. Решить уравнение $cos3x + \sin(9x + 2) = 0.$

Задача 4. Решить уравнение $2sin6x + sin9x - sin3x = 0.$

Занятие №5. Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргументы.

Этот метод применяется для уравнений вида $a\,cos\,x + b\,sin\,x = c$. Он присутствует в школьных учебниках. Правда, в них рассматриваются только частные случаи — когда числа a и b являются значениями синуса и косинуса углов в $30^{\circ}, 45^{\circ}$ или 60°.

Задача 1. Решить уравнение $\sqrt{3}\,sin\,x + cos\,x = 2.$

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt{3}sin2x + 2sin^2x - 1 = 2cosx.$

Задача 3. Решить уравнение $cos2x = \sqrt{3}sin2x - 1.$

Задача 4. Решить уравнение $sin3x + 4sin^3x + 4cosx = 5.$

Задача 5. Решить уравнение $5 + 2sin2x - 5cosx = 5sinx.$

Занятие №6. Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрической функции в сумму.

Формулы: $sinscost = \frac{\sin(s+t)+\sin(s-t)}{2}$; $cosscost = \frac{\cos(s+t)+\cos(s-t)}{2}$; $sinssint = \frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}$.

Задача 1. Решить уравнение $sin5xcos3x = sin6xcos2x.$

Задача 2. Решить уравнение $cos3x + sinxsin2x = 0.$

Задача 3. Решить уравнение $cos3xcos6x = cos4xcos7x$.

Задача 4. Решить уравнение $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 0,25 = 0$.

Задача 5. Решить уравнение $2sinxcos3x + sin4x = 0$.

Задача 6. Решить уравнение $sin3xcosx = sin\frac{5x}{2}cos\frac{3x}{2}$.

Занятие №7. Решение уравнений с применением формул понижения степени.

Формулы двойного аргументы: $sin2x = 2sinxcosx$; $cos2x = cos^2x - sin^2x$; $tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$.

Формулы понижения степени для квадратов тригонометрической функций: $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$; $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$; $tg^2x = \frac{1-cos2x}{1+cos2x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Задача 1. Решить уравнение $sin^2x + sin^22x - sin^23x - sin^24x = 0$.

Задача 2. Решить уравнение $sin^4x + cos^4x = sin2x - \frac{1}{2}$.

Задача 3. Решить уравнение $cos^2\frac{x}{3} - sin^2\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

Задача 4. Решить уравнение $sin^2x - cos^2x = \frac{1}{2}$.

Задача 5. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$: $sin^2x = -cos2x$.

Задача 6. Решите уравнение $sin^4x + cos^4x = sinxcosx$.

Занятие №8. Решение уравнений с применением тройного аргумента.

Формулы тройного аргумента (угла): $sin3x = 3sinx - 4sin^3x$; $cos3x = = 4cos^3x - 3cosx$; $tg3x = \frac{3tgx-tg^2x}{1-3tg^2x}$; $ctg3x = \frac{ctg^3x-3ctgx}{3ctg^2x-1}$.

Задача 1. Решить уравнение $cos3x - 2cosx = 0$.

Задача 2. Решить уравнение $cos4x = cos^23x$.

Задача 3. Решить уравнение $5sin3x + 2sinx = 0$.

Задача 4. Решить уравнение $7cos3x - 3cosx = 0$.

Раздел 3. Решение тригонометрических уравнений, встречающихся в заданиях ЕГЭ (6 ч.).

Основная цель – обучающиеся должны уметь решать тригонометрические уравнения, встречающихся в заданиях ЕГЭ.

Занятие №9. Тригонометрические уравнения, разложение на множители.

Задача 1. а) Решите уравнение $sin2x + \sqrt{3}sinx = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $cos^2x - \frac{1}{2}sin2x + cosx = sinx$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $2cos^3x - cos^2x + 2cosx - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $sin2x - 2\sqrt{3}cos^2x - 4sinx +$ $+4\sqrt{3}cosx = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Занятие №10. Тригонометрические уравнения.

Задача 1. а) Решите уравнение $4cos^4x + 9cos2x - 1 = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $cos2x - 5\sqrt{2}cosx - 5 = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $\frac{1}{sin^2x} - \frac{3}{sinx} + 2 = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $tg^2x + \left(1 + \sqrt{3}\right)tgx + \sqrt{3} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Занятие №11. Тригонометрические уравнения.

Задача 1. а) Решите уравнение $4cos^2x+2(\sqrt{2}-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{2}=$ $=0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $sinx+\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)=$ $=0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $sin\frac{5x}{2}cos\frac{3x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}sin2x+sin\frac{3x}{2}\frac{5x}{2}$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $\sqrt{3}tg(7\pi-2x)=-1$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Занятие №12. Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ.

Задача 1. а) Решите уравнение $(tg^2x-1)\sqrt{13cosx}=0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $(2sinx-1)(\sqrt{-cosx}+1)=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}sin^2x+cosx-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6sinx}=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $\frac{13sin^2x-5sinx}{13cosx+12}=0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Занятие №13. Уравнения смешанного типа.

Задача 1. а) Решите уравнение $15^{cosx}=3^{cosx}\cdot5^{sinx}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\ \frac{13\pi}{2}\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $(27^{cosx})^{sinx}=3^{\frac{3cosx}{2}}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $5^{2sin2x} = (\frac{1}{25})^{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $2^{4cosx} + 3 \cdot 2^{2cosx} - 10 = 0$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Занятие №14. Уравнения смешанного типа.

Задача 1. а) Решите уравнение $log_2(cosx + sin2x + 8) = 3$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $2log_3^2(2cosx) - 5log_3(2\cos x) + 2 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}cosx - sin2x\right) = x$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $log_{3-4cos^2x}(9 - 16cos^4x) = 2 + \frac{1}{log_2(3-4cos^2x)}$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Раздел 4. Подведение итогов (3 ч.).

Занятие 15. Контрольная работа.

1 вариант

Часть 1.

Задача 1. а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = sinx$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $(\sqrt{2}sin^2x + cosx - \sqrt{2})\sqrt{-6sinx} = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Часть 2.

Задача 3. а) Решите уравнение $15^{cosx} = 3^{cosx} \cdot 5^{sinx}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $2log_3^2(2cosx) - 5log_3(2\cos x) + 2 = 0.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Часть 3.

Задача 5. а) Решите уравнение $\frac{(tgx+\sqrt{3})log_{13}(2sin^2x)}{log_{31}(\sqrt{2}cosx)} = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

2 вариант

Часть 1.

Задача 1. а) Решите уравнение $cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $(6sin^2x + 5sinx - 4)\sqrt{-7cosx} = 0.$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Часть 2.

Задача 3. а) Решите уравнение $(27^{cosx})^{sinx} = 3^{\frac{3cosx}{2}}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $2log_2^2(2cosx) - 9log_2(2\cos x) + 4 = 0.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Часть 3.

Задача 5. а) Решите уравнение $\frac{log_2^2(sinx)+log_2(sinx)}{2cosx-\sqrt{3}} = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Оценивание контрольной работы.

Часть 1. Задание 1 и 2. За каждый правильный ответ по 2 балла.

Часть 2. Задание 3 и 4. За каждый правильный ответ по 3 балла.

Часть 3. Задание 5. За правильный ответ 4 балла.

Занятие 16 - 17. Защита проектов. Темы проектов для учащихся в рамках элективного курса.

При написании групповых или индивидуальных проектов учащиеся могут использовать предлагаемые темы исследовательских работ. Выполнение проектов поможет учащимся развивать навыки самостоятельной работы, поиска и анализа информации.

Темы выдаются в начале изучения программы, учитывая дифференцированное обучение внутри класса [69]. Защита проектов реализуется в рамках уроков-семинаров. Лучшие работы отбираются на школьную научную конференцию учащихся.

1. Системы тригонометрических уравнений.

План работы:

– изучить статью из журнала «Квант» (Болибрух А. Решение систем тригонометрических уравнений, 1987. – №11. –С. 46-49);

– разобрать решения всех представленных примеров;

– решить на выбор одно из упражнений в конце статьи;

– подготовить и оформить проект.

2. Тригонометрия помогает алгебре.

План работы:

– изучить статью из журнала «Квант» (Горнштейн П. Тригонометрия помогает алгебре, 1989. № 5. – С. 68-70);

– разобрать решения всех представленных примеров;

– решить на выбор одно из упражнений в конце статьи;

– подготовить и оформить проект.

3. Преобразование решений тригонометрического уравнения.

План работы:

– составить типологию задач, представленных в статье журнала «Квант» (Иванов В. Преобразование решений тригонометрического уравнения, 1979. № 12. – С. 34-36);

– разобрать решения всех представленных примеров;

– решить на выбор одно из упражнений в конце статьи;

– подготовить и оформить проект.

4. Тригонометрические уравнения.

План работы:

– изучить статью из журнала «Квант» (Савин А. Тригонометрия 1996, №4, С.32-33);

– придумать и решить задачу, которую можно решить с помощью формулы данной в статье (подобную представленным в статье);

– подготовить и оформить проект.

5. Тригонометрические уравнения.

План работы:

– изучить статью из журнала «Квант» (Шабунин М. Тригонометрические уравнения, 1973, №2,С. 58-63);

– разобрать решения всех представленных примеров;

– решить на выбор одно из упражнений в конце статьи;

– подготовить и оформить проект.

6. Тригонометрические задач

План работы:

– составить типологию задач, представленных в статье журнала «Квант» (Егоров А. Тригонометрические задачи, – 1992. № 11. – С. 51);

– решить по одному заданию каждого типа;

– подготовить и оформить проект.

Список рекомендуемой для учителя литературы

1. Алимов, Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 – 11 кл. Общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов. – М. Просвещение, 2001. – 384 с.

2. Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 классов средней школы. 2-е изд / М.И. Башмаков. – М.: 1992. - 351 с.

3. Блинова, Т.Л., Запрудина, И.А. Предупреждение ошибок при решении тригонометрических уравнений на ЕГЭ / Т.Л. Блинова, И.А. Запрудина // Математика в школе. – 2015. - №9. С.21-24.

4. Ершова, А.П., Голобородько, В.В. Алгебра и начала анализа 10-11 классы. Самостоятельные и контрольные работы / А.П. Ершова, В.В. Голобородько. – М: Илекса, 2005.

5. Захарова, О.В. «Тригонометрические уравнения» / О.В. Захарова. – Волгоград: «Учитель», 2011г.

6. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 – 11 кл. Общеобразовательных учреждений /А.Н. Колмогоров [и др.] – М.: Просвещение, 2003. – 384 с.

7. Малышев, И.Г. Применение тригонометрии при решении некоторых систем уравнений / И.Г. Малышев // Математика в школе. – 2016. - №3. - С.32-34.

8. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. -424 с.

9. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А.Г. Мордковича. – 4-е изд., испр. – М. Мнемозина, 2007. – 336 с.

10. Тимошенко, Н.В. Урок-консультация по теме «Решение тригонометрических уравнений разными методами» / Н.В. Тимошенко // Математика в школе. – 2008. - №7. - С.1-8.

Список рекомендуемой для учащихся литературы

1. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. -424 с. :

2. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.

Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А.Г. Мордковича. – 4-е изд., испр. – М. Мнемозина, 2007. – 336 с.

3. Яковлев, И.В., Малкова, А.Г.. Подготовка к ЕГЭ по математике. Режим доступа: https://ege-study.ru/wp-content/uploads/pdf-materials/trigequations.pdf. - Последнее обновление 21.01.2020.

4. Сайт ЕГЭ2020, математика: задания, ответы, решения. Режим доступа: https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=167. – Последнее обновление 21.01.2020.

Список статей по журналу «Квант»

1. Болибрух, А., Уроев, В., Шабунин, М. Решение систем тригонометрических уравнений / А. Болибрух, В. Уроев, М. Шабунин // Квант. -1987. - №11. – С. 46-49.

2. Горнштейн, П. Тригонометрия помогает алгебре / П. Горнштейн // Квант. – 1989. № 5. – С. 68-70.

3. Егоров, А. Тригонометрические задачи / А. Егоров // Квант. – 1992. № 11. – С. 51.

4. Иванов, В. Преобразование решений тригонометрического уравнения / В. Иванов // Квант. – 1979. № 12. – С. 34-36.

5. Рудой, Б. Вычисление и тригонометрия. Задачи /Б. Рудой Шабунин //Квант.– 1992. – №10. –С. 56.

6. Савин, А. Тригонометрия / А. Савин // //Квант.– 1996. – №4. –С. 32-33.

7. Шабунин, М., Черемных, С. Тригонометрические уравнения / М. Шабунин., С. Черемных // Квант. – 1973. - № 2. – С. 58-63.

§8. Алгоритмизация обучения как один из методов реализации внутрипредметных связей на примере алгебраических уравнений высших степеней

«Учет внутрипредметных связей при обучении способствует систематизации и углублению знаний учащихся, формированию у них навыков и умений самостоятельной познавательной деятельности, переносу знаний, полученных на более низких ступенях обучения, на более высокие ступени. Алгоритмизация внутрипредметных связей – это актуализация таких связей между компонентами учебного процесса, которые обеспечивают формирование у учащихся системности знаний по учебному предмету в единстве с действиями, которые оно вызывает» [38]. При этом актуализацию следует понимать, как «действие, заключающее в извлечении усвоенного материала из долговременной или кратковременной памяти с целью последующего использования его при узнавании, припоминании, воспоминании или непосредственном воспроизведении»[38].

Внутрипредметные связи в процессе реализации несут достаточно существенную функциональную нагрузку, но они способствуют систематизации, а следовательно, глубине и прочности знаний, помогает дать ученикам целостную картину мира.

Авторы статьи [66] утверждают, что нужно использовать технологии для улучшения преподавательских способностей учителей, и для более эффективной оценки результатов образования. Профессиональное развитие - это средство, помогающее учителям преодолеть указанные барьеры в применении технологий [70].

По технологии работы с алгоритмами Е.И. Лященко выделяет три основных этапа [32, С.63]:

1. «*Введение алгоритма*, к которому относятся актуализация знаний учащихся, которые необходимы для введения и обоснования алгоритма;

открытие учащимися под руководством учителя самого алгоритма; его формулировка.

2. *Усвоение алгоритма*, с которой связывают обработку отдельных операций, входящих в алгоритм, и усвоение их последовательности.

3. *Применение алгоритма*, где осуществляется отработка алгоритма с учащимися в известной и неизвестной им ситуациях» [32].

«Алгоритм – это свод правил, который точно описывает последовательность операций таким образом, что каждое правило – результативное и определенное и последовательность прерывается через конечный промежуток времени» [68].

«Уравнения высших степеней – это уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ - многочлен, степень которого выше второй» [47, С. 24].

Система упражнений представлена из задачника 11 класса А.Г. Мордковича [48].

1. Упражнения для первого этапа.

Е.И. Лященко выделяет особенности системы задач на усвоение алгоритма. Первый пункт – это наличие задач на обоснование необходимости рассмотрения алгоритма. Поэтому можно рассмотреть практическую задачу, в которой выступает алгебраическое уравнение четвёртой степени. Для решения данного уравнения у учащихся не хватает знаний. Здесь им необходимы дополнительные знания методов и новые приёмы решения уравнений высших степеней. Подобная связь задач из реальной жизни с чистой математикой позволяет в значительной степени замотивировать учащихся на изучение соответствующих разделов математики.

Пример 1. «Из сосуда, наполненного чистым спиртом, тлили 2 л воды. Затем отлили 2 л смеси и снова долили 2 л воды. Наконец, еще раз отлили 2 литра получившейся смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем спирта. Найдите вместимость сосуда» [51].

Пример 2. «Для составления электрической схемы требуется резистор сопротивлением 5 Ом. В наличии имеются резисторы с номинальным сопротивлением 12, 18, 24, 30, 36, 42 Ом. Можно ли, соединяя четыре из них параллельно, получить нужное сопротивление» [30].

Второй пункт – это наличие задач на актуализацию знаний, необходимых для обоснования правил, и умений, необходимых для выполнения алгоритма. Третий пункт – это наличие задач на выполнение отдельных операций, входящих в алгоритм. Объединим их в одну систему задач, проанализировав УМК «Алгебра» Ю.Н. Макарычева (7-9) [34, 35, 36] и УМК «Алгебра» авторского коллектива под руководством А.Г. Мордковича [41, 42, 43, 44, 45, 20].

Задания для актуализации знаний и выполнение отдельных операций, входящих алгоритм:

Задание 1. (Устно). Вынесите общий множитель за скобки: а) $x^3 - -x$; б) $7c^2 - 9c^2$; в) $18m^{14} - 27m^7$; г) $-72n^5 - 27n^{10}$.

Задание 2. Разложите на множители: а) $5a(a-5b) + (a+3b)(a- -5b)$; б) $(a+9x)(a^2-4ax) - 5ax(a+9x)$.

Решение. $a)$ $5a(a-5b) + (a+3b)(a-5b) = (a-5b)(5a+a+ +3b) = (a-5b)(6a+3b) = (a-5b)3(2a+b)$; б) $(a+9x)(a^2- -4ax) — 5ax(a+9x) = (a+9x)(a^2-4ax-5ax) = (a+9x)(a^2-9ax) = = a(a+9x)(x-9x)$. Ответ: а) $(a-5b)3(2a+b)$; б) $a(a+9x)(x-9x)$.

Задание 3. Представьте в виде произведения трёх множителей многочлена: а) $x^2y - bx^2 - axy + abx$; б) $15x^2y^2 - 24xy^3 - 10x^2z + +16xyz$.

Решение. а) $x^2y - bx^2 - axy + abx = x^2(y-b) - ax(y-b) = = x(x — a)(y-b)$; б) $15x^2y^2 - 24xy^3 - 10x^2z + 16xyz = 5x^2(3y^2-2z) - -8xy(3y^2-2z) = x(3y^2-2z)(5x-8y)$.

Ответ: а) $x(x-a)(y-b)$; б) $x(3y^2-2z)(5x-8y)$.

Задание 4. Представьте в виде многочлена выражение: а) $(\frac{1}{2}mn^3 +$ $+\frac{1}{3}p^2) \cdot (\frac{1}{3}p^2 - \frac{1}{2}mn^3)$; б) $4np^3 + 2p(n - 2p^2)^2$.

Решение. а) $\left(\frac{1}{2}mn^3 + \frac{1}{3}p^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}p^2 - \frac{1}{2}mn^3\right) = \frac{1}{9}p^4 - \frac{1}{4}m^2n^6$; б) $4np^3 +$ $+2p(n - 2p^2)^2 = 4np^3 + 2p(n^2 - 4np^2 + 4p^4) = 4np^3 + 2pn^2 - 4np^3 8p^5$. Ответ: а) $\frac{1}{9}p^4 - \frac{1}{4}m^2n^6$; б) $2pn^2 - 4np^3 + 8p^5$.

Задание 5. Разложите на множители квадратный трёхчлен: а) $x^2 - x -$ -6; б) $x^2 + 8x + 12$.

Решение. а) $x^2 - x - 6 = (x - 0{,}5)^2 - 0{,}25 - 6 = (x - 0{,}5)^2 - 6{,}25 =$ $= (x - 0{,}25 - 2{,}5)(x - 0{,}5 + 2{,}5)$; б) $x^2 + 8x + 12 = x^2 + 2x + 6x + 12 =$ $= x(x + 2) + 6(x + 2) = (x + 2)(x + 6)$. Ответ: а) $(x - 3)(x + 2)$; б) $(x +$ $+2)(x + 6)$.

Задание 6. Выполните деление с остатком многочлена $2x^2 - x - 3$ на $x - 2$. Ответ: $2x^2 - x - 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3$.

Задание 7. Разделите многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ на многочлен $x^2 + 5$. Ответ: $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^2 + 5)(x - 3)$.

Задание 8. Используя схему Горнера, разделите многочлен $p(x) =$ $= 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5$ на двучлен $x + 2$. Ответ: $2x^5 + x^4 - 3x^3 +$ $+2x^2 + 5 = (x + 2)(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 8) - 11$.

2. Упражнения для второго этапа.

На втором этапе можно рассмотреть ключевые задачи по каждому методу решения алгебраических уравнений высших степеней, после решения которых вводится алгоритм. Желательно, чтобы ученик самостоятельно или вместе с учителем выполняет введение алгоритма**.** Е.И. Лященко отмечает, что это наиболее эффективный путь. Так же не следует требовать от ученика использовать тот или иной алгоритм решения, если математическую задачу возможно решить различными методами [67].

1. Разложение на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Задача 1. Решите уравнение $3x^3 - 8x^2 + 14x = 0$.

Решение. $x(3x^2 - 8x + 14) = 0; x = 0 \Rightarrow x_1 = 0. 3x^2 - 8x + 14 = = 0 \Rightarrow$ нет корней. Ответ: 0.

Алгоритм решения алгебраических уравнений высших степеней методом разложения на множители (с помощью вынесения общего множителя):

1. Дано уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ - многочлен, степень которого выше второй.
2. Разложить многочлен на множители: $P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x)$, используя вынесение общего множителя за скобки.
3. Принять уравнению вид $P_1(x)P_2(x)P_3(x) = 0$.
4. Получить равносильно совокупности уравнений

$$P_1(x) = 0;\ P_2(x) = 0;\ P_3(x) = 0.$$

5. Множество корней уравнения $P(x) = 0$ представить собой объединение множеств корней уравнений $P_1(x) = 0;\ P_2(x) = 0;\ P_3(x) = 0$.

2. Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения.

Задача 2. Решите уравнение $(2x - 1)^4 - x^2 = 0$.

Решение. $((2x - 1)^2 - x)((2x - 1)^2 + x) = 0; (4x^2 - 5x + 1)(4x^2 - -3x + 1) = 0; 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}25;\ x_2 = 1.\ 4x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow$ нет корней. Ответ: $0{,}25; 1$.

Алгоритм решения алгебраических уравнений высших степеней методом разложения на множители (с помощью формул сокращенного умножения):

1. Дано уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ - многочлен, степень которого выше второй.
2. Разложить многочлен на множители: $P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x)$, используя формулы сокращенного умножения:

– квадрат суммы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

– квадрат разности $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

– разность квадратов $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

– куб суммы $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

– куб разности $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

– сумма кубов $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$;

– разность кубов $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)$.

3. Принять уравнению вид $P_1(x)P_2(x)P_3(x) = 0$.

4. Получить равносильно совокупности уравнений

$$P_1(x) = 0;\ P_2(x) = 0;\ P_3(x) = 0.$$

5. Множество корней уравнения $P(x) = 0$ представить собой объединение множеств корней уравнений $P_1(x) = 0;\ P_2(x) = 0;\ P_3(x) = 0$.

3. Разложение на множители с помощью метода группировки.

Задача 3. Решите уравнение $x^8 + 11x^5 - 32x^3 - 252 = 0$.

Решение. $x^5(x^3+11) - 32(x^3+11) = 0; (x^3+11)(x^5-32) = 0$; $x^3 + 11 = 0 \Longrightarrow x_1 = -\sqrt[3]{11}$. $x^5 - 32 = 0 \ \Longrightarrow \ x_2 = 2$. Ответ: $-\sqrt[3]{11}; 2$.

Алгоритм решения алгебраических уравнений высших степеней методом разложения на множители (метод группировки):

1. Дано уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ - многочлен, степень которого выше второй.

2. Разложить многочлен на множители: $P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x)$, используя метод группировка.

– объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена.

– вынести этот общий множитель за скобки.

3. Принять уравнению вид $P_1(x)P_2(x)P_3(x) = 0$.

4. Получить равносильно совокупности уравнений

$$P_1(x) = 0;\ P_2(x) = 0;\ P_3(x) = 0.$$

5. Множество корней уравнения $P(x) = 0$ представить собой объединение множеств корней уравнений $P_1(x) = 0;\ P_2(x) = 0;\ P_3(x) = 0$.

4. Разложение на множители с помощью понижения степени (деление многочлена на многочлен).

Задача 4. Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 7x - 12 = 0$.

Решение. Попробуем найти целочисленный корень уравнения, искать его следует среди делителей числа -12, т.е. среди чисел $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Положим $p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 12$. Имеем $p(1) = -16, p(-1) = -4, p(2) = -10, p(-2) = 2, p(3) = 12. p(-3) = 0$. Итак, $x_1 = -3$ – корень заданного уравнения. Разделим $p(x)$ на $x + 3$. Получаем $(x + 3)(x^2 - x - 4) = 0$. Из уравнения $x^2 - x - 4 = 0$ находим еще два корня заданного уравнения $x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Ответ: $-3; \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Алгоритм решения алгебраических уравнений с помощью понижения степени (деление многочлена на многочлен):

1. Дано уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ - многочлен, степень которого выше второй.

2. Найти целочисленный корень многочлена $x_i, i = 1,2, \dots m$ (m – количество целых корней уравнения). Его следует искать среди делителей свободного члена заданного многочлена $P(x)$.

3. Выписать эти делители – «кандидаты в целочисленные корни».

4. Представить выписанные значения поочередно в выражение $P(x)$. И найти корень многочлена.

5. Найти частное от деления многочлена $P(x)$ на $(x - x_1)$, где x_1 – корень уравнения

6. Представить уравнение в виде $(x - x_1) \cdot P_{n-1}(x) = 0$, где x_1 – корень уравнения, а $P_{n-1}(x)$ – частное от деления многочлена $P(x)$ на $(x - x_1)$.

7. Продолжить подставлять выписанные ранее делители в уравнение $P_{n-1}(x) = 0$, начиная с x_1 (так как корни могут повторяться). Как только получаем тождество, то корень x_2 найден.

8. Уравнение представить в виде $(x-x_1)(x-x_2)\cdot P_{n-2}(x)=0$, где x_1, x_2 – корни уравнения, а $P_{n-2}(x)$ – частное от деления $P_{n-2}(x)$ на $(x-x_2)$.

9. И так продолжить перебор делителей, начиная с x_2. В итоге найти все m целых корней уравнения и оно представится в виде

$(x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot P_{n-m}(x)=0$, где x_1, x_2 – корни уравнения, а $P_{n-m}(x)$ – многочлен степени $n-m$.

10. Найти оставшиеся корни (иррациональные и/или комплексные) из уравнения $P_{n-m}(x)=0$ любым способом.

5. Разложение на множители с помощью понижения степени (схема Горнера).

Задача 5. Решите уравнение $x^3-7x-6=0$.

Решение. Если это уравнение имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена. Запишем эти делители: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Проверим их по схеме Горнера. Таблица, заполненная по схеме Горнера, по сути, является решением рассмотренного примера. Ответ: $-1;\ -2; 3$.

Алгоритм решения алгебраических уравнений с помощью понижения степени (схема Горнера):

1. Дано уравнение $P(x)=0$, где $P(x)$ - многочлен, степень которого выше второй.

2. Найти целочисленный корень многочлена $x_i, i=1,2,\ldots m$ (m – количество целых корней уравнения). Его следует искать среди делителей свободного члена заданного многочлена $P(x)$.

3. Выписать эти делители – «кандидаты в целочисленные корни».

4. Разделить многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ на двучлен $x-\alpha$ и в результате деления получить многочлен $Q(x)=b_0x^{n-1}+$ $+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}$, то коэффициент многочлена $Q(x)$ найти по схеме Горнера.

5. Порядок действий:

– начиная со второго столбца первой строчки, записывают коэффициенты из начального уравнения;

– в первый столбик переносят то число, на которое будет выполняться деление, то есть потенциальные корни (x_i);

– ниже заносится то, что стоит в верхнем элементе второго столбика;

– для заполнения следующей ячейки нужно выполнить операцию произведения числа на выбранное x_i и прибавить стоящее число, расположенное в столбике сверху;

– проделать аналогичные операции до окончательного заполнения всех ячеек.

Схема Горнера. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}+\ldots+a_n = (x-\alpha)(b_0x^{n-1} + +b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}) + P(\alpha)$.

Таблица 6 – Схема Горнера

α	a_0	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha \cdot b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha \cdot b_1$		$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha \cdot b_{n-2}$	остаток= $a_n + \alpha \cdot b_{n-1}$

Если число α является корнем многочлена $P(x)$, то остаток от деления многочлена на $x-\alpha$ равен нулю, то есть в последнем столбце второй строки схемы Горнера мы получаем 0.

6. Метод введения новой переменной.

Задача 6. Решите уравнение $(2-x)^6 + 9(2-x)^3 + 8 = 0$.

Решение. $t = (2-x)^3; t^2 + 9t + 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -8;\ t_2 = -1$. $(2-x)^3 = -8; 2-x = -2 \Rightarrow \quad x_1 = 4. \quad (2-x)^3 = -1; 2-x = -1 \Rightarrow x_2 = 3$. Ответ: $4; 3$.

Алгоритм решения алгебраических уравнений методом введения новой переменной:

1. Дано уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ - многочлен, степень которого выше второй.

2. Сделать замену переменной для удобства решения, и записать данное уравнение через новую переменную.

3. Решить получившееся уравнение относительно новой переменной.

4. Выполнить обратную замену. Тогда исходное уравнение равносильно совокупности уравнений.

5. Решить каждое уравнение в этой совокупности, чтобы найти значения x.

6. Множество решений этой совокупности и есть множество решений исходного уравнения.

7. Метод введения новой переменной (возвратные уравнения).

Задача 7. Решите уравнение $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$.

Решение. Имеем $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - (2 \cdot 2)x + 2^2 \cdot 3 = 0$. Это возвратное уравнение. Разделим обе его части почленно на x^2: $3x^2 - -2x - 9 - 2 \cdot \frac{2}{x} + 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 0; 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 9 = 0$. Пусть $y = x + +\frac{2}{x}$, тогда $y^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2$, откуда находим, что $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$. С помощью новой переменной y уравнение можно переписать в виде $3(y^2 - 4) - 2y - -9 = 0$, т.е. $3y^2 - 2y - 21 = 0$. Найдём корни этого квадратного уравнения: $y_1 = 3, y_2 = -\frac{7}{3}$. Значит, либо $x + \frac{2}{x} = 3$, либо $x + \frac{2}{x} = -\frac{7}{3}$. Из первого уравнения находим $x_1 = 1, x_2 = 2$, а второе уравнение не имеет действительных корней. Ответ: $1; 2$.

Алгоритм решения алгебраических уравнений методом введения новой переменной (возвратные уравнения):

1. Дано возвратное уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$ (где все коэффициенты отличны от нуля и первые два коэффициента a и b как бы возвращаются в последних двух членах уравнения).

2. Разделить обе части уравнения почленно на x^2 (что вполне законно, поскольку значение $x = 0$ не является корнем уравнения), и получить $ax^2 + bx + c + b\frac{k}{x} + a(\frac{k}{x})^2 = 0$.

3. Преобразовать к виду $a(x^2 + \frac{k^2}{x^2}) + b(x + \frac{k}{x}) + c = 0$.

4. Сделать замену переменной $y = x + \frac{k}{x}$, тогда $y^2 = (x + \frac{k}{x})^2$, откуда находим, что $x^2 + \frac{k^2}{x^2} = y^2 - 2k$.

5. С помощью новой переменной y уравнение переписать в виде $a(y^2 - 2k) + by + c = 0$.

6. Решить получившееся квадратное уравнение относительно новой переменной, т.е. найти корни y_1 и y_2.

7. Выполнить обратную замену. Тогда возвращаясь к переменной x, остаётся решить два уравнения $x + \frac{k}{x} = y_1$; $x + \frac{k}{x} = y_2$.

8. Метод введения новой переменной (однородные уравнения).

Задача 8. Решите уравнение $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

Решение. Введём две новые переменные: $u = x^2 + x + 1, v = x - 1$. Тогда уравнение примет вид $2u^2 - 13uv - 7v^2 = 0$. Это однородное уравнение второй степени. Разделив обе части уравнения почленно на v^2 и введя новую переменную $y = \frac{u}{v}$, получим квадратное уравнение $2y^2 - 13y -$ $-7 = 0$ с корнями $y_1 = 7, y_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\frac{u}{v} = 7$, т.е. $u = 7v$, либо $\frac{u}{v} = -\frac{1}{2}$, т.е. $v = -2u$. Возвращаясь к переменной x, переписываем соотношение $u = 7v$ в виде $x^2 + x + 1 = 7(x - 1)$, т.е. $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_1 =$ $= 2, x_2 = 4$. Переписываем второе соотношение $v = -2u$ в виде $x - 1 =$ $= -2(x^2 + x + 1)$, т.е. $2x^2 + 3x + 1 = 0, x_3 = -1, x_4 = -\frac{1}{2}$. Ответ: $2; 4;\ -1;\ -\frac{1}{2}$.

Алгоритм решения алгебраических уравнений методом введения новой переменной (однородные уравнения):

1. Дано однородное уравнение $p(x;y) = 0$, где $p(x;y)$ – однородный многочлен n-й степени.

2. Разделить почленно обе части заданного однородного уравнения на x^n.

3. Сделать замену переменной $z = \frac{y}{x}$, решить получившееся уравнение относительно z.

4. Выполнить обратную замену и найти два ответа $\frac{y}{x}$.

3. Упражнения для третьего этапа.

Задание 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данное числа p является корнем данного уравнения; для каждого найденного значения a решите данное уравнение: $x^3 + 3x^2 - 7x + a = 0, p = 2$.

Решение. $8 + 12 - 14 + a = 0; a = -6$; $x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0$. Разделим $x^3 + 3x^2 - 7x - 6$ на $x - 2$, то получим $(x - 2)(x^2 + 5x + 3) = 0$. Ответ: $x = 2$; $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Задание 2. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых многочлен $p(x)$ имеет хотя бы один целый корень; для каждого найденного значения a определите число различных целых корней многочлена $p(x)$: $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 1$.

Задание 3. Найдите все значения параметров a и b, при каждом из которых многочлен $p(x)$ имеет три различных целых корня: $p(x) = x^3 + +ax^2 + bx + 2$.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 – целочисленные корни многочлена. Тогда имеет место равенство $x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, откуда следует, что $x_1 x_2 x_3 = -2$. Целочисленными корнями данного многочлена могут быть только числа $1, -1, 2, -2$, но из них лишь тройка $1, -1, 2$ удовлетворяют условию $x_1 x_2 x_3 = -2$. Таким образом, $x^3 + ax^2 + bx + 2 =$
$= (x - 1)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, т.е. $a = -2, b = -1$. Ответ: $a = -2, b = -1$.

В статье «Применение теоремы Виета для решения задач повышенной сложности» [1] авторы рассматривают метод решения уравнений высших степеней с помощью теоремы Виета.

«Если числа $x_1, \dots, x_n$ являются корнями уравнения $P_n(x) = 0$, где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + \ldots + a_n$, то выполняются равенства $x_1 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$, $x_1x_2 + x_1x_3 \ldots + x_{n-1}x_n = -\frac{a_2}{a_0}$, $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$. В частности, для корней кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ выполняются равенства: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$» [1].

§9. Результаты педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент проводился на базе МБУ «Школа №34» г.о. Тольятти, в период работы учителем математики в этой школе. В эксперименте участвовало 23 ученика 11-го класса, которые учатся по программе углубленного уровня по учебнику и задачнику А.Г. Мордковича [47, 48].

Целью констатирующего этапа эксперимента являлось выявление у учащихся умения решать уравнения смешанного типа. Учащимся была предложена контрольная работа, в которой представлены задачи 6-го вида внутрипредметных связей.

Поисковый этап эксперимента был направлен на создание системы упражнений по теме ВКР.

1 вариант

Задача 1. а) Решите уравнение $15^{cosx} = 3^{cosx} \cdot 5^{sinx}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $9^{sinx} + 9^{-sinx} = \frac{10}{3}$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $2log_3^2(2cosx) - 5log_3(2\cos x) + 2 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $\frac{(tgx+\sqrt{3})log_{13}(2sin^2x)}{log_{31}(\sqrt{2}cosx)} = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

2 вариант

Задача 1. а) Решите уравнение $(27^{cosx})^{sinx} = 3^{\frac{3cosx}{2}}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 2. а) Решите уравнение $(\frac{2}{5})^{cosx} + (\frac{5}{2})^{cosx} = 2$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 3. а) Решите уравнение $2log_2^2(2cosx) - 9log_2(2\cos x) + 4 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Задача 4. а) Решите уравнение $\frac{log_2^2(sinx)+log_2(sinx)}{2cosx-\sqrt{3}} = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Приведем результаты данной контрольной работы в таблице 7.

Таблица 7 – Результаты контрольной работы по уравнениям смешанного типа

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к заданию
1.	74% (17)	26% (6)	0% (0)
2.	61% (14)	35% (8)	4% (1)
3.	65% (15)	26% (6)	9% (2)
4.	40% (9)	30% (7)	30% (7)

После результатов контрольной работы можно сделать вывод: показательные уравнения отлично решили 74% (61%) учащихся, приступили к решению задания №1 все, к заданию № 2 не приступил один учащийся, и были допущены ошибки у 26% (35%) учащихся. Так же следует отметить, что учащиеся хорошо освоили метод замены переменной. В задании №3 дано логарифмическое уравнение, с которым справились 65%. Мы видим, что большие затруднения у учащихся связаны с задачами, в которых нужно находить ОДЗ. Задание №4 выполнили верно лишь 40%, а 30% учащихся вообще не приступали к данному заданию.

Выводы по второй главе

Во второй главе рассматриваются методические основы реализации внутрипредметных связей с помощью уравнений при обучении математике в общеобразовательной школе. Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1. Кратко перечислены пять требований к системам математических задач, которые сформулировал В.И. Крупич.

2. Разработаны четыре системы задач, основанные на принадлежности задач к теме и разделу математики:

1) «задачи принадлежат одной теме и одному разделу;
2) задачи принадлежат одной теме и нескольким разделам;
3) задачи принадлежат нескольким темам, но одному разделу;
4) задачи принадлежат нескольким темам и нескольким разделам» [8].

3. При анализе задач единого государственного экзамена профильного уровня было выявлено, что уравнения являются средством реализации внутприпредметных связей в заданиях №12, №13 (С1) и №18 (С6).

4. Представлен разработанный элективный курс «Тригонометрические уравнения высших степеней» для учащихся математического профиля.

5. Рассмотрен метод алгоритмазации для реализации внутрипредметных связей на примере алгебраических уравнений высших степеней. За основу работы с алгоритмами была выбрана технология Е.И. Лященко.

6. Приведено описание констатирующего педагогического эксперимента, цель которого – выявление у учащихся умения решать уравнения смешанного типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Выявлены различные определения внутрипредметных связей, определены основные подходы к понятию внутрипредметных связей. Проведённое нами исследование показало, что более качественный уровень математического образования достигается учениками во многом благодаря реализации внутрипредметных связей посредством решения задач.

2. Описаны основные функции внутрипредметных связей.

3. Представлены виды внутрипредметных связей, которые могут быть реализованы с помощью решения задач.

4. Перечислены требования к системам математических задач.

5. В процессе исследования были разработаны системы задач по реализации внутрипредметных связей. Определены, какие именно виды реализации внутрипредметных связей с помощью решения задач могут использоваться для каждой из представленных систем.

3. Выполнен анализ задач единого государственного экзамена профильного уровня по теме исследования.

4. Представлен разработанный элективный курс «Тригонометрические уравнения высших степеней» для учащихся математического профиля.

5. Рассмотрен метод алгоритмазации для реализации внутрипредметных связей на примере алгебраических уравнений высших степеней.

6. Приведено описание констатирующего педагогического эксперимента, цель которого – выявление у учащихся умения решать уравнения смешанного типа.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов, Н.Х., Подлипский, О.К., Щербатых С.В. Применение теоремы Виета для решения задач повышенной сложности / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, С.В. Щербатых // Математика в школе. – 2017. - №8. С.41-47.

2. Аксенов, А.А. Внутрипредметные связи как ресурс процесса поиска решения школьных математических задач / А.А. Аксенов // Известия российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2008. – № 81. С. 191-198.

3. Аксенов, А.А. Реализация внутрипредметных связей при изучении раздела «Уравнения, неравенства и их системы» в профильных классах и классах с углублённым изучением математики / А.А. Аксенов // Монография. Орёл: ОГУ, 2004. – 60 с.

4. Аксенов, А.А. Реализация внутрипредметных связей при изучении раздела «Уравнения, неравенства и их системы» в классах с углублённым изучением математики / А.А. Аксенов // Орёл: ООИУУ, 1999.– 24 с.

5. Аксенов, А.А. Реализация внутрипредметных связей посредством решения задач / А.А. Аксенов // Орёл: ООИУУ, 1999. – 20 с.

6. Аксенов, А.А. Методические модели, реализующие внутрипредметные связи посредством решения задач / А.А. Аксенов // Орёл: ООИУУ, 2000. – 20 с.

7. Аксенов, А.А. Роль внутрипредметных связей в осуществлении поиска решения школьных математических задач / А.А. Аксенов // Орёл: ООИУУ, 2007. – 20 с.

8. Аксенов, А.А. Теоретические основы реализации внутрипредметных связей посредством решения задач в классах с углубленным изучением математики : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 : / А.А. Аксенов. – Орел, 2000. – 160 с.

9. Аксенов, А.А. Теоретические основы реализации внутрипредметных связей посредством решения задач в классах с углубленным изучением математики / А.А. Аксенов // Монография. Орел, 2006. – 152 с.

10. Бабенко, А.С. Реализация внутрипредметных связей курса математики при изучении элементов комбинаторики в школе / А.С. Бабенко// Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2017. Т. 23, №4. С.125-128.

11. Бабенко, А.С., Смирнова, А.О. Система задач вероятностно-статистической линии в школе как средство реализации внутрипредметных связей курса математики / А.С. Бабенко, А.О. Смирнова // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественнонаучных дисциплин: мат-лы XII всерос. науч.-метод. конф. Кострома: Костромской государственный университет. – 2008. – С. 117-122.

12. Бакмаев, Ш.А. О реализации внутрипредметных связей при изучении преобразований тригонометрических выражений / Ш.А. Бакмаев // Пути предупреждения формализма в знаниях учащихся при обучение математике: Методические рекомендации / Под ред. Е.И. Лященко, З.И. Новосельцевой. – Л.: Ленинградский пединститут, 1989. – С. 45-53.

13. Блох, А. Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.: ил.

14. Голубев, А.А. Роль внутрипредметных связей при обучении математике в школе на примере метода интервалов / А.А. Голубев // Новая наука: опыт, традиции, инновации. – 2016. – № 3-2 (71). С. 52-55.

15. Далингер, В.А. Методические рекомендации к проведению обобщающих повторения / В.А. Далингер // Математика в школе. – 1988. – №2. С. 57 – 59.

16. Далингер, В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: кн. для учителя / В.А. Далингер – М.: Просвещение, 1991. – 80 с.

17. Далингер, В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей / В.А. Далингер // Омск: Изд-во Омска. ин-та повыш. квал. раб. обр., 1993. – 323 с.

18. Демченкова, Н.А. Взаимосвязанные задачи как средство обучения решению уравнений в курсе алгебры основной школы / Н.А. Демченкова, М.Г. Пугачева // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции «Артемовские чтения». Пензенский государственный университет; под общей редакцией М.А. Родионова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. – С. 159-165.

19. Дубовая, Л.В. Информационная модель внутрипредметных связей: дис.....канд. пед. наук: 13.00.02 / Л.В. Дубовая. – Владивосток, 2004. – 153 с.

20. Звавич, Л.И. Алгебра. 9 класс: задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский, П.В. Семенов.– 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 336 с.

21. Капкаева Л.С.Интеграция алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании : автореферат дис. ... доктора педагогических наук : 13.00.02 /Капкаева, Лидия Семеновна. Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. - Саранск, 2004. - 41 с.

22. Колягин, Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Автореф. дис. ... д-ра пед. наук. / Ю.М. Колягин – М., 1977. – 55 с.

23. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч.1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся / Ю.М. Колягин - М.: Просвещение, 1977. – 110 с.

24. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч.2. Обучение математике через задачи и обучение решению задач / Ю.М. Колягин - М.: Просвещение, 1977. - 144 с.

25. Колягин, Ю.М. Методические проблемы применения задач в обучении математике // Роль и место задач в обучении математике / Под ред. Ю.М.Колягина. – М.: Изд-во НИИ школ, 1978. – С.5-12.

26. Колягин, Ю.М. Обучение математике в процессе решения задач и обучение решению задач в средней школе // Вопросы обоснования содержания школьного математического образования / Под ред. О.А.Боковнева. – М.: Издво НИИ школ, 1981. – С.4 – 11.

27. Кононенко, Н.В., Токарева, Ю.С., Чухрий, П.А. Реализация внутрипредметных связей в рамках содержательно-методических линий школьного курса математики / Н.В. Кононенко, Ю.С. Токарева, П.А. Чухрий// Самарский научный вестник. – 2019. – № 3 (28). С. 290-295.

28. Костюченко, Р.Ю. Обучение учащихся предельной аналогии при реализации внутрипредметных связей школьного курса геометрии: дис….. канд. пед. наук : 13.00.02 / Р.Ю. Костюченко. – Омск, 2000. – 202 с.

29. Крупич, В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В.И. Крупич.- М.: Прометей, 1995. – 166 с.

30. Куликов, Л. Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, Ф.Л. Фомин. – М.: Просвещение, 2012. – 288 с.

31. Кыштообаева, Ч.А. Внутрипредметные связи курса геометрии в средней школе // Бюллетень науки и практики. 2017. №6 (19). С. 320-326

32. Лященко, Е,И., Зобкова, К.В., Кириченко, Т.Ф. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

33. Лудина, Г.В. К вопросу реализации внутрипредметных связей в курсе математики восьмилетней школы (на примере изучения перемещений плоскости) // Проблемы совершенствования преподавания математики в школе / Под ред. В.И. Мишина. – М.: Изд – во Московствого государств. пед. института им. В.И. Ленина, 1986. – С. 202 – 207.

34. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 13-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2013. – 336 с.

35. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 10-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2010. – 384 с.

36. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 7-е изд., испр. И доп. – М. : Мнемозина, 2008. – 447 с.

37. Махсудова, У. М. Изучение вектора в VII - IX классах как одно из средств реализации внутрипредметных связей при обучении математике : Дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 : Махачкала, 2004. – 128 с.

38. Молдоисаева, И.К. Алгоритмизация межпредметных и внутрипредметных связей математики как одно из направлений повышения качества образования / И.К. Молдоисаева // Известия вузов Кыргызстана. – 2016. – № 5. С. 42-45.

39. Монахов, В.М., Гуревич, В.Ю. Методика исследования внутприпредметных и межпредметных связей в предметах естественно – научного цикла // Теоретические основы естественно – математического

образования в средней школе / Под ред. В.М. Монахова. – М.: Изд – во НИИ СиМО АПН СССР, 1978. – С. 4-33.

40. Монахов, В.М., Гуревич, В.Ю. Об одном методе системного анализа внутрипредметных связей / В.М. Монахов, В.Ю. Гуревич // Математика в школе. – 1980. – № 2. С. 54-57.

41. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1.: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – М. : Мнемозина, 2009. – 191 с.

42. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2.: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – М. : Мнемозина, 2009. – 207 с.

43. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1.: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 10-е изд., доп. - М. : Мнемозина, 2013. – 256 с.

44. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2.: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович и др. – 11-е изд., испр. И доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 344 с.

45. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 кл. : учеб. для учащихся общеобразоват. Учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 3-е изд., перераб. – М. : Мнемозина, 2008. – 255 с.

46. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.

47. Мордкович, А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 4-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2016. – 311 с.

48. Мордкович, А.Г. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А.Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А.Г. Мордковича. – 4-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2016. – 264 с.

49. Назаретов, А. П. Внутрипредметные связи как методическая основа совершенствования процесса обучения математике на подготовительных курсах вузов: автореферат дис. ... кандидата педагогических наук : 13.00.02 / Моск. авиационно-технол. ун-т.- Москва, 1997. – 21 с.

50. Нахман, А.Д. Вопросы содержания и технологические приемы обучения стохастике в школьном курсе математики / А.Д. Нахман // Международный журнал экспериментального образования. 2018. №1. С. 25-30.

51. Николаева, К.Д. О преподавании темы «Методы решения уравнений высших степеней» в школьном курсе математики / Николаева К.Д.// Студенческая наука и XXI век. – Марийский государственный университет, 2017. - №15. С. 338-340.

52. Образцов, П.И. Психолого-педагогические аспекты разработки и применения в вузе информационных технологий обучения / П.И. Образцов – Орловский государственный технический университет. – Орел, 2000. – 145 с.

53. Петров, В.А., Шмойлов, А.В. Содержание межпредметных связей в системе образования / В.А. Петров, А.В. Шмойлой // Образование и общество №1(7). 2001. – С. 98-100.

54. Пугачева, М.Г.. Формирование понятия «Рациональное уравнение» / М.Г. Пугачева // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск.– С. 241-243.

55. Пугачева, М.Г. Уравнения как средство реализации внутрипредметных связей курса математики общеобразовательной школы / М.Г. Пугачева // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: Материалы III Международной заочной научно-практической конференции. 1-7 июня 2020 г., г. Луганск. – Луганск: КНИТО 2020.

56. Пугачева, М.Г., Демченкова, Н.А. Обучение решению уравнений с помощью взаимосвязанных задач в курсе алгебры основной школы / М.Г. Пугачева, Н.А. Демченкова // Материалы международной научно-практической конференции «Современное математическое образование: опыт, проблемы, перспективы». – Казахстан, Кокшетау, 8 июня 2018. – С. 589-594.

57. Резник, Н.И. Инвариантная основа внутрипредметных, межпредметных связей: методологические и методические аспекты. Моногр.- Владивосток: Изд. ДВГУ, 1998. – 206 с.

58. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике: методология и теория : учеб. пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 292 с.

59. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 1995. – 240 с.

60. Сторчилов, П. А. Реализация внутрипредметных связей при обучении физике в школе на основе циклической модели построения содержания учебного курса: дис.....канд. пед. наук: 13.00.02 / П.А. Сторчилов.– Волгоград, 2015. – 195 с.

61. Терехова, Л.А. Методика изучения понятия «геометрическая вероятность» в структуре «традиционного» школьного курса математики / Л.А. Терехова // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Гуманитарные и социальные науки. 2016. №3 (72). С. 342-347.

62. Терехова, Л.А. Элементы стохастики как средство укрепления внутрипредметных связей школьного курса математики: автореферат на дис.....канд. пед. наук: 13.00.02 / Л.А. Терехова. – Орел, 2008. – 17 с.

63. Усова, А.В. Межпредметные связи как необходимое дидактическое условие повышения научного уровня преподавания основ наук в школе. Выпуск 1. / А.В. Усова. – Челябинск, 1973. – С.23-28.

64. Шевкин, А.В. Об учёте и использовании внутрипредметных связей в процессе преподавания математики // Проблемы совершенствования преподавания математики в средней школе / под ред. С.Б. Суворовой. – М.: Изд-во АПН СССР, 1986. – С. 130 – 135.

65. Btemirova, R.I. Atayan, A.M. Matematics' intrasubject ties as one of the directions of realization of the pedagogical principle of theory and practice link / R.I. Btemirova, A.M. Atayan // Social science and humanity. – 2013. – № 2. – С. 38-49.

66. Uslu, O. Factors Associated with Technology Integration to Improve Instructional Abilities: A Path Model [Text] / Oner Uslu // Australian Journal of Teacher Education, April 2018. – 43 (4). – PP. 31 – 50.

67. Mtetwa, D., Mudehwe, L., Minyira, S. Learning mathematics for personal undersranding and productions: A viewpoint / D. Mtetwa // Pythagoras. – South Africa, 2010.

68. Kayama, M., Satoh, M., Kobayashi, K., Kunimune, H., Hashimoto, M., Otani M. Algorithmic Thinking Learning Support Syste Based on Student-Problem Score Table Analysis / M. Kayama // International Journal of Computer and Communication Engineering. – Slovenia, 2015.

69. Stollman, S., Meirink, J., Westenberg, M., Driel, J. Teachers' interactive cognitions of differentiated instruction in a context of student talent development / Saskia Stollman, Jacobiene Meirink, Michiel Westenberg, Jan van Driel // Teaching and Teacher Education, January 2019. – PP. 138 – 149.

70. Liu, P. Technology Integration in Elementary Classrooms: Teaching Practices of Student Teachers / Ping Liu // Australian Journal of Teacher Education, March 2016. – 41(3). – PP. 87 – 104.