МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы»

Студент С.О. Макарова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент И.В. Антонова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Понятие параметра одно из важных математических понятий, которое используется как в школьном курсе математики, так и при изучении смежных дисциплин.

В федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования [67, С. 16-17] отмечается, что результаты изучения предметной области «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (углубленный уровень) должны отражать: «сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений; сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения находить нестандартные способы решения задач; сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат».

Вместе с этим, в Концепции развития математического образования в Российской Федерации указано: «математическое образование должно обеспечивать каждого обучающегося развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя присущую математике красоту и увлекательность; непрерывную поддержку и повышение уровня математических знаний для удовлетворения любознательности человека, его общекультурных потребностей, приобретение знаний и навыков, применяемых в повседневной жизни и профессиональной деятельности» [31].

Большинство обучающихся испытывают затруднения при решении заданий с параметрами. При решении уравнений с параметрами важно владеть различными приемами и методами их решения, уметь проводить логические построения, тщательно проверять полученное решение и грамотно записывать ответ, учитывая все значения параметра. Задания с параметром часто встречаются в олимпиадах по математике разного уровня, заданиях ОГЭ и ЕГЭ.

Теоретические аспекты обучения решению задач с параметрами в общеобразовательной школе рассмотрены в работах М.И. Башмакова [6; 7], Г.В. Дорофеева [17], М.И. Зайкина [24], А.Г. Мордковича [48], Г.И. Саранцева [61], Л.М. Фридмана [69] и др.

Анализ ранее выполненных диссертационных работ по теме исследования показал, что в них представлены различные аспекты обучения решению задач с параметрами в общеобразовательной школе:

– реализация теории развивающего обучения, технологии поэтапного формирования умственных действий (В.И. Горбачев [15], 2000 г.);

– выделение действий, определяющих составы обобщенных приемов решения определенного вида уравнений с параметрами, установление основных этапов процесса их формирования (С.В. Арюткина [5], 2002 г.);

– поэтапное формирование учебных навыков решения задач с параметрами; развитие системного типа мышления обучающихся, демонстрация возможности практического применения полученных ими знаний, идей и методов их решения (В.В. Мирошин [39], 2008 г.).

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречием* между необходимостью обучения школьников решению уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, подготовки их к ОГЭ и ЕГЭ по математике, и фактическим состоянием методики ее обучения на практике.

Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических особенностей обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что повышение качества математической подготовки обучающихся по теме «Уравнения с параметрами» будет достигаться, если: выявить методические особенности обучения решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы и с их учетом разработать методику обучения решению задач по данной теме.

Задачи исследования:

1. Представить различные подходы к определению понятия «уравнение с параметром» и выявить виды алгебраических уравнений с параметром, рассматриваемые в курсе математики общеобразовательной школы.

2. Раскрыть цели обучения теме «Уравнения с параметрами» и ее место в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

3. Выявить содержание теоретического и задачного материалов по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы.

4. Представить методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

5. Рассмотреть задачи ЕГЭ по теме «Уравнения с параметрами» в курсе математики общеобразовательной школы.

6. Разработать системы задач по теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

7. Разработать элективный курс по теме «Алгебраические уравнения с параметром» для учащихся математического профиля.

8. Проверить экспериментально эффективность разработанных методических рекомендаций по теме «Уравнения с параметром» и представить результаты педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы М.И. Башмакова, Г.В. Дорофеева, М.И. Зайкина, А.Г. Мордковича, Г.И. Саранцева, Л.М. Фридмана.

Базовыми для настоящего исследования явились также: работы М.Б. Воловича, Л.В. Виноградовой, М.И. Зайкина.

Для решения поставленных задач будут применяться следующие **методы исследования:** анализ научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2018/2019 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы).

2 семестр (2018/2019 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2019/2020 уч.г.): определение методических основ исследования; разработка систем задач по теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы и элективного курса по теме «Алгебраические уравнения с параметром» для учащихся математического профиля.

4 семестр (2019/2020 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБУ «Школа №88» г.о. Тольятти Самарской области.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем предложены методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметром в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем: выявлены методические особенности обучения решению алгебраических уравнений с параметрами и приведены основные типы заданий по теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Практическую значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны: методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы; системы задач по теме «Уравнения с параметрами» для обучающихся 7-11 классов; элективный курс «Алгебраические уравнения с параметром» для обучающихся 10-11 классов математического профиля.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивались: сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических рекомендаций по обучению решению алгебраических уравнений с параметром обучающихся 7-11 классов с углубленным изучением математики; разработке систем задач по теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы и элективного курса по теме «Алгебраические уравнения с параметром» для обучающихся математического профиля, в описании результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. *Экспериментальная проверка* предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе МБУ «Школы №88» (Самарская область, г.о. Тольятти). *Теоретические выводы и практические результаты* исследования представлены на конференциях: всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (г. Тольятти, декабрь 2018 г.; декабрь 2019 г., диплом за 3-е место в конкурсе докладов по направлению «Математика. Физика»); IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (г. Тольятти, апрель 2019 г., диплом за 3-е место в конкурсе научно-исследовательских работ «Моя магистерская диссертация»); научно-практической конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ»: (г. Тольятти, направление «Теория и методика обучения математике», 1 этап, апрель 2018 г., диплом за 3 место; 1 этап, апрель 2019 г., диплом за 1 место; направление «Математика и методика обучения математике», 1 этап, апрель-май 2020 года). Основные результаты исследования отражены в 4 публикациях [21; 22; 23; 32].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

2. Системы задач по теме «Уравнения с параметрами» для обучающихся 7-11 классов.

3. Элективный курс «Алгебраические уравнения с параметром» для обучающихся 10-11 классов математического профиля.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 6 рисунков, 6 таблиц, список используемой литературы (77 источников), 2 приложения. Основной текст работы изложен на 109 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие уравнения с параметром и его виды

Прежде чем перейти к понятию уравнения с параметром приведем понятие уравнения, опишем основные виды уравнений, изучаемых в школьном курсе математики.

Понятие «уравнение» относится к важнейшим общематематическим понятиям. Существуют различные трактовки понятия «уравнение».

М.И. Башмаков отмечает, что «традиционное понимание понятия *«уравнение»* - это запись постановки некоторой реальной задачи. Буквы в уравнении – это неизвестные (а не переменные!). Главное в решении уравнения – поиск способа его решения» [6, С. 3-4]. В учебниках математики понятие уравнения рассматривают как: *1) равенство, содержащее неизвестное число; 2) равенство с переменной.* После одной из данных формулировок понятия уравнения приводится определение корня уравнения. Различие между «переменной» и «неизвестной» состоит в том, что переменная «пробегает» ряд значений, а неизвестное является буквенным обозначением конкретного числа.

Приведем *виды уравнений*, которые рассматриваются в курсе алгебры основной школы, в учебниках различных авторов:

I. Линейное уравнение.

В учебниках алгебры можно выделить следующие определения понятия линейного уравнения:

1. «Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a, b – любые числа (коэффициенты) (А.Г. Мордкович, 7 класс» [40, С. 22]).

2. «Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a, b – некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной (Ю.Н. Макарычев, 7 класс» [33, С. 28]).

3. «Линейным уравнением с одним неизвестным x называют уравнением, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно x или числа» (С.М. Никольский, 7 класс [52, С. 174]).

4. «Уравнение вида где a, b – заданные числа, x – переменная, называют линейным уравнением» (Ю.М. Колягин, 7 класс [28, С. 43]).

II. Квадратное уравнение.

Приведем определения понятия квадратного уравнения, использующиеся в учебниках алгебры:

1. «Квадратным называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты a, b, c – любые действительные числа, но $a \neq 0$. Коэффициенты a, b, c называют соответственно так: первый или старший коэффициент, второй коэффициент или коэффициент при x, свободный член» (А.Г. Мордкович, 8 класс [42, С. 141]).

2. «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c == 0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$» (Ю.Н. Макарычев, 8 класс [34, С. 174]).

3. «Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – данные числа и $a \neq 0$, называют квадратным уравнением» (С.М. Никольский, 8 класс [53, С. 74]).

4. «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + +c = 0$, где a, b, c – заданные числа, $a \neq 0$, x – неизвестное» (Ю.М. Колягин, 8 класс [29, С. 161]).

III. Рациональные уравнения.

1. «Если $p(x)$ – рациональное выражение, то уравнение $p(x) = 0$ называют рациональным» (А.Г. Мордкович, 8 класс [42, С. 20]).

2. «Уравнения, где левая и правая части являются рациональными выражениями. Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части яв-

ляются целыми выражениями, называются целым. Рациональное уравнение, в котором левая или правая части является дробным выражением, называется дробным» (Ю.Н. Макарычев, 8 класс [34, С. 194]).

3. «Если одна часть уравнения – целое выражение, а другая – дробно-рациональное или обе части – дробно-рациональные выражения, то уравнение называют дробно-рациональным уравнением» (Ю.Н. Макарычев, 8 класс [34, С. 213]).

4. «Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют рациональным уравнением с неизвестным x» (С.М. Никольский, 8 класс [53, С. 94]).

IV. Иррациональные уравнения.

1. «Если в уравнении переменная содержится под знаком корня (квадратного, кубического и т.д.), то уравнение называют иррациональным» (А.Г. Мордкович, 8 класс [42, С. 220]).

2. «Уравнения называют иррациональными, если они содержат переменную под знаком корня или переменную, входящую в основание степени с дробным показателем» (Ю.Н. Макарычев, 9 класс [35, С. 263]).

3. «Уравнение, в котором хотя бы один член содержит неизвестное под знаком корня, называют иррациональным уравнением» (С.М. Никольский, 9 класс [54, С. 104]).

В методической литературе отсутствует единый подход к определению такого понятия как *уравнение с параметром*. Рассмотрим различные подходы к формулировке данного понятия.

В статье Э.С. Белямовой приводится такое определение *параметра*: «*Параметр* (от греческого слова *parametron* - отмеривающий) - величина, значение которой служат для различения некоторого множества между собой. Под *областью определения* уравнения $f(x; a) = 0$ с параметром a понимают все такие системы значений x и a, при которых $f(x; a)$ имеет смысл» [8].

С.В. Арюткина пишет, что под *задачей с параметрами* в методических пособиях понимается «задача, в которой технический и логический ход зависят от входящих в условие величин, численные значения которых не заданы, но считают известными; эти величины называют *параметрами*, и они могут принимать, вообще говоря, произвольные значения» [4, С. 3-4].

В.В. Мирошин в пособии [38] отмечает: «При первоначальном определении величины происходит разделение величин на постоянные и переменные (Рис. 1). Переменные величины также делятся на приоритетные – аргументы и параметры» [38]. Данное разделение автор представляет следующим образом:

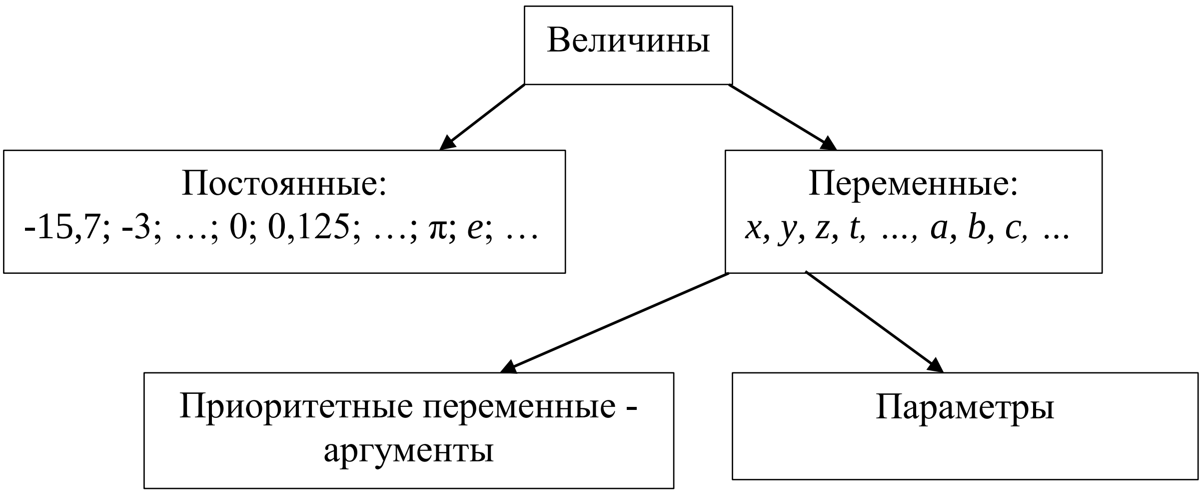


Рис. 1.

В пособии А.А. Прокофьева мы встречаем следующее определение *уравнения с параметром*: «Пусть дано уравнение с двумя переменными: $F(x, a) = 0$. Если в задаче сформулирована цель: «Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение относительно x», то выражение $F(x, a) = 0$ называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра a» [59, С. 5].

Ю.Н. Макарычев [35, С. 110] отмечает: «*Решить уравнение с параметром* – это значит установить соответствие, с помощью которого для каждого значения параметра указывается множество корней соответствующего уравнения».

В учебниках Ю.Н. Макарычева выделяются следующие *виды уравнений с параметрами*:

1. «Уравнения с параметром не выше второй степени (линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр). Уравнения с параметром не выше второй степени являются самыми распространенными в практике итоговых и конкурсных заданий.

2. Дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр, сводящиеся к линейным» [33; 34; 35].

Приведем понятие *линейного уравнения с параметром,* описанные в учебно-методической литературе:

*1. «*Линейным уравнением с параметром p является уравнение вида $Ax = B$, где A и B зависят от параметра p, то есть $A = A(p) = B(p)$» *(*Е.В. Юрченко, [71, С. 7]).

2. «Линейным уравнением с параметром a относительно x называется уравнение вида $f(a)\cdot x=q(a)$, где $f(a)$ и $q(a)$ – функции от a, x - неизвестное» (П.Ф. Севрюков, [62, С. 7]).

Ю.Н. Макарычев в учебном пособии для классов с углубленным изучением математики «Дополнительные главы к учебнику алгебры» [36, С. 160] дает определение понятия *квадратного уравнения с параметром* следующим образом: «В квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ коэффициенты a, b и c являются *параметрами*. Придавая параметру различные значения, мы будем получать различные *уравнения с числовыми коэффициентами*». Для того чтобы раскрыть этот вид уравнений с параметром, как *дробно-рациональные уравнения с параметром*, подробно показывается решение таких уравнений.

Основными методами решения уравнений, содержащих параметр, которые рассматриваются в школьном курсе математики, являются [70, С. 74]: аналитически метод, графический метод.

А.А. Прокофьев [59, С. 6] приводит *алгоритм решения* уравнения с параметром: «Определить ограничения, налагаемые на значения неизвестного x и параметра a. Затем определяют формальные решения, записываемые без учета ограничений. Если при решении возникают контрольные значения, то их наносят на координатную прямую. Такие значения разбивают ОДЗ параметра на подмножества. На каждом подмножестве решают заданное уравнение. После этого исключают значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям. Выписывают ответ».

Ю.Н. Макарычев в дополнительных главах к учебнику алгебры 8 класса выделяет следующий способ *решения уравнений с параметром*: «в зависимости от допустимых значений параметра находится соответствующее *множество корней уравнения…* В ответе должно быть указано для *каждого значения параметра*, сколько корней имеет это уравнение и какого вида» [36, С. 191]. Подчеркивается, что при решении данных уравнений необходимо обращать внимание на запись ответа, являющегося составной частью решения уравнения. Приведенный способ решения уравнений с параметром закрепляется с обучающимися при изучении определенных видов уравнений с параметром.

С.А. Шестаков [70, С. 5] отмечает: «Для решения многих заданий с параметрами не требуются специальные знания, алгоритмы или идеи – достаточно устойчивых навыков решения основных типов уравнений, умения выполнять алгебраические преобразования и делать логический перебор».

Таким образом, в методической литературе отсутствует единый подход к определению понятия уравнения с параметром; основными видами уравнений с параметром являются линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр; дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр; иррациональные уравнения, содержащие параметр.

§ 2. Цели обучения теме «Уравнения с параметрами», ее место в курсе математики общеобразовательной школы

В курсе лекций для организации самостоятельной работы студентов отмечается: «*линия уравнений* – одна из основных содержательных линий математики общеобразовательной школы. Уравнения служат для задания функции, геометрической фигуры, для решения текстовых задач» [9]. В данном курсе лекций указано, что в методике преподавания математики выделяют три аспекта ее использования:

1. «Теоретико-математическая направленность данной линии состоит в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии уравнений.

2. Прикладная направленность раскрывается широким использованием уравнения как простейшей модели математики в решении задач.

3. Линия уравнения рассматривается как одна из основных четырех содержательных линий школьного курса алгебры. Этот аспект рассматривается как направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики» [9, С. 25-27].

Ю.Н. Макарычев в учебном пособии для классов с углубленным изучением математики «Дополнительные главы к учебнику алгебры» утверждает, что «понятие параметра является важным математическим понятием, которое систематически используется в школьном курсе математики и в смежных дисциплинах» [36, С. 191]. Главное, что должны усвоить учащиеся, по мнению автора, это то, что «уравнение с параметром – это семейство уравнений, определяемых параметром» [36].

А.П. Власова [13] отмечает важность изучения методов решения уравнений с параметрами в курсе общеобразовательной школы, напоминая о том, что в ЕГЭ встречаются достаточно сложные задания, которые невозможно решить без знаний и навыков решения стандартных заданий.

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования* [66, С.12] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» *должны отражать*:

1) «формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

4) овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

5) развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

6) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах» [67].

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *базовом и углубленном уровнях:* «1. Оперировать понятиями: уравнение, корень уравнения, равносильные уравнения, область определения уравнения (системы уравнений). 2. Решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований. 3. Решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований. 4. Решать дробно-линейные уравнения. 5. Решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. 6. Решать линейные уравнения с параметрами. 7. Решать несложные квадратные уравнения с параметром. 8. Решать несложные системы линейных уравнений с параметрами. 9. Решать несложные уравнения в целых числах. 10. Составлять и решать уравнения, их системы при решении задач других учебных предметов. 11. Выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений и их систем при решении задач других учебных предметов. 12. Составлять и решать уравнения с параметрами при решении задач других учебных предметов. 13. Составлять уравнение или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты» [58].

*В повседневной жизни и при изучении других предметов: «*составлять и решать уравнения и их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты» [58].

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности благополучного продолжения образования на *углубленном уровне: «1.* Свободно оперировать понятиями: уравнение, равносильные уравнения, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений. 2. Решать разные виды уравнений и их систем, в том числе некоторые уравнения 3 и 4 степеней, дробно-рациональные и иррациональные. 3. Знать теорему Виета для уравнений степени выше второй. 4. Понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать. 5. Владеть разными методами решения уравнений и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор. 6. Решать алгебраические уравнения и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами; решать уравнения в целых числах. 7. Изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями и их системами» [58].

*В повседневной жизни и при изучении других предметов: «*составлять и решать уравнения, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты» [58].

Кроме того, в *примерной программе основного общего образования* указано, что в содержание курса математики в 7–9 классах *(углубленный уровень)* входят такие темы как:

«Методы решения уравнений. *Методы равносильных преобразований, метод замены переменной, графический метод. Использование свойств функций при решении уравнений, использование теоремы Виета для уравнений степени выше 2.* **Линейное уравнение и его корни**. Решение линейных уравнений. *Количество корней линейного уравнения. Линейное уравнение с параметром.* **Квадратное уравнение и его корни**. Дискриминант квадратного уравнения. Формула корней квадратного уравнения. Количество действительных корней квадратного уравнения. Решение квадратных уравнений: графический метод решения, использование формулы для нахождения корней, разложение на множители, подбор корней с использованием теоремы Виета. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводимые к линейным и квадратным. Квадратное уравнение с параметром. Решение простейших квадратных уравнений с параметрами. Решение некоторых типов уравнений 3 и 4 степени. **Дробно-рациональные уравнения**. *Решение дробно-рациональных уравнений.* **Простейшие иррациональные уравнения вида***:* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. Решение иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)} =$

$g(x)$. **Системы уравнений.** Уравнение с двумя переменными. Решение уравнений в целых числах. Линейное уравнение с двумя переменными. Графическая интерпретация линейного уравнения с двумя переменными. Представление о графической интерпретации произвольного уравнения с двумя переменными: линии на плоскости. Понятие системы уравнений. Решение систем уравнений. Представление о равносильности систем уравнений. Методы решения систем линейных уравнений с двумя переменными графический метод, метод сложения, метод подстановки. Количество решений системы линейных уравнений. Система линейных уравнений с параметром. Системы нелинейных уравнений. Методы решения систем нелинейных уравнений. Метод деления, метод замены переменных. Однородные системы» [58].

В *федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования* [67, С.16-17] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия" (углубленный уровень) *должны отражать*:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат» [67].

В *примерной программе среднего общего образования* [57] выделяются три направления требований к результатам математического образования: практико-ориентированное математическое образование (математика для жизни); математика для использования в профессии; творческое направление, на которое нацелены те обучающиеся, которые планируют заниматься творческой и исследовательской работой в области математики, физики, экономики и других областях.

Эти направления реализуются в двух блоках требований к результатам математического образования.

«На углубленном уровне выпускник научится в 10–11-м классах**:** для успешного продолжения образования по специальностям, связанным с прикладным использованием математики: «свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений; решать разные виды уравнений и неравенств и их систем, в том числе некоторые уравнения 3-й и 4-й степеней, дробно-рациональные и иррациональные; овладеть основными типами показательных, логарифмических, иррациональных, степенных уравнений и неравенств и стандартными методами их решений и применять их при решении задач; применять теорему Виета для решения некоторых уравнений степени выше второй; понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать; владеть методами решения уравнений, неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор; использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения; *решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами*; изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами; свободно использовать тождественные преобразования при решении уравнений и систем уравнений. **В повседневной жизни и при изучении других предметов:** составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты; использовать программные средства при решении отдельных классов уравнений и неравенств» [57].

В *примерной программе среднего общего образования* указано, что в содержание курса математики в 10–11 классах *(углубленный уровень)* входят такие темы как: «**Алгебра и начала анализа.** Графическое решение уравнений и неравенств. Графические методы решения уравнений и неравенств. Решение уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Уравнения, системы уравнений с параметром» [67].

Таким образом, подводя итог всему вышесказанному, можно сформулировать следующие *основные цели обучения решению уравнений с параметрами* в общеобразовательной школе: формирование у учащихся умения проводить разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность при описании решения уравнения с параметром; знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с решением уравнений с параметрами, в математике и других науках; навыков использования уравнений с параметрами в повседневной жизни; графической культуры.

§ 3. Анализ содержания теоретического материала по теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики

В учебниках алгебры, алгебры и начал математического анализа разных авторов место изучения алгебраических уравнений с параметрами, как и его содержание различно. Имеются отличия и в порядке изучения основных понятий.

Базовые знания (5-6 классы): числовые и буквенные выражения; понятие уравнения; понятие переменной; координатная прямая, координатная плоскость, координаты.

Вводимые (новые) знания (7-9 классы): понятие параметра; понятие уравнения с параметром; решение уравнения с параметром; графический метод решения уравнений с параметрами; система уравнений с параметром; линейное уравнение с параметром; квадратное уравнение с параметром; рациональное уравнение с параметром; иррациональное уравнение с параметром; уравнения с параметрами, содержащие модуль.

Вводимые (новые) знания (10-11 классы): понятие кубического уравнения; решение кубического уравнения.

Теоретический материал.

Рассмотрим учебники *алгебры 7-9 классов в углубленном курсе математики основной школы*.

В учебнике **С.М. Никольского для 7 класса** [52, С. 203-206] в §10 «Системы линейных уравнений» Главы 3 «Линейные уравнения» приводится *дополнительный пункт 10.7* «О количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными»,* являющийся необязательным для рассмотрения по общеобразовательной программе и содержащий материал в соответствии с программой для классов с углубленным изучением математики, в котором приведена соответствующая теорема, подготавливающая учащихся к введению понятий уравнения с параметром и систем уравнений с параметрами. Приведем формулировку данной теоремы.

Теорема. Пусть дана система уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$ (1)

где все коэффициенты $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ отличны от нуля.

Тогда система (1): а) имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

б) не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

в) имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, и при этом все решения можно записать в виде $(\frac{-c_1 - b_1y}{a_1};\ y)$, где y – любое число.

Затем в данном пункте учебника приводится *доказательство* этой *теоремы* и рассматриваются различные *примеры на ее применение* при решении систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными: *первый*

– на нахождение числа решений данной системы уравнений; *второй* – на нахождение значения параметра, при котором система уравнений не имеет решения; *третий* - на определение существования значений параметра, при котором система не имеет решения.

В учебнике **А.Г. Мордковича для 8 класса** [42, С. 229-231] в Главе 6. «Алгебраические уравнения» приводится *§39. «Задачи с параметрами».* Данный параграф является обязательным для изучения.

Для того чтобы познакомить учащихся с понятием уравнения с параметром автор использует *индуктивный метод,* подробно рассматривая решение сначала *двух* уравнений с параметрами, затем анализирует их решение и приводит замечания и выводы. После этого рассматривается решение еще *трех* примеров. *Первый пример* подразумевает решение квадратного уравнения, в котором вместо коэффициентов a, b, c стоят выражения, содержащие параметр p. *Второй* - иллюстрирует подбор параметра p для того, чтобы определить вид уравнения: квадратное или линейное, затем приводится решение с соответствующими комментариями и выводами. В *третьем* примере представлено решение линейного уравнения, в *четвертом* - решение уравнения с параметром, содержащего модуль, с помощью графического метода. *Пятый* пример, иррациональное уравнение с параметром, автор решает двумя способами.

Рассмотрим первые два примера, которые приводит автор. Именно они, по мнению А.Г. Мордковича плавно подводят к первым выводам по теме «Уравнения с параметром».

«Пример 1. Решить уравнение $x^2-(2p+1)x+(p^2+p-2)=0$.

В заданном квадратном уравнении в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения называют уравнениями с буквенными коэффициентами или уравнениями с параметрами. В данном случае параметр (буква) p *входит в состав второго коэффициента и свободного члена уравнения.*

Найдем дискриминант: $D=(2p+1)^2-4\cdot1\cdot(p^2+p-2)=(4p^2+$

$+4p+1)-(4p^2+4p-8)=9.$

Найдем корни квадратного уравнения:

$x_1=\frac{(2p+1)+\sqrt{9}}{2}=\frac{2p+1+3}{2}=p+2;\; x_1=\frac{(2p+1)-\sqrt{9}}{2}=\frac{2p+1-3}{2}=p-1.$

Ответ: $p+2$; $p-1$*»* [42, С. 229].

«Пример 2. Решить уравнение $px^2+(1-p)x-1=0$.

Данное уравнение также содержит параметр p*, но в отличие от предыдущего сразу его решать нельзя. Необходимо обратить внимание на коэффициент перед* x^2.

Если $p=0$, *то* $0\cdot x^2+(1-0)x-1=0$, т.е. $x=1$.

Если $p\neq 0$, *то решаем полное квадратно уравнение через дискриминант:*

$$D=(1-p)^2-4\cdot p\cdot(-1)=1-2p+p^2+4p=1+2p+p^2=(p+1)^2.$$

$$x_1=\frac{-(1-p)+\sqrt{(p+1)^2}}{2p}=\frac{p-1+p+1}{2p}=\frac{2p}{2p}=1;$$

$$x_2=\frac{-(1-p)-\sqrt{(p+1)^2}}{2p}=\frac{p-1-p-1}{2p}=\frac{-2}{2p}=-\frac{1}{p}.$$

Ответ: если $p=0$, *то* $x=1$*; если* $p\neq 0$, *то* $x_1=1, x_2=-\frac{1}{p}$*»* [42, С. 230].

После каждого примера, рассмотренного А.Г. Мордковичем, имеют место *комментарии,* где описываются возможные ошибки учащихся, приводится другой способ решения данного уравнения с параметром. По ходу решения этих примеров описывается определенная часть теоретического материала. Так, например, автором вводится *понятие уравнения с параметром* следующим образом:

«Параметр в уравнении может быть обозначен любой буквой (в примерах использовались буквы p и a). Если дано уравнение $f(x,a)=0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то говорят, что *задано уравнение с параметром»* [42, С. 230].

В учебнике алгебры **9 класса Ю.Н. Макарычева** [35, С. 109-117] в Главе 2. «Уравнения и неравенства с одной переменной» представляется вниманию учащихся §*7. «Уравнения с параметрами»,* который является обязательным для изучения.

В пунктах 16-17 рассматриваются *целые уравнения с параметрами* и *дробно-рациональные уравнения с параметрами*.

Для знакомства учащихся с понятием уравнения с параметром автор использует *дедуктивный метод.*

Ю.Н. Макарычев приводит следующее определение [35, С. 110]: *«решить уравнение с параметром – это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество корней»*.

Приведем пример, представленный у автора для усвоения понятия.

«Решить уравнение с параметром a: $ax-2x=a^2+a-6$.

Вынесем за скобку x: $(a-2)x=a^2+a-6.$ Имеем линейное уравнение, число корней которого зависит от того, равен ли нулю коэффициент при х или отличен от нуля. Если $a-2\neq 0,\text{т. е.}\,a\neq 2$, то уравнение имеет единственный корень $x=\frac{a^2+a-6}{a-2}$; $x=\frac{(a-2)(a+3)}{a-2}$; $x=a+3$.

Если $a-2=0,\text{т. е.}\,a=2$, то уравнение принимает вид $0x=0$. В этом случае любое число является корнем уравнения.

Ответ: $a+3$ *при* $a\neq 2$; любое число при $a=2$» [35, С. 111].

Введение основных понятий по теме «*Уравнения с параметрами*» в данном учебнике для углубленного изучения алгебры происходит по аналогии с учебником 8 класса этого автора для общеобразовательных учреждений. Однако следует заметить, что для общеобразовательных классов данная тема является необязательной для изучения, в отличие от учебника для классов с углубленным изучением математики.

Рассмотрим учебники *алгебры и начала математического анализа 10-11 классов в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.*

В учебнике по алгебре и началам математического анализа **11 класса Н.Я. Виленкина** [11, С. 124-133] в Главе 2. «Показательная, логарифмическая и степенная функции» раскрывается содержание *§6. «Уравнения и неравенства с параметрами»,* который является обязательным для изучения. Данный параграф содержит три пункта: «Рациональные уравнения и неравенства с параметром», «Иррациональные уравнения и неравенства с параметром», «Трансцендентные уравнения и неравенства с параметром».

Приведем третий пример, рассмотренный автором.

«Решите уравнение $ax^2 - 4x + 3 = 0$.

В данное уравнение входит один параметр – a.

Если $a = 0$, *получаем линейное уравнение* $-4x + 3 = 0, \text{т. е.}\, x = \frac{3}{4}$.

Если $a \neq 0$, *то уравнение является квадратным* $ax^2 - 4x + 3 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 12a.$$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{4+\sqrt{4(4-3a)}}{2a} = \frac{2+\sqrt{4-3a}}{a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{4-\sqrt{4(4-3a)}}{2a} = \frac{2-\sqrt{4-3a}}{a}$.

Если $a < \frac{4}{3}$, *то имеем два действительных корня, при* $a = \frac{3}{4}$ *эти корни совпадают, а при* $a > \frac{4}{3}$ *действительных корней нет.*

Ответ: если $a = 0$, то $x = \frac{3}{4}$; *если* $a < \frac{4}{3}$, $a \neq 0$, *то* $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-3a}}{a}$; *если* $a = \frac{4}{3}$, то $x = \frac{3}{2}$; *если* $a > \frac{4}{3}$ *действительных корней нет»* [11, С. 124].

В каждом пункте параграфа «Уравнения с параметром» автор раскрывает содержание темы на конкретных примерах, то есть изучение происходит *индуктивным методом*. Автор демонстрирует такие методы решения уравнений с параметрами, как аналитический и метод решения относительно параметра, графический метод не рассмотрен.

Также задачи с параметром включены в программу для обязательного изучения учебника по алгебре и началам математического анализа **11 класса А.Г. Мордковича** в Главе 6. «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств», *§34. «Задачи с параметрами».*

«Если дано уравнение $f(x;a)=0$, которое надо решить относительно переменной x и котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то $f(x;a)=0$ называют *уравнением с параметром»* [49, с. 298].

Изучение данного понятия происходит *индуктивным методом,* подробно рассматривая решение *четырех* уравнений с параметрами. Первый пример подразумевает решение уравнения и неравенства относительно переменной. Автор подробно рассматривает каждый возможный случай, акцентируя внимания на отдельных моментах. *Второй пример* – квадратное уравнение, где вместе коэффициентов a, b, c находятся двучлены с параметром. В подобного рода заданиях, важно учитывать коэффициент, стоящий перед x^2, от этого зависит вид, решаемого уравнения. *Третий пример* содержит иррациональность. В решении данного задания автор комбинирует аналитический и графический методы. *Четвертый пример* является квадратным уравнением, решается аналитически, но присутствуют элементы графического метода.

Рассмотрим один из примеров, который приводит автор.

«*Решить уравнение* $\sqrt{x-a}=2a-x$.

Решение. Сначала будем действовать по стандартной схеме – возведем обе части заданного иррационального уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение: $\left(\sqrt{x-a}\right)^2=(2a-x)^2$;

$$x-a=4a^2-4ax+x^2; \quad x^2-(4a+1)x+4a^2+a=0.$$

Найдем дискриминант: $D=(4a+1)^2-4(4a^2+a)=4a+1$.

Значит, $x_{1,2}=\frac{4a+1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$.

При $D<0$, *то есть* $a<-\frac{1}{4}$, *корней нет. Если* $D=0$, *т.е.* $a=-\frac{1}{4}$, *получим* $x=0$. *Сразу замечаем, что в этом случае исходное уравнение обраща-*

ется в неверное равенство: $\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$*. Значит, в этом случае корней нет*» [49, С. 302].

Затем автор выполняет подробную проверку и приходит к ответу:

«*Ответ: если* $a < 0$*, то корней нет; если* $a = 0$*, то* $x = 0$*; если* $a > 0$*, то* $x = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$» [49, С. 302].

В учебнике алгебры и начал математического анализа для базового и профильного уровня **11 класса С.М. Никольского** в Главе 2. «Уравнения. Неравенства. Системы» приводится §15. «Уравнения, неравенства и системы с параметром», который представлен для изучения именно в профильных классах, углублено изучающих математику. В данном параграфе четыре раздела: уравнения с параметром, неравенства с параметром, системы уравнений с параметром и задачи с условиями. С.М. Никольский пишет, что «решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения (множество может быть и пустым)» [51, С. 355]. Изучение данного понятия происходит *индуктивным методом,* подробно рассматривая решение *пяти* уравнений с параметрами, где рассматриваются различные виды уравнений и методы их решения.

Проанализировав учебники алгебры, алгебры и начал математического анализа с углубленным изучением математики таких авторов, как А.Г. Мордкович, Ю.Н. Макарычев, С.М. Никольский, Н.Я. Виленкин, Ю.М. Колягин нами было замечено, что понятие уравнения с параметром вводится ими в разных классах (Таблица 1).

Таблица 1 - Включение теоретического материала по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках 7-11 классов в углубленном курсе математики

Учебники 7-9 классов			
Авторы учебников	**7 класс**	**8 класс**	**9 класс**
Макарычев Ю.Н. [33; 34; 35]	-	-	+
Мордкович А.Г. [40; 42; 44]	-	+	+
Никольский С.М. [52; 53; 54]	+	-	-

<table>
<tr><td>Колягин Ю.М [28; 29; 30]</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Учебники 10-11 классов</td></tr>
<tr><td>Авторы учебников</td><td>10 класс</td><td colspan="2">11 класс</td></tr>
<tr><td>Виленкин Н.Я. [10; 11]</td><td>-</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td>Колягин Ю.М. [26; 27]</td><td>-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>Мордкович А.Г. [45; 49]</td><td>-</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td>Никольский С.М. [50; 51]</td><td>-</td><td colspan="2">+</td></tr>
</table>

В комплектах учебников 7-11 классов А.Г. Мордковича уравнения с параметром рассматриваются отдельными блоками начиная с 9 класса, но отдельные задания с параметрами имеют место и в 7 классе, и в 8 классе.

Ю.М. Колягин [26; 27; 28; 29; 30] не вводит определение *понятия уравнения с параметром*, но имеются упражнения, направленные на умение обучающихся решать уравнения с параметрами.

С.М. Никольский в учебниках *для углубленного изучения* алгебры и начал математического анализа вводит *понятие «уравнение с параметром»* лишь в 11 классе (для обязательного изучения материала), хотя в учебниках для общеобразовательных классов и классов с углубленным изучением математики автор знакомит учащихся с понятием уравнения с параметром в 7 классе в *дополнительном пункте,* который является необязательным для рассмотрения по общеобразовательной программе.

Ю.Н. Макарычев в линии учебников 7-9 классов с углубленным изучением математики вводит понятие «Уравнение с параметром» лишь в 11 классе, а в *дополнительных главах к учебнику алгебры* 8 класса для учащихся общеобразовательных школ Ю.Н. Макарычева [36] имеется целая глава, посвященная теме «Уравнения с параметрами», где упражнения направлены на формирование понятий «уравнение с параметром» и на выработку умений решать линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр. Автор в данной главе рассматривает *линейные*, *квадратные*, а также *дробно-рациональные уравнения с параметрами*.

В учебниках алгебры 9 класса для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева [35] и А.Г. Мордковича [44] приводятся задания на умение решать *иррациональные уравнения с параметрами*; *уравнения с параметрами, содержащие модуль*. Авторы не вводят определения понятий данных видов уравнений.

Таким образом, рассматривая комплект учебников для классов с углубленным изучением математики Ю.Н. Макарычева, отметим, что тема «*Уравнения с параметрами»* вводится в 9 классе, где входит в обязательную программу изучения (в базовом уровне это был пункт для дополнительного изучения в 8 классе).

Кроме того, при анализе учебников алгебры, алгебры и начал математического анализа было отмечено, что большинство авторов используют *индуктивный метод* введения понятия *уравнения с параметром.* Все авторы учебников для классов с углубленным изучением математики, в качестве примеров используют *линейные и квадратные уравнения с параметрами*. Более сложные уравнения с параметром, содержащих корень или модуль, можно встретить в учебнике А.Г. Мордковича 8 и 11 классов для углубленного изучения математики.

§4. Анализ задачного материала по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы

В данном параграфе рассмотрим задачи из различных учебников школьного курса для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы по теме исследования.

Согласно исследованию С.А. Шестакова [70, С. 3]: «*По формулировке* любую *задачу с параметром* можно отнести к одной из следующих групп: а) найти все значения параметра, для каждого из которых выполняются те или иные условия (уравнение или система уравнений имеют определенное число решений; решение принадлежит определенному множеству или удовлетворяет определенным ограничениям; сами решения не всегда требуется найти); б) найти все значения параметра, при каждом из которых задача имеет хотя бы одно решение, и указать эти решения для каждого такого значения параметра».

В.И. Горбачев в пособии для учителей [14, С. 22] отмечает, что наиболее важными в практике являются такие задачи, как *решить уравнение с параметрами* и *найти все значения параметров*, при которых *общее решение* уравнения обладает *некоторыми свойствами*.

В 7 классе нами были выделены следующие *типы заданий*:

1. Решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной (неизвестной)*.

2. *Нахождение значения параметра* при известном корне линейного уравнения с параметром.

3. *Нахождение значения параметра*, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней.

4. *Нахождение значения параметра*, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней.

5. *Нахождение значений параметров* при известных значениях переменных в системе линейных уравнений.

6. *Нахождение значения параметра* при определении равносильности линейных уравнений с параметром и их систем.

7. *Нахождение значения параметра* при условии принадлежности корней линейного уравнения с параметром какому-либо числовому множеству.

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре основной школы в **7 классе** по каждому типу заданий:

1. Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной):

Задача 1. «Решите уравнение $xy = 2k$, где $k \neq 0$, относительно переменной: а) x; б) y ?» [41, С. 105].

Решение. $xy = 2k$, $k \neq 0$; *а)* относительно *x:* $x = \frac{2k}{y}$ $(y \neq 0, \text{т. к.}\, k \neq 0)$;

б) относительно *x:* $y = \frac{2k}{x}$ $(x \neq 0, \text{т. к.}\, k \neq 0)$.

Ответ: а) $x = \frac{2k}{y}$ $(y \neq 0, \text{т. к.}\, k \neq 0)$; б) $x = \frac{2k}{x}$ $(x \neq 0, \text{т. к.}\, k \neq 0)$.

Задача 2. «Выразите из уравнения: а) $m^2 - n = 5$ переменную n через переменную m; б) $2x + 3y = 6$ переменную y через переменную x» [41, С. 266].

Решение. а) $m^2 - n = 5$; $n = m^2 - 5$;

б) $2x + 3y = 6$; $3y = 6 - 2x$; $y = \frac{6-2x}{3}$; $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Ответ: а) $n = m^2 - 5$; б) $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

2. Нахождение значения параметра при известном корне линейного уравнения с параметром:

Задача 3. «Найдите значение m, если график линейной функции $y = -5x + m$ проходит через точку: а) $N(1;\ 2)$; б) $K(0{,}5;\ 4)$» [41, С. 56].

Решение. а) если $N(1;\ 2)$ принадлежит графику линейной ции $y = -5x + m$, то получаем: $2 = -5 + m$, где $m = 7$;

б) если $K(0{,}5;\ 4)$ принадлежит графику функции $y = -5x + m$, то получаем: $4 = -2{,}5 + m$, где $m = 6{,}5$.

Ответ: $m = 7$; $m = 6{,}5$.

Задача 4. «При каком значении a точка $A(3a;\ 2a - 1)$ принадлежит графику уравнения $2x + 3y - 2 = 0$?» [28, С. 49].

Решение. Подставим координаты т. *A* в уравнение $2x + 3y - 21 = 0$. Получим: $6a + 3(2a - 1) - 21 = 0$; $6a + 6a - 3 - 21 = 0$; $12a = 24$; $a = 2$.

Ответ: при $a = 2$.

Задача 5. «В уравнении $ax = 15$ найдите коэффициент a, зная, что корень уравнения равен: *а) –3; б)* $\frac{1}{3}$; *в)* $-\frac{1}{15}$; *г) 0,02»* [33, С. 107].

Решение. а) Если $x = -3$, то получаем: $-3a = 15$, где $a = -5$;

б) если $x = \frac{1}{3}$, то получаем: $\frac{1}{3}a = 15$, где $a = 45$;

в) если $x = -\frac{1}{15}$, то получаем: $-\frac{1}{15}a = 15$, где $a =- 225$;

г) если $x = 0{,}02$, то получаем: $0{,}02a = 15$, где $a = 750$.

Ответ: а) $a = -5$; б) $a = 45$; в) $a =- 225$; г) $a = 750$.

Задача 6. «При каком значении a пара $(a + 1;\ 2a - 1)$ является решением уравнения: а) $2x + y = 5$; б) $x - 2y = 1$; в) $x^2 - y^2 = 3$?» [33, С. 267].

Решение. а) подставим $(a + 1;\ 2a - 1)$ в уравнение $2x + y = 5$. Получим: $2(a + 1) + \left(2a - 1\right) = 5$; $2a + 2 + 2a - 1 = 5$; $4a = 4$; $a = 1$;

б) подставим $(a + 1;\ 2a - 1)$ в уравнение $x - 2y = 1$. Получим:

$$(a + 1) - 2(2a - 1) = 1;\quad a + 1 - 4a + 2 = 1;\quad -3a = -2;\quad a = \frac{2}{3};$$

в) подставим $(a + 1;\ 2a - 1)$ в уравнение $x^2 - y^2 = 3$. Получим: $(a + 1)^2 - (2a - 1)^2 = 3$; $a^2 + 2a + 1 - (4a^2 - 4a + 1) = 3$;

$a^2 + 2a + 1 - 4a^2 + 4a - 1 = 3$; $-3a^2 + 6a - 3 = 0$; $a^2 - 2a + 1 = 0$; $(a - 1)^2 = 0$; $a - 1 = 0$; $a = 1$. **Ответ:** а) $a = 1$; б) $a = \frac{2}{3}$; в) $a = 1$.

Задача 7. «При каком значении m точка $P(m;\ 1 - m)$ графику уравнения: *а)* $2x + y = 7$; *б)* $2x - y = 5$?» [41, С. 271].

Решение: а) подставим $P(m;\ 1 - m)$ в уравнение $2x + y = 7$. Получим: $2m + (1 - m) = 7$; $2m + 1 - m = 7$; $m = 6$; б) подставим $P(m;\ 1 - m)$ в уравнение $2x - y = 5$. Получим: $2m - (1 - m) = 5$; $2m - -1 + m = 5$; $3m = 6$; $m = 2$. **Ответ:** а) $m = 6$; *б)* $m = 2$.

3. Нахождение значения параметра, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней:

Задача 8. «При каком значении a уравнение $(2a - 1)x = 2a^2 - 5a + 2$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней?» [41, С. 26].

Решение. Решим уравнение $(2a-1)x = 2a^2-5a+2$ относительно x: $x=\frac{2a^2-5a+2}{2a-1}$. Не имеет корней, если $2a-1 = 0$, а $2a^2-5a+2 \neq 0$.

$2a- 1=0, a=0{,}5$.

Проверим: $2a^2-5a+2=2\cdot 0{,}5^2-5\cdot 0{,}5+2=2{,}5-2{,}5=0$.

Ответ: а) не существует таких значений a, при которых данное уравнение не имеет корней; б) данное уравнение имеет один корень, если $a\neq 0{,}5$; в) данное уравнение имеет бесконечно много корней, если $a=0{,}5$.

4. Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней:

Задача 9. «При каком значении c система $\begin{cases}5x-2y=3,\\10x-4y=c\end{cases}$ имеет бесконечное множество решений; не имеет решений?» [41, С. 305].

Решение. $\begin{cases}5x-2y-3=0,\\10x-4y-c=0.\end{cases}$ Данная система имеет бесконечное множество решений, если: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$; $\frac{5}{10}=\frac{-2}{-4}=\frac{-3}{-c}$; $\frac{1}{2}=\frac{3}{c}$; $c = 6$. Данная система не имеет решений, если: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$; $\frac{5}{10}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{-3}{-c}$; $\frac{5}{10}\neq\frac{-3}{-c}$; $c\neq 6$.

Ответ: имеет бесконечное множество решений при $c = 6$; не имеет решений при $c \neq 6$.

5. Нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений:

Задача 10. «При каких значениях m и n пара $(3;\ -2)$ является решением системы: $\begin{cases}-5x+2y=m;\\ 3x-4y=n?\end{cases}$» [28, С. 304].

Решение. Подставим пару чисел $(3;-2)$ вместо значений x и y.

Получим: $\begin{cases}-15-4=m,\\ 9+8=n,\end{cases}$ $\begin{cases}m=-19,\\ n=17.\end{cases}$ **Ответ:** $m=-19, n=17$.

6. Нахождение значения параметра при определении равносильности линейных уравнений с параметром и их систем:

Задача 11. «При каких значениях m равносильны данные уравнения: $7x + 2 = 16$ и $7x + 2 + m = 16 + m$?» [28, С. 104].

Решение. Решим уравнение $7x + 2 = 16$, получим $x = 2$. Подставим значение x в уравнение $7x + 2 + m = 16 + m$: $14 + 2 + m = 16 + m$; $16 = 16$.

Ответ: Данные уравнения равносильны при любых значениях m.

7. Нахождение значения параметра при условии принадлежности корней линейного уравнения с параметром какому-либо числовому множеств:

Задача 12. «Найдите натуральные значения a, при которых является натуральным числом корень уравнения $a(3x - 2) + 2(3 + a) = 18$» [33, С. 113].

Решение. $a(3x - 2) + 2(3 + a) = 18$; $3ax - 2a + 62a = 18$;

$3ax = 12$; $x = \frac{4}{a}$. Корень уравнения будет являться натуральным числом, при $a = 1; 2; 4$. **Ответ:** $a = 1; 2; 4$.

Задача 13. «Укажите три каких-либо значения b, при которых корнем уравнения $bx = \frac{2}{3}$ является целое число» [33, С. 124].

Решение. $bx = \frac{2}{3}$; $x = \frac{2}{3b}$. Тогда: x – целое число, если $b = \frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2$;

x – целое число, если $b = \frac{2}{3}$: $x = \frac{2}{3 \cdot \frac{2}{3}} = 1$; x – целое число, если $b = \frac{2}{9}$: $x = \frac{2}{3 \cdot \frac{2}{9}} = 3$.

Ответ: $b = \frac{1}{3}$; $b = \frac{2}{3}$; $b = \frac{2}{9}$.

В **8 классе** также встречаются типы уравнений, описанные и разобранные в 7 классе, но также можно выделить следующие *типы заданий*:

1. *Решение квадратного уравнения с параметром* относительно переменной.

2. *Нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение с параметром имеет два равных корня, два различных корня, не имеет корней.

3. *Решение квадратного уравнения с параметром* на применение теоремы Виета.

4. *Нахождение значения параметра*, при котором заданное квадратное уравнение с параметром является неполным квадратным уравнением.

5. Решение *рациональных уравнений с параметром.*

6. *Нахождение значения параметра* квадратного уравнения при известном значении переменных.

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре основной школы в 8 классе по *типам заданий*, которые не встречались в 7 классе:

1. Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной:

Задача 14. «Решите уравнение *с* параметром *p:* $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$» [43, С. 172].

Решение. $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$; $a = 1$; $b = -2p$; $c = p^2 - 1$; $D = (-2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 - 1) = 4p^2 - 4p^2 + 4 = 4$;

$x_1 = \frac{2p-2}{2} = p - 1$; $x_2 = \frac{2p+2}{2} = p+1$. **Ответ**: $p \pm 1 : p \in R$.

Задача 15. «Решите относительно x уравнение $x^2 - a^2 + 2a - 1 = 0$» [29, С. 177].

Решение. $x^2 - a^2 + 2a - 1 = 0$; $x^2 - (a^2 - 2a + 1) = 0$;

$x^2 - (a - 1)^2 = 0$; $(x - (a - 1))\,(x + (a - 1))=0$;

$(x - a + 1)\,(x + a - 1)=0$;

$x - a + 1 = 0$ или $x + a - 1$;

$x = a - 1$ $x = -a + 1$. **Ответ:** $a - 1;\ -a + 1 : a \in R$.

2. Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение с параметром имеет два равных корня, два различных корня, не имеет корней.

Задача 16. «Докажите, что не существует такого значения параметра p, при котором уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ имело бы два равных корня» [43, С. 173].

Доказательство: $x^2 - px + p - 2 = 0$; $D = (-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p - 2) =$ $= p^2 - 4p + 8$. Квадратное уравнение имеет два равных корня, если *D=0:*

$p^2 - 4p + 8 = 0$; $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0 \Longrightarrow$ уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ не может иметь два равных корня, *что и требовалось доказать.*

3. Решение квадратного уравнения с параметром на применение теоремы Виета.

Задача 17. «При каких значениях параметра p произведение корней квадратного уравнения $x^2 + (p^2 + 4p - 5)x - p = 0$ равно нулю?» [43, С. 180].

Решение. $x^2 + (p^2 + 4p - 5)x - p = 0$; $x_1 \cdot x_2 = 0$.

Произведение равно нулю, если один из множителей или каждый множитель равен нулю. Пусть $x_1 = 0$, получим: $0^2 + (p^2 + 4p - 5) \cdot 0 - p = 0$;

$p = 0$. Подставим значение параметра p в начальное уравнение:

$x^2 + (0^2 + 4 \cdot 0 - 5)x - 0 = 0$; $x^2 - 5x = 0$;

$x(x - 5) = 0$; $x = 0$ или $x = 5$. **Ответ:** при $p = 0$.

4. Нахождение значения параметра, при котором заданное квадратное уравнение с параметром является неполным квадратным уравнением:

Задача 18. «При каком значении m уравнение $3x^2 + (m - 1)x + m -$ $-4 = 0$ обращается в неполное квадратное уравнение? Запишите это уравнение» [43, С. 177].

Решение. *Квадратное уравнение* является неполным, если коэффициенты b или c равны *0.*

Значит: $m - 1 = 0$ или $m - 4 = 0$;

$m = 1$ $m = 4$.

При $m = 1$ получим: $3x^2 - 3 = 0$; при $m = 4$ получим: $3x^2 + 3x = 0$.

Ответ: $3x^2 + 3x = 0$.

5. Решение рациональных уравнений с параметром:

Задача 19. «Решите уравнение $\frac{x^2+6x}{x+6} = a$: а) при $a = 3$; б) при $a = -3$» [43, С. 39].

Решение. а) при $a = 3$: $\frac{x^2+6x}{x+6} = 3$; $\frac{x^2+6x}{x+6} - 3 = 0$; $\frac{x^2+6x-3(x+6)}{x+6} = 0$;

Дробь равна 0, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен.

Получаем: $x^2 + 6x - 3x - 18 = 0$; $x \neq -6$. Имеем $x^2 + 3x - 18 = 0$;

$D = 9 + 72 = 81$; $x_1 = \frac{-3+9}{2} = 3$; $x_2 = \frac{-3-9}{2} = -6$.

б) при $a = -3$: $\frac{x^2+6x}{x+6} = -3$; $\frac{x^2+6x}{x+6} + 3 = 0$; $\frac{x^2+6x+3(x+6)}{x+6} = 0$;

Дробь равна 0, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен.

Получаем: $x^2 + 6x + 3x + 18 = 0$; $x \neq -6$

$x^2 + 9x + 18 = 0$; $D = 81 - 72 = 9$; $x_1 = \frac{-9+3}{2} = -3$; $x_2 = \frac{-9-3}{2} = -6$.

Ответ: а) 3; б) -3.

Задача 20. «Решить уравнение $\frac{1}{x+2} - \frac{2b-1}{x^2-2x+4} = \frac{6-4b}{x^3+8}$ относительно *x»* [29, С. 168].

Решение. $\frac{1}{x+2} - \frac{2b-1}{x^2-2x+4} = \frac{6-4b}{x^3+8}$; $\frac{1}{x+2} - \frac{2b-1}{x^2-2x+4} - \frac{6-4b}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$;

$\frac{x^2-2x+4-(2b-1)(x+2)-(6-4b)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$; $\frac{x^2-2x+4-(2b-1)(x+2)-(6-4b)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$;

$\frac{x^2-2x+4-(2bx+4b-x-2)-6+4b}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$; $\frac{x^2-2x+4-2bx-4b+x+2-6+4b}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$;

$\frac{x^2-x-2bx}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$; $\frac{x^2-x(1+2b)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$.

Дробь равна 0, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен.

Получаем: $\begin{cases} x^2 - x(1+2b) = 0, \\ (x+2)(x^2-2x+4) \neq 0, \end{cases}$

$x^2 - x(1+2b) = 0$, $(x+2)(x^2-2x+4) \neq 0$,

$x(x-1-2b) = 0$, $x + 2 \neq 0$ и $x^2 - 2x + 4 \neq 0$,

$x_1 = 0$ или $x_2 - 1 - 2b = 0$, $x \neq -2$ $D = 4 - 16 < 0$

$$x_2 = 1 + 2b,$$

x_2 – имеет корень при любом значении b.

Исключим те значения b, при которых $x = -2$. Для этого решим уравнение: $1 + 2b = -2$; $2b = -2 - 1$; $b = -1{,}5$.

Ответ: при $b \neq -1{,}5$ уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1 + 2b$; при $b = -1{,}5$ уравнение имеет единственный корень: $x = 0$.

6. *Нахождение значения параметра квадратного уравнения при известном значении переменных:*

Задача 21. «Один из корней уравнения $x^2 + px + 54 = 0$ равен 6. Найдите другой корень и второй коэффициент» [34, С. 201].

Решение. $x^2 + px + 54 = 0$, $x_1 = 6$;

$$36 + 6p + 54 = 0;\ \ 36 + 6p + 54 = -54 - 36;\ 6p = -90;\ \ p = -15.$$

$$x^2 - 15x + 54 = 0;$$

$$D = 225 - 4 \cdot 54 = 225 - 116 = 9;\ x_1 = \frac{15+3}{2} = 9;\ x_2 = \frac{15-3}{2} = 6.$$

Ответ: $p = -15$, $x_2 = 9$.

В ходе проделанной работы было отмечено, что в 8 классе авторы учебников уделяют большое внимание *квадратным уравнениям с параметрами*, но задания *на применение понятия линейного уравнения с параметром* также имеются в учебниках.

Из всех рассмотренных учебников выделено два уравнениями с параметром, в которых не встречаются задания для 7 класса.

В учебнике А.Г. Мордковича с углубленным изучением математики и дополнительных главах к учебнику 8 класса Ю.Н. Макарычева имеются не только задания на понятие квадратного уравнения с параметром, но и впервые за основную школу рассматриваются *рациональные уравнения с параметром.*

В учебниках *для классов с углубленным изучением математики* задач по теме исследования предоставлено значительно больше и задания более разнообразные.

В **9 классе** имеются те же типы заданий, что и в 7-8 классах. Наиболее распространенными в учебниках алгебры 9 класса являются следующие *типы заданий:*

1. Решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной (неизвестной).*

2. *Решение квадратного уравнения* с параметром относительно переменной.

3. *Нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение (или система квадратных уравнений) с параметром имеет два равных корня, два различных корня, не имеет корней.

4. *Нахождение значения параметра* квадратного уравнения (или системы квадратных уравнений) при известном значении переменных.

Новым типом задания для учащихся **9 класса** является:

5. *Решение иррациональных уравнений* (и их систем) с параметром.

6. Решение уравнений с параметрами, *содержащих модуль.*

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре основной школы в **9 классе** по каждому *типу заданий:*

1. Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной):

Задача 22. «Решите относительно x уравнение $2x + \frac{x}{a} = 3$» [30, С. 113].

Решение. $2x + \frac{x}{a} = 3$ $2x + \frac{1}{a}x = 3$; $x(2 + \frac{1}{a}) = 3$; $x = \frac{3}{2+\frac{1}{a}}$; $x = \frac{3a}{2a+1}$.

Ответ: если $a \neq -\frac{1}{2}$, то уравнение имеет два равных корня; если $a = -\frac{1}{2}$, то уравнение не имеет действительных корней; если $a \neq -\frac{1}{2}$ и $a \neq 0$, то $x = \frac{3a}{2a+1}$.

2. Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной:

Задача 23. «Решите уравнение $ax^2 + 4x + 1 = 0$ с параметром *a*» [25].

Решение. $ax^2 + 4x + 1 = 0$; $D = 16 - 4a$. Имеем:

Если $D > 0$, т.е. $a < 4$, и $a \neq 0$, то уравнение *имеет два различных корня*: $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{4(4-a)}}{2a} = \frac{-4\pm2\sqrt{(4-a)}}{2a} = \frac{-2\pm\sqrt{(4-a)}}{a}$.

Если $D = 0$, т.е. $a = 4$, и $a \neq 0$, то уравнение имеет *два равных корня*: $x = \frac{-4}{2a} = \frac{-2}{a}$.

Если $D < 0$, т.е. $a > 4$, и то уравнение *не имеет действительных корней*.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$: $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{(4-a)}}{a}$; при *a =4, a ≠ 0:* $x = \frac{-2}{a}$; при $a \in (4; +\infty)$: уравнение *не имеет действительных корней.*

3. Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение (или система квадратных уравнений) с параметром имеет два равных корня, два различных корня, не имеет корней:

Задача 24. «При каких значениях параметра *a* имеет два различных корня уравнение: $4x^2 - 2x + a = 0$» [25].

Решение. $4x^2 - 2x + a = 0$; $D = 4 - 16a$;

$4 - 16a > 0$; $16a < 4$; $a < 0{,}25$. **Ответ:** при $a < 0{,}25$.

4. Нахождение значения параметра квадратного уравнения (или системы квадратных уравнений) при известном значении переменных:

Задача 25. «При каких a и b график функции $y = ax^2 - 2bx + 1$ проходит через точки *M (-1; 3)* и *P (2; 4)»* [35].

Решение. $\begin{cases} a + 2b + 1 = 3, \\ 4a - 4b + 1 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2b = 2, \\ 4(a - b) = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2b + 2, \\ 4(2 - 2b) - 4b = 3, \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2b + 2, \\ 8 - 8b - 4b = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2b + 2, \\ b = \frac{5}{12}, \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{7}{6}, \\ b = \frac{5}{12}. \end{cases}$ **Ответ:** $a = \frac{7}{6}$, $b = \frac{5}{12}$.

5. Решение иррациональных уравнений (и их систем) с параметром:

Задача 26. «Решить уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$» [30].

Решение. $\sqrt{a - x^2} = x - 1$;

$a - x^2 = x^2 - 2x + 1$; $\quad 2x^2 - 2x + (1 - a) = 0$; $D = 2a - 1$.

Ответ: если $a > 0{,}5$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2a-1}}{2}$; если $a = 0{,}5$, $x = 0{,}5$; если $a < 0{,}5$, уравнение корней не имеет.

6. Решение уравнений с параметрами, содержащих модуль:

Задача 27. «При каком значении параметра b уравнение $|x^2 + x - 3| = |x^2 - 5x + b|$ имеет только одно решение?» [30].

Решение. $|x^2 + x - 3| = |x^2 - 5x + b|$.

Данное уравнение можем заменить равносильной совокупностью двух уравнений: 1) $x^2 + x - 3 = x^2 - 5x + b$ и 2) $x^2 + x - 3 = -x^2 + 5x - b$.

Решая первое уравнение, мы получим: $x = \frac{b+3}{6}$.

Решим второе уравнение, получим: $2x^2 - 4x + (b - 3) = 0$.

$D = -8b + 40$; $\quad -8b + 40 = 0$; $\quad b = 5$. **Ответ:** при $b = 5$.

В **10 классе** задания с параметром в рассмотренных учебниках алгебры и начал математического анализа А.Г. Мордковича, Н.Я. Виленкина, С.М. Никольского, Ю.М. Колягина встречаются только в разделе на повторение у А.Г. Мордковича. Типы заданий представлены те же, что и в 7-9 классах.

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре и началам математического анализа в **10 классе**.

Задача 28. «При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$ будет наименьшей?» [46, С. 10].

Решение. $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$;

$D = (m - 2)^2 - 4(-m - 3) = m^2 - 4m + 4 + 4m + 12 = m^2 + 16$;

$D > 0$ при любом значении m. $x_1 = \frac{2 - m - \sqrt{m^2+16}}{2}$; $\quad x_2 = \frac{2 - m + \sqrt{m^2+16}}{2}$.

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (2 - m)^2 - 2(-m - 3) = m^2 - 2m + 10 = (m - 1)^2 + 9$. Наименьшая сумма равна 9 при $m = 1$. **Ответ:** $m = 9$.

Задача 29. «При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $(2a-2)x^2+(a+1)x+1$ имеет отрицательные корни больше, чем –2?» [46, С.10].

Решение. Данных трехчлен будет является квадратным, при $a \neq 1$.

$D = (a+1)^2 - 4(2a-2) = a^2 + 2a + 1 - 8a + 8 = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$.

$x_1 = \frac{-a-1+a-3}{4(a-1)} = \frac{1}{1-a}$; $\quad \frac{1}{1-a} < -2$; $\quad a > 1{,}5$.

$x_2 = \frac{-a-1-a+3}{4(a-1)} = \frac{a-1}{2-2a}$; $\quad \frac{a-1}{2-2a} < -2$; $\quad a > 1$. **Ответ:** $a > 1{,}5$.

В **11 классе** имеются те же типы заданий, что и в 7-9 классах. В учебниках алгебры и начал математического анализа 11 класса представлены следующие *типы заданий:*

1. Решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной (неизвестной).*

2. *Нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение с параметром имеет два равных корня, два различных корня, не имеет корней.

3. *Решение квадратного уравнения с параметром* на применение теоремы Виета.

4. Решение *рациональных уравнений с параметром.*

5. Решение уравнений с параметрами, *содержащих модуль*.

Новым типом задания для учащихся **11 класса** является:

6. *Решение кубических уравнений* с параметром.

7. Решение *систем уравнений с параметром.*

Приведем примеры упражнений из учебников по алгебре и началам математического анализа в **11 классе** по каждому *типу заданий:*

1. Решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной (неизвестной).*

Задача 30. «Для каждого значения параметра a решите уравнение $(a+1)x = a^2 - 1$» [51, С. 359].

Решение. Рассмотрим два случая: $a = -1$ и $a \neq -1$.

Пусть $a = -1$, тогда уравнение $(a+1)x = a^2 - 1$ имеет вид $0 \cdot x = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любое действительное число.

Пусть $a \neq -1$, тогда уравнение $(a+1)x = a^2 - 1$ является уравнением первой степени и его единственное решение есть $x = a - 1$.

Ответ: для $a = -1$ любое число есть корень; для каждого $a \neq -1$ единственный корень: $x = a - 1$.

2. *Нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение с параметром имеет два равных корня, два различных корня, не имеет корней.

Задача 31. «При каком значении параметра a уравнение $(a-1)x^2 + $ $+2(a+1)x + (4a+3)$: а) имеет два различных корня; б) имеет два равных корня; в) не имеет действительных корней? Найдите эти корни» [47, С. 299]

Решение. Рассмотрим два случая $a = 1$ и $a \neq 1$.

Если $a = 1$, то $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т.е. $6x + 7 = 0$, $x = -\frac{7}{6}$.

Если $a \neq 1$, то получим квадратное уравнение:

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0.$$

$$D = \left(2(2a+1)\right)^2 - 4(a-1)(4a+3) = 4(4a^2 + 4a + 1) - 4(4a^2 - a - 3) =$$
$$= 20a + 16 = 4(5a+4).$$

Если $D > 0$, т.е. $a > -\frac{4}{5}$ то уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-2(2a+1)+\sqrt{4(5a+4)}}{2(a-1)} = \frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}; x_2 = \frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Если $D = 0$, т.е. $a = -\frac{4}{5}$ то уравнение имеет два равных корня:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\left(2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+1\right)}{-\frac{4}{5}-1} = -\frac{1}{3}.$$

Если $D < 0$, т.е. $a < -\frac{4}{5}$ то уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

если $a < -\frac{4}{5}$, то уравнение не имеет действительных корней;

если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $a > -\frac{4}{5}$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Задача 32. «При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 4x - -a + 5 = 0$: а) имеет два различных корня; б) имеет два равных корня; в) не имеет действительных корней?» [47].

Решение. Необходимо рассмотреть два случая: $a = 0$ (линейное уравнение) и $a \neq 0$ (квадратное уравнение).

Если $a = 0$, то $4x + 5 = 0$; $x = -1{,}25$.

Если $a \neq 0$, то $ax^2 + 4x + (-a + 5) = 0$;

$D = 16 - 4a(-a + 5) = 16 + 16a - 20a = 16 - 4a$.

Если $D > 0$, т.е. $a < 4$ (и $a \neq 0$), то $x_1 = \frac{-4+\sqrt{4(4-a)}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{4-a}}{a}$;

$x_2 = \frac{-4-\sqrt{4(4-a)}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{4-a}}{a}$.

Если $D = 0$, т.е. $a = 4$, то $x_1 = x_2 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$.

Если $D < 0$, т.е. $a > 4$, то нет действительных корней.

Ответ: а) при $a < 4$ (и $a \neq 0$) уравнение имеет два различных корня;

б) при $a = 0$ и $a = 4$ уравнение имеет два равных корня;

в) при $a > 4$ нет действительных корней.

3. *Решение квадратного уравнения с параметром* на применение теоремы Виета.

Задача 33. «Дано уравнение $x^2 + (3p - 5)x + (3p^2 - 11p - 6) = 0$. Известно, что сумма квадратов его корней равна 65. Найдите значение параметра p и корни уравнения» [47].

Решение. $x_1^2 + x_2^2 = 65$; $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 65$.

Согласно теореме Виета: $x_1 + x_2 = -(3p - 5)$; $x_1x_2 = 3p^2 - 11p - 6$;

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 65$; $\left(-(3p - 5)\right)^2 - 2(3p^2 - 11p - 6) = 65$;

$9p^2 - 30p + 25 - 6p^2 + 22p + 12 - 65 = 0$; $3p^2 - 8p - 28 = 0$.

$D = 64 + 336 = 400$; $p_1 = \frac{8+20}{6} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$; $p_2 = \frac{8-20}{6} = -2$.

Если $p = \frac{14}{3}$, то $x^2 + 9x + 8 = 0$;

$D = 81 - 32 = 49$; $x_1 = \frac{-9+7}{2} = -1$; $x_1 = \frac{-9-7}{2} = -8$.

Если $p = -2$, то $x^2 - 11x + 28 = 0$;

$D = 121 - 112 = 9$; $x_3 = \frac{11+3}{2} = 7$; $x_4 = \frac{11-3}{2} = 4$.

Ответ: если $p = \frac{14}{3}$, то $x = -1,\ x = -8$; если $p = -2$, то $x = 7,\ x = 4$.

4. Решение *рациональных уравнений с параметром*.

Задача 34. «Решите уравнение $\frac{a-1}{2ax+3} = 1$ с параметром *a*» [51, С. 360].

Решение. $\frac{a-1}{2ax+3} = 1$; $\frac{2ax+4-a}{2ax+3} = 0$.

Пусть $a = 0$, тогда уравнение примет вид $\frac{0 \cdot x+4}{0 \cdot x+3} = 0$ и не имеет решений.

Пусть $a \neq 0$. Решим уравнение $2ax + 4 - a = 0$.

Оно имеет единственный корень $x_0 = \frac{a-4}{2a}$. Выясним, при каких значениях a число x обращает в нуль знаменатель дроби уравнения $\frac{2ax+4-a}{2ax+3} = 0$, то есть найдем, при каких a справедливо равенство $2ax_0 + 3 = 0$.

Равенство $2ax_0 + 3 = 0$ справедливо только для $a = 1$. Следовательно, при $a = 1$ число x_0 не является корнем данного уравнения.

Ответ: для $a = 0$ и $a = 1$ корней нет; для каждого $a \neq 0$ и $a \neq 1$ единственный корень $x_0 = \frac{a-4}{2a}$.

5. Решение уравнений с параметрами, содержащих модуль.

Задача 35. «При каких значениях параметра *a* уравнение $ax^2 + |x - -1| = 0$ имеет три решения?» [47].

Решение. 1. Контрольным значением параметра для данного уравнения будет число а $= 0$, при котором уравнение примет вид $0 + |x - 1| = 0$, откуда $x = 1$. Следовательно, при а $= 0$ уравнение имеет один корень, что не удовлетворяет условию задачи.

2. Рассмотрим случай, когда а $\neq 0$. Перепишем уравнение в следующем виде: $ax^2 = -|x - 1|$. Заметим, что уравнение будет иметь решения только при а < 0.

В системе координат xOy построим графики функций $y = |x - 1|$ и $y = ax^2$. График функции $y = |x - 1|$ изображен на рисунке (Рис. 2).

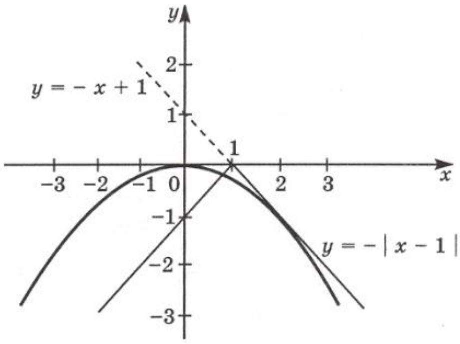


Рис. 2.

Графиком функции $y = ax^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, так как а < 0. Вершина параболы — точка $(0;\ 0)$.

Уравнение будет иметь три решения только тогда, когда прямая $y = \ = -x + 1$ будет касательной к графику функции $y = ax^2$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания прямой $y = -x + 1$ с параболой $y = ax^2$. Уравнение касательной имеет вид $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Запишем условия касания: $\begin{cases} y'(x_0) = -1, \\ ax_0^2 = -x + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2ax_0 = -1, \\ ax_0^2 = -x_0 + 1; \end{cases}$ откуда $x_0 = 2, a = -\frac{1}{4}$. **Ответ:** $a = -\frac{1}{4}$.

6. *Решение кубических уравнений* с параметром.

Задача 36. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[-2;\ 2]$» [47].

Решение. Число $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a. Поэтому уравнение равносильно уравнению $a = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$.

Рассмотрим функцию (Рис. 3):

$f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$ и исследуем ее на отрезке $-2 \leq x \leq 2$. Функция определена при всех $x \neq 0$.

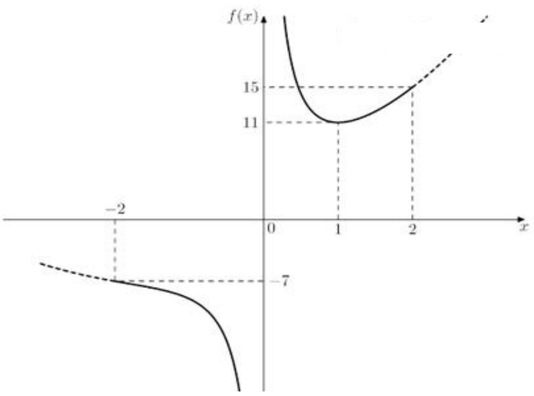


Рис. 3.

Найдем производную: $f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2}$.

Производная обращается в нуль в точке $x = 1$. На промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1; +\infty)$ – возврастает. Следовательно, точка $x = 1$ – единственная точка минимума, значение в этой точке равно 11.

Найдем значения функции в концах отрезка: $f(-2) = -7$, и $f(2) = 15$.

Если $a \leq -7$, то график фукции $y = f(x)$ и прямая $y = a$ имеют единственную общую точку при $-2 \leq \mathrm{x} \leq 0$. Если $-7 < a < 11$ точек нет. ли $a = 11$, то линии имеют единственную общую точку (1; 11).

Если $11 < a \leq 15$, то линии имеют две различные общие точки при $0 < x \leq 2$. Если $a > 15$, то линии имеют одну общую точку при $0 < x \leq 2$ и одну при $x > 2$. **Ответ:** $a \leq -7, a = 11, a > 15$.

7. Решение *систем уравнений с параметром.*

Задача 37. «При каких значениях параметра a система уравнений имеет решения: $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1; \\ y = 3x + a \end{cases}$» [47].

Решение. $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1; \\ y = 3x + a. \end{cases}$

$2x^2 - 5x + 1 = 3x + a$; $\quad 2x^2 - 5x + 1 - 3x - a = 0$;

$2x^2 - 8x + (1 - a) = 0$; $\quad D = 64 - 8(1 - a) = 64 - 8 + 8a = 56 + 8a$.

Квадратное уравнение имеет решение при $D \geq 0$:

$56 + 8a \geq 0$; $\quad 8a \geq -56$; $\quad a \geq -7$.

Ответ: система уравнений имеет решения при $a \geq -7$.

В *10 классе* задания с параметром были лишь у А.Г. Мордковича, в разделе на повторение. В *11 классе* в каждом рассмотренном учебнике содержится тема «Уравнения с параметром». У А.Г. Мордковича, С.М. Никольского и Ю.М. Колягина встречаются те же типы заданий, что и в 7-9 классе. Добавились задания более высокого уровня сложности. Новые типы заданий – *кубические уравнения с параметром* и решение *систем уравнений с параметром*.

В работе М.В. Фалилеевой [65] выделены различные виды параметризации уравнений (Таблица 2).

Таблица 2 - Виды параметризации уравнений в 7-11 классах

Виды уравнений с параметром	**Параметризация**	**Примеры**
Линейные уравнения	свободного члена;	$5x = b - 1$
	коэффициента при переменной;	$ax = 4$
	свободного коэффициента и коэффициента при переменной	$(m-5)x = 3m$
Рациональные уравнения	свободного члена в числителе;	$\frac{x+8a}{x-2} = 0$
	свободного члена в знаменателе;	$\frac{5}{x-m} = 0$
	свободных членов в числителе и знаменателе;	$\frac{x+2b}{x-b} = 0$
	коэффициентов при переменной в числителе или в знаменателе	$\frac{ax+3}{x-9a} = 0$
Квадратные уравнения	свободного члена;	$x^2 - 2x + a + 3 = 0$
	коэффициента при переменной 1-й степени;	$x^2 - ax + 3 = 0$
	коэффициента при старшем члене;	$ax^2 - x + 6 = 0$
	коэффициентов при переменной или свободном члене	$mx^2 + (m-1)x + 5 = 0$
Иррациональные уравнения	под знаком квадратного радикала;	$\sqrt{x+2a} = 3$
	вне знака квадратного радикала;	$\sqrt{x+2a} = a$
	под знаком радикала и вне знака радикала	$\sqrt{x+2a} = 5 + a$

Проанализирован задачный материал по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы выявлено, что авторами используются различные задания по параметризации. Однако важно заметить, что случаи, когда параметр находится одновременно при нескольких коэффициентах, является заданием повышенного уровня сложности.

Выводы по первой главе

1. Определено понятие уравнения с параметром. Так, определено, что в методической литературе отсутствует единый подход к определению поня-

тия уравнения с параметром. Выделены виды уравнений с параметрами, рассматриваемые в общеобразовательной школе.

2. Выявлены основные цели обучения теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы: формирование у учащихся умения проводить разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность при описании решения уравнения с параметром; знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с решением уравнений с параметрами, в математике и других науках; навыков использования уравнений с параметрами в повседневной жизни; графической культуры.

3. Рассмотрено содержание теоретического материала по данной теме в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы.

4. Проанализирован задачный материал по теме «Уравнения с параметрами» в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы. Определены основные *виды* уравнений с параметрами и их *типы* по теме исследования.

ГЛАВА II. СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§ 5. Методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы

Как было отмечено выше, решение уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы является одним из наиболее сложных разделов. Многие исследователи в теории и методике обучения математике рассматривают задачи с параметрами как исследовательские.

Нами определено, что основными видами уравнений с параметром в углубленном курсе математики общеобразовательной школы являются: уравнения с параметром не выше второй степени (линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр); уравнения с параметром выше второй степени; дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр; иррациональные уравнения, содержащие параметр; уравнения с параметрами, содержащие модуль. Единый подход к определению понятия уравнения с параметром в методической литературе отсутствует.

Представим методические рекомендации по обучению решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

М.И. Зайкин при обучении школьников решению задач использует не системы задач, а такие задачные конструкции, как *цепочки задач*, часто используемые при работе с одаренными школьниками и несущими их развивающую функцию, а также *циклы задач*. Под *развивающейся цепочкой взаимосвязанных задач* автор понимает «такую совокупность задач целевого назначения, постановка и решение каждой задачи которой (за исключением первой) порождаются решением предыдущих задач» [24]. Развивающиеся цепочки взаимосвязанных задач позволяют привлекать обучающихся к творческой деятельности. Кроме того, значительная роль при обучении математике отводится организации обучения *приемам мышления*, рациональному *выполнению учебной деятельности* при изучении определенных учебных тем наиболее трудных для усвоения школьниками, а также при решении сложных задач (в том числе таких, как уравнения с параметрами). С этой целью предлагается использовать *циклы математических задач*, предназначенных для формирования обобщённых приёмов математической деятельности.

Отметим, что в диссертационном исследовании С.В. Арюткиной [5] рассматриваются циклы задач, направленные на формирование обобщенных приемов решения уравнений и неравенств с параметрами.

Л.М. Фридман при обучении решению задач с параметрами использует *эвристические методы* поиска способа их решения. Этот метод автор связывает с тем, что сложную нестандартную задачу разбивает на несколько более простых подзадач, стандартных или ранее решенных, при последовательном решении которых будет решена исходная задача. Так, им приводится пример на полное приведенное *квадратное уравнение с параметром*, где параметр содержится в выражении при коэффициенте *x;* требуется найти значения параметра, при которых корни уравнения находятся в определенном промежутке. Для решения данной задачи предлагается *требование исходной задачи разбить на более простые требования* [69, С. 141-144].

В.В. Мирошин в пособии [38] говорит: «Содержательно-методическая линия задач с параметрами должна строиться по принципу обратной связи и предусматривать постоянное обращение к ранее использованным идеям и методам решения наряду с введением новых».

Автор считает важным тот факт, что «выбор метода решения задачи – прерогатива учащегося, учитель должен выступать в роли некоторого заинтересованного наблюдателя, ведущего дискуссию по формуле: РЕЗУЛЬТАТИВНОСТЬ = ПОТЕНЦИАЛ – ВМЕШАТЕЛЬСТВО» [38].

В программах по математике в общеобразовательной школе задачам с параметром практически не отводится места. Алгебраические уравнения с параметром можно вводить для изучения сразу после изучения линейных уравнений. Это могут быть уравнения на нахождение решения в общем виде, определение корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам, исследование количества корней в зависимости от значений параметра. Такие задания активно включает А.Г. Мордкович [41; 43].

Отметим, что в учебно-методическом пособии А.Г. Мордковича [48] несколько бесед отведены уравнениям с параметрами. В одной из них подробно рассматриваются различные уравнения и неравенства с параметрами из школьного курса математики; в другой приведены системы упражнений по теме «Задания с параметром». Автор также отмечает, что данная тема всегда актуальна на встречах с учителями.

Уравнения с параметрами чаще всего не входит в программу для обязательного изучения в школьном курсе математики. Однако, задания с параметром входят в единый государственный экзамен, олимпиады и во вступительные испытания в ВУЗы [77].

Ученые установили, что результаты в изучаемой области медленнее достигаются после долгого опыта и близкого знакомства с математическими объектами, а окружающая среда олимпиад благотворно действует на концентрацию внимания учащихся, их вдохновение для решения задач [77].

В статье М.Г. Гунашевой отмечается, что «можно специально и не выделять часы на изучение темы «Уравнения с параметром». Изучение этой темы можно растворить во всем курсе алгебры, то есть при изучении той или иной темы решать уравнения, содержащие параметры» [16].

Методически было бы правильно каждый пройденный тип уравнений завершать задачами с использованием параметра. Школьнику привыкнуть к параметру за два-три занятия трудно - нужно время. Также использование подобных задач улучшает закрепление пройденного материала и способствует развитию его логической и математической культуры, развитию интереса к математике, поскольку открывает перед ним новые методы и возможности для самостоятельного поиска.

При обучении решению алгебраических уравнений с параметром важно, чтобы учащиеся понимали важность аккуратной работы с параметром и что запись ответа в подобных уравнениях значительно отличается от записи ответов аналогичных уравнений без параметра.

С.В. Арюткиной отмечается, что в научно-методической литературе представлены некоторые попытки описать общий метод решения уравнений вида *F(a, x)=0* с параметром *a* и переменной *x*, где в большинстве случаев используется дедуктивный метод познания, «но для учащихся, в 8-9 классов дедуктивный путь познания сопряжен с определенными трудностями, потому более эффективным, является подход, предполагающий восхождение от конкретного к общему, а от него к частному» [4, с. 4-5].

При решении уравнения с параметром можно пользоваться следующим алгоритмом:

1. «Определяют ограничения, налагаемые на значения неизвестного и параметра, вытекающие из того, что функции и арифметические операции в или имеют смысл.

2. Определяют формальные решения, записываемые без учета ограничений. Если при решении возникают контрольные значения параметра, то их наносят на числовую ось. Эти значения разбивают область допустимых значений параметра на подмножества. На каждом из подмножеств решают заданное уравнение.

3. Исключают те значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям.

4. На числовую ось. добавляют значения параметра, найденные в п.3. Для каждого из промежутков на оси. записывают все полученные решения в зависимости от значений параметра.

5. Выписывают ответ, т.е. записывают решения в зависимости от значений параметра» [59].

Наличие параметра в задаче предполагает специальную форму записи ответа, позволяющую установить, каков ответ для любого допустимого значения параметра. Недопустимые значения также указываются в ответе, и считается, что при этих значениях параметра задача не имеет решения.

Главная особенность задач с параметрами – «ветвления решения в зависимости от значений параметров. Другими словами, процесс решения осуществляется классификаций частных уравнений по типам с последующим поиском решений каждого типа» [71].

Одновременно решение бесконечной совокупности частных уравнений с учетом требования равносильности преобразований возможно лишь при развитии достаточного уровня логического мышления [73]. С другой стороны, формирование методов решения уравнений и неравенств с параметрами обеспечивает значительный процесс в развитии математической культуры учащихся. Развивающий характер уравнений и неравенств с параметрами определяется их способностью реализовывать многие виды мыслительной деятельности учащихся: выработка определенных алгоритмов мышления; умение определить наличие и количество корней в уравнении; решение семейств уравнений, являющихся следствием данного; выражение одной переменной через другую; нахождение области определения уравнения; повторение большого объема формул при решении; значение соответствующих методов решения; широкое применение словесной и графической аргументации; развитие графической культуры учащихся. Все это позволяет говорить о необходимости изучения решений задач с параметрами.

Чтобы учебно-воспитательный процесс был грамотно организован, необходимо выбрать рациональную систему методов и приемов обучения. Необходимо сбалансированно сочетать новые и традиционные методы обучения, оптимизировать использование технических средств обучения.

Также применение *технологии поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича* позволит организовать новый способ познавательной деятельности обучающихся на уроках математики.

М.Б. Волович также предлагает обучать математике школьников *циклами*. При этом он руководствуется определением Н.Ф. Талызиной: «Под циклом обучения понимается вся совокупность действий обучающего и учащегося, которые приводят последнего к усвоению определенного фрагмента содержания образования с заданными показателями, т.е. достижению поставленной цели». Цикл содержит следующие *типы уроков*: *объяснение, решение задач, общение, самостоятельная работа* [14].

В ходе обучения решению алгебраических уравнений с параметром важно решать задачный материала на определенные типы заданий различного уровни сложности, важно развивать у школьников самостоятельность при их решении. Учителю необходимо учитывать особенности обучения данной теме и организовать работу на уроке таким образом, чтобы учащиеся сами стремились к решению данных уравнений.

При рассмотрении темы «Алгебраические уравнения с параметром» можно использовать технологию поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича следующим образом: 1 урок – урок объяснения, где происходит предварительное ознакомление с действием, т.е. построение в сознании обучаемого ориентировочной основы действия по изучению темы «Уравнения с параметром»; 2 урок - урок решения задач, его проведение предполагает дифференцированные и индивидуализированные варианты работы с обучающимися: «реши с помощью, реши вместе с товарищем, реши самостоятельно»; формы работы со школьниками: взаимопроверка, групповая работа, работа в парах; 3 урок – урок общения; 4 урок - урок самостоятельной работы.

В новых циклах с опорой на готовый конспект они самостоятельно выполняют записи и только потом переходят к обычным записям.

В диссертационном исследовании В.И. Горбачева показано, что при обучении школьников решению уравнений с параметром данная технология поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича наиболее эффективна [15].

Элективный курс Е.А. Дьяковой «Решение уравнений и неравенств с параметрами» [18] предназначен для 10 классов с углубленным изучением математики. Основными разделами являются: решение линейных уравнений и неравенств с параметром, решение квадратных уравнений и неравенств с параметром. В данном курсе рассмотрено 3 раздела: Раздел 1. Линейные уравнения с параметром; Раздел 2. Линейные неравенства с параметром; Раздел 3. Квадратные уравнения и неравенства с параметром. Интересной особенностью является геометрическая интерпретация уравнений с параметром. Автором представлен алгоритм решения уравнений с параметром. В данном элективном курсе Е.А. Дьякова решает уравнения с параметром аналитическим и графическим методами.

Элективный курс Д.Ф. Айвазяна «Решение уравнений и неравенств с параметрами» [2] является предметно-ориентированным и предназначен на два года обучения для реализации в 10-11 классах общеобразовательной школы для расширения теоретических и практический знаний обучающихся. Данный элективный курс состоит из 4 разделов, одним из которых является квадратные уравнения и неравенства с параметрами. Д.Ф. Айвазян предлагает классификацию систем линейных уравнений по количеству решений (неопределенные, однозначные), дает понятие системы с параметрами и алгоритм решения систем линейных уравнений с параметрами. Квадратные уравнения с параметром автор решает аналитическим и графическим методами, наглядно демонстрируя в какой ситуации лучше выбирать графический метод.

При обучении решению алгебраических уравнений с параметрами необходимо использовать *различные формы обучения*, так как тема является сложная для понимание среднестатистического ученика. Целесообразней всего использовать такие формы обучения, как индивидуальная и групповая.

Чтобы разнообразить учебно-познавательную деятельность учащихся и привлечь учеников к активному изучения темы «Алгебраические уравнения с параметром» необходимо *комплексное использование методов обучения на уроке.*

Для того, чтобы учащиеся максимально полно и четко осознавали изучаемый материал, существует много методов его подачи. Так как данная тема является сложной для понимания учеников и не всегда включается в обязательный перечень тем, необходимых для изучений, можно использовать *про-*

блемный метод обучения, дать учащийся самостоятельно понять, как решать уравнения с параметром. Согласно современной тенденции в обучении математики, очень эффективно использовать *электронные средства обучения*, развивая визуальные навыки обработки информации у учеников. *Наглядные средства обучения* облегчают восприятие и усвоение учениками материала по данной теме.

Таким образом, в качестве *методических рекомендаций* по обучению школьников решению алгебраических уравнений с параметром *на уроках* в углубленном курсе математики общеобразовательной школы можно выделить:

– обучающиеся должны знать, что понимается под термином «уравнение с параметром» и что значит решить уравнение с параметром;

– при решении какого-либо уравнения с параметром могут применяться *различные методы решения;* необходимо давать возможность обучающимся самостоятельно выбирать метод решения;

– знакомить учащихся с заданиями с параметрами *следует с 7 класса;*

– познакомить с графическим методом решения уравнений второй степени их необходимо в 9 классе на уроках повторения курса алгебры;

– проводить на уроках *обучающие самостоятельные работы* по теме исследования в зависимости от уровня знаний учащихся;

– использовать технологию поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича;

– каждый изученный вид уравнений завершать задачами с использованием параметра;

– необходимо использовать *различные формы, методы и средства обучения.*

Обучать решению алгебраических уравнений с параметрами в углубленном курсе математики общеобразовательной школы можно также и в рамках специальных *элективных курсов* для 10-11 классов, где при изучении материала:

– приводить теоретические блоки, необходимые для решения уравнений с параметром;

– рассматривать задания различных уровней сложности;

– проводить итоговое занятие проводить в форме научно-исследовательской конференции, на которой школьники могут представлять проекты, выполненные в течении их изучения.

§6. Анализ задач ЕГЭ по теме исследования

Единый государственный экзамен по математике давно и прочно вошёл в практику общеобразовательных учреждений. Умение решать задачи, предлагаемые на ЕГЭ – это актуальная потребность современных выпускников и будущих абитуриентов ВУЗов.

Особый интерес представляют собой задачи с параметрами, включающиеся в задания во второй части: в задании 18 экзаменационной работы и требующие нестандартного подхода, вариативности и гибкости мышления. Весьма полезным, на наш взгляд, является знание учащимися разнообразных способов решения таких заданий и умение выбрать из них наиболее оптимальный и рациональный подход.

Задачи с параметрами являются сложными потому, что не существует единого алгоритма их решения. Спецификой подобных задач является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве.

При верном выполнении задания №18 ЕГЭ профильного уровня по математике максимально возможно получить 4 балла, если обосновано получен верный ответ. Если с помощью верного рассуждения получен верный ответ, но в ответ включены также и лишние решения, или решение недостаточно обосновано – учащийся получает 3 балла. В случае, если решение имеет верный ход и сведено к верным исследованиям, но не получен верный ответ – ставится 1 балл. Если же решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше ставится 0 баллов.

При анализе выделены следующие типы уравнений с параметрами в заданиях ЕГЭ профильного уровня по математике: 1) системы уравнений с параметром; 2) уравнения с параметром, содержащие модуль; 3) уравнения с параметром выше второй степени; 4) иррациональные уравнения с параметром; 5) рациональные уравнения с параметром.

Проиллюстрируем типы задач с параметрами на конкретных примерах из материалов для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Тип 1. Системы уравнений с параметром. В систему уравнений могут включаться различные уравнения с параметром: линейные, квадратные, рациональные, иррациональные, уравнения с модулем.

Пример 1. «Найдите все значения a при каждом из которых система $\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0.\end{cases}$ имеет единственное решение» [56].

Решение. Решение системы может быть единственным в двух случаях.

<u>*1 случай.*</u> Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0.\end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\\ x=-3.\end{array}\right.$

Если $x=1$, то $a+2(a+1)+a+1=0$, а значит, $a=-\frac{3}{4}$. При этом значении a система принимает вид: $\begin{cases}-7x^2-6x+13\le 0,\\ -3x^2+2x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x\le -\frac{13}{7},\\ x\ge 1,\end{array}\right.\\ -\frac{1}{3}\le x\le 1.\end{cases}$

Единственное решение $x = 1$.

Если $x = -3$, то $9a - 6(a+1) + a + 1 = 0$ и $a = \frac{5}{4}$. Система принимает

вид: $\begin{cases} x^2 + 10x + 21 \le 0, \\ 5x^2 + 18x + 9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le -3, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x \ge -\frac{3}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -7 \le x \le -3.$

При этом значении a *a* система имеет бесконечно много решений.

<u>*2 случай.*</u> Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при $\begin{cases} a^2 - (a-1)(a+4) = 0, \\ a - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$

При этом первое неравенство имеет единственное решение $a = -4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при $\begin{cases} (a+1)^2 - a(a+1) = 0, \\ a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$

При этом второе неравенство имеет единственное решение $x = 0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a_1 = -\frac{3}{4}; a_2 = \frac{4}{3}$.

Пример 2. «Найдите все значения a при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (ay - ax + 2)(y - x + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$ имеет ровно шесть решений (И.В. Ященко, вариант 11)» [72].

Решение. Из второго уравнения системы получаем $a \ge 0$.

Если $a = 0$ получим: $\begin{cases} y - x = 0 \\ xy = 0, \end{cases}$ откуда $x = y = 0$.

Если $a > 0$ получим: $\begin{cases} (a(y - x) + 2)(y - x + 3a) = 0, \\ |xy| = a, \end{cases}$

откуда $y-x=-\frac{2}{a}$ или $y-x=-3a,\quad xy=\pm a.$

На координатной плоскости получаем две параллельных прямых и две гиперболы (Рис. 4). Если две прямые совпадают, то шесть различных решений невозможно. Поэтому $\frac{2}{a}\neq 3a,$ откуда $a\neq\sqrt{\frac{2}{3}}.$

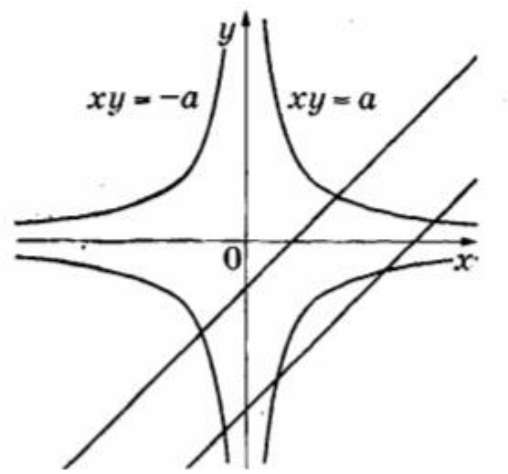


Рис. 4.

При этом условии гипербола $y=\frac{a}{x}$ пересекает каждую из прямых в двух различных точках. Это дает четыре различных решения данной системы.

Еще два решения получаются при пересечении прямых гиперболой $y=-\frac{a}{x}$ в двух различных точках. Для этого нужно, чтобы гипербола дважды пересекала ту прямую, что дальше от начала кординат. Для этого необходимо, чтобы в квадратных уравнениях: $x^2-\frac{2}{a}+a=0$ и $x^2-3ax+a=0$ одно имело два равличных корня, а другое не имело корней.

$\left(\frac{4}{a^2}-4a\right)(9a-4)>0,$ т.к. $a>0,$ получаем: $(a^3-1)(9a-4)>0,$ откуда $a<\frac{4}{9}$ или $a>1.$ *Ответ:* $0<a<\frac{4}{9};\quad a>1.$

Тип 2. Уравнения с параметром, содержащие модуль. Виды параметризации могут находится: внутри модуля при переменной, внутри модуля при свободном члене, вне модуля.

Пример 3. «Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x-a^2+4a-2|+|x-a^2+2a+3|=2a-5$ имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23]» [56].

Решение. Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения: $(x-a^2+4a-2)-(x-a^2+2a+3)=2a-5.$

Сделаем замену: $m=x-a^2+4a-2, n=x-a^2+2a+3.$

Тогда уравнение примет вид: $|m|+|n|=m-n.$

Это равносильно условию $n \le 0 \le m$. Получаем:

$$x - a^2 + 2a + 3 \le 0 \le x - a^2 + 4a - 2 \iff a^2 - 4a + 2 \le x \le a^2 - 2a - 3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23], только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \le a^2 - 2a - 3, \\ a^2 - 2a - 3 \ge 5, \\ a^2 - 4a + 2 \le 23 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2a \ge 5, \\ a^2 - 2a - 8 \ge 0, \\ a^2 - 4a - 21 \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \ge 2{,}5, \\ (a-4)(a+2) \ge 0, \\ (a-7)(a+3) \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \ge 2{,}5, \\ \left[\begin{aligned} a &\le -2, \\ a &\ge 4, \end{aligned}\right. \\ -3 \le a \le 7. \end{cases}$$

Таким образом, данное уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23] при a принадлежащем множеству [4; 7].

Ответ: $a \in [4;\ 7]$.

Тип 3. Уравнения с параметром выше второй степени. В данном типе уравнения в ходе некоторых преобразований переходят к линейным или квадратным уравнения с параметром.

Пример 4. «Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4 + 4x^3 + 4ax - 16x - 16 + 8a - a^2 = 0$ имеет не менее трёх корней» [72].

Решение: $x^4 + 4x^3 + 4ax - 16x - 16 + 8a - a^2 = 0$;

$-a^2 + 8a - 16 = -(a-4)^2 = 0$; $x^4 - (a-4)^2 + 4x^3 + 4x - 16x = 0$;

$(x^2 - a + 4)(x^2 + a - 4) + 4x(x^2 + a - 4) = 0$;

$$(x^2 + a - 4)((x+2)^2 - a) = 0 \iff \left[\begin{aligned} x^2 &= 4 - a, \\ (x+2)^2 &= a. \end{aligned}\right.$$

Исходное уравнение имеет не менее 3 решений, если оба уравнения совокупности имеют решение. Это значит, что $a \ge 0$ и $a \le 4$. Проверим случаи совпадения корней. Если $a = 0$, то совокупность уравнений $\left[\begin{aligned} x^2 &= 4, \\ x &= -2 \end{aligned}\right.$ имеет ровно 2 решения. Значит, $a = 0$ не подходит. Аналогично для $a = 4$.

Ответ: $a \in (0; 4)$.

Тип 4. Иррациональные уравнения с параметром. Виды параметризации могут быть: под знаком квадратного радикала, вне знака квадратного радикала и под знаком радикала и вне знака радикала.

Пример 5. «Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-4x^2+9a^2}=x^2+2x-3a$ имеет ровно три корня» [68].

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^4-4x^2+9a^2=x^4+4x^2+9a^2+4x^3-6ax^2-12ax, \\ x^2+2x-3a\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3ax(x+2)=2x^2(x+2), \\ x^2+2x-3a\geq 0. \end{cases}$$

Из уравнения получаем $x=0, x=-2$ и $x=\frac{3a}{2}$. Чтобы уравнение имело три различных корня, требуется, чтобы при $x=0, x=-2$ и $x=\frac{3a}{2}$ выполнялось неравенство $x^2+2x-3a\geq 0$, а также чтобы были выполнены вия $\frac{3a}{2}\neq -2$ и $\frac{3a}{2}\neq 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} (-2)^2-4-3a\geq 0, \\ 0^2+0-3a\geq 0, \\ \frac{9}{4}a^2+3a-3a\geq 0, \\ \frac{3a}{2}\neq -2, \\ \frac{3a}{2}\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leq 0, \\ a\neq -\frac{4}{3}, \\ a\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-\frac{4}{3}, \\ -\frac{4}{3}<a<0. \end{cases}$$

Ответ: $a<-\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}<a<0.$

Тип 5. Рациональные уравнения с параметром.

Пример 6. «Найти все значения а, при каждом из которых уравнение $4(ax-x^2)+\frac{1}{ax-x^2}+4=0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $[-1;1)$» [55].

Решение. Сделаем замену: $y=ax-x^2$. Получаем:

$$4y+\frac{1}{y}+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4y^2+4y+1}{y}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2y+1)^2}{y}=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x^2-ax-\frac{1}{2}=0$. $D=a^2+2$. При любом значении a $D>0$, поэтому оно при любом a имеет два различных корня.

Пусть $f(x) = x^2 - ax - \frac{1}{2} = 0$. Так как $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, оба корня уравнения $f(x) = 0$ принадлежат промежутку $[-1; 1)$ тогда и только тогда, когда $f(-1) \geq 0$ *и* $f(1) > 0$, то есть когда $1 + a - \frac{1}{2} \geq 0$ *и* $1 + a - \frac{1}{2} > 0$. Значит уравнение $4(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 4 = 0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $[-1; 1)$ при $-0{,}5 \leq a < 0{,}5$. *Ответ:* $-0{,}5 \leq a < 0{,}5$.

Важно заметить, что уравнения с параметром встречаются в ряде заданий №18 ЕГЭ по математике профильного уровня. Также в данном задании ЕГЭ имеют место неравенства с параметром, функции, зависящие от параметра.

§7. Система задач по теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы

Задачи с параметрами образуют широкое множество задач, которые достаточно сложно систематизировать, так как существует много критериев по которым это возможно сделать.

Л.В. Виноградова в учебном пособии [12] выделяет такие принципы *отбора и составления систем задач, как: «Принцип системности:* наличие таких заданий, которые будут направлены на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного материала, но связывающие новые сведения с изученными ранее. *Принцип последовательности:* расположение заданий от простого к сложному. *Принцип прочности:* однотипность упражнений в системе задач».

В.В. Мирошин предлагает следующую *классификацию задач с параметром*: «*По постановке задания*: задачи, начинающиеся с условия «решить» и задачи, начинающие с условия «найти»; *по теме*: линейное уравнение и линейная функция, квадратное уравнение и квадратичная функция, системы уравнений, дробно-рациональные уравнения, иррациональные уравнения; *по методу решения; по сложности*: «элементарные», «базовые», «нестандартные»»» [38, С. 58].

Автор в данной работе сформулировал некоторые принципы, которые необходимо учитывать при разработке системы заданий с параметрами: *принцип наследственности:* задачи с параметром должны быть связаны с основным материалом программы по математике; *принцип «от простого – к сложному»; принцип активизации учебной деятельности; принцип естественности:* отсутствие акцентов на сложности задачи; *принцип актуальности (значимости).* Необходимо показать учащимся, что задачи с параметрами являются простейшими моделями научно-исследовательских задач, с которыми им возможно придется работать в будущем.

Для разработки системы задач мы придерживались принципов Л.В. Виноградовой. В данных системах задач использована следующая *классификация задач: «Линейное уравнение. Линейная функция», «Квадратное уравнение. Квадратичная функция», «Системы уравнений», «Дробно-рациональное уравнение», «Уравнения с модулем», «Иррациональные уравнения», «Уравнения с параметром, выше второй степени».*

Система задач на тему «Линейное уравнение. Линейная функция»

Задача 1. «Решите уравнение, считая, что a, b – данные числа, а x – неизвестное: а) $x - a = 0$; б) $x + a = 1$; в) $x + a = 2b$» [33, С. 251].

Задача 2. «Решить уравнение относительно x если a и b - заданные числа, *отличные от нуля*: 1) $ax - 3 = b$; 2) $4 + bx = a$; 3) $b = a(x - 3)$; 4) $4 = a - (bx - 1)$» [41, С. 51]

Задача 3. «Решите уравнения относительно x: *а)* $ax - 7 = 2x + 10$; *б)* $ax - a = x - 1$; *в)* $mx + 1 = x + m$; *г)* $2x - 4a = ax - 1$» [28].

Задача 4. «Найти значение параметра a в уравнении $ax + 5y - 40 = 0$, если известно, что решением уравнения является пара чисел: а) $(3;\ 2)$; б) $(9;\ -1)$; в) $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$; г) $(-2;\ 2{,}4)$» [41, С. 43].

Задача 5. «Найти значение k, если известно, что график функции $y = kx + 2$ проходит через точку $P\ (-7;\ -12)$» [28, С. 204].

Задача 6. «Найдите значение m, если график линейной функции $y = -5x + m$ проходит через точку: $N(-7;\ 8);\ P(1{,}2;\ -3)$» [33, С. 56].

Задача 7. «В каком случае уравнение $ax = b$ имеет единственный корень; имеет бесконечно много корней; не имеет корней?» [29, С. 35].

Задача 8. «При каких значениях a уравнение $ax = 2a - 1$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет бесконечно много корней» [52, С. 124].

Задача 9. «Найдите натуральные значения a, при которых является натуральным числом корень уравнения *3x(a – 1)– 2a(x + 4) = 4(1 – 2a)*» [53, С. 113].

Задача 10. «При каком значении m точка *P(m; 1 – m)* графику уравнения: *а)* $x^2 - y^2 = 14;$ *б)* $x^2 + y^2 = 1$?» [44, С. 271].

Отметим, что в данной системе задач были представлены типы задач, на решение линейного уравнения с параметром *относительно переменной в* № 1-3,10*; на нахождение значения параметра* при известном корне линейного уравнения с параметром в № 4-6; на *нахождение значения параметра*, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней в № 7-8. В данном виде уравнений возможна параметризация свободного члена линейного уравнения (№ 1, 10), коэффициента при переменной (№ 4-6), свободного коэффициента и коэффициента при переменной (№ 2, 3, 7- 9).

Система задач на тему «Квадратное уравнение. Квадратичная функция»

Задача 1. «При каких значениях p уравнение $x^2 + px + 24 = 0$ имеет корень, равный *6?»* [42, С. 153].

Задача 2. «При каких значениях p уравнение $x^2 - px + 9 = 0$ имеет один корень уравнение?» [53].

Задача 3. «При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2+15x+a^2-$ $-4=0$ является неполным квадратным уравнением» [43, С. 121].

Задача 4. «Подберите какое-нибудь значение c, при котором уравнение $x^2-3x+c=0$ имеет корни, и при котором не имеет корней» [35, С. 131].

Задача 5. «Известно, что $x_1=3$ – корень уравнения $2x^2+16x+a=0$. Определите второй корень уравнения и число a» [30, С. 91].

Задача 6. «При каких значениях q уравнение $x^2-2\sqrt{2}x+q+1=0$ имеет различные корни?» [35, С. 186].

Задача 7. «В уравнении $x^2+px-35=0$ один из корней равен *7*. Найдите другой корень и коэффициент p» [44, С. 137].

Задача 8. «Найдите все значения a, при которых уравнение $ax^2-(a+1)x=0$ имеет единственный корень» [42, С. 80].

Задача 9. **«**При всех значениях параметра а решить уравнение $x^2+5ax=14a^2$» [44, С. 187].

Задача 10. «При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2+$ $+(4-2a)x+3=0$ имеет единственное решение?» [54].

В данной системе задач были представлены типы задач, как на *нахождение значения параметра* квадратного уравнения при известном значении переменных в № 1, 5, 7; *нахождение значения параметра*, при котором квадратное уравнение с параметром имеет два равных корня, два различных корня, не имеет действительных корней в № 2, 4, 6, 8, 10; *нахождение значения параметра*, при котором заданное квадратное уравнение с параметром является неполным квадратным уравнением в № 3. В данном виде уравнений возможна параметризация свободного члена (№ 4 - 6), коэффициента при переменной 1-й степени (№ 1 - 3, 7), коэффициента при старшем члене (№ 8), коэффициентов при переменной или свободном члене (№ 3, 9, 10).

Система задач на тему «Системы уравнений»

Задача 1. «При каких a и b пара чисел *(1; 0)* является решением системы: $\begin{cases} 2x + y = a \\ bx - y = 2? \end{cases}$» [25, С. 189].

Задача 2. «Укажите какое-либо значение k, при котором система $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - kx = 3 \end{cases}$ имеет единственное решение» [42, С. 229].

Задача 3. «Определить, при каких значениях параметра a уравнения $x + +ay = 1$ и $ax + y = 2a$ имеют хотя бы одно общее решение?» [54, С. 19].

Задача 4. «Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x + my = 2m + 1, \\ (m + 1)x + 4y = 9 \end{cases}$ при всех значениях параметра *m*» [35].

Задача 5. «При каких m система $\begin{cases} 2x + (m - 1)y = 3, \\ (m + 1)x + 4y = 9 \end{cases}$ не имеет решений?» [54]

Задача 6. «Найти все значения параметра a, для каждого из которых числа *x* и *y*, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x > y$» [30].

Задача 7. «Найти все действительные значения m, при которых система $\begin{cases} x - y = m(1 + xy), \\ 2 + x - y + xy = 0 \end{cases}$ имеет действительные решения» [63].

Задача 8. «При каких значениях параметра k система $\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ky = 2 \end{cases}$ имеет решения $x < 0; y < 0$» [63].

Задача 9. «Найти b так, чтобы при любых a система $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$ имела хотя бы одно решение» [30].

Задача 10. «При всех значениях параметра a решить систему уравнений $\begin{cases} x + ay = 1; \\ ax + y = a^3. \end{cases}$» [46].

Отметим, что в данной системе задач были представлены типы задач, как на *нахождение значений параметров при известных значениях перемен-*

ных в системе линейных уравнений в № 1*; нахождение значения параметра, при котором система уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней в* № 2, 3, 5, 7-9*; решение системы уравнений при всех значениях параметра* № 4, 10.

Система задач на тему «Дробно-рациональное уравнение»

Задача 1. «При всех значениях параметра a решить уравнение $x - 1 = = \frac{6ax+4a-5a^2}{x+1}$» [25, С. 189].

Задача 2. «Решить уравнение: $\frac{(ax^2-2)}{x-2} = a$» [49].

Задача 3. «Решите уравнение $\frac{x}{5a+x} - \frac{5a+x}{x-5a} = \frac{100x^2}{25a^2-x^2}$» [51].

Задача 4. «При всех значениях параметра a решить уравнение $\frac{x-a}{x^2-3x+2} == 0$» [63].

Задача 5. «При каких a уравнение $\frac{x^2+ax+1}{x-2} = 0$ имеет единственный корень?» [63].

Задача 6. «При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x+a}{x+1} + \frac{a-3x}{x-3} = -2$ имеет единственное решение?» [25].

Задача 7. «Решить уравнение $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$, где a – параметр» [70].

Задача 8. «Решить уравнение $\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{m}{x}$» [63].

Задача 9. «При всех значениях параметра a решить уравнение $\frac{(x-2a)(x+a)}{a} = \frac{3x}{a} + 6 - 3x - 2a$» [44, С. 189].

Задача 10. «Для каждого значения параметра a решить уравнение: $\frac{2-a}{ax} = \frac{a+1}{x-2a}$ » [60].

В данной системе задач был представлен тип задач на решение *рациональных уравнений с параметром*, выявленный нами среди остальных типов уравнений с параметром при анализе учебников по математике для 9-11 классов. Включены задания с параметризацией свободного члена в числителе, свободного члена в знаменателе, свободных членов в числителе и знаменателе коэффициентов при переменной в числителе или в знаменателе.

Система задач на тему «Уравнения с модулем»

Задача 1. «При каких значениях p уравнение $|3x+6|=px+2$ имеет один корень?» [47, С. 218].

Задача 2. «При каких значениях a в уравнении $(x-a)^2-12|x-a|+$ $+35=0$ число отрицательных корней равно числу положительных корней» [47, С. 219].

Задача 3. «Для каждого значения параметра a решите уравнение $|x-1|-a|x+1|=2$» [51, С. 360].

Задача 4. «Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $x^2+5(x+1)+3|x-a|+a=0$?» [63].

Задача 5. «Решить уравнение $x^2=2|x-a|-2|x-2|$» [63].

Задача 6. «Решить уравнение $(4a-15)x^2+2a|x|+4=0$, если a - параметр» [63].

Задача 7. «При каких значениях a уравнение $x^2-2|x|=a$ имеет четыре корня?» [54].

Задача 8. «Решите уравнение с параметром: $a\ |x-a|+|x+a+1|=$ 3» [47].

Задача 9. «Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+2|=ax+1$?» [51, С. 372].

Задача 10. «Сколько корней имеет уравнение $|x^2-2|x|-3|=$ а в зависимости от параметра a?» [51].

В данной системе задач был представлен тип задач на решение *уравнений с параметром, содержащих модуль*, выявленный нами среди остальных типов уравнений с параметром при анализе учебников по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов.

Система задач на тему «Иррациональные уравнения»

Задача 1. «Решить уравнение $\sqrt{x-5}=x+a,$ где *a параметр*» [11].

Задача 2. «При каждом значении параметра a найдите число различных корней уравнения $\sqrt{x} = x - a$» [47, с. 218].

Задача 3. «Найти значения параметра a, при которых уравнение не имеет корней $\sqrt{2x^2 + ax + 2a + 10} = x - 1$» [11, С. 128].

Задача 4. «Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{2}x - a} = a - x$, где a - параметр» [63].

Задача 5. «Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 1 + x\sqrt{x - a}} - 1 = x$ относительно x» [63].

Задача 6. «При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{-8x - x^2 - 15} = ax + 7$ имеет единственное решение?» [63].

Задача 7. «Решить уравнение $\sqrt{\frac{a^2}{a+x}} + \sqrt{x + 2a} = \sqrt{x + a}$» [63].

Задача 8. «Найти значение а при котором уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$ имеет единственный корень, не имеет корней » [62].

Задача 9. «Решить уравнение $x\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1} = a$» [47].

Задача 10. «Решить уравнение $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$ относительно x» [27].

В данной системе задач был представлен тип задач на решение *иррациональных уравнений с параметром*, выявленный нами среди остальных типов уравнений с параметром при анализе учебников по математике для 9-11 классов. Параметризация под знаком квадратного радикала (№ 3, 5, 7, 10), вне знака квадратного радикала (№ 1, 2, 6, 9), под знаком радикала и вне знака радикала (№4).

Система задач на тему «Уравнения с параметром, выше второй степени»

Задача 1. «При каких значениях a уравнение $x^4 - 8x^2 + 4 = a$ не имеет корней?» [47, С. 218].

Задача 2. «При каких p уравнение $x^4 - px^3 - (2p + 1)x^2 + px + 1 = 0$ имеет не менее двух корней, больших 1» [11, С. 128].

Задача 3. «Решить уравнение с параметром a: $2x^3-(a+2)x^2-ax+$ $+a^2=0$» [20].

Задача 4. «В зависимости от параметра a определить число корней уравнения $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$» [20].

Задача 5. «При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно три корня: $(a^3+8)x^4+(a^2-1)x^2+a+\sqrt{a^2}=0$» [20].

Задача 6. «Определить целое число $m\neq 0$, для которого уравнение $x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$ имеет четыре действительных корня, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии» [51].

Задача 7. «Найдите все значения параметра a, при которых биквадратное уравнение $(a-4)x^4-2(a-10)x^2+a^2-8a-20=0$ имеет ровно два корня на промежутке $(-2;2]$» [63].

Задача 8. «Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x-a-2)^2((x-a-2)^2-2)=a^2+2a$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных» [68].

Задача 9. «Решить уравнение $(x+2a)(x+3a)(x+8a)(x+12a)=$ $=4a^2x^2$, где a – параметр» [20]

Задача 10. «В зависимости от параметра a определить число корней уравнения $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$» [20].

В данной системе задач был представлен тип задач на решение *уравнений с параметром, выше второй степени*, выявленный нами среди остальных типов уравнений с параметром при анализе учебников по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов.

§8. Элективный курс «Алгебраические уравнения с параметром» для учащихся математического профиля

При решении уравнений с параметрами приобретаются определенные умения исследовательской работы. Трудности при решении задач с параметрами обусловлены тем, что наличие параметра заставляет решать задачу не по шаблону, а рассматривать различные случаи, при каждом из которых методы решения существенно отличаются друг от друга.

Также при обучении важно учитывать возраст и этап развития интеллекта учащихся. Именно в соответствии с этим необходимо выбирать формы и стратегии обучения [74].

Л. Климент в [75] отмечает, что представления учащихся о некотором математическом понятии могут сильно отличаться от математически приемлемого определения. Представления учащихся о понятиях часто очень узкие или, наоборот, они могут включать ошибочные предположения.

Исследователи в области теории и методики обучения математики подчеркивают важность обучения учащихся методам решения уравнений с параметрами, ведь задания такого рода содержаться в выпускных экзаменах ЕГЭ, олимпиадных заданиях, но в углубленном курсе математики общеобразовательной школы не отведено достаточного количества часов для изучения данных уравнений.

Элективный курс «Алгебраические уравнения с параметром» направлен на обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, а также повторение и углубление знаний учащихся по решению алгебраических уравнений с параметром. Данный курс отвечает требованиям к целям и задачам обучения математике для 10-11 классов математического профиля.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1) материал, предлагаемый в данной программе, позволяет закрепить ранее изученное на более высоком уровне;

2) материал элективного курса расширяет и дополняет знания учащихся о решении алгебраических уравнений с параметром;

3) изучение данного материала, поможет реализовать полученные знания и умения на итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Цель: расширение и углубление знаний учащихся по методам решения алгебраических уравнений с параметром.

Задачи курса:

– расширить и углубить знания о семействе уравнений и методах их решения;

– развить коммуникативные и общеучебных навыки работы в группе, самостоятельной работы, умения вести дискуссию, аргументировать ответы;

– сформировать у учащихся представление об алгебраических уравнениях с параметром, как задачах исследовательского характера, показать их многообразие;

– рассмотреть методы решения алгебраических уравнений с параметром и научить осуществлять рациональный метод решения для конкретного задания.

Новизна данной программы состоит в том, что рассматриваемый в ней материал позволяет обобщить методы решения алгебраических уравнений, расширить знания о семействах уравнений. Содержание данной программы ранее не изучалось в курсе математики основной школы. Также задания элективного курса обладают практической значимостью для учащихся для решения заданий вступительных испытаний в ВУЗы, олимпиадных заданий, заданий единого государственного экзамена.

Программа элективного курса рассчитана на 17 часа (1 ч. в неделю).

Форма занятия: практическая работа; обобщение; самостоятельное решение задач, учебно-исследовательская конференция.

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

– знать определение алгебраического уравнения с параметром, принципы решения уравнений, содержащих параметр;

– уметь решать алгебраические уравнения с параметром аналитическим и графическим способами.

Выполнение практических занятий способствует закреплению и увеличению у обучающихся теоретических знаний и развитию математических навыков и умений, которые необходимы в практической деятельности и в повседневной жизни.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

– текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется в результате выполнения обучающимися серий заданий, часть которых выполняется в классе, а другая часть – индивидуально или в группе;

– итоговая контрольная работа;

– защита проектов.

Элективный курс может быть использован в общеобразовательных классах, а также в классах с профильным изучением математики.

Приведем календарно-тематическое планирование по данному элективному курсу (Таблица 3).

Таблица 3 - Календарно-тематическое планирование

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	**Введение. Понятие уравнения с параметром**	**1**	Урок обобщения.
II	**Линейные уравнения с параметром**	**4**	
1	Решение линейных уравнений с параметрами	2	Урок обобщения. Урок-практикум
2	Решение систем линейных уравнений с параметром	2	Урок-практикум
III	**Квадратные уравнения с параметром**	**8**	
1	Квадратные уравнения с параметром. Введение	1	Урок обобщения

Продолжение Таблицы 3

2	Решение квадратных уравнений с параметром относительно параметра и аналитическим методом	3	Урок-практикум
3	Решение квадратных уравнений с параметром графическим методом	2	Урок-практикум

4	Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром	1	Урок-практикум
5	Решение различных квадратных уравнений	1	Урок-практикум
IV	**Решение различных алгебраических уравнений с параметром**	**4**	
1	Решение различных алгебраических уравнений	2	Урок-практикум
2	Итоговая контрольная работа	1	Урок самостоятельного решения задач
3	Защита проектов	1	Учебно-исследовательская конференция

Опишем содержание элективного курса «Алгебраические уравнения с параметром».

Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОНЯТИЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ (1 ч.).

Актуализация основных понятий, необходимых при решении алгебраических уравнений с параметром.

Основная цель – актуализация понятийного аппарата, основных методов решения алгебраических уравнений с параметром.

В результате изучения данного раздела, учащиеся подготовятся к дальнейшему изучению алгебраических уравнений с параметром.

Тип 1. Задачи, которые надо решить уравнение для любого значения параметра, или для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Задание 1. Решить уравнение $ax - 5a = 7x - 3$ при всех возможных a.

Решение. Перенесем все одночлены с x влево, а оставшиеся члены – вправо. И вынесем x за скобку, как общий множитель: $x(a - 7) = 5a - 3$;

Первый случай, когда $a - 7 \neq 0$. Тогда мы можем поделить все уравнение на $a - 7$ и выразить: $x = \frac{(5a-3)}{a-7}$.

Второй случай, когда $a - 7 = 0$, получим уравнение $x \cdot 0 = 32$, которое не имеет решений.

Таким образом, мы нашли решения уравнения для всех значений параметра a. Например, $x = \frac{2}{7}$ при $a = 0$, $x = -\frac{1}{3}$ при $a = 1$ и т.д.

Ответ: при $a = 7$: $x \in \emptyset$; при $a \neq 7$: $x = \frac{5a-3}{a-7}$.

Тип 2. Задачи, для которых требуется найти количество решений в зависимости от значений параметра.

Задание 2. Решите каждое уравнение относительно параметра.

1. $x - a = 0$ (Ответ: при $a \in R, x = a$).

2. $5x = a$ (Ответ: при $a \in R, x = \frac{a}{5}$).

3. $ax = 0$ (Ответ: при $a = 0$, $x \in R$; при $a \neq 0, x = 0$).

4. $(a-1)x = 6$ (Ответ: при $a = 1$ корней нет, при $a \neq 1$, $x = \frac{6}{a-1}$).

5. $2ax = 1 - x$ (Ответ: при $a = -0{,}5$ корней нет, при $a \neq -0{,}5$, $x = \frac{1}{2a+1}$).

6. $3 - ax = x$ (Ответ: при $a = -1$ корней нет, при $a \neq -1$, $x = \frac{3}{a+1}$).

7. $xa^2 = a + x$ (Ответ: при $a = \pm 1$ корней нет, при $a \neq \pm 1$, $x = \frac{a}{a^2-1}$).

8. $4a - a^2x = 2ax$ (Ответ: при $a = 0, x \in R$, при $a = -2$ корней нет, при других a: $x = \frac{4}{a+2}$).

9. $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6$ (Ответ: при $a = 2$ $x \in R$, при $a = -2$, при других a: $x = \frac{a+3}{a+2}$).

Раздел 2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ (4 ч.).

2.1.-2.2. *Решение линейных уравнений с параметрами. Решение систем линейных уравнений с параметром.*

В данном разделе рассматривается решение линейных уравнений с параметром и их систем различных типов и основные методы их решения.

Основная цель –решение различных линейных уравнений с параметром.

В результате изучения данного раздела, учащиеся научатся применять полученные знания о решении линейных уравнений с параметром различных типов при решении некоторых видов олимпиадных задач.

Тип 1. Задачи, которые надо решить уравнение для любого значения параметра, или для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Задание 1. Найти все натуральные значения параметра a, при которых корень уравнения $(\mathrm{a}-1)\mathrm{x}=12$ является натуральным числом.

Решение. ОДЗ: $\mathrm{a} \neq 1$. Если $\mathrm{a} \neq 1$, то $x=\frac{12}{a-1}$.

Для того, что бы x было натуральным числом необходимо, чтобы знаменатель дроби являлся делителем числителя, то есть: $(a-1) \in \{12; 6; 4; 3; 2\}$;

Если $a-1=12,$ то $a=13, x=1;$ если $a-1=6,$ то $a=7, x=2;$ если $a-1=4,$ то $a=5, x=3;$ если $a-1=3,$ то $a=4, x=3;$
если $a-1=2,$ то $a=3, x=4$. *Ответ:* a є $\{13, 7, 5, 4, 3, 2\}$.

Задание 2. При каком значении a система $\begin{cases} 5x+ay+6=0, \\ x+2y-5=0 \end{cases}$ не имеет решений?

Решение. $\begin{cases} 5x+ay+6=0, \\ x+2y-5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0; \end{cases}$

Система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$; $\frac{5}{1}=\frac{a}{2}$; $a = 10$.

Ответ: при $a=10$ данная система не имеет решений.

Раздел 3. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ (8 ч.).

3.1.-3.5. Квадратных уравнения с параметром. Введение. Решение квадратных уравнений с параметром относительно параметра и аналитическим методом. Решение квадратных уравнений с параметром графическим методом. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. Решение различных квадратных уравнений.

Основная цель – изучение решения различных квадратных уравнений с параметром и методов их решения.

В результате изучения данного раздела, учащиеся научатся решать квадратные уравнения с параметром.

Тип 1. Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной.

Задание 1. Решите относительно *x* уравнение $x^2 - a^2 + 2a - 1 = 0$.

Решение. $x^2 - a^2 + 2a - 1 = 0$; $x^2 - (a^2 - 2a + 1) = 0$;

$x^2 - (a-1)^2 = 0$; $(x - (a-1))\,(x + (a-1))$=0;

$(x - a + 1)\,(x + a - 1)$=0;

$x - a + 1 = 0,$ или $x + a - 1$;

$x = a - 1$ $x = -a + 1$. *Ответ:* $a - 1$; $-a + 1$: $a \in R$.

Тип 2. Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение с параметром один корень, два корня, не имеет корней.

Задание 2. Докажите, что не существует такого значения параметра p, при котором уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ имело бы два равных корня.

Доказательство:

$x^2 - px + p - 2 = 0$; $D = (-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p - 2) = p^2 - 4p + 8$.

Квадратное уравнение имеет два равных корня, если $D = 0$:

$p^2 - 4p + 8 = 0$; $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ не может иметь два равных корня, *что и требовалось доказать.*

Задание 3. Существует ли такое значение a, при котором уравнение $x^2 - ax + a - 4 = 0$ не имеет действительных корней; имеет два равных корня; имеет два различных корня?

Решение. $x^2 - ax + a - 4 = 0$;

$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - 4) = a^2 - 4a + 16$. Имеем: а) данное уравнение не имеет действительных корней, если $D < 0$: $a^2 - 4a + 16 < 0$;

$(a^2 - 4a + 4) + 12 < 0$;

$(a-2)^2+12<0$ – не выполняется, т.к. $(a-2)^2>0$.

Можно сделать *вывод*, что значений a, при которых уравнение не имеет корней не существует.

б) уравнение имеет два равных корня, если $D=0$: $a^2-4a+16=0$;

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot16=16-64<0 \;=>\; a^2-4a+16=0$ не имеет корней, а значит, не существует таких значений a, при которых уравнение $x^2-ax+a-4=0$ имело бы два равных корня.

в) Уравнение имеет два различных корня, если $D>0$:

$a^2-4a+16>0$; $(a^2-4a+4)+12>0$; $(a-2)^2+12>0$; $(a-2)^2>-12$ выполняется при любом a.

Тип 5. Нахождение значения параметра квадратного уравнения для переменных, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Задание 4. Найти все значения параметра а, при которых корни уравнения $(a+1)x^2-(a^2+2a)x-a-1=0$ принадлежат отрезку $[-2;2]$.

Решение. 1 случай: если $a=-1$, то $0\cdot x^2-x+1-1=0$ отсюда $x=$ да $x==0$. Это решение принадлежит $[-2;\ 2]$.

2 случай: при $a\neq-1$, получаем квадратное уравнение, с условием, что корни принадлежат $[-2;2]$. Для решения введем $f(x)=(a+1)x^2-(a^2+2a)x-a-1$ и запишем систему, которая задает требуемые условия:

$$\begin{cases}(a+1)\cdot f(-2)\geq0,\\(a+1)\cdot f(-2)\geq0,\\D\geq0,\\-2<x_0<2.\end{cases}\qquad x_0=\frac{a^2+2a}{2(a+1)}\text{ –вершина параболы.}$$

$$f(-2)=(a+1)\cdot4-(a^2+2a)\cdot(-2)-a-1=2a^2+7a+3;$$

$$f(2)=(a+1)\cdot4-(a^2+2a)\cdot(2)-a-1=-2a^2-a+3;$$

$$D=(a^2+2a)^2+4(a+1)^2$$

$$=(a^2+2a+2)^2=$$

$$=(1+(a+1)^2)^2>0.$$

Подставляем полученные выражения в систему:

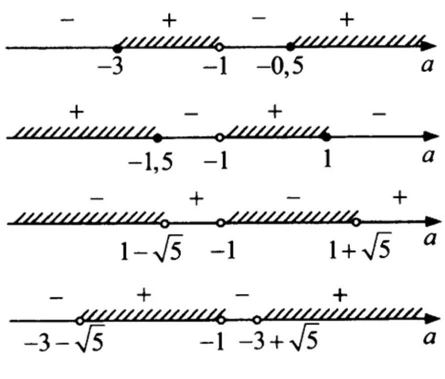


Рис. 5.

$$\begin{cases} (a+1)(2a^2+7a+3) \geq 0, \\ (a+1)(-2a^2-a+3) \geq 0, \\ \quad -2 < \frac{a^2+2a}{2(a+1)} < 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1)(a+3)(a+0{,}5) \geq 0, \\ -2(a+1)(a-1)(a+1{,}5) \geq 0, \\ \quad \frac{(a-1-\sqrt{5})(a-1+\sqrt{5})}{2(a+1)} < 0, \\ \quad \frac{(a+3-\sqrt{5})(a+3+\sqrt{5})}{2(a+1)} > 0. \end{cases}$$

Изобразим получение результаты на рисунке (Рис. 5) и запишем ответ

Ответ: $a \in [-3; -1{,}5] \cup [-0{,}5; 1]$.

Задание 1. Сколько корней имеет уравнение $x^2 - 2x - 3 = a$ в зависимости от значений параметра?

Решение. Построим графики функций $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = a$ (Рис. 6).

$y = x^2 - 2x - 3$

Имеем: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$; $y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$.

$(1; -4)$ – вершина параболы.

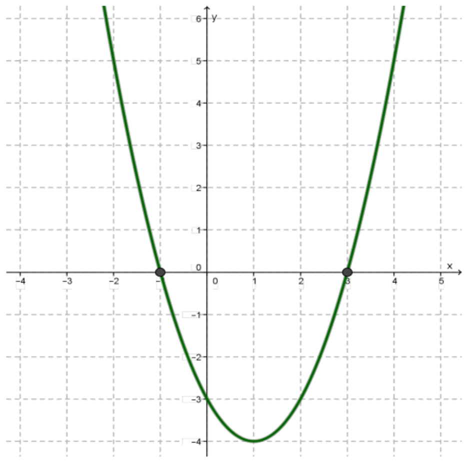


Рис. 6.

Ответ: при $a = -4$ уравнение имеет единственное решение; при $a > -4$ уравнение имеет два различных корня; при $a < -4$ уравнение не имеет действительных корней.

Раздел 4. РЕШЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ (4 ч.).

4.1.-4.3. Решение различных алгебраических уравнений. Итоговая контрольная работа. Защита проектов.

Основная цель – рассмотреть приемы решения различных алгебраических уравнений и методы их решения. Выяснение недопонимания, разбор самых сложных задач. Выявление кандидатов на городскую научно-исследовательскую конференцию.

В результате изучения данного раздела, учащиеся научатся решать различные алгебраические уравнения с параметром, не должно остаться недопонимания по решению задач, рассмотренных в элективном курсе.

Данный раздел завершается контролем знаний за весь пройденный курс. Защита проектов.

Задание 1. При каких a и b график функции $y = ax^2 - 2bx + 1$ проходит через точки *M (-1; 3)* и *P (2; 4)*.

Решение. $\begin{cases} a + 2b + 1 = 3, \\ 4a - 4b + 1 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2b = 2, \\ 4(a - b) = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2b + 2, \\ 4(2 - 2b) - 4b = 3, \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2b + 2, \\ 8 - 8b - 4b = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2b + 2, \\ b = \frac{5}{12}, \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{7}{6}, \\ b = \frac{5}{12}. \end{cases}$ *Ответ:* $a = \frac{7}{6}$, $b = \frac{5}{12}$.

Задание 2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23].

Решение. Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения: $(x - a^2 + 4a - 2) - (x - a^2 + 2a + 3) = 2a - 5$.

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 4a - 2, n = x - a^2 + 2a + 3$. Тогда уравнение примет вид: $|m| + |n| = m - n$.

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем:

$$x - a^2 + 2a + 3 \leq 0 \leq x - a^2 + 4a - 2 \iff a^2 - 4a + 2 \leq x \leq a^2 - 2a - 3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23], только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2-4a+2 \le a^2-2a-3, \\ a^2-2a-3 \ge 5, \\ a^2-4a+2 \le 23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a \ge 5, \\ a^2-2a-8 \ge 0, \\ a^2-4a-21 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 2{,}5, \\ (a-4)(a+2) \ge 0, \\ (a-7)(a+3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 2{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -2, \\ a \ge 4, \end{array}\right. \\ -3 \le a \le 7. \end{cases}$$

Таким образом, данное уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23] при a принадлежащем множеству [4; 7]. *Ответ:* $a \in [4; 7]$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1 задание проверяет навыки учащихся распознавать вид уравнения. Выбирать рациональный способ решения.

а) При всех a решить уравнение $x^2 + ax + 9 = 0$.

б) Решить уравнение $2a(a-2)x = a-2$.

в) Один из корней уравнения $x^2 + bx + 6 = 0$ равен 2. Найдите коэффициент b и другой корень уравнения.

2 задание проверяет умение работать с системами уравнений с параметром.

При каких значениях параметра k система $\begin{cases} 3x-6y=1, \\ 5x-ky=2 \end{cases}$ имеет решения $x<0, y<0$.

3 задание проверяет умение решать графическим способом

При каких a уравнение $x^2 - 2|x| = a$ имеет 4 корня? (графическим способом)

Вариант 2

1 задание проверяет навыки учащихся распознавать вид уравнения. Выбирать рациональный способ решения.

а) При всех a решить уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$.

б) Решить уравнение $(a+2)x = a^2 - 4$.

в) Один из корней уравнения $x^2 + kx - 2k + 5 = 0$ равен 1. Найдите значение параметра k и другой корень уравнения.

2 задание проверяет умение работать с системами уравнений с параметром

Найти значение b так, чтобы при любых a система $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$ имела хотя бы одно решение.

3 задание проверяет умение решать графическим способом

Решите уравнение $x|x+1| = a$ графическим способом.

Критерии оценивания:

Работа оценивается отметкой «5» («отлично»), если:

– работа выполнена полностью;

– в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок, рассмотрены все контрольные значения параметра a;

– в решениях нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Работа оценивается отметкой «4» («хорошо»), если:

– работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;

– допущены одна ошибка или есть два – три недочета, не являющихся следствием незнания или непонимания учебного материала.

Работа оценивается отметкой «3» («удовлетворительно»), если допущено более одной ошибки или более двух-трех недочетов, но обучающийся обладает умением определять тип уравнения, понимает структуру решения, выбирает рациональный способ решения.

Работа оценивается отметкой «2» («неудовлетворительно»), если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает навыками решения уравнений с параметром, решено не более одного уравнения.

Ключи:

Вариант 1

1. а) если $a \in (-\infty;\ -6) \cup (6;\ +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-36}}{2}$; если $a = 0$, то $x = -1$; если $a \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то решений нет.

б) Если $a = 0$,то уравнение решений не имеет; если $a = 2$, то $x \in R$; если $a \neq$ ли $a \neq 0, a \neq 2$, , то $x = \frac{1}{2a}$.

в) $x_2 = 3, b = -5$.

2. $10 < k < 12$.

3. $a \in (-1; 0)$

Вариант 2

1. а) если $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0; \frac{1}{4}]$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

б) $x \in R$ при $a = -2, x = a - 2$ при $a \in R$.

в) $x_2 = -7, k = 6$.

2. $b = 3$.

3. если $a > 0$, то $x = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4a}\right)$, если $a = 0$, то $x = 0$ или $x = -1$, если $-\frac{1}{4} < a < 0$, то $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4a})$

Предлагаемые ниже *темы исследовательских работ* могут быть использованы учащимися при выполнении индивидуальных или групповых проектов, или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

Темы выдаются в начале изучения программы. *Защита проектов* или работ проходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

В статье Т.А. Ананьиной [3] представлены особенности индивидуальной проектной деятельности учащихся по теме «Уравнения с параметром». Автор отмечает, что: «подобрать или придумать задачный материал в рамках проекта – посильная работа для математически одаренных учащихся, однако систематизировать, обобщать полученные результаты и делать выводы даже ля таких обучаемых сложная задача, которая, всякий раз, требует индивидуальной помощи учителя» [3].

1. Дробно-рациональные уравнения с параметром.

План работы:

1. Выявить методы решения дробно-рациональных уравнений с параметром.

2. Рассмотреть задачи по данной теме.

3. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Лавренов С. Дробно-рациональные уравнения с параметром/ Лавренов С.// Квант. – 2000. - №5. – с. 43-44.

2. Аналитические и геометрические приемы и методы решения задач с параметрами.

План работы:

1. Рассмотреть методы решения задач с параметром.

2. Подобрать задачный материал из ОГЭ и ЕГЭ по теме исследования.

3. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Егоров А. Решим относительно параметра / Егоров А. // Квант. – 1997. - №4. – с. 43-46.

2. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств / Ю. В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 93 с.

3. Метод разложения в задачах с параметрами.

План работы:

1. Подобрать различные виды уравнений с параметром, решаемые методом разложения и решить их.

2. Продемонстрировать разобранные уравнения с параметром.

3. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Габович И. Сколько корней имеет уравнение? / Габович И., Горнштейн П. // 1985/ - №3. – С.43-46. (Журнал Квант)

2. Олехник С.Н. Потапов М.К.Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М.: Изд-во Факториал, 1997. – 219 с.

3. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. – М.: Аванта+, 1998.

Список рекомендованной литературы для учителя и учащихся может включать в себя не только учебно-методическую литературу, но и статьи из зарубежной литературы [74; 77].

Список рекомендуемой литературы для учителя

1. Айвазян Д.Ф. Математика. 10 – 11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами: элективный курс / авт.-сост. Д.Ф. Айвазян. – Волгоград: Учитель, 2009.

2. Беляев С.А. Задачи с параметрами: методическая разработка для учащихся Заочной школы «Юный математик» при ВЗМШ и МЦНМО. – М.: МЦНМО, 2009.

3. Варкентина Т.И. Программа, обзор и краткое содержание элективного курса для учащихся 11 классов «Решение задач, содержащих параметры» [Электронный ресурс]/ Варкентина Т.И. // Педагогический университетский вестник Алтая. – 2006. - №1. – С. 41-48. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21479364. – Последнее обновление 12.01.2020.

4. Виситаева М.Б. Задачи с параметром в 8 классе [Электронный ресурс]/ Виситаева М.Б. // Математика в школе. – 2018. - №8. – С. 2. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=36903284. – Последнее обновление 13.12.2019.

5. Виситаева М.Б. Методический семинар. Задачи с параметром в IX классе [Электронный ресурс]/ Виситаева М.Б. // Математика в школе. – 2019. - №4. – С. 1-12. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=38548206. – Последнее обновление 10.01.2020.

6. Габович И. Сколько корней имеет уравнение? / Габович И., Горнштейн П. // 1985/ - №3. – С.43-46.

7. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005.

8. Дорофеев Г.В. Решение задач, содержащих параметры. Ч. 2 / Г.В. Дорофеев, В. В. Затакавай. – М.: Перспектива, 1990. - с. 2-38.

9. Дорофеев Г.В. Решение задач, содержащих параметры. Ч. 2 [Текст] / Г. В. Дорофеев, В. В. Затакавай. – М.: Перспектива, 1990. - с. 2-38.

10. Дубич С. Линейные и квадратные уравнения с параметрами [Текст]: 9 класс / С. Дубич // Математика. – 2001. №36. - с. 28-31.

11. Дьякова Е.А. Элективный курс «Решение уравнений и неравенств с параметрами» для 10 класса [Текст] / Е.А. Дьякова // Постулат. – 2019. - №9(47).

12. Дятлов В.Н. Материалы курса «Как научить решать задачи с параметром». – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2014 год.

13. Егерман Е. Задачи с параметрами. 7-11 классы [Текст] / Е. Егерман // Математика. – 2003. №1 - с. 18-20.

14. Ефимов Е.А., Коломиец Л.В. Задачи с параметрами: Учебное пособие для факультета довузовской подготовки СГАУ. – Самара, 2006 год.

15. Карасев В.А. Решение задач с параметром с помощью графиков функции [Электронный ресурс]/ Карасев В.А., Лёвшина Г.Д. // Математика для школьников. – 2016. - №4. – Режим доступа: http://www.schoolpress.ru/products/rubria/index.php?ID=74707&SECTION_ID=43. – Последнее обновление 13.01.2020.

16. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами. // Математика в школе. - 2011. - №1. – с. 18-26; 2011. - №2. – с. 25-32.

17. Косякова Т. Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений, содержащих параметры / Т. Косякова // Математика. – 2001. №38. - с. 5-9.

18. Крамор В. С. Примеры с параметрами и их решение: пособие для поступающих в вузы / В.С. Крамор. - М.: АРКТИ, 2000. - с. 48.

19. Курбатова Н. Н. Программа элективного курса «Параметр - это здорово!» // Молодой ученый. - 2016. - №16. - С. 351-359. - URL https://moluch.ru/archive/120/33353/ (дата обращения: 12.01.2020).

20. Малинин В. Уравнение с параметрами [Текст]: графический метод решения // Математика. – 2003. №29. -с. 12-15

21. Маргулис А. Внимание: в уравнении - параметр! / Маргулис А.// 1970/ - №9. – С.19-25.

22. Маскина М.С. О решении уравнений в целых числах при подготовке к сдаче профильного ЕГЭ по математике // Профильная школа. - 2018. - №4. - С. 41-49. - URL https://elibrary.ru/item.asp?id=35659292 (дата обращения: 13.01.2020).

23. Мордкович А.Г. Решаем уравнения. – М.: Школа-Пресс, 1995.

24. Окунев А.А. Графическое решение уравнений с параметрами [Текст] / А. А. Окунев. – М.: Школа-Пресс, 1986.

25. Прокофьев А.А. Задачи с параметром на ЕГЭ 2018 [Электронный ресурс]/ Прокофьев А.А. // Математика в школе. – 2018. - №8. – С. 11-24. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=36903275. – Последнее обновление 17.12.2019.

26. Решение квадратных и дробно-рациональных уравнений, содержащих параметры / Т. Косякова // Математика. – 2002. №22. -с. 15-18.

27. Сагателова Л.С. Решение уравнений высших степеней [Электронный ресурс]/ Сагателова Л.С. // Профильная школа. – 2013. - №3. – С. 47-51. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=19031871. – Последнее обновление 17.01.2020.

28. Семенова О. Задачи с параметрами. Элективный курс. [Электронный ресурс]/ Семенова О. // Математика. – 2010. - №1. – Режим доступа: https://mat.1sept.ru/view_article.php?ID=201000106. – Последнее обновление 10.12.2019.

29. Федин С. Сказка с параметрами [Электронный ресурс]/ Федин С. // Математика для школьников. – 2016. - №2. – Режим доступа:

http://www.schoolpress.ru/products/rubria/index.php?ID=75912&SECTION_ID=913. – Последнее обновление 23.12.2019.

30. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: учебное пособие для 10 класса средней школы / И. Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.

31. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами в ЕГЭ. – СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004.

32. Шевкин, А.В. Вокруг заданий 18 из ЕГЭ 2017 [Электронный ресурс]/ Шевкин, А.В. // Математика в школе. – 2017. - №3. – С. 9-20. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29063725. – Последнее обновление 07.01.2020.

33. Шевкин, А.В. От исследовательских текстовых задач к задачам с параметром [Электронный ресурс]/ Шевкин, А.В. // Математика в школе. – 2018. - №8. – С. 36-42. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=36903277. – Последнее обновление 02.12.2019.

34. Шенцева Т.А., Прудских А.Г. Элективный курс "Задачи с параметром" // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2014. – Т. 12. – С. 191–195. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21486552. – Последнее обновление 02.12.2019.

Список рекомендуемой литературы для учащихся

1. Амелькин В.В., Рабцевич И.Л. «Задачи с параметрами» , Минск, «Асар», 1996г.

2. Г.А. Ястребинецкий «Уравнения и неравенства с параметрами», Москва, «Просвещение», 1972 г.

3. Различные издания Федерального института педагогических измерений для подготовки к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

4. С.И. Колесникова «Подготовка к ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ». М., 2016.

5. Циганов Ш. Квадратные трехчлены и параметры. – Математика. - 2011.

6. Ваховский Е. Когда помогают графики. / Ваховский Е., Рывкин А.// 1975/ - №2. – С.43-48.

7. Габович И. Сколько корней имеет уравнение? / Габович И., Горнштейн П. // 1985/ - №3. – С.43-46.

8. Егоров А. Решим относительно параметра/ Егоров А.// 1997/ - №4. – с. 43-46

9. Лавренов С. Дробно-рациональные уравнения с параметром/ Лавренов С.// 2000/ - №5. – с. 43-44

10. Маргулис А. Внимание: в уравнении - параметр! / Маргулис А.// 1970/ - №9. – С.19-25.

Таким образом, реализация данного элективного курса в старшей школе позволит расширить и укрепить знания учащихся об уравнениях с параметром, а также осознанно и системно формировать у них понятие «Уравнение с параметром».

§ 9. Педагогический эксперимент и его результаты

Нами был проведен констатирующий эксперимент на базе МБУ «Школа №88» г.о. Тольятти в 2019-2020 учебном году. В эксперименте участвовало 29 учеников 8-х классов, обучающихся по учебнику А.Г. Мордковича [42].

Цель констатирующего эксперимента – определение у учащихся уровня сформированности понятия *уравнения с параметром*, умения решать задачи по теме «Уравнения с параметром» за курс алгебры 7-8 классов.

В курсе алгебры 7-9 классов у учащихся происходит первое знакомство с понятием уравнение с параметром. В основной школе учащиеся знакомятся с линейными, квадратными, рациональными, иррациональными уравнениями, а также уравнениями с модулем, а в 10-11 классе материал по теме «Уравнения с параметром» систематизируется, обобщается, усложняется.

Добавляются уравнения высших степеней, а также тригонометрические, логарифмические, показательные.

Чтобы продолжение изучения темы «Уравнения с параметром» в 10-11 классе прошло успешно, учащимся по окончании 9 класса необходимо уже обладать базой соответствующих знаний и умений. Нами были проанализированы *программа учебника А.Г. Мордковича* [42], а именно, что должны знать учащиеся после окончания 9 класса и задания, встречающиеся на *ОГЭ* по заданной теме.

В итоге была составлена *контрольная работа*, которая была предложена учащимся, где представлены следующие типы задач на: решение линейного уравнения с параметром относительно переменной; определение количества корней квадратного уравнения; решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной; использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений.

Ниже представлены варианты контрольной работы, где продемонстрировано решение задач. Задание 1-3 являются обязательными для выполнения, задание 4 – повышенной сложности, учащиеся выполняют его по желанию.

Контрольная работа

Вариант 1

Задание 1. Решите уравнение $ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18$ относительно переменной *x*.

Решение. $ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18$;

$x(a-2) = a^2(a-2) - 9(a-2)$; $(a-2) \cdot x = (a-2)(a^2-9)$;

Если $a = 2$, то $0 \cdot x = 0 \cdot (4-9)$; $0 \cdot x = 0$; $x -$ любое число.

Если $a \neq 2$, то $x = \frac{(a-2)(a^2-9)}{a-2}$; $x = a^2 - 9$.

Ответ: если $a = 2$, то $x -$ любое число; если $a \neq 2$, то $x = a^2 - 9$.

Задание 2. При каком значении р уравнение $x^2 - 2x + 1 = p$ имеет два равных корня, два различных корня, не имеет действительных корней?

Решение. $x^2 - 2x + 1 = p$; $x^2 - 2x + (1-p) = 0$.

$D = 4 - 4(1 - p) = 4 - 4 + 4p = 4p.$

Имеет два равных корня при $D = 0 \quad \Rightarrow \quad 4p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0.$

Имеет два различных корня при $D > 0 \quad \Rightarrow \quad 4p > 0 \quad \Rightarrow \quad p > 0.$

Не имеет корней при $D < 0 \quad \Rightarrow \quad 4p < 0 \quad \Rightarrow \quad p < 0.$

Ответ: имеет два равных корня при $p = 0$; имеет два различных корня при $p > 0$; не имеет корней при $p < 0$.

Задание 3. Решите уравнение $x^2 + 5ax + 4a^2 = 0$ относительно x.

Решение. $x^2 + 5ax + 4a^2 = 0$; $\quad D = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$.

Если $a = 0$, то $D = 0$, $\; x = 0$. Если $a \neq 0$, то $D = 9a^2$, тогда:

$x_{1,2} = \frac{-5a \pm \sqrt{9a^2}}{2} = \frac{-5a \pm 3|a|}{2}$; $\quad |a| = \begin{cases} a, \text{если } a > 0, \; x_1 = -a; \\ -a, \text{если } a < 0, \; x_2 = -4a. \end{cases}$

Ответ: если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, $x_1 = -a$; если $a < 0$, $x_2 = -4a$.

Задание 4*. Найдите значение параметра m в уравнении $x^2 - (3m^2 + 16m - 8)x + (m + 9) = 0$, если сумма корней уравнения равна 4.

Решение. По условию: $x_1 + x_2 = 4$.

Согласно теореме Виета: $x_1 + x_2 = 3m^2 + 16m - 8$;

$3m^2 + 16m - 8 = 4$; $\quad 3m^2 + 16m - 12 = 0$;

$D = 256 + 144 = 400$; $\quad m_1 = \frac{-16+20}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\quad m_2 = \frac{-16-20}{6} = -\frac{36}{6} = -6$.

Если $m = \frac{2}{3}$, то $x^2 - 4x + \frac{29}{3} = 0$;

$3x^2 - 12x + 29 = 0$; $\quad D = 144 - 348 = -204 < 0$ нет корней;

Если $m = -6$, то $x^2 - 4x + 3 = 0$;

$D = 16 - 12 = 0$; $x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$; $\quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$. Ответ: $m = -6$.

Вариант 2

Задание 1. Решите уравнение $py - 3y - 4p + 12 = 0$ относительно переменной x.

Решение. $py - 3y - 4p + 12 = 0$; $\; py - 3y = 4p - 12$;

$y \cdot (p - 3) = 4(p - 3)$; $\quad (p - 3) \cdot y = 4(p - 3)$;

Если $p = 3,$ то $0 \cdot y = 4 \cdot 0;$ $\quad 0 \cdot y = 0;$ $\quad y -$ любое число.

Если $p \neq 3,$ то $x = \frac{4(p-3)}{p-3};$ $\quad y = 4.$

Ответ: если $p = 3,$ то $y -$ любое число; если $p \neq 3$, то $x = 4$.

Задание 2. При каких значениях p уравнение $x^2 - 4x + 4 = p$ имеет два равных корня, два различных корня, не имеет действительных корней?

Решение. $x^2 - 4x + 4 = p;$ $\qquad x^2 - 4x + (4 - p) = 0.$

$D = 16 - 4(4 - p) = 16 - 16 + 4p = 4p.$

Имеет два равных корня при $D = 0 \quad \Rightarrow \quad 4p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0.$

Имеет два различных корня при $D > 0 \quad \Rightarrow \quad 4p > 0 \quad \Rightarrow \quad p > 0.$

Не имеет корней при $D < 0 \quad \Rightarrow \quad 4p < 0 \quad \Rightarrow \quad p < 0.$

Ответ: имеет два равных корня при $p = 0$; имеет два различных корня при $p > 0$; не имеет корней при $p < 0$.

Задание 3. Решите уравнение $3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0$ относительно x.

Решение. $3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0;$ $\quad D = 100a^2 - 36a^2 = 64a^2.$

Если $a = 0,$ то $D = 0,$ $\quad x = 0.$ Если $a \neq 0,$ то $D = 64a^2,$ тогда:

$$x_{1,2} = \frac{10a \pm \sqrt{64a^2}}{6} = \frac{10a \pm 8|a|}{6}; \ |a| = \begin{cases} a, \text{если } a > 0, \ x_1 = 3a; \\ -a, \text{если } a < 0, \ x_2 = \frac{a}{3}. \end{cases}$$

Ответ: если $a = 0,$ то $x = 0;$ если $a > 0,$ $x_1 = 3a;$ если $a < 0,$ $x_2 = \frac{a}{3}.$

Задание 4*. Найдите значение параметра m в уравнении $x^2 - (m - 1)x + (4m^2 - 45m - 8) = 0,$ если произведение корней уравнения равно 28.

Решение. По условию: $x_1 x_2 = 28.$

Согласно теореме Виета: $x_1 x_2 = 4m^2 - 45m - 8;$

$4m^2 - 45m - 8 = 28;$ $4m^2 - 45m - 36 = 0;$ $\quad D = 2025 + 576 = 2601;$

$m_1 = \frac{45+51}{8} = \frac{96}{8} = 12;$ $\qquad m_2 = \frac{45-51}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$

Если $m = 12,$ то $x^2 - 11x + 28 = 0;$ $\quad D = 121 - 112 = 9;$

$x_1 = \frac{11+3}{2} = 7;$ $\qquad x_2 = \frac{11-3}{2} = 4.$

Если $m = -\frac{3}{4},$ то $x^2 + \frac{7}{4}x + 28 = 0;$ $\quad 4x^2 + 7x + 112 = 0;$

$D = 49 - 16 \cdot 112 = -1743 < 0$ нет корней. Ответ: $m = 12$.

В Таблице 4 представлены результаты контрольной работы. Анализ таблицы показывает, что больше всего затруднений у учащихся вызывают задания на решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной. Кроме того, большие трудности у учащихся возникают при решении задач на использование теоремы Виета при решении квадратных уравнений. С этим задание справилось только 3,5% учащихся, а 79,3% совсем не приступили к выполнению данного задания.

Таблица 4 - Результаты контрольной работы.

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к заданию
1.	62,1% (18)	37,9% (11)	0% (0)
2.	34,5% (10)	58,6% (17)	6,9% (2)
3.	27,6% (8)	58,6% (17)	13,8% (4)
4.	3,5% (1)	17,2% (5)	79,3% (23)

При анализе работ было отмечено, что задание на решение линейного уравнения с параметром относительно переменной умеют решать достаточно большое количество учащихся.

В Таблице 5 представлены выявленные виды ошибок учащихся.

Таблица 5 - Выявленные виды ошибок учащихся.

Задание 1 -11		
Виды ошибок		
Нет подробного решения	Вычислительная ошибка	Неверная запись ответа
6	3	2
Задание 2 -17		
Виды ошибок		
Вычислительная ошибка	Неверно выбран метод решения	Неверная запись ответа
7	5	5
Задание 3 -17		
Виды ошибок		
Вычислительная ошибка	Неверно выбран метод решения	Не учтен модуль при нахождении корней уравнения
5	6	6
Задание 4 -5		
Виды ошибок		

Вычислительная ошибка	Посторонние корни в ответе (неверная запись ответа)	Неверно выбран метод решения
1	1	3

Таблица 6 - Количественный анализ контрольной работы.

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	17,2% (5)
«4»	37,9% (11)
«3»	34,5% (10)
«2»	10,4% (3)

Можно сделать вывод, что подавляющее большинство учащихся испытывают затруднения при решении заданий на тему «Уравнения с параметром». Большие затруднения возникают при использовании теоремы Виета в решении уравнений с параметром. Помимо всего высказанного учащиеся допускают достаточно большое количество арифметических ошибок, и получают неверный ответ, хотя алгоритм решения верный.

В рамках поискового этапа эксперимента во второй половине 2019-2020 учебного года на базе МБУ «Школа №88» г.о. Тольятти в старших классах была осуществлена апробация системы задач на формирование понятия уравнение с параметром в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Выводы по второй главе

1. Представлены методические рекомендации по обучению решению уравнений с параметрами.

Так, учащиеся должны понимать:

- что значит *«уравнение с параметром»* и что значит решить уравнение с параметром;

- при решении какого-либо уравнения с параметром могут применяться *различные методы решения;*

- знакомить учащихся с заданиями с параметрами *следует с 7 класса;*

- *полезно* использовать технологию поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича;

- каждый пройденный тип уравнений завершать задачами с использованием параметра;

- необходимо использовать *различные формы, методы и средства обучения.*

В рамках элективных курсов: приводить теоретические блоки, необходимые для решения уравнений с параметром; рассматривать задания различных уровней сложности; проводить итоговое занятие проводить в форме научно-исследовательской конференции.

2. Выделены основные типы задач в едином государственном экзамене в курсе математики общеобразовательной школы по теме «Уравнения с параметрами».

Выявлено, что *во второй части* встречаются системы уравнений с параметром; уравнения с параметром, содержащие модуль; уравнения с параметром выше второй степени; иррациональные уравнения с параметром; рациональные уравнения с параметром.

Кроме того, в ЕГЭ по математике профильного уровня представлены не все типы задач по теме *«Уравнения с параметрами»*, которые были выделены нами ранее.

3. Разработаны системы задач по теме «Уравнения с параметром» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, составленные с учетом требований Л.В. Виноградовой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы и полученные результаты данного исследования:

1. Определено понятие уравнения с параметром; выделены виды алгебраических уравнений с параметром. В методической литературе отсутствует единый подход к определению понятия уравнения с параметром.

2. Выявлены основные цели обучения теме «Уравнения с параметрами» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы: формирование у учащихся умения проводить разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность при описании решения уравнения с параметром; знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с решением уравнений с параметрами, в математике и других науках; навыков использования уравнений с параметрами в повседневной жизни; графической культуры.

3. Рассмотрено содержание теоретического материала по данной теме в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы.

4. Проанализирован задачный материал по теме исследования в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы. Определены основные *виды* уравнений с параметрами и их *типы*.

5. Представлены методические рекомендации по обучению решению уравнений с параметрами, рассмотрен порядок обучения теме.

6. Выделены основные типы задач в едином государственном экзамене по математике профильного уровня по теме «Уравнения с параметрами».

7. Разработаны системы задач по теме «Уравнения с параметром» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, удовлетворяющие требованиям Л.В. Виноградовой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авилов Н.И., Дерезин С.В., Домашенко А.М. и др. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2020. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2020 года/ учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова.. – Ростов-на-Дону, 2019. – 416 с. – (ЕГЭ).

2. Айвазян Д.Ф. Математика. 10 – 11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами: элективный курс / авт.-сост. Д.Ф. Айвазян. – Волгоград: Учитель, 2009.

3. Ананьина Т.А. Организация проектной деятельности школьников при работе с параметрами в классах с углубленным изучением математики [Электронный ресурс]/ Т.А. Ананьина // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2015. - №1. – С. 52-57. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28776167. – Последнее обновление 07.05.2020.

4. Арюткина С.В. О формировании обобщенных приемов математической деятельности учащихся средней школы (на примере решения квадратных уравнений с параметром) // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. - 2009. - № 11. - С. 264-273.

5. Арюткина С.В. Формирование обобщенных приемов решения уравнений и неравенств с параметрами у учащихся 8-9 классов: автореф. дисс. ...

канд. пед. наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. - Саранск, 2002. - 18 с.

6. Башмаков М.И. Давайте учить математике/ М.И. Башмаков// Математика: Приложение к газете «Первое сентября». – 2010. - №6. - С. 2-5, 48.

7. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. - 2-е изд., перераб. - Москва: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. - 95 с. (Библиотечка физико-математической школы. Математика. Вып. 5)

8. Белямова Э.С. Методические особенности изучения темы «Задачи с параметрами». Основные понятия. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/588088/– Последнее обновление 27.03.2020 г.

9. Васильева Г.Н. Методика изучения математики в основной школе. Курс лекций для организации самостоятельной работы студентов по вопросам частных методик/ Г.Н. Васильева, И.С. Цай, Л.Г. Ярославцева. - Пермь, ПГПУ. - 2011 г. – С. 94. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://pspu.ru/upload/pages/7830/Uchebnoje_posobije_CHM_%28pravka_27.10.11%29__dla_RIO.pdf. – Последнее обновление 15.01.2020.

10. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл. : учеб. для углубл. изуч. математики в общебразоват. учреждениях / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – 13-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2006. – 335. : ил.

11. Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – 18-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 312. : ил.

12. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252 с.

13. Власова А.П. Задачи с параметрами на ЕГЭ [Электронный ресурс]/ А.П. Власова, Н.В. Евсеева //Научный альманах. – 2016. - № 6-1 (19) – С.

223-228. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=26476361. – Последнее обновление 02.02.2020 г.

14. Волович М.Б. Математика без перегрузок. - М.: Педагогика, 1991. - 144 с. - (Б-ка учителя и воспитателя).

15. Горбачев В.И. Технология развивающего обучения в курсе алгебры средней школы: автореф. дисс. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Брянский гос. пед. ун-т им. акад. И.Г. Петровского. - Москва, 2000. - 37 с.

16. Гунашева М.Г. Обучение учащихся решению уравнений и неравенств с параметрами при подготовке к ЕГЭ [Электронный ресурс]/М.Г. Гунашева//Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. – 2011. – № 1. – С. 86-91. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=16355116. Последнее обновление 03.05.2020 г.

17. Дорофеев Г.В. Решение задач, содержащих параметры: Ч. 2 / Г.В. Дорофеев, В.В. Затакавай. - М.: Перспектива, 1990. - 38 с.

18. Дьякова Е.А. Элективный курс «Решение уравнений и неравенств с параметрами» для 10 класса [Текст] / Е.А. Дьякова // Постулат. – 2019. - №9(47).

19. Евсеева А.И. Уравнения с параметрами/ А.И. Евсеева// Математика в школе. — 2003. № 7. С. 10—17.

20. Ермакова Т.П. Алгебраические уравнения высших степеней с параметрами [Электронный ресурс]/ Ермакова Т.П. // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» – Режим доступа: https://urok.1sept.ru/статьи/524445/. – Последнее обновление 24.05.2020.

21. Ефимова С.О. Алгебраические уравнения с параметрами// «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно- практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ/отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. - С. 222-223.

22. Ефимова С.О. Методика обучения решению алгебраических уравнений с параметром в курсе алгебры основной школы// IX Международная научная конференция «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, ТГУ, 24-26 апреля 2019 г.)/ Под. общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: изд-во ТГУ, 2019. – С. 352-356.

23. Ефимова С.О. Методические особенности обучению решению алгебраических уравнений с параметром в 7 классе общеобразовательной школы// «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2019 года): сборник студенческих работ/отв. за вып. С.Х. Петерайтис.

24. Зайкин М.И. Цепочки, циклы и системы математических задач: монография / М.И. Зайкин, С.В. Арюткина, Р.М. Зайкин; Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, Еац. исслед. ун-т, Арзамасский фил. - Арзамас: АГПИ, 2013. - 135 с.

25. Звавич Л.И. Алгебра (углубленное изучение). 9 класс : задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский, П.В. Семенов. – 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 336 с.: ил.

26. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 366 с.: ил.

27. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 264 с.: ил.

28. Колягин Ю.М. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]. – М.: Просвещение, 2012. – 319 с.: ил.

29. Колягин Ю.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]. – М.: Просвещение, 2013. – 336 с.: ил.

30. Колягин Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.: ил.

31. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/ (дата обращения 10.05.2020).

32. Макарова С.О. Методика обучения решению алгебраических уравнений с параметром в углубленном курсе математики общеобразовательной школы // «Студенческие Дни науки в ТГУ»: научно-практическая конференция (Тольятти, апрель-май 2020 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. – 1 оптический диск.

33. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень/ [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др.]. – М.: Провещение, 2018. – 304 с.: ил.

34. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др.]. – М.: Просвещение, 2018. – 351 с.: ил.

35. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 7-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 447 с.: ил.

36. Макарычев Ю.Н. Алгебра: Доп. главы к шк. и классов с углубл. изуч. математики/Под ред. Г.В. Дорофеева. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1998. – 207 с.: ил.

37. Масалытина Н.Н. Решение задач с параметрами в курсе алгебры. 7-9 классы [Электронный ресурс]/ Масалытина Н.Н. // Фестиваль педагоги-

ческих идей «Открытый урок» – Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/595913/. – Последнее обновление 11.05.2020.

38. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В.В. Мирошин. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 286, [2] с.

39. Мирошин В.В. Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. - Москва, 2008. - 19 с.

40. Мордкович А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 191 с.: ил.

41. Мордкович А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М.: Мнемозина, 2009. – 207 с.: ил.

42. Мордкович А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. – 10-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 256 с.: ил.

43. Мордкович А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 344 с.: ил.

44. Мордкович А.Г. Алгебра (углубленное изучение). 9 кл.: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. - 3-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2008. – 255 с.: ил.

45. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.: ил.

46. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учрежде-

ний (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.: ил.

47. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.: ил.

48. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики: учеб.-метод. пособие / А.Г. Мордкович. - 2-е изд., доп. и перераб. - М.: Оникс 21 век: Мир и Образование, 2005. - С. 219-244.

49. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.: ил.

50. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – 8-е изд. - М.: Просвещение, 2009. – 430 с.: ил

51. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – 8-е изд. - М.: Просвещение, 2009. – 464 с.: ил

52. Никольский С.М. Алгебра. 7 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.: ил – (МГУ – школе).

53. Никольский С.М. Алгебра. 8 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.: ил – (МГУ – школе).

54. Никольский С.М. Алгебра. 9 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.: ил – (МГУ – школе).

55. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/. – Последнее обновление 11.06.2020.

56. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ОГЭ». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://math-oge.sdamgia.ru/. – Последнее обновление 10.06.2020.

57. Примерная основная общеобразовательная программа среднего общего образования (Одобрено решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию. Протокол от 28 июня 2016 г. №2/16-з)

58. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика (Одобрено Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15)

59. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004. –258 с.

60. Русинова А.В. Решение дробно-рациональных уравнений с параметром [Электронный ресурс]/ А.В. Русинова // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. – 2016. - №4. – С. 165-167. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29431588. – Последнее обновление 07.04.2020.

61. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. - М.: Просвещение, 2005. - 256 с.

62. Севрюков П.Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 212 с.

63. Старков В.Н. 165 задач с параметрами (в помощь абитуриенту) // Методические указания. СПб. Изд. СПБГУ, 2004. – 25 с.

64. Стефанова Н.Л., Подходнова Н.С., Орлов В.В. и др. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. – М.: Дрофа, 2007. – 320 с.

65. Фалилеева М.В. Методические аспекты обучения решению уравнения и неравенств с параметрами [Электронный ресурс]/ М.В. Фалилеева // Фундаментальные исследования. – 2013. - №4-5. – С. 1230-1235. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=18894972. – Последнее обновление 07.03.2020.

66. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/. – Последнее обновление 07.06.2020.

67. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 06.10.2009 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/. – Последнее обновление 25.05.2020

68. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/. – Последнее обновление 12.05.2020.

69. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: учеб. пособие / Л. М. Фридман. - Изд. 3-е. - М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. - 248 с. (Психология, педагогика, технология обучения)

70. Шестаков С.А. ЕГЭ 2016. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень)/ Под ред. И.В. Ященко. Электронное издание. - М.:МЦНМО, 2016. – 240 с.

71. Юрченко Е.В. Уравнения с параметром и нестандартные задачи. 7-9 класс. Живая методика математики – 2. – М.: МЦНМО, 2017. –84 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://маткнига.рф/wp-content/uploads/2017/05/978-5-4439-3134-0-YUrchenko-Uravneniya-s-parametrom-i-nestandartnye-zadachi.pdf . – Последнее обновление 25.04.2020.

72. Ященко И.В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под. ред. И.В. Ященко. - М.: Издательство «Национальное образование», 2020. -256 с. (ЕГЭ. ФИПИ - школе).

73. Abdolhossini A. The effects of cognitive and meta-cognitive methods of teaching in mathematics/ A. Abdolhossinu// 4th World Conference on educational sciences, added 02.05.2012. – vol. 46. – 5894-5899 p. – Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812022719. – Последнее обновление 01.06.2020.

74. Andreescu T., Gelca R. Mathematical Olympiad Challenges. Birkhauser, 2000. – 280 p.

75. Lisa L. Clement . What do students really know about functions [Электронныйресурс]. 2001. PP. 745 – 748. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.535.8420&rep=rep1&type=pdf (дата обращения: 15.04.2020).

76. Musgrave S. Understanding and advancing graduate teaching assistants mathematical knowledge for teaching/ S. Musgrave, S. Marilyn P. Carlson// The Journal of Mathematical Behavior, added march 2017 – vol. 45. – 137-149 p. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312316302012. – Последнее обновление 17.01.2020.

77. Negut A. Problens for the Mathematical Olympiads. GIL Publishing House, 2005. – 158 p.

Приложение А

Типы задач по теме «Уравнения с параметрами»

Таблица А.1 - Типы задач, 7 класс

Авторы / Типы задач	Макарычев Ю.Н. [33]	Мордкович А.Г. [41]	Никольский С.М. [52]	Колягин Ю.М. [28]
Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной).	№ 514, 541, 568, 1191–1193, 1195	№ 8.17–8.19, 37.10–37.12	№ 641, 678, 979–983	№ 80, 99
Нахождение значения параметра при известном корне линейного уравнения с параметром.	№ 523, 540, 1070–1071, 1323, 1331	№ 4.19, 8.21–8.24, 8.34, 29.20–29.21, 37.14	№ 681	№ 783
Нахождение значения параметра, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней.	№ 525-526, 621–623, 628–633	№ 4.20–4.21	–	№ 123, 125
Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней.	№ 1341–1342	№ 10.26	№ 727–731	№ 676
Нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений.	№ 1337	№ 37.23–37.24, 39.17–39.18	№ 693	№ 622, 623
Нахождение значения параметра при определении равносильности ли-	№ 513, 528, 547	–	№ 715	–

нейных уравнений с параметром и их систем.				
Нахождение значения параметра при условии принадлежности корней линейного уравнения с параметром какому-либо числовому множеству.	№ 548, 554	–	–	–

Продолжение Приложения А

Таблица А.2 - Типы задач, 8 класс

Авторы / Типы задач	Макарычев Ю.Н. [34]	Мордкович А.Г. [43]	Никольский С.М. [53]	Колягин Ю.М. [29]
Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной).	–	№ 39.3, 39.5, 39.34	№ 802, 803	–
Нахождение значения параметра при известном корне линейного уравнения с параметром.	–	№39.1–39.2, 39.12–39.20	–	–
Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней.	–	–	№ 846	–
Нахождение значений параметров при известных значениях переменных в системе линейных уравнений.	№ 682, 1367	№ 39.10, 39.11	–	–
Нахождение значения параметра при определении равносильности линейных уравнений с параметром и их систем.	№ 658, 726	№ 39.25	–	–
Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной.	№ 650, 651, 678, 738, 797, 830	№ 25.44, 22.45, 25.46	№ 235, 249, 251, 847	–
Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение с параметром один корень, два корня, не имеет корней.	№ 672, 673, 680,	№ 25.22–25.26, 39.8	№ 223, 236, 248, 250, 306	№ 442, 443, 448, 449, 791
Решение квадратного уравнения с параметром на применение теоремы Виета.	№ 731–734, 739, 768	№ 26.20, 26.21–26.25, 26.40-26.46	№ 272, 813, 816	№ 464, 465, 569, 510, 819
Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение с параметром является не-	–	№ 24.33, 24.34	–	–

полным квадратным уравнением.				
Решение рациональных уравнений с параметром.	–	–	№ 315	–
Нахождение значения параметра квадратного уравнения при известном значении переменных.	№ 727–730, 742	№ 24.35, 24.36, 26.32	№ 223, 273, 845	№ 566, 568, 738, 792

Продолжение Приложения А

Таблица А.3 - Типы задач, 9 класс

Авторы / Типы задач	Макарычев Ю.Н. [35]	Мордкович А.Г. [25]	Никольский С.М. [54]	Колягин Ю.М. [30]
Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной).	№ 331, 343	–	–	–
Решение квадратного уравнения с параметром относительно переменной.	№ 341, 350, 405, 406	–	№ 971	№ 595, 596
Нахождение значения параметра, при котором система линейных уравнений не имеет корней, имеет один корень или имеет бесконечно много корней.	–	№ 11.04–11.10, 11.16, 11.24–11.25, 11.35–11.38	–	–
Решение квадратного уравнения с параметром на применение теоремы Виета.	№ 345	–	№ 966, 967, 969	№750
Решение рациональных уравнений с параметром.	№ 332, 342, 358–368, 414, 415	–	–	–
Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение (или система квадратных уравнений) с параметром один корень, два корня, не имеет корней.	№ 182, 336, 337, 338	–	№ 955, 956, 958, 959, 960, 964, 1041	–
Нахождение значения параметра квадратного уравнения (или системы квадратных уравнений) при известном значении переменных.	–	–	№ 969, 970	–
Решение иррациональных уравнений (и их систем) с параметром.	–	№ 13.27, 13.28, 13.29, 15.26–15.27	–	–
Решение уравнений с парамет-	№ 407, 408,	№ 8.44–8.46,	–	

рами, содержащих модуль.	416	15.29–15.30		–

Продолжение Приложения А

Таблица А.4 - Типы задач, 10 класс

Авторы / Типы задач	Виленкин Н.Я. [10]	Мордкович А.Г. [46]	Никольский С.М. [50]	Колягин Ю.М. [26]
Нахождение значения параметра при условии принадлежности корней уравнения с параметром какому-либо числовому множеству.	–	П.27, П.28	–	–
Решение квадратного уравнения с параметром на применение теоремы Виета.	–	П.26, П.29	–	–

Продолжение Приложения А

Таблица А.5 - Типы задач, 11 класс

Авторы / Типы задач	Виленкин Н.Я. [11]	Мордкович А.Г. [47]	Никольский С.М. [51]	Колягин Ю.М. [27]
Решение линейного уравнения с параметром относительно переменной (неизвестной)	–	№ 34.3	№ 15.1	–
Нахождение значения параметра, при котором линейное уравнение не имеет корней, имеет один корень и имеет бесконечно много корней.	–	№ 34.1, 34.2	–	–
Нахождение значения параметра, при котором квадратное уравнение с параметром один корень, два корня, не имеет корней	–	№ 34.7, 34.9	–	–
Решение квадратного уравнения с параметром на применение теоремы Виета	–	№ 34.10	–	№ 609, 610, 611
Решение рациональных уравнений с параметром	–	№ 34.4, 34.12	№ 15.2, 15.3, 15.4, 15.6, 15.7	–
Решение уравнений с параметрами, содержащих модуль	№243, 244, 245, 246	№ 29.4, 29.6, 34.37–34.40	№ 15.5, 15.31, 15.32, 15.33,	–
Решение кубических уравнений с параметром	–	–	№ 15.9	№ 489, 490
Решение систем уравнений с параметром	№ 248, 249	№34.8	№ 15.24–15.27	–
Решение уравнений с параметром выше 3 степени	№ 233, 236, 237, 238	–	–	–
Решение иррациональных уравнений с параметром	–	–	№ 15.8, 15.35	–
Нахождение знаний параметра, при	№ 219,	–	–	–

котором корни уравнения с параметром заданы с некоторыми условиями	220, 221			

Приложение Б

Ответы и указания к решению систем задач по теме исследования

Система задач на тему «Линейное уравнение. Линейная функция»

Задача 1. Решение: а) $x - a = 0$; $x = a$; б) $x + a = 1$; $x = 1 - a$; в) $x + a = 2b$; $x = 2b - a$. **Ответ:** а) $x = a$; б) $1 - a$; в) $2b - a$.

Задача 2. Решение: $ax - 3 = b$; $ax = 3 + b$; $x = \frac{3+b}{a}$;

1) $4 + bx = a$; $bx = a - 4$; $x = \frac{a-4}{b}$;

2) $b = a(x - 3)$; $b = ax - 3a$; $ax - 3a = b$; $ax = 3a + b$; $x = \frac{3a+b}{a}$;

3) $4 = a - (bx - 1)$; $a - bx + 1 = 4$; $-bx = 4 - a - 1$; $-bx = 3 - a$;

$x = \frac{a-3}{b}$. **Ответ:** 1) $x = \frac{3+b}{a}$; 2) $x = \frac{a-4}{b}$; 3) $x = \frac{3a+b}{a}$; 4) $x = \frac{a-3}{b}$.

Задача 3. Решение.

а) Если $a \neq 2$, то $x = \frac{17}{a-2}$, если $a = 2$, то уравнение решений не имеет.

б) Если $a \neq 1$, то $x = 1$, если $a = 1$, то x – любое действительное число.

в) Если $m \neq 1$, то $x = 1$, если $m = 1$, то x – любое действительное число.

г) Если $a \neq 2$, то $x = \frac{1-4a}{a-2}$, если $a = 2$, уравнение решений не имеет.

Ответ: а) $a \neq 2$, $x = \frac{17}{a-2}$; б) $a \neq 1$, $x = 1$; в) $m \neq 1$, $x = 1$; г) $a \neq 2$, $x = \frac{1-4a}{a-2}$

Задача 4. Решение: *а)* $3a + 10 - 40 = 0$; $3a = 30$; $a = 10$;

б) $9a - 5 - 40 = 0$; $9a = 45$; $a = 5$;

в) $\frac{1}{3}a - 40 = 0$; $\frac{1}{3}a = 40$; $a = 120$;

г) $-2a + 12 - 40 = 0;\ -2a = 28;\ a = -14.$

Ответ: а) $a = 10;$ б) $a = 5;$ в) $a = 120;$ г) $a = -14.$

Задача 5. Решение. Если $P(-7;\ -12)$ принадлежит графику линейной функции $y = kx + 2,$ получаем: $-12 = -7k + 2,$ где $-7k = -14,$ где $k = 2.$

Ответ: $k = 2.$

Задача 6. Решение. Если $N(-7;\ 8)$ принадлежит графику линейной функции $y = -5x + m,$ то получаем: $8 = 35 + m,$ где $m = -27;$ если $P(1{,}2; -3)$ принадлежит графику линейной функции $y = -5x + m,$ то получаем: $-3 = -6 + m,$ где $m = 3.$ **Ответ:** $m = -27;\ m = 3.$

Задача 7. Решение. Линейное уравнение $ax = b,\ x = -\frac{b}{a}$ при $a \neq 0$ имеет один корень; при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней; при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней. **Ответ:** при $a \neq 0$ имеет один корень; при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней; при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней.

Задача 8. Решение: $ax = 2a - 1;\ \ x = \frac{2a-1}{a}.$

а) не имеет корней, если $a = 0;$ б) имеет единственный корень, если $a \neq 0;$ в) имеет бесконечно много решений: таких значений нет.

Ответ: а) $a = 0;$ б) $a \neq 0;$ в) таких значений нет.

Задача 9. Решение: $3x(a - 1) - 2a(x + 4) = 4(1 - 2a);$

$$3x(a - 1) - 2ax - 8a = 4(1 - 2a);\ 3x(a - 1) - 2ax = 8a + 4(1 - 2a);$$

$$x(3(a - 1) - 2a) = 8a + 4(1 - 2a);$$

$$x = \frac{8a + 4(1 - 2a)}{3(a - 1) - 2a};\ x = \frac{8a + 4 - 8a}{3a - 3 - 2a};\ x = \frac{4}{a - 3};$$

Если $a = 4,$ то $x = \frac{4}{a-3} = \frac{4}{4-3} = 4.$ Если $a = 5,$ то $x = \frac{4}{a-3} = \frac{4}{5-3} = 2.$ Если $a = 7,$ то $x = \frac{4}{a-3} = \frac{4}{7-3} = 1.$ Корень уравнения будет являться натуральным числом, при *a = 4; 5; 7.* **Ответ:** *4; 5; 7.*

Задача 10. Решение. а) Подставим $P(m;\ 1-m)$ в уравнение $x^2 - y^2 = = 14.$ Получим: $m^2 - (1-m)^2 = 14;$ $m^2 - (1 - 2m + m^2) = 14;$

$m^2 - 1 + 2m - m^2 - 14 = 0;$ *2m = 15; m = 7,5;*

б) Подставим *P(m; 1 – m)* в уравнение $x^2 + y^2 = 1.$ Получим:

$m^2 + (1-m)^2 = 1;$ $m^2 + 1 - 2m + m^2 - 1 = 0;$

$2m^2 - 2m = 0;$ $2m(m-1) = 0;$ $m = 0$ или $m = 1.$

Ответ: а) $m = 7{,}5;$ б) $m = 0$ или $m = 1.$

Продолжение Приложения Б

Система задач на тему «Квадратное уравнение. Квадратичная функция»

Задача 1. Решение: $36 + 6p + 24 = 0;$ $6p = 60;$ *p = 10.*

Ответ: при *p = 10.*

Задача 2. Решение: $x^2 - px + 9 = 0;$ $D = (-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36;$

Уравнение имеет единственный корень, если *D = 0,* значит:

$p^2 - 36 = 0;$ $p^2 = 36;$ $p = \pm 6.$ **Ответ:** $p = \pm 6.$

Задача 3. Решение. *Квадратное уравнение* является неполным, если коэффициенты b или *c* равны *0*. Значит: $a^2 - 4 = 0;$ $a^2 = 4;$ $a = \pm 2$

Если *a = 2,* то $(2-2)x^2 + 15x + 2^2 - 4 = 0;$

$15x = 0$ $-$ не является квадратным неполным уравнением;

Если *a = –2,* то $(-2-2)x^2 + 15x + (-2)^2 - 4 = 0;$

$4x^2 + 15x = 0$ $-$ является неполным квадратным уравнением.

Ответ: *a = –2.*

Задача 4. Решение: $x^2 - 3x + c = 0;$ $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 9 - 4c;$

Уравнение не имеет корней, если *D < 0:* $9 - 4c < 0;$ $4c > 9;$ $c > 2\frac{1}{4}.$

Так как при $c > 2\frac{1}{4}$ данное уравнение не имеет корней, то для того, чтобы существовали корни, мы можем взять любое значение c из промежутка $(-\infty;\ 2\frac{1}{4})$, например, *c=0, c=2.* **Ответ:** $c \in (-\infty;\ 2\frac{1}{4})$, например, $c = 0, c = 2$.

Задача 5. Решение. $2x^2 + 16x + a = 0,\ x_1 = 3;$

$$18 + 48 + a = 0; a = -66.$$

$$2x^2 + 16x - 66 = 0; \quad x^2 + 8x - 33 = 0; \quad D = 64 + 132 = 196;$$

$x_1 = \frac{-8+14}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{-8-14}{2} = -11.$ **Ответ:** $a = -66, x_2 = -11.$

Задача 6. Решение: $x^2 - 2\sqrt{2}x + q + 1 = 0$

$D = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (q + 1) = 8 - 4q - 4 = 4 - 4q;$

Уравнение имеет различные корни, при $D > 0$, значит: $4 - 4q > 0$; $4q < 4; \quad q < 1.$ **Ответ:** Уравнение имеет различные корни при $q < 1$.

Продолжение Приложения Б

Задача 7. Решение. Найдем сначала параметр p. Для этого подставим $x_1 = 7$ в данное уравнение: $7^2 + 7p - 35 = 0; \quad 7p = 35 - 49; \quad 7p = -14;$ $p = -2.$ Зная значение параметра p можем найти второй корень уравнения: $x^2 - 2x - 35 = 0; \quad D = 4 + 4 \cdot 35 = 4 + 140 = 144; \quad x_1 = \frac{2+12}{2} = 7;$

$x_2 = \frac{2-12}{2} = -5.$ **Ответ:** $p = -2;\ x_2 = -5.$

Задача 8. Решение: $ax^2 - (a + 1)x = 0; \quad x\big(ax - (a + 1)\big) = 0;$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad ax - (a + 1) = 0;$$

$$ax = a + 1;$$

$$x = \frac{a+1}{a}.$$

Уравнение $ax^2 - (a + 1)x = 0$ будет иметь единственный корень $x = 0$, при $a = 0$ $(a \neq -1)$. **Ответ:** $a = 0$.

Задача 9. Решение: $x^2 + 5ax = 14a^2;\ x^2 + 5ax - 14a^2 = 0;$

$D = (5a)^2 + 4 \cdot 14a^2 = 25a^2 + 56a^2 = 81a^2;$

Если $D \geq 0$, то уравнение имеет корни: $81a^2 \geq 0;\ a \in R;$

$x_{1,2} = \frac{-5a \pm 9a}{2a}$; $x_1 = -7a$; $x_2 = 2a$. При всех действительных значениях параметра a уравнение имеет корни $x = -7a, x = 2a$.

Ответ: $x = -7a, x = 2a, a \in R$.

Задача 10. Решение. Если $a = 2$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 2$, то данное уравнение является квадратным и решая его получаем, что дискриминант данного уравнения обращается в нуль при $a = 2$ или $a = 5$.

Ранее было установлено, что $a = 2$ не подходит, значит ответ $a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

Система задач на тему «Системы уравнений с параметрами»

Задача 1. Решение: Подставим пару чисел *(1; 0)* вместо значений *x* и *y*. Получим: $\begin{cases} 2 + 0 = a, \\ b - 0 = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ b = 2. \end{cases}$ **Ответ:** $a = 2$; $b = 2$.

Задача 2. Решение: $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - kx = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ -kx + y = 3. \end{cases}$ Данная система имеет единственное решение, если: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; $\frac{2}{-k} \neq \frac{1}{1}$; $-k \neq 2$; $k \neq -2$.

Делаем *вывод*: данная система имеет ед. решение, если $k \neq -2$. Можно взять такие значения, как $k = 1$, $k = 2$ и т.д.

Ответ: $k \neq -2$. Можно взять такие значения, как $k = 1$, $k = 2$ и т.д.

Задача 3. Решение: $\begin{cases} x + ay = 1; \\ ax + y = 2a; \end{cases}$ $\begin{cases} x + ay - 1 = 0; \\ ax + y - 2a = 0. \end{cases}$

Система имеет единственное решение при $\frac{1}{a} = \frac{a}{1} = \frac{1}{2a}$;

$\frac{1}{a} = \frac{a}{1}$; $a^2 - 1 = 0$ $(a \neq 0)$; $a = 1$, $a = -1$. **Ответ:** $a = 1$, $a = -1$.

Задача 4. Ответ: решений нет, если $m = -5$, бесконечное множество решений, если $m = 4$.

Задача 5. Ответ: при $m = 3$.

Задача 6. Ответ: $a < 6$.

Задача 7. Ответ: $m \in \left[\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{-6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Задача 8. Ответ: $10 < k < 12$.

Задача 9. Ответ: $b = 3$.

Задача 10. Решение: $\begin{cases} x = 1 - ay; \\ a - a^2y + y = a^3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - ay; \\ y(1 - a^2) = a^3 - a; \end{cases}$

1) Если $1 - a^2 \neq 0$, т.е. $a \neq \pm 1$, то данная система равносильна $\begin{cases} y = -a; \\ x = 1 + a^2. \end{cases}$ 2) Если $a = 1$, то система имеет вид $\begin{cases} 0 = 0; \\ x = 1 - y. \end{cases}$ 3) Если $a = -1$, то система равносильна уравнению $x = 1 + y$.

Ответ: $a \neq \pm 1: (1 + a^2;\ -a)$; $a = 1: (1 - y;\ y)$; $a = -1: (1 + y; y)$.

Продолжение Приложения Б

Система задач на тему «Дробно-рациональное уравнение»

Задача 1. Решение: Область допустимых значений: $x \neq -1$.

Если преобразовать уравнение в стандартный вид, то получим: уравнение вида: $x^2 - 6ax + 5a^2 - 4a - 1 = 0$. Затем находим корни полученного уравнения: $D = 36a^2 - 4 \cdot (5a^2 - 4a - 1) = 36a^2 - 20a^2 + 16a + 4 =$

$= 16a^2 + 16a + 4 = 4 \cdot (4a^2 + 4a + 1) = 4 \cdot (2a + 1)^2$;

$x = \frac{6a \pm 2\sqrt{(2a+1)^2}}{2} = 3a \pm \sqrt{(2a + 1)^2}$; $x_1 = 5a + 1$; $x_2 = a - 1$.

Полученные корни по условию не могут быть нулем, значит:

$5a + 1 \neq -1$; $a \neq -0{,}4: x = -1{,}4$;

$$a - 1 \neq -1;\ a \neq 0: x = 1.$$

Ответ: $a \neq -0{,}4, a \neq 0 : x = 5a + 1,\ x = a - 1$;

$a \neq -0{,}4: x = -1{,}4$; $a \neq 0: x = 1$.

Задача 2. Решение: $a \in R, x \neq 2: ax^2 - 2 = ax - 2a$; $a(a - 2)x = 2 - a$.

1)Если $a = 0,$ то $\frac{(-2)}{x-2} = 0 \rightarrow \emptyset.$ 2) Если $a = 2,$ то $0 \cdot x = 0, x \in R\ \{x \neq 2\}.$

3) Если $a \neq 0, a \neq 2,$ то $x = -\frac{2}{a}.$ **Ответ:** при $a = 0$ и $a = 2 -$ нет решения; при $a = 2,\ x -$ любое число, неравное 2; при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (-1; 0) \cup$

$\cup\ (0; 1) \cup (1;\ +\infty), x = -\frac{2}{a}.$

Задача 3. Решение: При решении учитываем допустимые значения:

$$(5a + x)(x - 5a) \neq 0, \text{т. е.}\ x \neq \pm 5a.$$

После некоторых преобразований получим: $x^2 + 5ax - x^2 - 10ax -$ $-25a^2 = -100a^2;\ -15ax = -75a^2;\ \ ax = 5a^2;\ x = \frac{5a^2}{a}.$ 1. При $a = 0$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0,$ решением которого будет любое число, ме x = 0. 2. При $a \neq 0$ имеем $x = 5a.$ Этот корень входит в ограничение x $\neq \pm$5a.

Ответ: при $a = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений – все действительные числа, кроме нуля; при $a \in (-\infty; 0) \cup (0;\ +\infty)$ решений нет.

Продолжение Приложения Б

Задача 4. Решение: уравнение равносильно системе $\begin{cases} x - a = 0, \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = a, \\ x \neq 1; x \neq 2 \end{cases}\cdot$

Ответ: если $a \neq 1$ и $a \neq 2,$ то $x = a$; если $a = 1$ или $a = 2,$ то решений нет.

Задача 5. Решение: уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Данная система имеет единственное решение, если: 1) уравнение системы имеет единственный корень, не равный 2; 2) уравнение системы имеет два корня, один из который равен 2.

Первый случай будет соответствовать $D = 0$: $D = a^2 - 4 = 0,$ то есть $a = \pm 2.$ Если $a = 2,$ то $x = -1$; если $a = -2,$ то $x = 1.$

Второй случай: подставим $x = 2$ в уравнение системы: $4 + 2a + 1 = 0$, откуда $a = -\frac{5}{2}$. Получаем: $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$, и второй корень $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $a = \pm 2, -\frac{5}{2}$.

Задача 6. Ответ: при $a \neq 1, a \neq 5, a \neq 9$.

Задача 7. Ответ: если $a = -3$, то $x = -6$; если $a = -2$, то $x = -5$; если $a = 0$, то корней нет; если $a = 1$, то $x = 2$; если $a = 2$, то $x = 3$; если $a \neq -3, a \neq -2, a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2$, то $x_1 = a + 1, x_2 = a - 3$.

Задача 8. Ответ: если $m \neq 0, m \neq 2 -$ единственный корень $x = \frac{2m}{m-2}$; если $m = 0, m = 2$, то корней нет.

Задача 9. Решение: При решении уравнения учитываем ОДЗ: $a \neq 0$.

После преобразований получим уравнение: $x^2 - (2a - 3)x - 6a = 0$;

Корнями данного уравнения являются $a = 3$ и $a = -2a$.

Ответ: $a = 0$: решений нет; $a \neq 0$: $x = 3, x = -2a$.

Продолжение Приложения Б

Задача 10. Решение: Данное уравнение сводиться к линейному при $ax \neq 0, x \neq 0$ и $x \neq 2a$: $(2 - a)(x - 2a) = ax(a + 1)$; $(a^2 + 2a - 2)x = 2a^2 - 4a$. При $a^2 + 2a - 2 \neq 0$ $\left(a \neq -1 \pm \sqrt{3}\right)$ получим $x = \frac{2a^2-4a}{a^2+2a-2}$.

Учитывая $x \neq 0$ и $x \neq 2a$ получим:

1) $\frac{2a^2-4a}{a^2+2a-2} = 0$; $2a^2 - 4a = 0$; $2a(a - 2) = 0$; $a = 0, a = 2$;

2) $\frac{2a^2-4a}{a^2+2a-2} = 2a$; $2a^2 - 4a = 2a(a^2 + 2a - 2)$; $a^2 - 2a = a(a^2 + 2a - 2)$;

$a^2 - 2a - a^3 - 2a^2 + 2a = 0$; $-a^3 - a^2 = 0$; $-a^2(a + 1) = 0$; $a = 0$, $a = -1$. **Ответ:** при $a \in \{-1; 0; 2; -1 \pm \sqrt{3}\}$: решений нет; в остальных случаях $x = \frac{2a^2-4a}{a^2+2a-2}$.

Система задач на тему «Уравнения с модулем»

Задача 1. Решение: На рисунке (Рис. 1) изобразим график функций:

$y = |3x + 6|$ –ломаная MAN;

$y = px + 2$ – пучок прямых, проходящих через точку (0; 2).

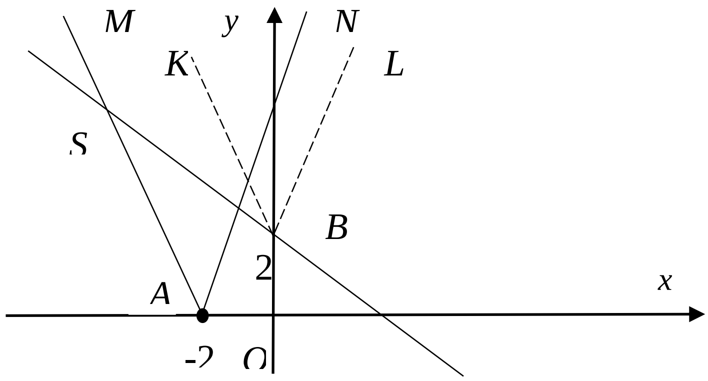


Рис. 1.

Выполним параллельный перенос MAN так, чтобы его вершина попала в точку (0; 2) – получим ломанную KBL. Заданное уравнение имеет один корень, если прямая $y = px + 2$:

1) параллельна стороне AM при $p = -3$;

2) проходит внутри ломанной KBL при $p < -3$ или при $p > 3$;

3) проходит через точку A – при $p = 1$.

Ответ: $p = 1;\ p \leq -3;\ p > 3$.

Продолжение Приложения Б

Задача 2. Решение: пусть $t = |x - a|$, тогда $t^2 - 12t + 35 = 0$;

$D = 144 - 140 = 4;\qquad x_1 = \frac{12+2}{2} = 7;\quad x_2 = \frac{12-2}{2} = 5.$ $\left[\begin{array}{l}|x-a| = 5;\\ |x-a| = 7.\end{array}\right.$

Находим четыре корня заданного уравнения: $a - 7; a - 5; a + 5; a + 7$. По условию два корня должны быть отрицательными и два – положительными. Значит: $\begin{cases} a + 5 > 0; \\ a - 5 < 0, \end{cases}$ то есть $-5 < a < 5$.

Ответ: $-5 < a < 5$.

Задача 3. Решение: решим уравнение для каждого значения параметра a. Интервалы изобразим на рисунке (Рис. 2).

Рис. 2.

$x - 1 = 0,\quad x = 1;\qquad x + 1 = 0,\quad x = -1.$

1. На промежутке $(-\infty;\ -1]$:

$-x + 1 + a(x + 1) = 2;\ \ x(a - 1) + a = 2 - 1;\qquad x(a - 1) = 1 - a.$

При $a = 1$: $0 \cdot x = 0$, то есть x —любое число из $(-\infty;\ -1]$.

При $a \neq 1$: $x = \frac{1-a}{a-1} = -1$, но $\frac{1-a}{a-1} \leq -1$.

$\frac{1-a}{a-1} \leq -1$; $\frac{1}{a-1} \leq 0$ следовательно $a \neq 1$.

2. На промежутке $[-1; 1]$: $-x + 1 - a(x+1) = 2$; $-(a+1)x = a + 1$.

При $a = -1$: $0 \cdot x = 0$, то есть x —любое число из $[-1; 1]$.

При $a \neq -1$: $x = -1$.

3. На промежутке $[1; +\infty]$: $x - 1 - a(x+1) = 2$; $(1-a)x = a + 3$.

При $a = 1$: нет решений.

При $a \neq 1$: $x = \frac{a+3}{1-a}$, но $\frac{a+3}{1-a} > 1$; $\frac{a+3-1+a}{1-a} > 0$; $\frac{2a+2}{1-a} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a+2 > 0; \\ 1-a > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2a+2 < 0; \\ 1-a < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > -1; \\ a > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} a < -1; \\ a < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \quad -1 < a < 1.$$

Ответ: $x = -1$ при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; $x \in (-\infty;\ -1]$ при $a = 1$; $x = -1, x = \frac{a+3}{1-a}$ при $-1 < a < 1$; $x \in [-1; 1]$ при $a = -1$.

Продолжение Приложения Б

Задача 4. Ответ: при $a = -1$ или $a = -\frac{11}{2}$ единственное решение; при $-\frac{11}{2} < a < -1$ два решения, при $a < -\frac{11}{2}$ или $a > -1$ нет решений.

Задача 5. Ответ: при $a \leq 0$ $x = 2 - \sqrt{-2a}, x = \sqrt{-2a+1}$, при $0 < a < 2$ решений нет, при $2 \leq a \leq 4$ $x = \pm\sqrt{2a-4}$, при $a \geq 4$ $x = -\sqrt{2a-4}, x = -2 + \sqrt{8+2a}$.

Задача 6. Ответ: $x = \pm\frac{a+\sqrt{a^2-18a+60}}{15-4a}$ при $a < \frac{15}{4}$; решений нет при $a \geq \frac{15}{4}$.

Задача 7. Ответ: $a \in (-1; 0)$.

Задача 8. Ответ: если $a = 1$ или $a = -2$, то $-2 \leq x \leq 1$; если $-2 \leq a \leq 1$, то $x = -2$ или $x = 1$.

Задача 9. Решение: уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2=ax+1;\\ \quad x+2\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-x-2=ax+1;\\ \quad x+2<0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(a-1)=1;\\ \quad x\geq -2;\end{cases}\\ \begin{cases}x(a+1)=-3;\\ \quad x<-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

1. $\begin{cases}x(a-1)=1;\\ \quad x\geq -2.\end{cases}$ При $a=1$ нет решения, при $a\neq 1$: $x=\frac{1}{a-1}$.

$$\begin{cases}x=\frac{1}{a-1};\\ x\geq -2;\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a-1}\geq -2; \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1}\geq 0; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a-1\geq 0;\\ a-1>0;\end{cases}\\ \begin{cases}2a-1\leq 0;\\ a-1<0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a>1;\\ a\leq \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

При $a\leq \frac{1}{2}$ и $a>1$ $x=\frac{1}{a-1}$.

2. $\begin{cases}x(a+1)=-3;\\ \quad x<-2.\end{cases}$ При $a=-1$ нет решения, при $a\neq -1$: $x=-\frac{3}{a+1}$.

$$\begin{cases}x=-\frac{3}{a+1};\\ x<-2;\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{a+1}<-2; \quad \frac{2a-1}{a+1}<0 \quad \Rightarrow -1<a\leq \frac{1}{2}.$$

Ответ: при $a\in(-\infty;\,-1]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(1;\,+\infty)$.

Продолжение Приложения Б

Задача 10. Решение. В системе координат $(x;\,y)$ построим графики функций $y=|x^2-2|x|-3|$ и $y=$ а (Рис. 3).

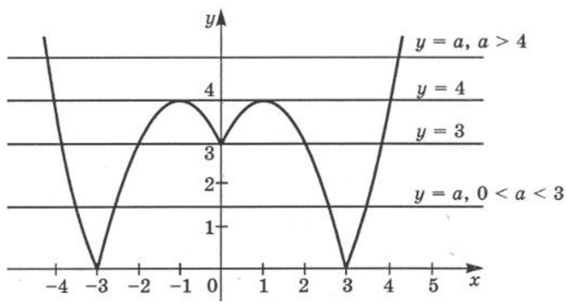


Рис. 3

График функции $y=|x^2-2|x|-3|$ изображен на рисунке. Графиком функции $y=$ а является прямая, параллельная Ox или с ней совпадающая (когда a = 0).

Из графика видно: если а $=0$, то прямая $y=$ а совпадает с осью Ox и имеет с графиком функции $y=|x^2-2|x|-3|$ две общие точки, а также прямая $y=$ а будет иметь с графиком функции $y=|x^2-2|x|-3|$ две общие точки при а >4. Значит, при а $=0$ и а >4 исходное уравнение имеет два корня.

Если $0 < \text{a} < 3$, то прямая $\text{y} = \text{a}$ имеет с графиком функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ четыре общие точки, а также прямая $\text{y} = \text{a}$ будет иметь с графиком построенной функции четыре общие точки при $\text{a} = 4$. Значит, при $0 < \text{a} < 3$, $\text{a} = 4$ исходное уравнение имеет четыре корня.

Если $\text{a} = 3$, то прямая $y = \text{a}$ пересекает график функции в пяти точках; следовательно, уравнение имеет пять корней.

Если $3 < \text{a} < 4$, прямая $y = a$ пересекает график построенной функции в шести точках; значит, при этих значениях параметра исходное уравнение имеет шесть корней.

Если $\text{a} < 0$, уравнение корней не имеет, так как прямая $y = \alpha$ не пересекает график функции $y = \left|x^2 - 2\left|x\right| - 3\right|$.

Ответ: если $\text{a} < 0$, то корней нет; если $\text{a} = 0$, $\text{a} > 4$, то два корня; если $0 < \text{a} < 3$, $\text{a} = 4$, то четыре корня; если $\text{a} = 3$, то пять корней; если $3 < \text{a} < 4$, то шесть корней.

Продолжение Приложения Б

Система задач на тему «Иррациональные уравнения»

Задача 1. Решение. После равносильных преобразований получим систему: $\begin{cases} x - 5 = (x + a)^2, \\ x \geq -a; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + (2a - 1)x + (a^2 + 5) = 0, \\ x \geq -a; \end{cases}$

Наша задача свелась к исследованию квадратного многочлена:

$$f(x) = x^2 + (2a - 1)x + (a^2 + 5).$$

Для этого найдем дискриминант, вершину параболы и $f(-a)$.

$$D = (2a - 1)a^2 - 4(a^2 + 5) = -4a - 19;$$

$$x_0 = -\frac{2a - 1}{2} = \frac{1 - 2a}{2}; \quad f(-a) = a + 5.$$

Из второго неравенства следует, что нас устраивают случаи: $x_1 < -a \leq x_2$ (нас будет устраивать только один корень x_2) и $-a \leq x_1 \leq x_2$ (под условие системы будут подходить оба корня), где x_1, x_2 - нули $f(x)$.

Обратим внимание, что коэффициент при x^2 положителен, т.е. ветки параболы направлены вверх.

Первый случай: $x_1 < -a \leq x_2$; $f(-a) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + 5 \leq 0 \quad \Leftrightarrow a \leq -5$;

Таким образом, при $a \leq -5$ мы имеем одно решение: $x = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-19}}{2}$.

Второй случай: $-a \leq x_1 \leq x_2$;

$$\begin{cases} f(-a) \geq 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 5 \geq 0, \\ -4a - 19 \geq 0, \\ \frac{1-2a}{2} > -a; \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geq -5, \\ a \leq -\frac{19}{4}, \\ 1 > 0. \end{cases}$$

Получаем, что при $a \in [-5;\ -4{,}75]$ уравнение имеет два решения:

$x_{1,2} = \frac{1-2a\pm\sqrt{-4a-19}}{2}$.

Ответ: при $a \leq -5$: $x = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-19}}{2}$; при $a \in [-5;\ -4{,}75]$: $x_{1,2} == \frac{1-2a\pm\sqrt{-4a-19}}{2}$; при $a > -4{,}75$ решений нет.

Продолжение Приложения Б

Задача 2. Решение: из данного уравнения составим функции: $y = \sqrt{x}$ и $y = x - a$.

Составим графическую модель ситуации (Рис. 6)

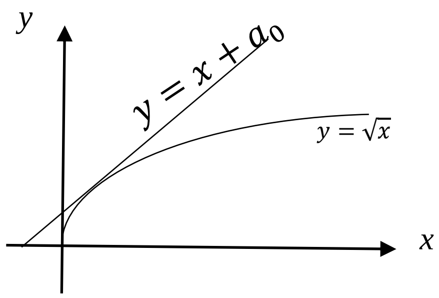


Рис. 4.

Прямая $y = x - a_0$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$. Уравнение не имеет корней, если $-a = a_0$ (прямая $y = x - a$ проходит выше касательной $y = x - a_0$). Уравнение имеет единственный корень, если $-a = a_0$, или если $-a > 0$.Уравнение имеет два корня, если $0 \le -a < a_0$.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$, которая параллельна прямой $y = x$ для нахождения a_0.

Имеем: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, абсцисса $x = \frac{1}{4}$. Уравнение касательной: $y = x + \frac{1}{4}$.

Ответ: не имеет корней, если $a < -\frac{1}{4}$; имеет один корень, если $a = -\frac{1}{4}$ или $a > 0$; имеет два корня, если $-\frac{1}{4} < a \le 0$.

Задача 3. Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} x \ge 1, \\ x^2 + x(a+2) + 2a + 9 = 0 \end{cases}$. Исходное уравнение не имеет корней в двух случаях: если квадратное уравнение не имеет корней ($D < 0$) , и если корни уравнения меньше 1. Рассмотрим $f(x) = x^2 + x(a+2) + 2a + 9$.

$$D = (a+2)^2 - 4(2a+9) = a^2 + 4a + 4 - 8a - 36 = a^2 - 4a - 32 =$$
$$= (a-8)(a+4).$$

1. $D < 0, a \in (-4; 8)$. 2. $\begin{cases} f(1) > 0; \\ x_{\text{в}} < 1; \\ D \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3a + 12 > 0; \\ -a - 2 < 2; \\ (a-8)(a+4) \ge 0; \end{cases}$ $a \in [8; +\infty)$.

Объединяя решения по параметру a, получаем $a \in (-4; +\infty)$.

Ответ: при $a \in (-4; +\infty)$ решений нет.

Продолжение Приложения Б

Задача 4. Ответ: $x = \frac{1}{4}\left(4a + 3 - \sqrt{8a+9}\right)$, при $a \ge 0$.

Задача 5. Ответ: $x = 0$ при $a \in (-\infty; -5)$; $x = 0$ или $x = a + 4$ при $a \in [-5; 0]$, $x = a + 4$ при $a \in (0; +\infty)$.

Задача 6. Ответ: $a \in \left(\frac{7}{5}; \frac{7}{3}\right) \cup \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

Задача 7. Ответ: если $a < 0$, то $x = -2a$; если $a = 0$, то $x \in R$; если $a > 0$, то решений нет.

Задача 8. Ответ: единственный корень $x = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$ при $a \geq 1$; не имеет корней при $a < 1$.

Задача 9. Ответ: при $a > 2$ $x = a$; при $-2 \leq a \leq -1$ $x = -a$.

Задача 10. Решение: исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ (a-2)x = 1 + 2a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x = \frac{1+2a}{a-2}, \\ a \neq 2. \end{cases}$$

Найдем a: $\frac{1+2a}{a-2} \geq -1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2;\ +\infty).$$

Ответ: $x = \frac{1+2a}{a-2}$ при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2;\ +\infty)$; нет решений при $a \in (\frac{1}{3}; 2]$.

Продолжение Приложения Б

Система задач на тему «Уравнения с параметром, выше второй степени»

Задание 1. Решение. $(x^2 + 2x + 2a)^2 = 5x^4 + 5(x+a)^2$;

$x^4 + 4x^2(x+a) + 4(x+a)^2 = 5x^4 + 5(x+a)^2$;

$(2x^2 - x - a)^2 = 0$; $2x^2 - x - a = 0$.

Пусть $f(x) = 2x^2 - x - a$. Последнее уравнение имеет единственный корень на отрезке $[0;\ 2]$ тогда и только тогда, когда выполнен один из трёх случаев: либо квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень и этот корень принадлежит интервалу $(0; 2)$, либо $f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[0;\ 2]$, равный *0* или *2*, либо квадратный трёхчлен $f(x)$ принимает при $x = 0$ и $x = 2$ ненулевые значения разных знаков. *Первый случай*: квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень при равенстве нулю дискриминанта, то есть при $D = 1 + 8a = 0$, а значит $a = -\frac{1}{8}$. При таком значении a уравнение $2x^2 - x - a = 0$ имеет единственный корень $x = \frac{1}{4}$, он принадлежит отрезку $[0;\ 2]$. *Второй случай.* Имеем $f(0) = -a$ и $f(2) = 6 - a$. Значит, $f(0) = 0$ при $a = 0$. При таком значении a уравнение $2x^2 - x - a = = 0$ имеет два решения $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ на отрезке $[0;\ 2]$.

Аналогично $f(2) = 0$ при $a = 6$. При таком нии a уравнение $2x^2 - x - a = 0$ имеет единственное решение $x = 2$ на отрезке $[0; 2]$.

Третий случай. Значения $f(0) = -a$ и $f(2) = 6 - a$ имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $-a(6 - a) < 0$, или, что то же самое, при $0 < a < 6$.

Следовательно, уравнение $(x^2 + 2x + 2a)^2 = 5x^4 + 5(x + a)^2$ имеет единственное решение на отрезке $[0;\ 2]$ тогда и только тогда, когда $a = -\frac{1}{8}$ или $0 < a < 6$.

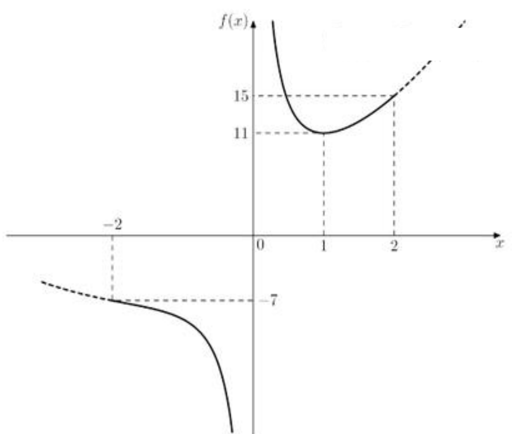
Ответ: $a = -\frac{1}{8}$ или $(0;\ 6)$.

Продолжение Приложения Б

Задание 2. Решение. Число $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a.

Поэтому уравнение равносильно уравнению $a = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$.

Рассмотрим функцию (Рис. 5):



$f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$ и исследуем ее на отрезке $-2 \leq x \leq 2$. Функция определена при всех $x \neq 0$. Найдем производную:

$f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2}$.

Производная обращается в нуль в точке $x = 1$. На промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1$ Рис. 5. озврастает. Следовательно, точка $x = 1 -$ единственная точка минимума, значение в этой точке равно 11.

Найдем значения функции в концах отрезка: $f(-2) = -7$, и $f(2) = 15$.

Если $a \leq -7$, то график фукции $y = f(x)$ и прямая $y = a$ имеют единственную общую точку при $-2 \leq \mathrm{x} \leq 0$.

Если $-7 < a < 11$ точек нет.

Если $a = 11$, то линии имеют единственную общую точку (1; 11).

Если $11 < a \leq 15$, то линии имеют две различные общие точки при $0 < x \leq 2$.

Если $a > 15$, то линии имеют одну общую точку при $0 < x \leq 2$ и одну при $x > 2$.

Ответ: $a \leq -7, a = 11, a > 15$.

Продолжение Приложения Б

Задача 3. Решение: Данное уравнение можно рассматривать как квадратное относительно параметра *a,* переписав его в виде:

$$a^2 - x(x+1)a - 2x^2 + 2x^3 = 0$$

Найдем дискриминант *D*.

$$D = x^2(x+1)^2 - 8(x^3 - x^2) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x-3)^2.$$

$a_1 = \frac{x^2+x+x^2-3x}{2} = x^2 - x; \qquad a_2 = 2x.$

Получим уравнение $(a - x^2 + x)(a - 2x) = 0$ равносильное исходному уравнению, которое также равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{2}; \\ x^2 - x - a = 0. \end{array}\right.$

Рассмотрим уравнение $x^2 - x - a = 0$. $D = 1 + 4a$;

$D = 0$ при $a = -\frac{1}{4}$ два равных корня $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

$D < 0$ при $a < -\frac{1}{4}$ корней нет.

$D > 0$ при а $> -\frac{1}{4}$ два различных корня $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

Рассмотрим уравнение $x = \frac{a}{2}$, при $a = -\frac{1}{4}, x = -\frac{1}{8}$.

Ответ: при а $> -\frac{1}{4}$: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}, x_3 = \frac{a}{2}$; при $a = -\frac{1}{4}$: $x_1 = -\frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; при $a < -\frac{1}{4}$: $x = \frac{a}{2}$.

Задача 4. Ответ: если $a < -9$, то нет решений; если $a = -9$, то одно решение; если $-9 < a < -6$, то два решения; если $a = -6$ или $a = -5$, то три решения; если $-6 < a < -5$ или $a > -5$, то четыре решения.

Задача 5. Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0]$.

Продолжение Приложения Б

Задача 6. Решение: Уравнение биквадратное, то есть его можно переписать в виде: $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b) = 0$

Корни $-a$; $-b$; b; $a -$ члены арифметической прогрессии. Тогда разность прогрессии – это разность (d) между последующим и предыдущим членами. Понятно, что удобно взять в качестве таких соседей числа $-b$; b – тогда разность прогрессии $b - (-b) = 2b = d$. Значит:

$a - b = 2b = d$; $\quad a = 3b$.

Таким образом, прогрессия: $-3b$; $-b$; b; $3b$

По теореме Виета: $a^2+b^2=3m+2$; $\quad a^2b^2=m^2$.

Следовательно: $ab=m$; $\quad 3b^2=m$.

Тогда $3m+2=a^2+b^2=3m+\frac{m}{3}$;

$\frac{m}{3}=2$; $\qquad m=6$.

Ответ: $m=6$.

Задача 7. Ответ: $a\in(2;4)\cup(4;10)\cup\{-2\}$.

Задача 8. Ответ: $-1<a<0$.

Задача 9. Решение. $(x^2+14ax+24a^2)(x^2+11ax+24a^2)=4a^2x^2$.

Если $a=0$, то $x=0$. Обратно, если $a\neq 0$, то $x\neq 0$.

Разделим обе части этого уравнения на a^2x^2:

$$\left(\frac{x}{a}+14+\frac{24a}{x}\right)\left(\frac{x}{a}+11+\frac{24a}{x}\right)=4$$

В полученном уравнении сделаем подстановку $y=\frac{x}{a}+\frac{24a}{x}$ и получим уравнение $(y+14)(y+11)=4$, $y^2+25y+150=0$; $\quad y_1=-15$, $y_2=-10$.

Таким образом, получим два уравнения:

$$\frac{x}{a}+\frac{24a}{x}=-15 \text{ и } \frac{x}{a}+\frac{24a}{x}=-10.$$

Решим второе уравнение $x^2+10ax+24a^2=0$,

$$D=4a^2, \qquad x_1=-6a, \qquad x_2=-4a$$

Ответ: если $a=0$, то $x=0$.