МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы»

Студент А.П. Лисненко
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент И.В. Антонова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Понятие неравенства связано со сравнением двух объектов и говорит о том, что эти объекты являются различными [73]. Материал, связанный с решением неравенств, составляет значительную часть школьного курса математики, где неравенствам с модулем уделяется недостаточно учебного времени, поэтому обучающиеся не успевают усвоить различные методы их решения.

А.Д. Нахман в статье «Технологические аспекты обучения решению неравенств» отмечает, что «содержательно-методическая линия неравенств в школьном курсе математики требует первоочередного внимания к теоретическо-математической основе их решения и алгоритмизации соответствующего процесса. Данная проблематика согласуется с требования ФГОС к предметным результатам освоения соответствующей дисциплины» [45, С. 211].

Выражения с модулем нередко встречаются в различных заданиях: при решении уравнений, неравенств, исследовании функций и т.д. В.А. Далингер в статье «Геометрическая интерпретация модуля в задачах» указывает, что «модуль - это целый мир геометрических образов, простых и понятных, часто очень красивых и запоминающихся. Под таким девизом и должен излагать учитель «Модульный материал» [10, С. 61].

В статье «Сравнение и классификация в упражнениях «с модулями» В.Ф. Чаплыгина отмечается, что «часть учащихся не знает даже точного определения понятия. На вопрос: «Что такое модуль числа?» - отвечают нечто невразумительное. Вроде того, что «модуль всегда положителен». Тот же, кто дает правильное определение, не в состоянии сознательно применить его, не понимает его геометрического смысла» [71, С. 48]. Поэтому у них появляются объективные трудности при решении заданий с модулем.

А.В. Боровских в статье «Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема неравенства» утверждает, что «причиной основных затруднений школьников является каскад из неявных смен представлений о математических объектах и действиях с ними, которые никак не отрабатываются в методике. … Школьники расценивают задачи с неравенствами как специально придуманный лабиринт, в котором никогда не знаешь, куда идти и оттуда выбраться простому человеку, не обладающему неким особым даром невозможно» [6, С. 78].

В статье В.А. Тестова «О проблемах при изучении неравенств» [66, С. 280] отмечается, что в последние годы совершенно неблагополучным стало положение с изучением неравенств в школьном курсе математики. Это связано с: отсутствием четкой и понятной терминологии; постоянно повторяющимся процессом сокращений и упрощений школьной программы, в результате которых основным свойствам неравенств не уделяется достаточно внимания; отсутствием у учеников мотивации изучать неравенства в силу его сложности и оторванности преподавания этой темы от практического опыта. Для решения данных проблем предлагается опираться на четко продуманную стратегию обучения учащихся.

Анализ ранее выполненных диссертационных работ по теме исследования показал, что в них представлены различные аспекты обучения решению неравенств с модулем в общеобразовательной школе:

– поэтапное формирование логических приемов мышления у школьников при изучении алгебраического материала, в ходе которого логические приемы мышления связываются с приемами учебной работы, используемыми при решении неравенств (В.Н. Моисеева [32], 2010 г.);

– развитие универсальных учебных действий (УУД) обучающихся, осуществляемое в ходе «включения в их учебную деятельность работы с комплексом задач, представляющим собой набор различных видов разноуровневых задач, содержащих неизвестное под знаком модуля, и построения обучения их решению в соответствии с тремя взаимосвязанными этапами развития УУД: мотивационно-диагностическим, операционно-исполнительским, рефлексивно-оценочным»; (Е.А. Пустовит [62], 2015 г.).

Неравенства с модулем встречаются в заданиях ВПР, ОГЭ и ЕГЭ, олимпиадах по математике.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречием между необходимостью обучения школьников решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, подготовки их к ОГЭ и ЕГЭ по математике, и фактическим состоянием методики ее обучения на практике.

Указанное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических особенностей обучения решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Неравенства с модулем» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что повышение качества математической подготовки обучающихся по теме «Неравенства с модулем» будет достигаться, если: выявить методические особенности обучения решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы и с их учетом разработать методику обучения решению задач по данной теме.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования:**

1. Выявить основные цели и задачи обучения решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики.

2. Выполнить и представить анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Неравенства с модулем» в учебниках для классов с углубленным изучением математики общеобразовательной школы.

3. Выявить методические особенности обучения учащихся решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики.

4. Представить методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

5. Рассмотреть задачи ЕГЭ по теме исследования.

6. Разработать элективный курс по теме «Логарифмические неравенства с модулем» для учащихся математического профиля.

7. Разработать системы задач по теме «Решение неравенств с модулем» для обучающихся старших классов с углубленным изучением математики.

8. Проверить экспериментально эффективность разработанных методических рекомендаций по теме «Неравенства с модулем» и представить результаты педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы М.И. Башмакова [4], Л.И. Боженковой [5], Н.Л. Стефановой и Н.С. Подходовой [31], В.А. Тестова [66].

Базовыми для настоящего исследования явились также: работы Л.В. Виноградовой [8], В.А. Далингера [11], Ю.М. Колягина [16], В.Н. Моисеевой [32], А.Г. Мордковича [33; 38], Е.А. Пустовит [62].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2018/19 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников по математике, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2018/19 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2019/20 уч.г.): определение методических основ исследования; разработка систем задач по теме «Решение неравенств с модулем» для обучающихся старших классов с углубленным изучением математики и элективного курса по теме «Логарифмические неравенства с модулем» для обучающихся 10-11 классов.

4 семестр (2019/20 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГБОУ СОШ с. Васильевка Ставропольского района Самарской области.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем и предложены методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем: выявлены методические особенности обучения решению неравенств с модулем, приведены основные методы решения и типы заданий по теме «Неравенства с модулем» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в ней разработаны:

– методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы;

– системы задач по теме «Решение неравенств с модулем» для обучающихся старших классов с углубленным изучением математики;

– элективный курс по теме «Логарифмические неравенства с модулем» для обучающихся математического профиля.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических рекомендаций по обучению решению неравенств с модулем обучающихся 7-11 классов с углубленным изучением математики; разработке систем задач по теме «Решение неравенств с модулем» для обучающихся старших классов с углубленным изучением математики и элективного курса по теме «Логарифмические неравенства с модулем» для обучающихся математического профиля; в описании результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. *Экспериментальная проверка* предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе ГБОУ СОШ с. Васильевка (Самарская область, Ставропольский район). *Теоретические выводы и практические результаты* исследования представлены на конференциях: всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (г. Тольятти, декабрь 2019 г., диплом за 1-е место в конкурсе докладов по направлению «Математика. Физика»); научно-практической конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ»: (г. Тольятти, направление «Теория и методика обучения математике», 1 этап, апрель 2019 г., диплом за 2 место; направление «Математика и методика обучения математике», 1 этап, апрель-май 2020 года). Основные результаты исследования отражены в 4 публикациях [19; 20; 21; 22].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

2. Системы задач по теме «Решение неравенств с модулем» для обучающихся старших классов с углубленным изучением математики.

3. Элективный курс «Логарифмические неравенства с модулем» для обучающихся математического профиля.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 11 рисунков, 9 таблиц, список используемой литературы (77 источников). Основной текст работы изложен на 109 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Цели обучения теме «Решение неравенств с модулем» в углубленном курсе математики

Линия неравенств – одна из ключевых содержательных линий математики. Линия неравенств реализуется как в исследовании вопросов, которые напрямую относятся к понятию функции, так и в многих других понятиях [74].

В *федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования* утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» *должны отражать*:

1) «развитие умения работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

2) развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

3) овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

4) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения

различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей» [67].

В примерной основной образовательной программе основного общего образования от 8 апреля 2015 года указывается, что «учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения образования *на базовом и углубленном уровнях*:

1. Оперировать понятиями: неравенство, решение неравенства, область определения неравенства, системы неравенства.

2. Использовать метод интервалов для решения целых и дробно-рациональных неравенств.

3. Решать линейные неравенства с параметром.

4. Составлять и решать системы линейных неравенств при решении задач других учебных предметов.

5. Выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении систем линейных неравенств в задачах других учебных предметов.

6. Выбирать соответствующие неравенства или их системы для составления математической модели заданной реальной ситуации или прикладной задачи.

7. Уметь интерпретировать полученный при решении неравенства или их системы результат в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи» [61].

Учащийся получает возможность научиться в 7-9 классах для благополучного продолжения образования *на углубленном уровне*, а также для применения в житейских ситуациях и решения проблем различных предметных областей:

1. «Свободно оперировать понятиями: неравенство, равносильные неравенства.

2. Решать различные виды неравенств и их систем.

3. Владеть разными методами решения неравенств и их системы, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор.

4. Использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения.

5. Решать алгебраические неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методом.

6. Владеть разными методами доказательства неравенств.

7. Изображать множества на плоскости, задаваемые неравенствами и их системами» [18].

В *федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования* [68] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» на базовом уровне *должны отражать*:

1) сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

2) сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;

3) владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

4) владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

5) сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

Требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса *и дополнительно отражать*:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

4) сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

В примерной основной образовательной программе среднего общего образования от 28 июня 2016 г. указывается, «что в ходе изучения линии неравенств в 10-11 классе для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования по специальностям, не связанным с прикладным использованием математики *на базовом уровне* выпускник научится» [60]:

1. Решать линейные и квадратные неравенства.

2. Решать простейшие логарифмические неравенства вида $\log_a x < d$.

3. Решать простейшие показательные неравенства вида $a^x < d$, где d можно представить в виде степени с основанием a.

«Для развития мышления, использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования по специальностям, не связанным с прикладным использованием математики *на базовом уровне* выпускник может научиться:

1. Решать рациональные, показательные, логарифмические неравенства, простейшие иррациональные и тригонометрические неравенства и их системы.

2. Использовать метод интервалов для решения неравенств.

3. Изображать на тригонометрической окружности множество решений простейших тригонометрических неравенств.

4. Выполнять отбор решений неравенств в соответствии с дополнительными условиями и ограничениями.

5. Составлять и решать неравенства при решении задач других учебных предметов.

6. Использовать неравенства для построения простейших математических моделей реальных ситуаций или прикладных задач.

7. Уметь интерпретировать полученный при решении неравенства или системы неравенств результат, оценивать его правдоподобие в контексте заданной ситуации или прикладной ситуации» [60].

«Для успешного продолжения образования по специальностям, связанным с прикладным использованием математики *на углубленном уровне* выпускник научится:

1. Свободно оперировать понятиями: неравенство, равносильные неравенства.

2. Решать разные виды неравенств и их систем.

3. Овладеть основными типами показательных, логарифмических, иррациональных, степенных неравенств и стандартными методами их решений и применять их при решении задач.

4. Владеть методами решений неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор.

5. Использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения.

6. Решать алгебраические неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами.

7. Изображать множества на плоскости, задаваемые неравенствами и их системами.

8. Составлять и решать неравенства и их системы при решении задач других учебных предметов.

9. Выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов.

10. Составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты » [60].

«Для обеспечения возможности успешного продолжения образования по специальностям, связанным с осуществлением научной и исследовательской деятельности в области математики и смежных наук на *углубленном уровне* выпускник дополнительно может научиться:

1. Свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических неравенств, иррациональных и тригонометрических неравенств и их систем.

2. Решать основные типы неравенств с параметрами [60].

В статье В.А. Далингера и Е.А. Пустовит «Различные способы решения неравенства вида $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$» [11, С. 124] указывается, что тема «Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля» входит в образовательный минимум содержания образовательных программ по математике, однако ей не уделяется должное внимание. В.А. Далингер и Е.А. Пустовит призывают к более углубленному изучению данной темы, так как неравенства с модулем решают такие цели как систематизация, расширение и укрепление знаний, связанных с абсолютной величиной. Авторы данной статьи также отмечают, что «при изучении темы «Решение неравенств со знаком модуля» задача учителя – познакомить учащихся со всевозможными способами решения различных видов неравенств, а задача учащихся – освоить, научиться выбирать и применять оптимальный способ, демонстрируя на практике рациональное и «красивое» решение» [11, С. 124].

М.И. Башмаков в книге «Уравнения и неравенства»[4] выделяет одну из главных целей в работе со сложными неравенствами – научиться видеть пример так, чтобы на глазах ученика осталась только важная часть, которая поможет найти путь к решению, а все лишнее, то что не влияет на огромную роль при отыскании способа его решения, попытаться убрать с поля зрения. Автор обращает внимание на необходимость четкого понимания того, что подразумевается под словами «решить неравенство», обдумывание смысла этой операций, последующих преобразований, которые мы используем для достижения указанной им цели.

Н.Б. Карсакова в статье «Решение уравнений и неравенств с модулем» [13] считает, что учитель при обучении учащихся теме «Неравенства с модулем должен ставить перед собой следующие цели:

– «познакомить учащихся с основными приемами решения уравнений и неравенств, содержащих модуль;

– помочь преодолеть возникающий при решении таких задач психологический барьер, обусловленный необходимостью рассматривать несколько направлений в решении;

– закрепить знания, умения и навыки, приобретенные в процессе изучения различных тем курса алгебры и начал анализа;

– развивать логическое мышление, графическую культуру, умения самостоятельно рассуждать, анализировать, систематизировать;

– расширить общий кругозор учащихся.

Основная методическая установка — организация самостоятельной деятельности учащихся при ведущей и направляющей роли учителя» [13, С.10].

В статье А.В. Лоскутниковой «Организация самостоятельной работы учащихся старших классов при обучении их решению уравнений и неравенств с модулем» говорится о том, что если у учащегося возникают трудности при изучение какой-либо темы, то это не значит, что он не знает какие-то формулы или свойства, это значит, что он не научился их применять. Что избежать данную проблему, нужно организовывать самостоятельную работу учащегося, в процессе которой выделяются индивидуальные способности школьника, развиваются умения анализировать факты. Такая деятельность учит мыслить самостоятельно, выдвигать собственные идеи для решения той или иной задачи, развивает творчество. Самостоятельная работа должна носить целенаправленный характер. Достигается это четкой формулировкой цели работы. Автор данной статьи утверждает, что «эффективность самостоятельной работы достигается, если она является одним их составных, органических элементов учебного процесса, и для нее предусматривается специальное время на каждом уроке или занятии элективного курса, если она проводится планомерно и систематически, а не случайно и эпизодически» [23, С.156].

И.А. Пивина в своей статье «Методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля» утверждает, что при решении неравенств с модулем можно отработать приемы, которые можно применять, решая другие упражнения и также отмечает, что «для эффективного решения подобных заданий необходимо использовать исследовательский подход. Это объясняется тем, что большая часть заданий с модулем направлена на то, чтобы развить познавательную активность учащихся, формировать у них потребность в самостоятельном приобретении знаний» [52, С.227].

А.Н. Санникова в своей статье «Методические приемы обучению решению уравнений и неравенств с модулями в старшей школе» выделяет, что «одним из методических приемов организации повторения темы «Уравнения и неравенств, содержащие переменную под знаком модуля» является применение системы специально сконструированных решений таких уравнений и неравенств с различными ошибками, недочетами, неточностями. Это позволит не только повторить, но и скорректировать знания и умения, так как в процессе такой работы «сильные» ученики смогут получить новые знания, а «слабые» ‑ ликвидировать пробелы и постепенно подтянуться к «сильным»» [64, С.28]. Этот методический прием организации повторения и коррекции имеют следующие достоинства:

– «поддерживается интерес к излагаемому материалу у всех учеников, независимо от уровня их подготовки;

– воспитываются самоконтроль и критическое отношение к излагаемому материалу;

– вырабатываются необходимые навыки и алгоритмы поиска ошибок и недочетов в собственных рассуждениях и выкладках» [64, С.30].

В статье «Модуль числа» В.И. Седаковой говорится о том, что важность понятия «модуль» заключается в том, что при его изучении необходимо использование свойств математических объектов: выражений, функций, их графиков, уравнений и неравенств. Автор выделяет «основные требования к формированию универсальных учебных действий при изучении темы «Модуль числа»:

– личностных универсальных действий: учитель преподносит материал по теме «модуль числа», раскрывая его практическую значимость. В связи с этим можно использовать задачи с межпредметным, практическим, занимательным содержанием, старинные задачи;

– коммуникативных универсальных действий: пояснение и комментарии учеников к решению, письменные выкладки, устное доказательство, постановка вопросов, формулирование корректных ответов, объяснение обнаруженных ошибок и т. д.;

– регулятивных универсальных действий: развитие у школьников навыков самостоятельного составления задач с модулем;

– логических универсальных действий: составление заданий с недостаточным (избыточным) условием, найти и исправить ошибку в готовом решении, дополнить и видоизменить задание» [65, С.10].

Таким образом, подводя итог вышесказанному, можно сформулировать следующие основные цели обучения линии неравенств в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, в том числе неравенствам с модулем:

– познакомить учащихся со всеми методами и приемами, которые необходимы для решения неравенств с модулем;

– научить выбирать и применять оптимальный метод решения;

– эффективно организовывать самостоятельную работу учеников;

– помочь преодолеть психологические трудности, который могут возникнуть в процессе решения заданий по теме исследования;

– закрепить знания, умения и навыки, приобретенные в процессе изучения различных тем курса алгебры, курса алгебры и начала анализа, необходимые для решений неравенств с модулем;

– научить выдвигать самостоятельные идеи для решения задач;

– развивать мышление, умение решать задания графически, самостоятельно рассуждать, анализировать, систематизировать;

– воспитывать у учащихся самоконтроль и критическое отношение к излагаемому материалу;

– научить учащихся находить ошибки и недочеты в собственных решениях.

§2. Анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Решение неравенств с модулем» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы

В учебниках алгебры, алгебры и начала анализа общеобразовательной школы разных авторов изучение материала по неравенствам с модулем и его содержание имеют отличия.

Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов): понятие координатной прямой, координаты точки на координатной прямой, понятие модуля числа, числового неравенства, понятие знаков неравенств, сравнение чисел при помощи знаков неравенств.

Базовые знания (известные из школьного курса алгебры 7-9 классов): понятие неравенства и его свойства, решение неравенства, понятие равносильных неравенств, равносильного преобразования неравенства, понятие линейного неравенства с одной переменной, решение линейного неравенства с одной переменной; понятие рационального неравенства с одной переменной, дробно-рациональных неравенств с одной переменной.

Вводимые (новые) знания (из школьного курса алгебры 7-9 классов): понятие неравенства, содержащий неизвестное под знаком с модуля, решение неравенства, содержащий неизвестное под знаком с модуля, системы неравенств с одной переменной, содержащей неизвестное под знаком модуля, решение неравенства с двумя переменными, содержащего неизвестную под знаком модуля, системы неравенств с двумя переменными, содержащей неизвестное под знаком модуля.

Вводимые (новые) знания (из школьного курса алгебры и начала анализа 10-11 классов): понятие тригонометрического неравенства с модулем, решение тригонометрического неравенства с модулем; понятие показательного неравенства с модулем, решение показательного неравенства с модулем; понятие логарифмического неравенства с модулем, решение логарифмического неравенства с модулем; понятие иррационального неравенства с модулем, решение иррационального неравенства с модулем.

Рассмотрим содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в учебниках с углубленным изучением.

Представим содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры с углублённым изучением 7-9 классов (Табл. 1).

Таблица 1 - Содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры с углубленным изучением 7-9 классов

Автор	Содержание учебного материала
Ю.Н. Макарычев, 7 класс	Теоретический материал по теме не рассматривается.
Ю. Н. Макарычев, 8 класс	Глава 5. Неравенства. §13. Решение неравенств с одной переменной и их систем. П. 44. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Геометрическая интерпретация модуля. Решение неравенств на основе геометрической интерпретации. Равносильные преобразования (системы и совокупности). Примеры решения неравенств с модулем, используя равносильные преобразования.
Ю. Н. Макарычев, 9 класс	Глава 2. Уравнения и неравенства с одной переменной. §13. Решение неравенств с одной переменной и их систем. П. 17. Решение неравенств с переменной под знаком модуля. Приемы решения. Геометрическая интерпретация. Метод на основе определения модуля. Метод возведения в квадрат. Метод промежутков. Примеры на каждый из рассмотренных методов. Свойства модуля. Глава 3. Системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными. §9. Неравенства с двумя переменными и их системы. П. 28. Неравенства с двумя переменными, содержащие знак модуля. Определение модуля. Графический метод. Примеры.
С.М. Никольский, 7 класс	Теоретический материал по теме не рассматривается.
С.М. Никольский, 8 класс	Глава 1. Простейшие функции. Квадратные корни. §1. Функции графики. 1.2. Координатная ось. Модуль числа. Определение модуля. Свойства модуля.
С.М. Никольский, 9 класс	Глава 1. Неравенства. §1. Линейные неравенства с одним неизвестным. 1.5. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Примеры неравенств с модулем. Методы решения. На основе определения модуля. Геометрическая интерпретация. Графический метод.
Ш.А. Алимов, 8 класс	Глава 1. Неравенства. §10. Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль. Определение модуля. Геометрический смысл. Примеры решения неравенств на основе определения модуля и геометрической интерпретации.
Ш.А. Алимов, 9 класс	Теоретический материал по теме не рассматривается.

Изучив теоретический материал в учебниках алгебры с углубленным изучением 7-9 классов, можно отметить, что в учебниках [3; 26; 48] теоретический материал по теме «Неравенства с модулем» не разбирается. Наиболее подробно теоретический материал рассмотрен Ю.Н. Макарычевым в пособиях для 8 и 9 класса [27; 28], где были показаны основные понятия, разобраны все основные методы решения неравенств с модулем. В учебнике С.М. Никольского для 9 класса [50] рассмотрен графический метод решения неравенств с модулем; геометрический, на основе определения понятия модуля. В учебнике Ш.А. Алимова для 8 класса также отведён отдельный параграф на изучение неравенств с модулем, но рассмотрено только два метода их решения – геометрический и на основе определения понятия модуля [2].

Анализ содержания теоретического материалов темы «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа профильного уровня, утвержденных Министерством Просвещения на 2019-2020 годы, рассмотрен в Таблице 2.

Таблица 2 - Содержание теоретического материала по теме «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа с углубленным изучением 10-11 классов

Содержание учебного материала	Кол-во часов
Ю.М. Колягин, 10 класс	
Теоретический материал по теме не рассматривается.	-
Ю.М. Колягин, 11 класс	
Теоретический материал по теме не рассматривается.	-
М.Я. Пратусевич, 10 класс	
Глава Введение. §10. Уравнения и неравенства с модулем. Определение модуля. Графическая интерпретация. Равносильные преобразования. Элементарные неравенства с модулем.	3/4 ч.
М.**Я. Пратусевич, 11 класс**	
Теоретический материал по теме не рассматривается.	-
С.М. Никольский, 10 класс	
Теоретический материал по теме не рассматривается.	-
С.М. Никольский,11 класс	
Глава II. Уравнения. Неравенства. Системы. §9. Равносильность уравнений и неравенств системам. П.9.1. Основные понятия. Система и совокупность.	1 ч.
§11. Равносильность неравенств на множествах П.11.2. Возведение неравенства в четную степень. Пример с двумя модулями.	1/2 ч.
П.11.3. Умножение неравенства на функцию. Пример с функцией по модулю.	1 ч.
§12. Метод промежутков для уравнений и неравенств. П. 12.2. Неравенства с модулем. Примеры на использование метода промежутков.	1/2 ч.
Г.К. Муравин, 10 класс	
Теоретический материал по теме не рассматривается.	-

Г.К. Муравин, 11 класс	
Теоретический материал по теме не рассматривается.	-

Продолжение Таблицы 2

Содержание учебного материала	Кол-во часов
А.Г. Мерзляк, 11 класс	
Теоретический материал по теме не рассматривается	-
А.Г. Мордкович, 10 класс	
Глава 1. Действительные числа. §5. Модуль действительного числа. Определение модуля. Свойства модуля. Геометрическая интерпретация. Простейшие примеры на использование геометрической интерпретации.	-
А.Г. Мордкович, 11 класс	
Глава 4. Тригонометрические уравнения. §29. Уравнения и неравенства с модулем. Геометрическая интерпретация модуля. Равносильные преобразования. Методы решения неравенства с модулем вида $\|f(x)\| < g(x)$. Методы решения неравенства с модулем вида $\|f(x)\| > g(x)$. Нестандартные неравенства с модулем.	§29. 3/4/5 ч.

Наглядно видно, что в учебниках [14; 15; 30; 43; 44; 46; 59] теоретический материал по теме «Неравенства с модулем» не рассматривается. В остальных же учебниках рассмотрим теоретический материал более подробно.

В учебнике 10 класса профильного уровня А.Г. Мордковича [43] рассматривается тема «Модуль действительного числа» в Глава I Действительные числа.

Автор выдвигает метод для решения простейших неравенств с модулем на основе геометрической интерпретации. Если на числовой прямой отметить две точки a и b (два действительных числа a и b) и обозначить расстояние между ними как $\rho\ (a; b)$, то это расстояние равно $b - a$, если $b > a$, $a - b$, если $a > b$ (Рис. 1), или равно нулю, если $a = b$.

Рис. 1.

Все три случая охватываются одной формулой: $\rho\ (a; b) = |a - b|$.

В учебнике профильного уровня А.Г. Мордковича за 11 класс [36] для изучения неравенств с модулем отводится отдельная тема. Автор начинает изложение теоретического материала с того, что с 5 по 9 классы простейшие неравенства с модулем решались, используя геометрическую интерпретацию. Но основной способ решения неравенств с модулем связан с так называемым «раскрытием модуля по определению»: если $a \geq 0$, то $|a| = a$, если $a < 0$, то $|a| = -a$. Как правило, неравенство с модулем сводится к совокупности неравенств, не содержащих знак модуля.

Кроме указанного определения, используются следующие утверждения:

1) Если $b > 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ равносильно двойному неравенству $-b < f(x) < b$.

2) Если $b > 0$, то неравенство $|f(x)| > b$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -b, f(x) > b$.

3) Если обе части неравенства $f(x) < g(x)$ принимают только неотрицательные значения, то оно равносильно неравенству $\left(f(x)\right)^2 < \left(g(x)\right)^2$.

Также А.Г. Мордкович предлагает три способа решения неравенства $|f(x)| < |g(x)|$.

Первый способ. Если $f(x) \geq 0$, то $|f(x)| = f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $f(x) < g(x)$. Если $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $-f(x) < g(x)$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$$

Второй способ. Перепишем заданное неравенство в виде $g(x) > |f(x)|$. Отсюда сразу следует, что $g(x) > 0$. Воспользуемся тем, что при $g(x) > 0$ неравенство $|f(x)| < |g(x)|$ равносильно двойному неравенству $-g(x) < f(x) < g(x)$. Это позволяет свести неравенство $|f(x)| < g(x)$ к системе неравенств: $\begin{cases} g(x) > 0; \\ -g(x) < f(x) < g(x). \end{cases}$ Или к системе неравенств: $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$.

Третий способ. Воспользуемся тем, что при $g(x) > 0$ обе части неравенства $|f(x)| < g(x)$ неотрицательны, а потому возведение в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Учтем, кроме того, что $|a|^2 = a^2$. Это позволяет свести неравенство $|f(x)| < g(x)$ к системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ \left(f(x)\right)^2 < \left(g(x)\right)^2. \end{cases}$$

Автор учебника в теоретическом материале приводит три способа решения неравенства вида $|f(x)| > g(x)$.

Первый способ. Если $f(x) \geq 0,$ то $|f(x)| = f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $f(x) > g(x)$. Если $f(x) < 0,$ то $|f(x)| = -f(x)$ и заданное неравенство принимает вид $-f(x) > g(x)$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x). \end{cases}$$

Второй способ. Рассмотрим два случая: $g(x) \geq 0, g(x) < 0$. Если $g(x) < 0$, то неравенство $|f(x)| > g(x)$ выполняется для всех x из области определения выражения $f(x)$. Если $g(x) \geq 0$, то неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -g(x); f(x) > g(x)$. Таким образом, заданное неравенство сводится к совокупности трех систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) < -g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Третий способ. Воспользуемся тем, что при $g(x) \geq 0$ неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно неравенству $\left(f(x)\right)^2 > \left(g(x)\right)^2$. Это позволит свести неравенство $|f(x)| > g(x)$ к совокупности систем*:*

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left(f(x)\right)^2 > \left(g(x)\right)^2; \end{cases}$$

В учебнике профильного уровня М.Я. Пратусевич за 10 класс [58] отводится отдельный параграф для изучения неравенств с модулем -

«Элементарные уравнения и неравенства с модулем. Интерпретация на числовой прямой». В этом параграфе он начинает с напоминания определения модуля из курса основной школы. Далее в параграфе предоставлена вспомогательная таблица, которая отражает геометрический смысл неравенства с модулем, интерпретацию на числовой прямой и соответственное решение исходного неравенства. Рассмотрено, как решать неравенства вида $|x| \vee a$ и сделаны выводы о том как, как решать неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee a$.

Теоретический материал по теме исследования также содержится в параграфе «Операция снятия знака модуля. Перебор случаев, метод интервалов». В нем рассматривается методы раскрытия модуля и решение неравенства, содержащий модуль в модуле.

В результате анализа теоретического материала в учебниках с углублённым изучением 10-11 классов, можно сделать вывод о том, что не во всех учебниках профильного уровня тема «Неравенства с модулем» рассматривается отдельно. Наиболее подробно теорию о модуле, его определении и геометрической интерпретации, о методах решение неравенства с модулем рассмотрели А.Г. Мордкович [35; 36], С.М. Никольский [47] и М.Я. Пратусевич [58]. Данные авторы в своих пособиях предлагают такие методы решения как: на основе определения модуля, используя геометрическую интерпретацию, графический метод, метод замены переменных, метод возведения в квадрат и нестандартные методы, которые основываются на свойствах функции.

Рассмотрим содержание задачного материала по теме «Неравенства с модулем» в учебниках с углубленным изучением.

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры основной школы для классов с углубленным изучением математики, можно выделить такие *виды неравенств с модулем* как:

- неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee b$;
- неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee g(x)$;

– неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee |g(x)|$;

– неравенства с модулем вида $|f(x)| + |g(x)| \vee b$;

– неравенство с двумя переменными, содержащее знак модуля.

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры основной школы для классов с углубленным изучением математики, можно выделить следующий виды *систем неравенств с модулем:*

– системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем;

– системы неравенств с двумя неизвестными, содержащие знак модуля.

Анализ содержания задачного материала темы «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа профильного уровня, утвержденных Министерством Просвещения на 2019-2020 годы, рассмотрен в Таблице 3.

Таблица 3 - Содержание задачного материала по теме «Неравенства с модулем» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа

Содержание учебного материала	Кол-во
Ю.М. Колягин, 10 класс	
Глава II. Показательная функция. §8. Показательные неравенства	6
Глава IV. Логарифмическая функция. §14. Логарифмы	2
§17. Логарифмическая функция, ее свойства и график	3
§19. Логарифмические неравенства.	5
Ю.М. Колягин, 11 класс	
Упражнения для итогового повторения курса алгебры	12
Задачи для внеклассной работы	6
М.Я. Пратусевич, 10 класс	
Глава Введение. §10. Уравнения и неравенства с модулем.	31
М.Я. Пратусевич, 11 класс	
§81. Множества на плоскости, задаваемые уравнениями и неравенствами	5
§82. Графические методы решения уравнений и неравенств с параметрами	4
§85. Иррациональные неравенства	1
§87. Показательные неравенства	2
§88. Логарифмические неравенства	3
§89. Тригонометрические неравенства	2
С.М. Никольский, 10 класс	
Задания для повторения.	20
С.М. Никольский,11 класс	
Глава II. Уравнения. Неравенства. Системы. §9. Равносильность уравнений и	4

неравенств системам. П.9.1. Основные понятия.	
П. 9.5. Решение неравенств с помощью систем.	22
§11. Равносильность неравенств на множествах П.11.2. Возведение неравенства в четную степень.	12

Продолжение Таблицы 3.

Содержание учебного материала	Кол-во
П.11.3. Умножение неравенства на функцию.	8
П.11.5. Применение нескольких преобразований.	8
П. 11. 6. Неравенства с дополнительными условиями	2
П. 11. 7. Нестрогие неравенства.	4
§12. Метод промежутков для уравнений и неравенств. П. 12.2. Неравенства с модулем.	26
П. 12.3. Метод интервалов для непрерывных функций.	2
§13. Использование свойств функции при решении уравнений и неравенств. П. 13. 1. Использование областей существование функций.	1
П. 13. 2. Использование неотрицательности функций.	2
П. 13. 3. Использование ограниченности функций.	5
Г.К. Муравин, 10 класс	
Глава 3. Показательная и логарифмическая функция. §11Свойства логарифмов	1
Глава 6. Повторение. §30. Уравнения и неравенства.	4
Г.К. Муравин,11 класс	
Глава 5. Уравнения, неравенства, их системы. §16. Уравнения и неравенства.	1
А.Г. Мерзляк, 11 класс	
Глава 2. Показательная и логарифмическая функции. §16. Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция.	1
§20. Логарифмическая функция и ее свойства.	1
§22. Логарифмические неравенства..	1
Глава 5. Уравнения и неравенства. Обобщение и систематизация. §34. Основные методы решения неравенств.	11
А.Г. Мордкович, 10 класс	
Глава 1. Действительные числа. §5. Модуль действительного числа.	17
§7. Определение числовой функции и способ ее задания.	1
Глава 3. Тригонометрические функции. §16. Функции $y = \sin x, y = \cos x,$ их свойства и графики.	1
Глава 4. Тригонометрические уравнения. §23. Методы решения тригонометрических уравнений	1
А.Г. Мордкович, 11 класс	
Глава 3. Показательная и логарифмическая функции §11. Показательная функция, ее свойства и график».	6
§13. Показательная неравенства.	8
Глава 5. Элементы теории вероятностей и математической статистики. §22. Вероятность и геометрия	2
Глава 6. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств. §28. «Равносильность неравенств».	1
§29. Уравнения и неравенства с модулем.	94
§32. Уравнения и неравенства с двумя переменными»	16

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры и начала анализа старшей школы для классов с углубленным изучением, можно выделить следующие виды *неравенств с модулем* как:

- неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee b$;

- неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee g(x)$;

- неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee |g(x)|$.

В результате анализа задачного материала в учебниках алгебры и начала анализа старшей школы для классов с углубленным изучением математики, можно выделить следующий вид *систем неравенств с модулем:*

- системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем.

Наличие видов неравенств с модулем и их систем в учебниках с углубленным изучение 10-11 классов представлено в Таблице 4.

Таблица 4 - Наличие видов неравенств с модулем в учебниках с углубленным изучение 10-11 классов

Виды неравенств с модулем и их систем	Неравенства с модулем вида $\lvert f(x)\rvert \vee b$	Неравенства с модулем вида $\lvert f(x)\rvert \vee g(x)$	Неравенства с модулем вида $\lvert f(x)\rvert \vee \lvert g(x)\rvert$	Системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенство с модулем
А.Г. Мордкович, 10 класс	+	+	+	+
А.Г. Мордкович, 11 класс	+	+	+	-
Ю.М. Колягин, 10 класс	+	+	+	-
Ю.М. Колягин, 11 класс	+	+	+	-
Г.К. Муравин, 10 класс	+	+	+	+
Г.К. Муравин, 11 класс	+	+	+	-
М.Я. Пратусевич, 10 класс	+	+	+	-
М.Я. Пратусевич, 11 класс	+	+	-	-
А.Г. Мерзляк, 11 класс	+	+	-	-
С.М. Никольский, 10 класс	+	+	-	-
С.М. Никольский, 11 класс	+	+	+	-

Рассмотрим вышеперечисленные виды неравенств с модулем на основе анализа учебников алгебры и начала анализа углубленного уровня старшей школы для общеобразовательных учреждений различных авторов.

1. Неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee b$.

Рассматриваются всевозможные варианты, какая может функция $f(x)$.

1) Неравенство с модулем вида $|f(x)| \vee b$, где $f(x)$ – линейная функция

Задача 1 [15, С. 211]. Решить неравенство $|x-7|>2$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x-7>2; \\ x-7<-2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>9; \\ x<5. \end{array}\right.$$

Решением совокупности является объединение данных промежутков: $x \in (-\infty; 5) \cup (9;\ +\infty)$. **Ответ:** $x \in (-\infty; 5) \cup (9;\ +\infty)$.

Задача 2 [34, С. 29]. Решить неравенство $|12x+4|+|9x+3|<28$.

Решение. Необходимо вынести общий множитель за знак модуля, упростить полученное выражение и разделить обе части неравенства на 7:

$$4|3x+1|+3|3x+1|<28;\ 7|3x+1|<28;\ |3x+1|<4.$$

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 3x+1<4; \\ 3x+1>-4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x<3; \\ 3x>-5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1; \\ x>-\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Решением данной системы является пересечение решений двух неравенств: $x \in \left(-\frac{5}{3};\ 1\right)$. **Ответ:** $x \in \left(-\frac{5}{3};\ 1\right)$.

2) Неравенство с модулем вида $|f(x)| \vee b$, где $f(x)$ – квадратная функция

Задача 3 [15, С. 211]. Решить неравенство $|x^2-7x+12| \le 6$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2-7x+12 \le 6; \\ x^2-7x+12 \ge -6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-7x+6 \le 0; \\ x^2-7x+18 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1; 6]; \\ x \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

Решением системы является пересечение данных промежутков: $x \in [1; 6]$. **Ответ:** $x \in [1; 6]$.

Задача 4 [15, С. 211]. Решить неравенство $|x^2-3x-4|>6$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x-4>6; \\ x^2-3x-4<-6. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-10>0; \\ x^2-3x+2<0. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x\in(-\infty;\ -2)\cup(5;\ +\infty); \\ x\in(1;2). \end{array}\right.$$

Решением совокупности является объединение данных промежутков:

$$x\in\ (-\infty;\ -2)\cup(1;2)\cup(5;\ +\infty).$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ -2)\cup(1;2)\cup(5;\ +\infty)$.

3) Неравенство с модулем вида $|f(x)|\vee b$*, где* $f(x)$ *– дробно-рациональная функция*

Задача 5 [36, С. 187]. Решить неравенство $\left|x-\frac{2}{x+2}\right|>3$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности неравенств: $\left[\begin{array}{l} x-\frac{2}{x+2}>3; \\ x-\frac{2}{x+2}<-3. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2-x-8}{x+2}>0; \\ \frac{x^2+5x+4}{x+2}<0. \end{array}\right.$

Область допустимых значений для всего неравенства: $x\neq-2$.

$$\left[\begin{array}{c} x^2-x-8>0; \\ x^2+5x+4<0; \\ x\neq-2. \end{array}\right.$$

Решается каждое квадратное неравенство и получается:

$$\left[\begin{array}{c} x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2};\ +\infty\right); \\ x\in(-4;\ -1); \\ x\neq-2. \end{array}\right.$$

Решением совокупности является объединение данных промежутков:

$$x\in(-\infty;\ -4)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2};2\right)\cup(-2;\ -1)\cup\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2};\ +\infty\right).$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ -4)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2};2\right)\cup(-2;\ -1)\cup\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2};\ +\infty\right)$.

Задача 6 [30, С. 356]. Решить неравенство $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right|<1$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2x-1} < 1; \\ \dfrac{x+1}{2x-1} > -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1-2x+1}{2x-1} < 0; \\ \dfrac{x+1+2x-1}{2x-1} > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x+2}{2x-1} < 0; \\ \dfrac{3x}{2x-1} > 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} (-x+2)(2x-1) < 0; \\ 2x-1 \neq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 3x(2x-1) > 0; \\ 2x-1 \neq 0. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty); \\ x \neq 0{,}5. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0{,}5; +\infty); \\ x \neq 0{,}5. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty); \\ x \in (-\infty; 0{,}0) \cup (0{,}5; +\infty). \end{cases}$$

Решением системы является пересечение решений двух неравенств: $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **Ответ:** $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

4) Показательное неравенство с модулем, переходящее к виду $|f(x)| \vee b$

Задача 7 [36, С. 82]. Решить неравенство $2^{|x-3|} \geq \sqrt[4]{2}$.

Решение. Исходное показательное неравенство нужно привести к общему основанию 2: $2^{|x-3|} \geq 2^{\frac{1}{4}}$.

После нужно рассмотреть только показатели: $|x-3| \geq \frac{1}{4}$.

Данное неравенство равносильно следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x-3 \geq \dfrac{1}{4}; \\ x-3 \leq -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3\dfrac{1}{4}; \\ x \leq 2\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Решением совокупности является объединение данных промежутков: $x \in \left(-\infty; 2\frac{3}{4}\right] \cup \left[3\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **Ответ:** $x \in \left(-\infty; 2\frac{3}{4}\right] \cup \left[3\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Задача 8 [36, С. 82]. Решить неравенство $5^{|x+9|} \leq \sqrt[3]{25}$.

Решение. Исходное показательное неравенство нужно привести к общему основанию 5: $5^{|x+9|} \leq 5^{\frac{2}{3}}$.

После нужно рассмотреть только показатели: $|x+9| \leq \frac{2}{3}$.

Данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x+9 \le \dfrac{2}{3}; \\ x+9 \ge -\dfrac{2}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -8\dfrac{1}{3}; \\ x \ge -9\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Решением системы является пересечение решений двух неравенств: $x \in \left[-9\frac{2}{3}; -8\frac{1}{3}\right]$. **Ответ:** $x \in \left[-9\frac{2}{3}; -8\frac{1}{3}\right]$.

5) Логарифмическое неравенство с модулем, переходящее к виду $|f(x)| \vee b$

Задача 9 [14, С. 123]. Решить неравенство $\log_{|3x+2|} x^2 \ge 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |3x+2| > 1; \\ x^2 \ge |3x+2|^2. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < |3x+2| < 1; \\ x^2 \le |3x+2|^2. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x+2 > 1; \\ 3x+2 < -1. \end{array}\right. \\ x^2 - (3x+2)^2 \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} |3x+2| > 0; \\ |3x+2| < 1; \\ x^2 - (3x+2)^2 \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x > -1; \\ 3x < -3. \end{array}\right. \\ (x-3x-2)(x+3x+2) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+2 \ne 0; \\ 3x+2 < 1; \\ 3x+2 > -1; \\ (x-3x-2)(x+3x+2) \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > -\dfrac{1}{3}. \\ x < -1. \end{array}\right. \\ (-2x-2)(4x+2) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} 3x \ne -2; \\ 3x < -1; \\ 3x > -3; \\ (-2x-2)(4x+2) \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right); \\ x \in \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right]. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ne -\dfrac{2}{3}; \\ x < -\dfrac{1}{3}; \\ x > -1; \\ x \in (-\infty; -1] \cup \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right). \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset; \\ \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right). \end{array}\right.$$

Общим решением исходного неравенства является объединение решений систем: $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. **Ответ:** $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

2. Неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee g(x)$.

Рассматриваются всевозможные варианты, какая может функция $f(x)$.

1) Неравенство с модулем вида $|f(x)| \vee g(x)$, *где* $f(x)$ *– линейная функция*

Задача 10 [14, С. 34]. Решить неравенство $|12x+4|+|9x+3| \geq -7x$.

Решение. Необходимо вынести общий множитель за знак модуля, упростить полученное выражение и разделить обе части неравенства на 7:

$$4|3x+1|+3|3x+1| \geq -7x;\ 7|3x+1| \geq -7x;\ |3x+1| \geq -x.$$

Данное неравенство равносильно следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 3x+1 \geq -x; \\ 3x+1 \leq x. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x \geq -1; \\ 2x \leq -1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq -0{,}25; \\ x \leq -0{,}5. \end{array}\right.$$

Решением данной совокупности является объединение решений двух неравенств: $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. **Ответ:** $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$.

2) Неравенство с модулем вида $|f(x)| \vee g(x)$, *где* $f(x)$ *– квадратная функция.*

Задача 11 [34, С. 29]. Решить неравенство $|x^2-4x| < 3x$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе неравенств: $\begin{cases} x^2-4x < 3x; \\ x^2-4x > -3x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-7x < 0; \\ x^2-x > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0;7); \\ x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty). \end{cases}$

Решением системы является пересечение данных промежутков: $x \in (1;7)$. **Ответ:** $x \in (1;7)$.

Задача 12 [34, С. 29]. Решить неравенство $|-x^2-x| \geq 4x-2$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} -x^2-x \geq 4x-2; \\ -x^2-x \leq -4x+2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2-5x+2 \geq 0; \\ -x^2+3x-2 \leq 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x-2 \leq 0; \\ x^2-3x+2 \geq 0. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}; \dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\right]; \\ x \in (-\infty;1] \cup [2;\ +\infty). \end{array}\right.$$

Решением совокупности является объединение данных промежутков: $x \in (-\infty;1] \cup [2;\ +\infty)$. **Ответ:** $(-\infty;1] \cup [2;\ +\infty)$.

3) Показательное неравенство с модулем, переходящее к виду $|f(x)| \vee g(x)$.

Задача 13 [36, С. 82]. Решить неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|(x-1)} \geq \frac{1}{16}$.

Решение. Исходное показательное неравенство нужно привести к общему основанию $\frac{1}{4}$: $\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|(x-1)} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$.

После нужно рассмотреть только показатели: $|x|(x-1) \leq 2$.

Данное неравенство равносильно следующей двум системам неравенств:

1) $\begin{cases} x \geq 0; \\ x(x-1) \leq 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; \\ x^2 - x - 2 \leq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; \\ x \in [-1;\ 2]. \end{cases}$

Решение первой системы: $x \in [0; 2]$.

2) $\begin{cases} x < 0; \\ -x\ (x-1) \leq 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0; \\ -x^2 + x - 2 \leq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0; \\ x^2 - x + 2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0; \\ x \in R. \end{cases}$

Решение второй системы: $x \in (-\infty; 0)$.

Решение исходного неравенства будет объединение этих двух решений: $x \in (-\infty; 2]$. **Ответ:** $x \in (-\infty; 2]$.

Задача 14 [15, 211]. Решить неравенство $3^{|x+1|} < 9^x$.

Решение. Исходное показательное неравенство нужно привести к общему основанию 3: $3^{|x+1|} < 3^{2x}$.

После нужно рассмотреть только показатели: $|x+1| < 2x$.

Данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 < 2x; \\ x + 1 > -2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x < -1; \\ 3x > -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (1; +\infty); \\ x \in \left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right). \end{cases}$$

Решением системы является пересечение данных промежутков: $x \in (1; +\infty)$. **Ответ:** $x \in (1; +\infty)$.

4) Неравенство с модулем вида $|f(x)| \vee g(x)$, где $f(x)$ – иррациональная функция.

Задача 15 [59, 425]. Решить неравенство $\left|2 - \sqrt{x+2}\right| > x - 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{x+2} > x-2; \\ 2-\sqrt{x+2} < -x+2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} < 4-x; \\ \sqrt{x+2} > x. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \ge 0; \\ 4-x > 0; \\ x+2 < (4-x)^2. \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0; \\ x+2 \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0; \\ x+2 > x^2. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -2; \\ x < 4; \\ x+2 < 16-8x+x^2. \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0; \\ x \ge -2. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0; \\ x^2-x-2 < 0. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -2; \\ x < 4; \\ x^2-9x+14 > 0. \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0; \\ x \ge -2. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0; \\ x \in (-1; 2). \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -2; \\ x < 4; \\ x \in (-\infty; 2) \cup (7;\ +\infty). \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x \in [-2; 0); \\ x \in [0; 2). \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-2; 2); \\ x \in [-2; 2). \end{array}\right.$$

Решением данной совокупности является объединение данных промежутков: $x \in [-2; 2)$. **Ответ:** $x \in [-2; 2)$.

3. Неравенства с модулем вида $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \vee |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|$.

Рассматриваются всевозможные варианты, какая может функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**.**

1) Неравенство с модулем вида $|f(x)| \vee |g(x)|$, *где* $f(x)$ *– дробно-рациональная функция.*

Задача 16 [34, С. 187]. Решить неравенство $\left|1-\frac{1}{x}\right| \le \left|2+\frac{5}{x}\right|$.

Решение. Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\mathbf{2}} < \left(2+\frac{5}{x}\right)^{\mathbf{2}};$$

$$\left(1-\frac{1}{x}+2+\frac{5}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}-2-\frac{5}{x}\right) \le 0;$$

$$\left(\frac{x-1+2x+5}{x}\right)\left(\frac{x-1-2x-5}{x}\right) \le 0;$$

$$\frac{(3x+4)(-x-6)}{x^2} \le 0;$$

Решением данного неравенства является: $x \in (-\infty;\ -6] \cup \left[-\frac{4}{3}; 0\right) \cup (0;\ +\infty)$. **Ответ:** $x \in (-\infty;\ -6] \cup \left[-\frac{4}{3}; 0\right) \cup (0;\ +\infty)$.

2) Показательное неравенство с модулем, переходящее к виду $|f(x)| \vee |g(x)|$.

Задача 17 [14, С. 156]. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} < \left(\frac{1}{4}\right)^{|x+8|}$.

Решение. Исходное показательное неравенство нужно привести к общему основанию $\frac{1}{2}$: $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2|x+8|}$.

Имеем:

$$|x| > 2|x+8|;\ |x| > |2x+16|.$$

Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$x^2 > (2x+16)^2;$$

$$(x-2x-16)(x+2x+16) > 0;$$

$$(-x-16)(3x+16) > 0.$$

Решением данного неравенства является: $x \in \left(-16; -5\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $x \in \left(-16; -5\frac{1}{3}\right)$.

Задача 18 [36, С. 82]. Решить неравенство $\left(\sqrt{5}\right)^{-3|x|} \geq 5^{-|9x-1|}$.

Решение. Исходное показательное неравенство нужно привести к общему основанию 5: $5^{-\frac{1}{2}\cdot 3|x|} \geq 5^{-|9x-1|}$.

После нужно рассмотреть только показатели: $\frac{3}{2}|x| \leq |9x-1|$.

Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 \leq (9x-1)^2;$$

$$\left(\frac{3}{2}x-9x+1\right)\left(\frac{3}{2}x+9x-1\right) \leq 0;$$

$$(-7{,}5x+1)(10{,}5x-1) \leq 0.$$

Решением данного неравенства является: $x \in \left(-\infty; \frac{2}{21}\right) \cup \left(\frac{2}{15};\ +\infty\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{2}{21}\right) \cup \left(\frac{2}{15};\ +\infty\right)$.

Рассмотрим вышеперечисленный вид системы неравенств с модулем на примерах учебников с углубленным изучением разных авторов.

4. Системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенства с модулем

Задача 19 [43, С.132]. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 8 \cdot 4^x - 65 \cdot 2^x \le 0; \\ \left(\log_{|x|} x^4\right)^2 + \log_3 x^2 \le 18. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ данной системы неравенств: $x \ne 0, x \ne 1, x \ne -1$.

Решается первое неравенство данной системы: $8 \cdot 4^x - 65 \cdot 2^x \le 0$;

Выполняется замена: $t = 2^x$: $8t^2 - 65t \le 0;\ t(8t - 65) \le 0$.

Решение данного неравенства: $t > 0;\ t < 8{,}125$.

Выполняется обратная замена:

$$\begin{cases} 2^x > 0; \\ 2^x < 8,125. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R; \\ \log_2 2^x < \log_2 8{,}125. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R; \\ x < \log_2 8{,}125. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $x < \log_2 8{,}125$.

Решается второе неравенство данной системы, используя свойства логарифма:

$$\left(\log_{|x|} x^4\right)^2 + \log_3 x^2 \le 18;$$

$$4^2 + 2\log_3|x| \le 18;$$

$$2\log_3|x| \le 2;$$

$$\log_3|x| \le 1.$$

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} |x| \ge 0; \\ |x| \le 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ne 0; \\ x \in [-3; 3]. \end{cases}$$

Решение второго неравенства: $[-3;\ -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 3]$.

Общее решение данной системы неравенств является пересечение решений первого и второго неравенства: $[-3;\ -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \log_2 8{,}125]$. **Ответ:** $x \in [-3;\ -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \log_2 8{,}125]$.

Задача 20 [34, 132]. Решить систему неравенств $\begin{cases} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ |x + 2| < 3. \end{cases}$

Решение. Решается первое неравенство данной системы:

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < 3x + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$2\pi k < 3x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3};$$

Если $k = 0$, то $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Если $k = -1$, то $-\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{6}$.

Если $k = -2$, то $-\frac{4\pi}{3} < x < -\frac{5\pi}{6}$. Если $k = -3$, то $-2\pi < x < -\frac{3\pi}{2}$.

Решается второе неравенство данной системы: $|x + 2| < 3$.

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x + 2 < 3; \\ x + 2 > -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1; \\ x > -5. \end{cases}$$

Решение второго неравенства: $x \in (-5; 1)$.

Общее решение данной системы неравенств является пересечение решений первого и второго неравенства: $\left(-5;\ -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{4\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right) \cup (0; 1)$.

Ответ: $x \in \left(-5;\ -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{4\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right) \cup (0; 1)$.

В результате анализа задачного материала, можно сделать вывод о том, что неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee b$ и $|f(x)| \vee g(x)$ встречаются во всех приведенных учебниках профильного уровня. Неравенства с модулем вида $|f(x)| \vee |g(x)|$ присутствуют во всех приведенных учебниках профильного уровня, кроме [30; 46; 59]. Системы неравенств с одной переменной, содержащие неравенства с модулем в задачном материале рассматривают только авторы пособий [34; 43].

Таким образом, подводя итог вышесказанному, можно сформулировать следующие особенности содержания теоретического и задачного материалов в приведенных учебниках с углубленным изучением алгебры за 7-9 класс, алгебры и начала математического анализа за 10-11 класс профильного уровня:

– теоретический материал по теме «Неравенства с модулем» рассмотрен не во всех учебниках;

– во многих учебниках, в которых выделяются теоретический материал, не выделяются основные методы для решения неравенств с модулем;

– задачный материал большинства учебников включает не все основные виды и типы неравенств с модулем;

– в учебниках, в которых не представлен теоретический материал по теме исследования задачного материала недостаточно для усвоения основных методов решения.

§3. Методические особенности обучения решению неравенств с модулем в классах с углубленном изучением математики

В статье В.А. Далингера и Е.А. Пустовит «Различные способы решения неравенства вида $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$» отмечается, что «решение неравенств, содержащих знак модуля – одна из сложных тем школьного курса математики основной школы. Известно, что основные способы решения неравенств во многом совпадают со способами решения аналогичных уравнений (метод последовательного раскрытия модулей, графический метод), но необходимо помнить, что они не всегда являются оптимальными. Поэтому учителю необходимо знакомить учащихся с другими, более рациональными способами, приводящими к быстрому получению окончательного результата» [11, С. 124].

Авторы данной статьи считают, что «метод последовательного раскрытия модулей является одним из самых простых и доступных способов решения неравенств. Учащиеся, применяя этот способ на практике при решении простейших неравенств, практически никогда не ошибаются, т.к. решение сводится к безошибочным алгоритмическим действиям. Единственный недостаток – громоздкость решения и, как следствие, – большая потеря времени, что является немаловажным фактором в условиях сдачи ГИА или ЕГЭ» [11, С. 125].

В.И. Далингер и Е.А. Пустовит в своей работе акцентируют внимание на недостатке рассмотрения в учебниках школьного курса математики решения неравенств, используя графики, так как «графический способ является стандартным способом решения любых неравенств, несмотря на то, что в школьной программе он занимает весьма скромное положение или вообще фактически не изучается. А ведь его по праву можно назвать наиболее эффективным и рациональным в силу своей наглядности» [11, С. 126].

Также в этом материале авторы выделяют такой способ решения неравенств с модулем как равносильные преобразование и утверждают, что он «может первоначально не вызвать у учащихся восхищения, т. к., во-первых, решение кажется достаточно сложным и запутанным, а во-вторых, учащиеся всегда испытывают трудности при равносильных переходах от неравенства к системе или совокупности неравенств. Хотя если внимательно проанализировать решение, то в его реализации мы ничего нового не «открывали» и никакими сложными, трудно запоминаемыми свойствами не пользовались» [11, С. 127]. Данный способ нельзя отменит к оптимальным и рациональным, но если попадается неравенство повышенной сложности, то данный метод быстрее приведет школьников к верному ответу.

В.Н. Моисеева в своей диссертации «Методика формирования у старшеклассников логических приемов мышления при решении уравнений и неравенств» отмечает, что «формированию логических приемов мышления на уровне среднего (полного) образования посвящено мало работ. Однако при обучении в старших классах недостаток внимания к этой проблеме ведет к перезагрузке школьников. Это связано с тем, что задачи по содержанию становятся более разнообразными, появляются различные подходы к их решению, растет объем теоретического материала, повышается абстрактность его изложения в учебных пособиях. Если учащиеся не будут владеть логическими приемами мышления, то им придётся запоминать большое количество материала вместо того, чтобы понять принцип его построения, структуру доказательства в зависимости от вида математического предложения» [32, С. 4].

По данным анализа федеральной предметный комиссии по математике результатов ЕГЭ, значительная часть учащихся, получивших удовлетворительную оценку, не усвоила решение иррациональных уравнений, логарифмических неравенств и нахождение области определения сложной функции. Эта группа выпускников в целом не справилась ни с одним заданием повышенного уровня, что говорит не только о слабых знаниях учащихся, но и от том, что они не умеют анализировать условия задачи, абстрагироваться от конкретной ситуации в задачи и применять математические факты для её решения.

«Содержательно-методическая линия “Уравнения и неравенства” проходит через весь курс математики средней школы. Её преимущество перед другими содержательными алгебраическими линиями – в лаконичности, наглядности. Кроме того, при решении уравнений и неравенств используется теория равносильности, сформулированная в понятиях и терминах математической логики. Уравнения и неравенства решаются с помощью нисходящего восходящего анализа, синтеза, аналогии, производится их классификация, обобщение, конкретизации, что предполагает использование соответствующих логических приемов мышления» [32, С. 6].

В ходе исследования разработана модель процесса формирования логических приемов мышления, которая содержит четыре этапа:

1. Подготовительный этап, цель которого познакомить учащихся с определениями и схемой выполнения логических приемов мышления.

2. Обучающий этап, цель которого является запоминание структуры приемов; формирование умений выполнять приемы по схеме.

3. Закрепляющие этап, в котором формируются навыки выполнения логических приемов мышления стандартных ситуаций.

4. Практический этап. Цель: перенос логических приемов мышления в новые ситуации.

Анализ – логический прием мышления, с помощью которого происходит мысленное разделение неравенства на смысловые части в определённом порядке, исследования каждый части в отдельности (поиск пути решения).

Синтез – логический прием мышления, характеризующийся соединением результатов исследования смысловой части неравенства в единое целое, решение неравенства.

Обобщение – логический прием мышления, при котором мысленно выделяет какое-либо общее для нескольких неравенств свойство и включают неравенство в один класс с этим выделенным свойством.

Абстрагирование – логический прием мышления, при котором выделяют один признак неравенства.

Конкретизирование – логический прием мышления, при котором происходит выделение серии неравенств, решаемых одним способом.

Е. А. Пустовит в своей диссертации «Развитие универсальных учебных действий учащихся основной школы при решении алгебраических задач с модулем» опирается на теоретические положения Л.И. Боженковой, и определяет, что «комплекс задач с модулем, обеспечивающий развитие универсальных учебных действий учащихся основной школы, должен удовлетворять следующим требованиям:

1) комплекс задач должен обеспечивать достижение целей усвоения учебной информации на определенном уровне (базовые задачи обеспечивают развитие универсальных учебных действий на репродуктивном уровне, систематизирующие - на продуктивном, интегрирующие - на творческом);

2) содержание задач комплекса должно быть адекватно содержанию изучаемой учебной информации и составу универсальных учебных действий;

3) содержание задач комплекса должно способствовать активной и самостоятельной учебно-исследовательской деятельности учащихся;

4) содержание задач комплекса должен обеспечивать взаимодействие различных способов преобразования учебной информации» [62, С. 12].

Решение задач, включенных в комплекс, обеспечивает: - обобщение, расширение и углубление знаний учащихся по разделу школьного курса математики «Задачи с модулем»; - развитие положительной мотивации школьников к обучению и создание условий для становления их личностного роста; - выявление и развитие математических и общеинтеллектуальных способностей учащихся.

«С учетом основных составляющих учебной деятельности были выделены следующие этапы развития универсальных учебных действий учащихся при решении алгебраических задач с модулем: мотивационно-диагностический, операционно-исполнительский и рефлексивно-оценочный.

Мотивационно-диагностический этап - этап, предполагающий изучение уровня готовности учащихся к решению различных типов задач с модулем и оценку уровня сформированности у них всех видов универсальных учебных действий. В ходе этого этапа: выяснялось отношение учителей математики к проблеме развития универсальных учебных действий учащихся основной школы при решении алгебраических задач с модулем; определялись затруднения, которые испытывают педагоги в организации этого развития; оценивался уровень готовности учащихся основной школы к развитию универсальных учебных действий; создавались условия для положительного отношения школьников к развитию у них универсальных учебных действий при решении алгебраических задач.

Операционно-исполнительский этап - этап, на котором велась работа по развитию всех видов УУД. В ходе этого этапа в экспериментальной группе осуществлялось обучение учащихся решению задач с модулем по разработанной методике развития универсальных учебных действий.

Рефлексивно-оценочный этап - этап, предусматривающий контроль и подведение итогов. В ходе этого этапа: оценивались уровни развития универсальных учебных действий учащихся основной школы по окончании формирующего этапа эксперимента; сравнивались результаты развития универсальных учебных действий в контрольной и экспериментальной группах; отслеживалась динамика степени обученности учащихся основной школы» [62, С. 15].

Выводы по первой главе

В первой главе были получены следующие результаты:

1. Выявлены основные цели и задачи обучения решения неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы. Так, решение неравенств с модулем способствует развитию логического мышления у учащихся; формированию у них умения: находить рациональный метод решения для разных видов неравенств с модулем, выдвигать собственные идеи для решения, самоконтроля у учащихся, акцентировать внимание на основной идее их решения.

2. Выполнен и предоставлен анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов, алгебры и началах математического анализа 10-11 классов.

3. Выявлены методические особенности обучения учащихся решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§4. Методические рекомендации по обучению решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы

В методических рекомендациях к учебнику алгебры 8 класса Ю.М. Колягина [16] отмечается, что учителю следует придерживаться следующих правил:

– давать мотивацию на изучение нового понятия;

– требовать учащихся понимания, а не зазубривания формулировок определений;

– искать самый простой и рациональный способ решения и его оформления;

– давать учащимся возможность самостоятельно что-либо изучить, но при этом организовывать и контролировать этот процесс;

– при решении учеником задания у доски, просить комментировать каждое действие;

– проводить тесты на проверку минимальных знаний по изученному материалу.

Ю.М. Колягин подчеркивает, что *«алгоритм решения неравенства с модулем»* сложнее чем алгоритм решения уравнения с модулем, так как на последнем этапе решения приходится учитывать знак коэффициента при неизвестном. Кроме того, в отличии от уравнения, неравенство не имеет отдельные решения, а, как правило, множество решений. Геометрическое изображение множества решений неравенства на числовой прямой является необычным для учащихся, но очень нужным и полезным, в особенности при решении систем неравенств. Правильное решения уравнения легко проверяется подстановкой, тогда как решение неравенства таким способом проверить нельзя. Ю.М. Колягин отмечает, что тема «Неравенства» тесно связана со всеми темами курса алгебры. Вместе с этим, неравенство с модулем можно решить графически и рассмотреть, как графики двух функций, а сюда уже подключается множество других компонентов алгебры.

Далее можно обратиться к методическим рекомендациям для учебника 9 класса С.М. Никольского [55]. Автор данных рекомендаций М.К. Потапов считает, что главная цель изучения темы «Неравенства с модулем» - освоить методы решений данных неравенств.

В пункте «Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля» разобрано несколько способов решения неравенств. Автор отмечает, что перед объяснением нового материала полезно повторить определение модуля числа, построение графиков функции $y = |x|, y = |x - a|, y = |x - a| + b$.

После проведении пропедевтики по заданной теме, автор предлагает решить несколько легких заданий и переходить уже к основным неравенствам с модулем. Автор отмечает что всегда нужно давать учащимся разные варианты решения заданий.

При изучении и анализе теоретического и задачного материала в учебниках для старших классов с углубленным изучением алгебры, можно сделать вывод, что тема исследования рассматривается практически во всех учебниках профильного уровня. Обратимся к методической литературе авторов этих учебников.

В методическом пособии для учебника Г.К. Муравина 10 класса говорится о том, что ученикам, для решения уравнений и неравенств, важно познакомиться с понятиями равносильного преобразования.

В пособии говорится, что «учащиеся, должны овладеть понятиями равносильности и равносильного преобразования. В тоже время умение свободно применять математическую символику при оформлении решений формировать у всех школьников необязательно. Рассмотренные ранее образцы оформления решений, в которых, например, вместо использования символа совокупности рассматриваются различные случаи, вполне соответствуют самым строгим требованиям» [42, С. 138]. При решении неравенств с модулем в большинстве случаев можно сразу перейти к решению соответственной системе или совокупности неравенств, в которых абсолютной величины уже будет, поэтому важно уметь выполнять равносильные преобразования.

В методические рекомендациях к учебнику углубленного уровня М.Я. Пратусевича [1] отмечается, что в едином государственном экзамене практически проверяется умение решать уравнение и неравенства. Поэтому данным понятиям уделяется так много внимания. Поскольку уравнения и неравенства в силу исторической традиции с одной стороны, являются основным содержанием курса алгебры и начал анализа в школе, а с другой — основными инструментами в решении таких задач, как, например, исследование функции с помощью производной, необходимо уделить им в курсе должное внимание. Поэтому основной целью при изучении неравенств является овладение понятиями равносильности и следования. Поэтому вопрос о сохранении равносильности неравенств при преобразованиях приобретает первостепенное значение.

По мнению М.Я. Пратусевича, изучение уравнений и неравенств с модулем является пропедевтическим для изучения основ анализа (определения предела функции и предела последовательности).

Метод на основе геометрической интерпретации модуля является для учащихся одним из самых затруднительным. Автор в изучении теоретического материала предлагает вспомогательную таблицу (Табл. 5.), которая будет подсказкой в решении неравенств с модулем данным методом, пока ученики не наработают навык. Ученики записывают вспомогательную таблицу к себе в тетрадь и пользуются при первичном закреплении материала.

Таблица 5 – Вспомогательная таблица на уроке изучение нового материала

Неравенство	**Геометрический смысл**	**Интерпретация на числовой прямой**	**Решение**
$\|x\| < 0$ $(a > 0)$	Точка с координатой x удалена от нуля на расстояние меньшее a единиц		$-a < x < a$, т. е $x \in (-a; a)$
$\|x\| > 0$ $(a > 0)$	Точка с координатой x удалена от нуля на расстояние большее a единиц		$x > a$ или $x < -a$ т. е x $\in (-\infty;\ -a) \cup (a;\ +\infty)$

Важно обратить внимание учащихся, что в задачах, где сравниваются два модуля наряду с решением, использующим раскрытие модуля по определению, полезно возвести обе части неравенства в квадрат (данное преобразование приведёт к равносильному неравенству, поскольку обе части исходного неравенства заведомо неотрицательны). Стоит обратить внимание учащихся на то, что своевременное наблюдение за полученными выражениями может упростить решение задачи.

В пособии для учителя М.К. Потапова для учебника 11 класса профильного уровня автора С.М. Никольского также подчеркивается важность перехода при решении неравенств к равносильным система или совокупностям. Автор подчеркивает необходимость объяснения ученикам, что «подразумевается под словами «система» и «совокупность», под знаками «{» и «[». Слово «система» и знак «{» употребляются в смысле союза «и».

Например, если система содержит несколько неравенств с неизвестным x, то имеются в виду все те значения x, каждое из которых удовлетворяет *каждому* из этих условий. Слово «совокупность» и знак «[» употребляются в смысле союза «или». Например, если совокупность содержит несколько неравенств с неизвестным x, то имеются в виду все те значения x, каждое из которых удовлетворяет *хотя бы одному* из этих условий» [5454, С. 141].

При решении неравенств с модулем всегда нужно сначала проанализировать, какие функции содержаться в левой и правой частях неравенства, так как иногда, вместо прямолинейного решения на основе определения модуля, иногда можно возвести неравенство в четную степень.

Пример 1 [54]. Решить неравенство $1 + \sin x > |\cos x|$.

Решение. В каждой точке множества R обе функции $f(x) = 1 + \sin x$ и $g(x) = |\cos x|$ неотрицательны, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству: $(1 + \sin x)^2 > \cos^2 x$.

Далее необходимо применить формулу квадрата суммы:

$$1 + 2\sin x + \sin^2 x > \cos^2 x.$$

После необходимо перенести все слагаемые в одну часть и применить основное тригонометрическое тождество: $2\sin x\ (1 + \sin x) > 0$.

Так как неравенство $t(1 + t) > 0$ имеет решения $t < -1$ и > 0, то решения исходного неравенства находятся объединение всех решений неравенств $\sin x < -1$ и $\sin x > 0$. Первое из этих неравенств не имеет решений, а множество решений второго неравенства есть серия промежутков $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$.

Следовательно, исходное неравенство имеет тоже множество решений:

$$(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z.$$

Ответ: $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$.

Также нужно быть внимательным, когда решается дробно-рациональное неравенство с модулем. М.К. Потапов в своих рекомендациях делает акцент на неравенствах, в которых можно избавить от знаменателя путем умножение на функцию, которая положительна и определена там же, где и исходные функции.

Пример 2 [54]. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2+1}-|\cos x|}{\sqrt{2x}+|\cos x|} > \frac{\sqrt{2x}-|\cos x|}{\sqrt{x^2+1}+|\cos x|}$.

Решение. Все решения исходного неравенства содержатся в множестве M всех тех x, для каждого из которых $x \geq 0$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x) = \left(\sqrt{2x} + |\cos x|\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + |\cos x|\right)$ определена и положительна, поэтому, если умножить исходное неравенство на функцию $\varphi(x)$, получится, что оно равносильно на множестве M неравенству:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - (|\cos x|)^2 > \left(\sqrt{2x}\right)^2 - (|\cos x|)^2.$$

Преобразовывая полученное выражение, получается: $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Неравенство имеет множество решений : $x(-\infty; 1) \cup (1;\ +\infty)$. Из этих чисел множеству M принадлежат только x из двух промежутков: $[0; 1) \cup (1;\ +\infty)$. Поэтому исходное неравенство имеет решения: $[0; 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in [0; 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Также автор данного пособия приводит интересное решение для неравенства с модулями специального вида:

$$|f\ (x)| + |g\ (x)| \le f\ (x) + g\ (x) \Leftrightarrow \begin{cases} f\ (x) \ge 0; \\ g\ (x) \ge 0. \end{cases}$$

Пример 3 [54]. Решить неравенство $|x^2 - 4x + 3| + |x - 4| - x^2 + 5x - 7 \le 0$. **Решение.** Переписывается неравенство в виде:

$$|x^2 - 4x + 3| + |4 - x| \le (x^2 - 4x + 3) + (4 - x).$$

По приведенному утверждению неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 3 \ge 0; \\ \quad 4 - x \ge 0. \end{cases}$$

Все решения системы составляют два промежутка: $(-\infty; 1]$ и $[3; 4]$. Следовательно, множество решений неравенства, равносильно системе, есть множество $(-\infty; 1]\ \cup\ [3; 4]$. **Ответ:** $x \in (-\infty; 1]\ \cup\ [3; 4]$.

Автор отмечает, что «в тех случаях, когда при освобождении неравенства от знака модуля координатная ось разбивается на бесконечное множество промежутков, бывает полезно перейти к совокупности систем, равносильной исходному неравенству. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 4 [54]. Решим неравенство $|\sin x| + \sin x\ \ (x^2 - 7x + 11) < 0$.

Решение. Ни одно из чисел x, для которого верно равенство $\sin x = 0$, не является решением неравенства. Следовательно, неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sin x > 0;\\ 1 + x^2 - 7x + 11 < 0.\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\sin x < 0;\\ -1 + x^2 - 7x + 11 > 0.\end{cases}$$

Второе неравенство первой системы имеет множество решений (3;4). Из них первому неравенству этой системы удовлетворяют лишь x из промежутка $(3; \pi)$.

Второе неравенство второй системы имеет множество решений $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$, а первое неравенство этой системы – серию промежутков $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z$ (Рис. 2.)

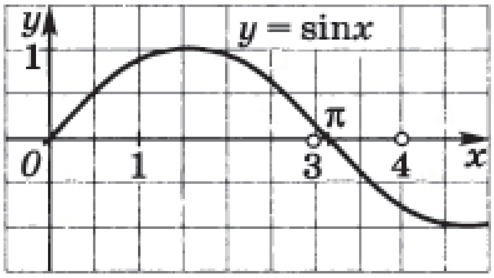


Рис. 2.

Следовательно, вторая система имеет множество решений: интервал $(5; 2\pi)$ и серию интервалов $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z, n \neq 0$ (Рис. 3.)

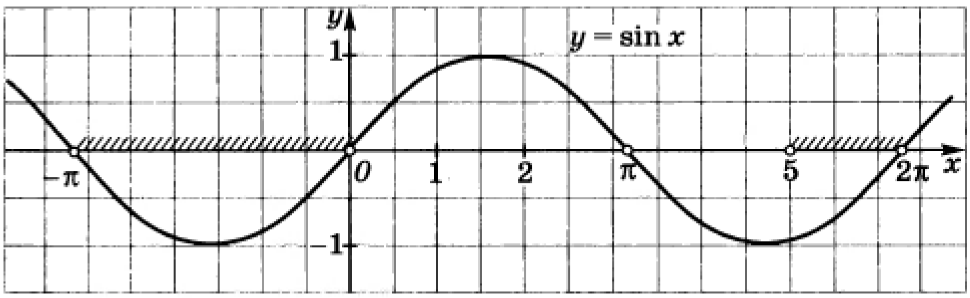


Рис. 3.

Итак, множество решений неравенства состоит из интервалов $(3; \pi)$ и $(5; 2\pi)$ и серии интервалов $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z, n \neq 0$» [54, С. 193]. **Ответ:** $(3; \pi)$ и $(5; 2\pi)$ и $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z, n \neq 0$.

М.И. Потапов акцентирует внимание на том, что при подготовке к единому государственному экзамену необходимо при решении неравенств с модулем уметь использовать области существования функции.

Если при рассмотрении неравенства выясняется, что обе его части определены на множество M, состоящем из одного или нескольких чисел, то нет необходимости проводить какие-либо преобразования уравнения неравенства, достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением этого неравенства.

Прежде чем разбирать громоздкие с виду задания из учебника, можно предложить учащимся решить следующий пример:

Пример 5 [54]. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-81}+2\right)\log_3|x|+\frac{9}{x}(\sqrt{81-x^2}+1)>4.$$

Решение. Обе части неравенства определены при выполнении трех условий: $x^2-81\geq 0$, $81-x^2\geq 0$ и $x\neq 0$. Этим условиям удовлетворяют лишь два числа: $x_1=9$ и $x_2=-9$. Проверка показывает, что число 9 является решением исходного уравнения, а число -9 нет. Следовательно, оно имеет единственное решение 9.

Методические аспекты решения неравенств с модулем в курсе школьном курсе математики представлены в зарубежной литературе [76; 77].

Таким образом, с целью повышению качества математического образования школьников при обучении их решению неравенствам с модулем *на уроках* в углубленном курсе математики общеобразовательной школы учителю необходимо: рассматривать различные виды неравенств с модулем и методы их решения; определить эффективные методы объяснения материала; мотивировать учеников к изучению методов решения неравенств с модулем, делая акцент на практическое применение полученных знаний и умений; демонстрировать грамотное оформление решений данных неравенств; использовать задачи для самостоятельной работы и уметь ее организовывать.

Для успешного решения любого неравенства с модулем выпускник общеобразовательной школы должен: знать различные виды неравенств из школьного курса математики и уметь их решать; знать основные виды неравенств с модулем и основные методы их решения; систематически решать достаточное количество задачного материала на закрепление умения применять определенный метод решения неравенства с модулем для конкретного вида неравенства с модулем.

§5. Анализ задач ЕГЭ по теме исследования

При анализе заданий единого государственного экзамена профильного уровня было выделено, что с неравенствами с модулем можно встретится в задания под номером 15 «Неравенства» (С3) и под номером 18 «Задача с параметром» (С6). Также следует отметить, что встречаются они довольно редко, но все же требуют отдельного рассмотрения.

Задача 1 [53]. «Неравенства, С3». Официальный пробный ЕГЭ 2017 года. Решить неравенство $\frac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|} \leq 0$.

Решение. Нужно найти ОДЗ числителя: $\begin{cases} 9x > 0; \\ 64x > 0. \end{cases} \Rightarrow x > 0.$

Заметим, что на этом ОДЗ $|x| = x$. По методу рационализации неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(3-1)(9x-1)(4-1)(64x-1)}{x\,(5x-1)} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{(9x-1)(64x-1)}{x\,(5x-1)} \leq 0.$$

Решим данное неравенство методом интервалов:

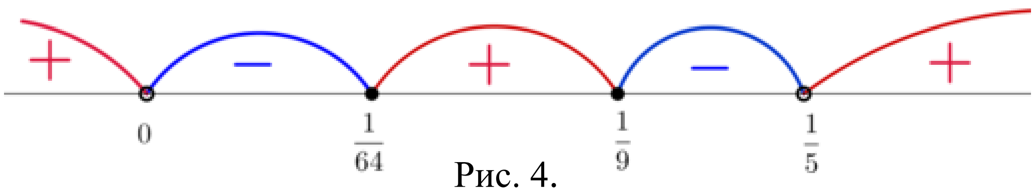


Рис. 4.

Следовательно, решением будут $x \in \left(0; \frac{1}{64}\right] \cup \left[\frac{1}{9}; \frac{1}{5}\right)$.

Пересекая данный ответ с ОДЗ $x > 0$, получается окончательный ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{64}\right] \cup \left[\frac{1}{9}; \frac{1}{5}\right)$. **Ответ:** $x \in \left(0; \frac{1}{64}\right] \cup \left[\frac{1}{9}; \frac{1}{5}\right)$.

Задача 2 [51]. «Неравенства, С3». Официальный пробный ЕГЭ 2019 года. Решить неравенство $\log_{2^{|2x-1|}}(2^{2x+1} - 2^{x+2} + 2) \leq \frac{x}{|2x-1|}$.

Решение. Поскольку $2^{2x+1} - 2^{x+2} + 2 = 2(2^x - 1)^2$, при условии $x \neq 0$ и $x \neq \frac{1}{2}$, имеется: $\log_{2^{|2x-1|}}(2^{2x+1} - 2^{x+2} + 2) \leq \frac{x}{|2x-1|}$.

Далее выносится степень основания логарифма и упрощается выражение:

$$\frac{1}{|2x-1|}\log_2(2^{2x+1}-2^{x+2}+2) \le \frac{x}{|2x-1|};$$

$$\log_2(2^{2x+1}-2^{x+2}+2) \le x.$$

Необходимо прологарифмировать обе части неравенства и воспользоваться свойством степеней:

$$2^{2x+1}-2^{x+2}+2 \le 2^x;$$

$$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2 \le 0;$$

$$(2^x-2)(2\cdot 2^x-1) \le 0;$$

$$x \in [-1;1].$$

С учетом условий $x \ne 0$ и $x \ne \frac{1}{2}$, окончательно получается: $x \in [-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\right]$. **Ответ:** $x \in [-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\right]$.

Задача 3 [53]. «Неравенства, С5». Официальный ЕГЭ 2012 года. Найти все значения $a,$ при каждом из которых неравенство $|x^2-8x+a+5| > 10$ не имеет решений на отрезке $[a-6;a]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2-8x+a+5 = (x-4)^2+a-11$. Эта функция возрастает на промежутке $[4;+\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty;4]$.

Найдем все значения *a,* при котором функция $f(x)$ не принимает на отрезке $[a-6;a]$ значений, по модулю больших 10, то есть график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a-6;a]$ находится в пределах горизонтальной полосы: $-10 \le f(x) \le 10$.

Отрезок $[a-6;a]$ не должен лежать на участке монотонности функции $f(x)$, иначе приращение $f(x)$ на отрезке длины 6 будет меньше 36, поэтому её график не поместиться в полосе ширины 20. Следовательно, $a-6 < 4 < a,$ откуда $4 < a < 10$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a-6;a]$ достигается либо при $x = a-6,$ либо при $x = a$.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a-6; a]$ достигается при $x = 4$. Получаем систему:

$$\begin{cases} 4 < a < 10; \\ f(a-6) \leq 10. \\ f(a) \leq 10; \\ f(4) \geq 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < a < 10; \\ (a-10)^2 + a - 11 \leq 10. \\ (a-4)^2 + a - 11 \leq 10; \\ a - 11 \geq -10. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 < a < 10; \\ a^2 - 19a + 79 \leq 0. \\ a^2 - 7a - 5 \leq 0; \\ a \geq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < a < 10; \\ \dfrac{19-\sqrt{45}}{2} \leq a \leq \dfrac{19+\sqrt{45}}{2}. \\ \dfrac{7-\sqrt{69}}{2} \leq a \leq \dfrac{7+\sqrt{69}}{2}; \\ a \geq 1. \end{cases}$$

Откуда $\frac{19-\sqrt{45}}{2} \leq a \leq \frac{7+\sqrt{69}}{2}$. **Ответ:** $\frac{19-\sqrt{45}}{2} \leq a \leq \frac{7+\sqrt{69}}{2}$.

Задача 4 [51]. «Неравенства, С5». Официальный ЕГЭ 2012 года. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3\right|$ выполняется при всех x.

Решение. Поскольку $x^2 + x + 1 > 0$ для всех значений x, получаем:

$$|x^2 + ax + 1| < 3x^2 + 3x + 3.$$

Решим полученное неравенство:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3; \\ x^2 + ax + 1 > -3x^2 - 3x - 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + (3-a)x + 2 > 0; \\ 4x^2 + (3+a)x + 4 > 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы любое значение x удовлетворяло этой системе неравенств, нужно, чтобы каждое из неравенств системы было верным для любого значения x, то есть дискриминанты левых частей этих неравенств должны быть отрицательными:

$$\begin{cases} (3-a)^2 - 16 < 0; \\ (3+a)^2 - 64 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a-3| < 4; \\ |a+3| < 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < a < 7; \\ -11 < a < 5. \end{cases}$$

Решением данной системы является пересечение решение двух неравенств: $-1 < a < 5$. **Ответ:** $-1 < a < 5$.

Задача 5 [51]. «Неравенства, С5». Официальный ЕГЭ 2013 года. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющих неравенству:

$$4|x+3|+3|x-a| \le \sqrt{16-y^2}+2.$$

Решение. Рассмотрим две функции $f(x) = 4|x+3| + 3|x-a|$ и $g(y) = \sqrt{16-y^2}+2$.

Функция $f(x) = 4|x+3| + 3|x-a|$ является кусочно-линейной, причем при $x < -3$ угловой коэффициент равен либо -1, либо -7, а при $x > -3$ угловой коэффициент равен либо 1, либо 7. Значит, функция $f(x)$ убывает при < -3 и возрастает при $x > -3$, поэтому $f(x) \ge f(-3) = 3|a+3|$.

Поскольку $y^2 \ge 0$, получаем $g(y) \le g(0) = 6$.

Если $f(-3) > g(0)$, то $f(x) \ge f(-3) > g(0) \ge g(y)$, поэтому неравенство $f(x) \le g(y)$ не имеет решений.

Если $f(-3) < g(0)$, то пара чисел $x = -3, y = 0$ удовлетворяет неравенству $f(x) \le g(y)$. Получаем:

$$f(-3) \le g(0) \Leftrightarrow 3|a+3| \le 6 \Leftrightarrow -2 \le a+3 \le 2 \Leftrightarrow -5 \le a \le -1.$$

Ответ: $x \in [-5; -1]$.

Задача 6 [53]. «Неравенства, С5». Официальный ЕГЭ 2017 года. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} |x| + |a| \le 4; \\ x^2 + 8x < 16a + 48. \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1; 0]$.

Решение. Заметим, что $|a| \le 4$ первое неравенство системы не будет иметь решений (так как тогда $|x|$ должен быть не больше отрицательного числа), следовательно, и вся система не будет иметь решений.

При $|a| = 4$ решением первого неравенства будет $x = 0$ ($\in [-1; 0]$). Заметим, что пара $x = 0$ и $a = 4$ является решением второго неравенства, пара $x = 0$ и $a = -4$ – нет.

Следовательно, $a = 4$ – подходит.

1) Пусть $0 < a < 4$. Тогда $|a| = a$ и систем а перепишется в виде:

$$\begin{cases} |x| \le 4-a; \\ (x+4)^2 < 16\,(a+4). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+a \le x \le 4-a; \\ -4-4\sqrt{4+a} < x < -4+4\sqrt{4+a}. \end{cases}$$

Заметим, что $-4+a<0$; $-4+4\sqrt{4+a}>4>4-a, -4-4\sqrt{4+a}<-4+a$, следовательно (Рис. 5.)

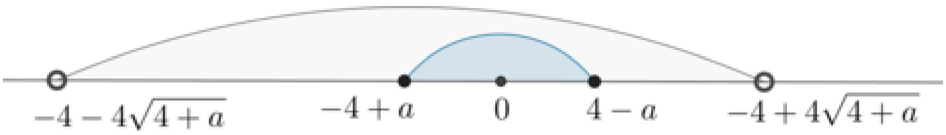


Рис. 5.

Таким образом, решением системы будут $x \in [-4+a; 4-a]$, что содержит хотя бы одну точку из $[-1; 0]$ (например, $x=0$).

Таким образом, все $a \in (0; 4)$ – подходят.

2) При $a = 0$ система перепишется в виде:

$$\begin{cases} -4 \le x \le 4; \\ -12 < x < 4. \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x < 4.$$

Следовательно, $a = 0$ – подходит.

3) Пусть $-4 < a < 0$. Тогда $|a| = -a$ и система примет вид:

$$\begin{cases} |x| \le 4+a; \\ (x+4)^2 < 16(4+a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4-a \le x \le 4+a; \\ -4-4\sqrt{4+a} < x < -4+4\sqrt{4+a}. \end{cases}$$

Заметим, что $-4-a > -4$, а $-4-4\sqrt{4+a} < -4$. Так же $-4+4\sqrt{4+a} \le 4+a$ (так как $(4+a)-4\sqrt{4+a}+4 \ge 0 \Rightarrow \left(\sqrt{4+a}-2\right)^2 \ge 0$ – верно при всех $a \in (-4; 0)$). (Рис. 6.)

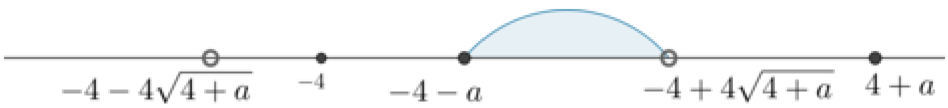


Рис. 6.

То есть $-4+4\sqrt{4+a}$ должно быть больше $-4-a$ (тогда решением будут $x \in \left[-4-a;\ -4+4\sqrt{4+a}\right]$), а также больше -1 (тогда хотя бы одно число из $[-1; 0]$ будет содержаться в решении).

$$\begin{cases} -4+4\sqrt{4+a} > -4-a; \\ -4+4\sqrt{4+a} > -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-8\sqrt{2} < a < 0; \\ a > -\dfrac{55}{16}. \end{cases}$$

(так как $a \in (-4; 0)$).

Для того, чтобы дать окончательный ответ, нужно сравнить числа $8-8\sqrt{2}$ и $-\frac{55}{16}$: $8\sqrt{2}-8<\frac{55}{16}$, значит, $8-8\sqrt{2}>-\frac{55}{16}$, следовательно, $a\in\left(8-8\sqrt{2};0\right)$. Тогда окончательный ответ для a: $a\in\left(8-8\sqrt{2};0\right)$.

Ответ: $x\in\left(8-8\sqrt{2};0\right)$.

§6. Элективный курс по теме «Логарифмические неравенства с модулем» для обучающихся 10-11 класса общеобразовательной школы

Программа элективного курса «Логарифмические неравенства с модулем» предназначена для учащихся 10-11 профильных классов. Она направлена на углубление, обобщение знаний и умений учащихся по одной из содержательных линий математики – линий неравенств. Для её реализации достаточно знаний и умений по математике, полученных в основной школе.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1. Рассмотрение ранее известных понятий в ходе повторения позволяет закрепить и осознать данный материал на новом уровне.

2. Задания по теме элективного курса встречаются в ЕГЭ.

3. Материал, предлагаемый в данной программе, расширяет знания учащихся о методах решения логарифмических неравенств с модулем.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

– обеспечить более глубокое и осознанное изучение неравенств;

– создает условия для решения и анализа задач по логарифмическим неравенствам с модулем.

Цель и задачи программы элективного курса:

Цель – расширение и углубление знаний учащихся по методам решения логарифмических неравенств с модулем.

Задачи курса:

1. Повторить и систематизировать знания о модуле, неравенствам с модулем, о логарифме и его свойств.

2. Знать основные понятия и результаты, изучаемые в рамках данного элективного курса.

3. Рассмотреть методы решения логарифмических неравенств с модулем.

4. Развитие мыслительных способностей учащихся, математического интереса и пробуждение к получению новых знаний.

5. Сформировать у учащихся представление о задачах с модулем, как задачах исследовательского характера, показать их многообразие.

6. Научить осуществлять выбор рационального метода решения задач и обосновывать сделанный выбор.

Отличительные особенности данного элективного курса:

– в курсе представлена достаточное количество задачного материала, при помощи которого ученик овладеет приемами решения логарифмических неравенств с модулем;

– обобщает материал по темам «неравенства с модулем» и «логарифмические неравенства».

Новизна программы состоит в том, что она знакомит учащихся с простотой решения данных неравенств, несмотря на то, что выглядят сложнорешаемыми. Содержание материала, представленного в программе, ранее нигде в курсе математики средней школы не изучалось. Также задания элективного курса обладают практической значимостью для учащихся для решения заданий вступительных испытаний в ВУЗы, олимпиадных заданий, заданий единого государственного экзамена.

Программа элективного курса рассчитана на 17 (1 ч. в неделю).

Форма занятия: урок-лекция, практикум, урок обобщения, урок самостоятельного решения задач.

Особенности организации учебных занятий:

– при изучении приводятся теоретические блоки, необходимые для решения неравенств с модулем;

– в элективном курсе рассматриваются задания различных уровней сложности.

Виды деятельности:

– фронтальная работа над решением задач, под руководством учителя;

– фронтальная работа над решением задач, под руководством обучающихся;

– коллективная проверка выполнения упражнений;

– обсуждение способов решения различных неравенств с модулем.

Виды занятий:

– урок-практикум;

– урок-лекция;

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

– правильно употреблять новые термины, связанные с основными понятиями логарифмических неравенств с модулем;

– знать методы решения логарифмических неравенств с модулем;

– уметь определять методы решения логарифмических неравенств с модулем.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

– текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется в результате решения задач учащихся на уроках;

– итоговая контрольная работа;

– защита проектов.

Данная программа может быть использована, как в общеобразовательных, так и в классах с углубленным или профильным изучением математики.

Таблица 6 – Учебно-тематическое планирование

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	**Теоретические и практические основы решения логарифмических неравенств с модулем**	6	
1	Модуль и его свойства. Геометрический смысл	1	Урок-практикум.
2	Решение простейших неравенств с модулем	2	Урок-лекция. Урок-практикум.
3	Понятие логарифма. Свойства логарифма.	1	Урок-практикум.
4	Решение простейших логарифмических неравенств	2	Урок-лекция. Урок-практикум.
II	**Подходы к решению логарифмических неравенств с модулем**	11	
1	Решение логарифмических неравенств с модулем вида $\lvert f(x)\rvert \vee 0$.	2	Урок-практикум.
2	Решение логарифмических неравенств с модулем вида $\log_a\lvert f(x)\rvert \vee b$ и $\log_{g(x)}\lvert f(x)\rvert \vee h(x)$	2	Урок-практикум.
3	Решение логарифмических неравенств с модулем вида $\log_{\lvert g(x)\rvert} f(x) \vee b$	1	Урок-практикум.
4	Решение логарифмических неравенств с модулем вида $\lvert f(x)\rvert \vee \lvert g(x)\rvert$	1	Урок-практикум.
5	Решение нестандартных логарифмических неравенств с модулем	2	Урок-практикум.
6	Итоговая контрольная работа	1	Урок самостоятельного решения задач.
7	Защита проектов	2	Учебно-исследовательская конференция

Опишем содержание элективного курса «Логарифмические неравенства с модулем».

Раздел 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ (6 ч.).

Понятие модуля действительного числа. Геометрический смысл абсолютной величины. Свойства модуля. Виды неравенств с модулем.

Решение неравенств с модулем на основе его определения. Метод замены переменной. Метод интервалов.

Определение логарифма. Область допустимых значений. Свойства логарифма.

Виды логарифмических неравенств. Соответственные им системы для решения.

Основная цель – изучить понятийный аппарат, представления о геометрическом смысле модуля и его свойствах; рассмотреть приемы и методы решения простейших неравенств с модулем, свойства логарифма, необходимые для решения логарифмических неравенств, виды логарифмических неравенств и приемы их решения.

В результате изучения данного раздела, учащиеся актуализируют знания о модуле, его геометрическом смысле на конкретных примерах, рассмотрят методы решения неравенств с модулем, понятия и свойства логарифма, научатся решать различные виды логарифмических неравенств, узнают равносильные им системы.

Основной прием решения неравенств с переменной под знаком модуля состоит в том, чтобы, используя определения и свойства модуля числа, освободиться от знака модуля, заменяя данное неравенство равносильным ему неравенством, системой или совокупностью неравенств.

Можно рассмотреть неравенства вида $|f(x)| < b$ или $|f(x)| > b$, где $b -$ некоторое число.

Если $b < 0,$ то неравенство $|f(x)| < b$ не имеет решения, а неравенство $|f(x)| > b$ верно при любом значении x, то есть его решением является числовая прямая $(-\infty;\ +\infty)$.

Если $b > 0,$ то неравенство $|f(x)| < b$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < b, \\ f(x) > -b, \end{cases}$ или эту систему можно записать в виде двойного неравенству $-b < f(x) < b,$ а неравенство $|f(x)| > b$ равносильно совокупности неравенств: $\left[\begin{matrix} f(x) > b \\ f(x) < -b \end{matrix}\right.$. Это обусловлено тем, что при $b > 0,$ модуль, меньший, чем b, имеют числа, принадлежащие промежутку $(-b, b)$, а модуль, больший, чем b, имеют числа, находящиеся вне этого промежутка.

Если $b = 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ не имеет решения, а неравенство $|f(x)| > b$ верно для любых значений x, для которых $f(x) \neq 0$.

Рассмотрим пример задачи на основе этих приемов решения.

Задача 1. Решить неравенство $|x^2 - 5x| > 6$.

Решение. Данное неравенство раносильно совокупности двух неравенств: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x > 6, \\ x^2 - 5x < -6. \end{array}\right.$

Решим данную совокупность: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x > 6, \\ x^2 - 5x < -6. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 < 0. \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-6)(x+1) > 0, \\ (x-2)(x-3) < 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in (-\infty, -1) \cup (6, +\infty); \\ x \in (2, 3). \end{array}\right.$$

Решением системы является объединение решений этих двух неравенств: $x \in (-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (6;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (6;\ +\infty)$.

На третьем уроке предлагается рассмотреть некоторые способы решения неравенств с модулем, которые потребуются учащимся в решении логарифмических неравенств с модулем.

1. Метод возведения в квадрат.

Неравенство вида $|f(x)| \vee |g(x)|$ решается следующим образом:

$|f(x)| \vee |g(x)| \Rightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \Rightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \vee 0$.

Задача 2. Решить неравенство $|x^2 - x| < |x - 10|$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2 - x)^2 < (x - 10)^2.$$

Решая это неравенство, получается:

$$(x^2 - x)^2 - (x - 10)^2 < 0,$$

$$(x^2 - x - x + 10)(x^2 - x + x - 10) < 0,$$

$$(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 10) < 0.$$

Так как трехчлен $x^2 - 2x + 10$ при любом x принимает положительные значения, то полученное неравенство равносильно неравенству $(x^2 - 10) < 0$.

Решением данного неравенства, а значит, и равносильного ему исходного неравенства является промежуток $\left(-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right)$.

2. Метод замены переменных.

При решении рациональных неравенств иногда удобно применять замену неизвестного.

Задача 3. Решить неравенство $x^2 - 4x - 5|x-2| + 10 \le 0$.

Решение. В этом неравенстве можно выразить квадрат разности:

$$(x^2 - 4x + 4) - 5|x-2| + 6 \le 0;$$
$$|x-2|^2 - 5|x-2| + 6 \le 0.$$

Можно сделать замену переменной: $t = |x-2|$.

Переписывая неравенство в виде: $t^2 - 5t + 6 \le 0;\ t^2 - 5t + 6 = 0$.

По теореме Виета найдем корни данного квадратного трехчлена: $t_1 = 2;\ t_2 = 3$.

Решением данного неравенства будет $2 \le t \le 3$.

Выполняется обратная замена: $2 \le |x-2| \le 3$.

$$\begin{cases} |x-2| \ge 2; \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \ge 2, \\ x-2 \le -2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4, \\ x \le 0. \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty); \\ \begin{cases} x-2 \le 3; \\ x-2 \ge -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 5; \\ x \ge -1. \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 5]. \end{cases}$$

Объединяется эти два промежутка; неравенство имеет решение: $x \in [-1; 0] \cup [4; 5]$. **Ответ:** $x \in [-1; 0] \cup [4; 5]$.

3. Метод разбиения на промежутки

Иногда, при решении неравенств удается освободиться от знака модуля, выделяя промежутки, на которых выражение, записанное под знаком модуля, сохраняет знак.

Задача 4. Решить неравенство $|x| + |2x-6| < 9$.

Решение. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = 3$. Числа 0 и 3 разбивают координатную прямую на три промежутка: $(-\infty; 0), [0; 3]$ и $(3;\ +\infty)$.

В первом промежутке оба выражения x и $2x - 6$ отрицательны. Поэтому $|x| + |2x - 6| = -x - 2x + 6 = -3x + 6$. Во втором промежутке $x \geq 0$, а $2x - 6 \leq 0$. Значит, $|x| + |2x - 6| = x - 2x + 6 = -x + 6$. В третьем промежутке $x > 0$ и $2x - 6 > 0$. Следовательно, $|x| + |2x - 6| = x + 2x - 6 = 3x - 6$.

Таким образом, $|x| + |2x - 6| = \begin{cases} -3x + 6, \text{ если } x < 0; \\ -x + 6, \text{ если } 0 \leq x \leq 3; \\ 3x - 6, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

Отсюда следует что данное неравенство равносильно совокупности трех систем:

$$1) \begin{cases} -3x + 6 < 9; \\ x < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x < 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является промежуток $(-1; 0)$.

$$2) \begin{cases} -x + 6 < 9; \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3; \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Решением второй системы является промежуток $[0; 3]$.

$$3) \begin{cases} 3x - 6 < 9; \\ x > 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5; \\ x > 3. \end{cases}$$

Решением третьей системы является промежуток $(3; 5)$.

Множеством решений неравенства исходного является объединение этих промежутков, то есть $x \in (-1; 0) \cup [0; 3] \cup (3; 5) = (-1; 5)$.

Ответ: $x \in (-1; 5)$.

Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) > b$ решаются переходом к равносильной ему системе.

Если $a > 1$, то необходимо решить следующую систему: $\begin{cases} f(x) > 0; \\ f(x) > a^b. \end{cases}$

Если $0 < a < 1$, то необходимо решить следующую систему: $\begin{cases} f(x) > 0; \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) < b$ решаются переходом к равносильной ему системе.

Если $a > 1$, то необходимо решить следующую систему: $\begin{cases} f(x) > 0; \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

Если $0 < a < 1$, то необходимо решить следующую систему: $\begin{cases} f(x) > 0; \\ f(x) > a^b. \end{cases}$

Задание 5. Решить неравенство: $\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+2} > 0; \\ \dfrac{x-3}{x+2} < 2^0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-3)(x+2) > 0; \\ x+2 \neq 0. \end{cases} \\ \dfrac{x-3-x-2}{x+2} < 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty); \\ x \neq -2. \end{cases} \\ \dfrac{-5}{x+2} < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty); \\ x \in (-2; +\infty). \end{cases}$$

Необходимо найти пересечение этой системы: $x \in (3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

Раздел 2. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ (11 ч.).

Виды логарифмических неравенств с модулем. Соответственные им системы для решения. Методы решения логарифмических неравенств с модулем. Контроль знаний за весь пройденный курс. Защита проектов.

Основная цель – рассмотрение всех видов логарифмических неравенств с модулем и методов их решения; выявление пробелов в знаниях, разбор самых сложных задач, а также кандидатов на городскую научно-исследовательскую конференцию.

В результате изучения данного раздела, у учащихся не должно остаться недопонимания по решению задач, рассмотренных в элективном курсе. Учащиеся должны уметь отличать вид логарифмического неравенства с модулем и уметь находить к нему определенный метод решения.

2.1. Решение логарифмических неравенств с модулем вида $|f(x)| \vee 0$.

Задание 1. Решить неравенство: $|\log_{10} x - 1| < 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \log_{10} x - 1 < 1; \\ \log_{10} x - 1 > -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ \log_{10} x < 2; \\ \log_{10} x > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x < 10^2; \\ x > 10^0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x < 100; \\ x > 1. \end{cases}$$

Решив систему, получается: $x \in (1; 100)$. **Ответ:** $x \in (1; 100)$.

Задание 2. Решить неравенство $\left|\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 5}\right| \leq 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \dfrac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 5} \leq 1 \ (1); \\ \dfrac{\log_2 x - 1}{\log_x x - 5} \geq -1 \ (2). \end{cases}$$

Решается неравенство (1) данной системы:

$$\frac{\log_2 x - 1 - \log_2 x + 5}{\log_2 x - 5} \leq 0;$$

$$\frac{4}{\log_2 x - 5} \leq 0;$$

$$\log_2 x - 5 = 0;$$

$$\log_2 x = 5;$$

$$x = 32;$$

$$x \in (0; 32].$$

Решается неравенство (2) данной системы:

$$\frac{\log_2 x - 1 + \log_2 x - 5}{\log_2 x - 5} \geq 0;$$

$$\frac{2\log_2 x - 6}{\log_2 x - 5} \geq 0;$$

$$2\log_2 x - 6 = 0;\qquad \log_2 x - 5 = 0;$$
$$2\log_2 x = 6;\qquad \log_2 x = 5;$$
$$\log_2 x = 3;\qquad x = 32.$$
$$x = 8.$$

Решив систему, получаем: $x \in (0; 8]$. **Ответ:** $x \in (0; 8]$.

Задание 3. Решить неравенство: $\log_{10}|x+2| > \log_{10}(x+2)$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} |x+2| > (x+2); \\ x+2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2 > x+2; \\ x+2 < -(x+2); \end{array}\right. \\ x+2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 \cdot x > 0; \\ x+2 < -x-2; \end{array}\right. \\ x > -2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset; \\ 2x < -4; \end{array}\right. \\ x > -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset; \\ x < -2; \end{array}\right. \\ x > -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2; \\ x > -2. \end{cases}$$

Решением данного неравенства: $x \in \emptyset$. **Ответ:** решений нет.

Задание 4. Решить неравенство: $\log_{|x+3|-4} 6 \geq 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x+3|-4 > 1 \\ 6 \geq |x+3|-4 \end{cases} \quad (1); \\ \begin{cases} 0 < |x+3|-4 < 1 \\ 6 \geq |x+3|-4 \end{cases} \quad (2). \end{array}\right.$$

Решается система (1): $\begin{cases} |x+3|-4 > 1; \\ 6 \geq |x+3|-4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+3| > 5; \\ |x+3| \leq 10. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+3 > 5; \\ x+3 < -5. \end{array}\right. \\ \begin{cases} x+3 \leq 10; \\ x+3 \geq -10. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2; \\ x < -8. \end{array}\right. \\ \begin{cases} x \leq 7; \\ x \geq -13. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -8) \cup (2; +\infty); \\ x \in [-13; 7]. \end{cases}$$

Решение системы (1): $x \in [-13; 8) \cup (2; 7]$.

Решается система (2): $\begin{cases} 0 < |x+3|-4 < 1; \\ 6 \geq |x+3|-4. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x+3| > 0; \\ |x+3| < 1; \\ |x+3| \geq 10. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \neq -3; \\ \begin{cases} x+3 < 1; \\ x+3 > -1. \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x+3 \geq 10; \\ x+3 \leq -10. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -2; \\ x > -4. \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 7; \\ x \leq -13. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-4; -2); \\ x \in (-\infty; -13] \cup [7; +\infty). \end{cases}$$

Решение системы (2): $x \in \emptyset$.

Решением данного неравенство является объединение решений этих систем: $x \in [-13;8) \cup (2;7]$. **Ответ:** $x \in [-13;8) \cup (2;7]$.

Задание 5. Решить неравенство: $lg\,|x| > lg\,|x+3|$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе: $\begin{cases}|x| > |x+3|;\\ |x+3| > 0.\end{cases}$

Необходимо решить оба неравенства и найти пересечение их решений:

$$\begin{cases}|x| > |x+3|;\\ |x+3| > 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(|x|)^2 > (|x+3|)^2;\\ x+3 \neq 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-(x+3)^2 > 0;\\ x \neq -3.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-x-3)(x+x+3) > 0;\\ x \neq -3.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3(2x+3) > 0;\\ x \neq -3.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-3(2x+3) > 0;\\ x \neq -3.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \in \left(-\infty;-\frac{3}{2}\right);\\ x \in (-\infty;-3) \cup (-3;+\infty).\end{cases}$$

Решением данной системы является пересечение решений этих двух неравенств: $x \in (\infty;-3) \cup (-3;-\frac{3}{2})$. **Ответ:** $x \in (\infty;-3) \cup (-3;-\frac{3}{2})$.

Задание 6. Решить неравенство: $\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x} < 0$.

Решение. Данное неравенство имеет вид $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$. Оно выполняется, когда обе части имеют разные знаки. Записывается совокупность двух систем:

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{0,3}|x-2| > 0;\\ x^2-4x < 0.\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{0,3}|x-2| < 0;\\ x^2-4x > 0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-2| > 0;\\ |x-2| < 1;\\ x(x-4) < 0.\end{cases}\\ \begin{cases}|x-2| > 0;\\ |x-2| > 1;\\ x(x-4) > 0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \neq 2;\\ \begin{cases}x < 3\\ x > 1\end{cases};\\ x \in (0;4).\end{cases}\\ \begin{cases}x \neq 2;\\ \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<1\end{array}\right.;\\ x(-\infty;0) \cup (4;\ +\infty).\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty); \\ x \in (1; 3); \\ x \in (0; 4). \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty); \\ x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty); \\ x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty). \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (1; 2) \cup (2; 3); \\ x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty). \end{array}\right.$$

Общее решение данного неравенства является промежуток: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Ответ:$x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Итоговая контрольная работа, позволяющая оценить степень усвоения учащимися программы данного элективного курса.

Вариант 1

Задание 1. Решить неравенство: $|\log_2 x - 2| < 1$.

Задание 2. Решить неравенство: $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}|x - 3| \geq -2$.

Задание 3. Решить неравенство: $\log_4(x^2 - 5) < \log_4(\frac{7}{3}|x| - 3)$.

Задание 4. Решить неравенство: $\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}$.

Вариант 2

Задание 1. Решить неравенство: $|3 - \log_2 x| < 2$.

Задание 2. Решить неравенство: $\log_{\sqrt{7}}|\mathrm{x} + 2| < 6$.

Задание 3. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(3 - x^2) > \log_{\frac{1}{3}}(4|x| - 2)$.

Задание 4. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2} \leq 0$.

Критерии оценивания:

Работа оценивается *отметкой «5» («отлично»)*, если:

– работа выполнена полностью;

– в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

– в решениях нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Работа оценивается отметкой «4» («хорошо»), если:

– работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;

– допущены одна ошибка или есть два – три недочета, не являющихся следствием незнания или непонимания учебного материала.

Работа оценивается отметкой «3» («удовлетворительно»), если:

– допущено более одной ошибки или более двух-трех недочетов, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Работа оценивается отметкой «2» («неудовлетворительно»), если:

– допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Приведем ***темы проектов*** для учащихся в рамках данного элективного курса. Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы учащимися при выполнении индивидуальных или групповых проектов, или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

Темы выдаются в начале изучения программы. Защита проектов или работ проходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

1. Решение уравнений с модулем.

План работы:

1. Выявить методы решения уравнений с модулем.
2. Рассмотреть задачный материал из ЕГЭ по теме исследования.
3. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Хамедова Н.А. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля [Электронный ресурс] / Н.А. Хамедова // Вестник современной науки. – 2016. - №3-1(15). – С.18 – 20. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25896782. - Последнее обновление 13.05.2020.

2. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. / Вавилов, В.В., Мельников, И.И., Олехник, С.Н., Пасиченко, П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.

3. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств / Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 93с.

2. Графическое решение неравенств с модулем.

План работы:

1. Рассмотреть графики основных функций и их свойства.
2. Рассмотреть задачный материал по теме исследования.
3. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Никольская И.Л. Факультативный курс по математике. М.: Просвещение, 1995.
2. Говоров В.М. и др. Сборник конкурсных задач по математике. - М.: Просвещение, 1983.
3. Мерзляк А.Г. и др. Алгебраический тренажер. - М.: Илекса, 2001

3. Абсолютная величина в задачах ЕГЭ.

План работы:

1. Выявление типологии задач ЕГЭ с модулем.
2. Составление системы задач и решение примеров по теме исследования.
3. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств / Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 93с.

4. Нестандартные способы решения неравенств с модулем.

План работы:

1. Изучение свойств модуля.
2. Изучение метода знакотождественных множителей.
3. Решение задач по данной теме.
4. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Далингер В.А. Различные способы решения неравенств вида $|f(x)| + |g(x)| > |f(x) + g(x)|$/ В.А. Далингер, В.А., Е.А. Пустовит// Ученые записки Забайкальского государственного гуманитарно-педагогического университета им. Н.Г. Чернышевского. - 2012.- № 6 (47). - С. 124-128.
2. Шестаков С.А. ЕГЭ 2019. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень). – М.: МЦНМО, 2019. – 352 с.

5. Логарифмы, и их практическое применение в жизни человека.

План работы:

1. Проанализировать материал о создании логарифмов.
2. Изучить, в каких сферах жизни применяется логарифм.
3. Систематизировать материал.
4. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. – М.: Аванта+, 1998.
2. Шахмейстер А.Х. Логарифмы. -2-е изд., исправленное и дополненное - СПб.: «ЧеРо-наНеве», 2005.

6. Метод интервалов.

План работы:

1. Найти необходимый теоретический материал о методе интервалов.
2. Подобрать и решить задачный материал по теме исследования.
3. Составить презентацию по теме исследования.

Рекомендуемая литература:

1. Олехник С.Н. Потапов М.К. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. М.: Изд-во Факториал, 1997. - 219с.

2. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения. М.: Изд-во Просвещение 2005. — 112 с.

3. Садовничий Ю.В. ЕГЭ. Практикум по математике. Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. М.: Изд-во Легион 2015 - 128 с.

Список рекомендуемой для учителя литературы

1. Вавилов В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. – М.: Наука., 1988. – 240 с.

2. Власова А.П. Показательная и логарифмическая функции в задачах и примерах / А.П. Власова, Н.И. Латанова, Н.В. Евсеева – М.: 2010. – 60 с.

3. Ивлев Б.М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учеб. пособие для 10-11 кл. ср. пед. шк. / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 19900. – 48 с.

4. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – Мю: Мнемозина, 2009. – 366 с.

5. Коропец З.Л. Нестандартные методы решения неравенств и их систем / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева, Орел, 2012. – 125 с.

6. Майсеня Л.И. Алгебраические уравнения и неравенства, функции, логарифмы: учеб. пособие для учащихся колледжей / Л.И. Майсеня, С.Б. Махнач, Д.И. Радюк, Н. И. Романовская. – 2006. – 226 с.

7. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс. Учебник для школы и класса с углубленным изучением математики [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М.: Мнемозина, 2006. – 439 с.

8. Марач С.М. Задачи М.И. Скинави с решениями / С.М. Марач, П.В. Полуносик. – Мн.: 1998. – 448 с.

9. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

10. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: учебник / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 256 с

11. Мордкович, А.Г. Алгебра. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

12. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: учебник / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 256 с

13. Потапов М.К. Функции. Уравнения. Неравенства / М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко, Т.М. Вуколова. – М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1995. – 164 с.

14. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств / Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 93с.

15. Цыпкин А.Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – 3-е изд., испр. – М.: 2007. – 640 с.

Список статей по журналу «Квант»

1. Берколайко С. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств / С. Берколайко – 1970. - №8 С.2-11.

2. Лопшиц А. Функциональные уравнения / А. Лопшиц – 1975. - №1. - С. 12-16.

Список рекомендуемой для учащихся литературы

1. Ивлев Б.М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учеб. пособие для 10-11 кл. ср. пед. шк. / Б.М. Ивлев, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, С.И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 19900. – 48 с.

2. Майсеня Л.И. Алгебраические уравнения и неравенства, функции, логарифмы: учеб. пособие для учащихся колледжей / Л.И. Майсеня, С.Б. Махнач, Д.И. Радюк, Н.И. Романовская. – 2006. – 226 с.

3. Марач С.М. Задачи М.И. Скинави с решениями / С.М. Марач, П.В. Полуносик. – Мн.: 1998. – 448 с.

4. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств / Ю.В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 93с.

5. Цыпкин А.Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – 3-е изд., испр. – М.: 2007. – 640 с.

Список статей по журналу «Квант»

1. Агаханов Н. XXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников / С. Агаханов // 1997. - №5. – С.46-48.

2. Ваховский Е. Когда помогают графики. / Е. Ваховский, А. Рывкин // 1975/ - №2. – С.43-48.

3. Габович И. Сколько корней имеет уравнение? / Габович И., Горнштейн П. // 1985/ - №3. – С.43-46.

Таким образом, реализация данного элективного курса в старшей школе позволит учащимся расширить их знания о методах решения различных видов логарифмических неравенств с модулем.

§7. Системы задач по теме «Решение неравенств с модулем» для обучающихся старших классов с углубленным изучением математики

Задачи являются одним из основных средств, которые используются при обучении математике для формирования знаний, умений и навыков учащихся. Посредством решения задач реализуется как образовательная, так и воспитательная и развивающая цели.

К системам задач существуют различные требования. В учебном пособии Е.И. Лященко [24] выделены требования к системам задач на усвоение понятия и его определения, на усвоение теоремы и ее доказательства, на усвоение правил. Г.И. Саранцев приводит требования к системам задач на формирование понятий, на усвоение теоремы и ее доказательства.

Л.В. Виноградова в учебном пособии выделяет «следующие принципы отбора и составления систем упражнений:

1. Принцип систематичности. В системе задач должны присутствовать упражнения на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного, упражнения, связывающие новый факт с ранее изученным материалом, и упражнения на систематизацию изученного материала.

2. Принцип последовательности. Упражнения располагаются в порядке возрастания сложности: от менее сложного к более сложному.

3. Принцип прочности. Данный принцип проявляется в наличии однотипных упражнений» [8, С. 252].

После изучения различных систем задач, можно сделать вывод о том, что для темы «Неравенства с модулем» больше всего подходит требования, которые выделила Л.В. Виноградова. С учетом этих требований к системам упражнений, нами были составлены *системы задач на тему: «Решение неравенств с модулем»*, выделенные с учетом методов их решения.

1. Система задач на тему «Решение неравенства с модулем на основе геометрического смысла»

Как уже отмечалось, на координатной прямой расстояние между двумя точками определяется при помощи модуля, его геометрического смысла. Чтобы решить неравенство данным способом, нужно понимать, что под знаком модуля рассматривается взаимное расположение точки с координатой x и другим числом на этой прямой. А справа от знака неравенства искомое расстояние между ними, которое может быть либо больше, либо меньше него.

Задача 1 [58, С. 97]. Решить неравенство $|x| < 3$.

Решение. Если перевести аналитическую модель $|x| < 3$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 0) < 3$, т.е. удалены от точки 0 на расстояние, меньшее 3.

На 3 единиц от точки с координатой 0 удалены на координатной прямой точки с координатами -3 и 3, а менее чем на 3 единиц, точки, заключенные между ними. Значит, искомое множество есть интервал $(-3; 3)$.

Ответ: $x \in (-3; 3)$.

Задача 2 [15, С. 211]. Решить неравенство $|x - 3| < 6$.

Решение. Если перевести аналитическую модель $|x - 3| < 6$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 3) < 6$, т.е. удалены от точки 3 на расстояние, меньшее 6.

На 6 единиц от точки с координатой 3 удалены на координатной прямой точки с координатами -3 и 9, а менее чем на 3 единиц, точки, заключенные между ними. Значит, искомое множество есть интервал $(-3; 9)$.

Ответ: $x \in (-3; 9)$.

Задача 3 [15, С.211]. Решить неравенство $|x - 3,4| > 0$,6.

Решение. Если перевести аналитическую модель $|x - 3{,}4| > 0{,}6$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 3{,}4) > 0{,}6$; т.е. удалены от точки 3,4 на расстояние, большее 0,6.

На 0,6 от точки с координатой 3,4 удалены на координатной прямой точки с координатами 2,8 и 4, а больше чем на 0,6, точки, которые находятся левее и правее чем точки 2,8 и 4 соответственно. Значит, решением данного неравенства является: $x \in (-\infty; 2{,}8) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2{,}8) \cup (4; +\infty)$.

Задача 4 [36, С. 184]. Решить неравенство $|5x + 10| \le 7$.

Решение. Сначала необходимо разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число 5, получается: $|x + 2| \le \frac{7}{5}$. Если перевести аналитическую модель $|x + 2| \le \frac{7}{5}$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; -2) \le \frac{7}{5}$, т.е. удалены от точки -2 на расстояние, меньше или равно чем $\frac{7}{5}$.

На $\frac{7}{5}$ от точки с координатой -2 удалены на координатной прямой точки с координатами $-\frac{17}{5}$ и $-\frac{3}{5}$, а меньше или равно чем на $\frac{7}{5}$, заключенные между ними (включая их). Значит, искомое множество - отрезок $\left[-\frac{17}{5}; -\frac{3}{5}\right]$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{17}{5}; -\frac{3}{5}\right]$.

Задача 5 [36, С. 182]. Решить неравенство $|x - 3| + |x + 5| \le 12$.

Решение. Переведем аналитическую модель на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условияю $\rho(x, 3) + \rho(x, -5) \le 12$, т.е сумма расстояний каждой из таких точек от точек 3 и -5 меньше или равна 12. Точки 5 и -7 удовлетворяют условию $\rho(x, 3) + \rho(x, -5) = 12$. В самом деле:

$$\rho(5, 3) + \rho(5, -5) = 2 + 10 = 12.$$

$$\rho(-7, 3) + \rho(-7, -5) = 10 + 2 = 12.$$

Условию же $\rho(x,3)+\rho(x,-5)\leq 12$ удовлетворяют точки из интвервала $[-7;5]$. **Ответ:** $x\in[-7;5]$.

2. Система задач на тему «Решение неравенства с модулем при помощи определения модуля»

Основной прием решения неравенств с переменной под знаком модуля состоит в том, чтобы, используя определения и свойства модуля числа, освободиться от знака модуля, заменяя данное неравенство равносильным ему неравенством, системой или совокупностью неравенств.

Если необходимо решить неравенства вида $|f(x)|>g(x)$, то нужно перейти к равносильной ему совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)>g(x); \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.$, решить оба неравенства и найти объединение их решений.

Если необходимо решить неравенства вида $|f(x)|<g(x)$, то нужно перейти к равносильной ему системе неравенств $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x). \end{cases}$, решить оба неравенства и найти пересечение их решений.

Задача 1 [58, С. 97]. Решить неравенство $|2x-1|\leq 3$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2x-1\leq 3; \\ 2x-1\geq -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\leq 4; \\ 2x\geq -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq 2; \\ x\geq -1. \end{cases}$$

Решением системы является пересечение данных промежутков: $x\in[-1;2]$. **Ответ:** $x\in[-1;2]$.

Задача 2 [34, С. 28]. Решить неравенство $|4x-12|+|5x-15|>9x-9$. **Решение.** Необходимо вынести общий множитель в правой части неравенства: $4|x-3|+5|x-3|>9(x-1)$.

Далее приводятся подобные слагаемые и делятся обе части неравенства на 9: $9|x-3|>9(x-1)$; $|x-3|>(x-1)$.

Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x-3>x-1; \\ x-3<-x+1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -3>-1; \\ 2x<4. \end{array}\right. \Rightarrow x<2.$$

Ответ: $x\in(-\infty;2)$.

Задача 3 [34, С. 29]. Решить неравенство $|x^2+7x| \le 4x+10$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2+7x \le 4x+10; \\ x^2+7x \ge -4x-10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+3x-10 \le 0; \\ x^2+11x+10 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-5; 2]; \\ x \in (-\infty: -10] \cup [-1; +\infty). \end{cases}$$

Решением системы является пересечение данных промежутков: $x \in [-1; 2]$. **Ответ:** $x \in [-1; 2]$.

Задача 4 [34, 187]. Решить неравенство $\left|\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-1}\right| \cdot |x^2+x-2| > 1$.

Решение. Область допустимых значений: $x \ne -2, x \ne 1$.

Необходимо преобразовать выражения, стоящие под знаком модуля:

$$\left|\frac{x(x-1)+x(x+2)}{(x+2)(x-1)}\right| \cdot |(x+2)(x-1)| > 1;$$

$$\left|\frac{2x^2+x}{(x+2)(x-1)} \cdot (x+2)(x-1)\right| > 1;$$

$$|2x^2+x| > 1.$$

Данное неравенство равносильно следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+x > 1; \\ 2x^2+x < -1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-1 > 0; \\ 2x^2+x+1 < 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1) > 0; \\ x \in \emptyset. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right); \\ x \in \emptyset. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ неравенства, получим ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1;\ +\infty)$. **Ответ:** $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

Задача 5 [59, С. 435]. Решить неравенство $\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \ge \frac{1}{2}$.

Решение. Необходимо привести правую часть неравенства к логарифму с основанием x^2: $\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \ge \log_{x^2} x$.

Далее решается логарифмическое неравенство, отдельно рассматриваются каким может быть основание логарифма, и какое будет соответственно подлогарифмическое выражение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2 > 1; \\ \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geq x. \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1; \\ \dfrac{4x-5}{|x-2|} \leq x. \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

Решается отдельно система (1):

$$\begin{cases} x^2 > 1; \\ \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geq x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0; \\ 4x - 5 \geq |x-2|x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty); \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 \geq 0; \\ x^2 - 2x \leq 4x - 5. \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 < 0; \\ x^2 - 2x \geq 5 - 4x. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty); \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x^2 + 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty); \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2; \\ x \in [1; 5]. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2; \\ x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{6}\right] \cup \left[-1+\sqrt{6};\ +\infty\right). \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty); \\ \left[\begin{array}{l} x \in [2; 5] \\ x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{6}\right] \cup [-1+\sqrt{6};\ 2) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty); \\ x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{6}\right] \cup \left[-1+\sqrt{6};\ 2\right) \cup (2; 5]. \end{cases}$$

Решением системы (1) является: $x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{6}\right] \cup [-1+\sqrt{6};\ 2) \cup (2; 5]$

Решается отдельно система (2):

$$\begin{cases} 0 < x^2 < 1; \\ \dfrac{4x-5}{|x-2|} \leq x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 1) \\ 4x - 5 \leq |x-2|x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 1); \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x^2 + 2x - 5 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 1); \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2; \\ x \in (-\infty;\ 1] \cup [5;\ +\infty). \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2; \\ x \in \left[-1-\sqrt{6};\ -1+\sqrt{6}\right]. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 1); \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2; \\ x \in (-\infty;\ 1] \cup [5;\ +\infty). \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2; \\ x \in \left[-1-\sqrt{6};\ -1+\sqrt{6}\right]. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 1); \\ \left[\begin{array}{l} x \in [5;\ +\infty); \\ x \in \left[-1-\sqrt{6};\ -1+\sqrt{6}\right]. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 1); \\ x \in \left[-1-\sqrt{6};\ -1+\sqrt{6}\right] \cup [5;\ +\infty). \end{cases}$$

Решением системы (2) является:$x \in (0; 1)$.

Решением исходного неравенства является объединение решений систем (1) и (2). **Ответ:** $x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{6}\right] \cup [-1+\sqrt{6};\ 2) \cup (2; 5]$.

3. Система задач на тему «Решение неравенства с модулем методом возведения в квадрат»

Неравенство вида $|f(x)| \vee |g(x)|$ решается следующим образом:

$$|f(x)| \vee |g(x)| \Rightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \Rightarrow \big(f(x) - g(x)\big) \cdot \big(f(x) + g(x)\big) \vee 0.$$

Задача 1 [58, С. 97]. Решить неравенство $|x+1| > |x-1|$.

Решение. Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$(x+1)^2 > (x-1)^2;\ 2 \cdot 2x < 0;$$

$$x \in (0;\ +\infty).\ \textbf{Ответ: } x \in (0;\ +\infty).$$

Задача 2 [36, С. 186]. Решить неравенство $|5x+3| < |2x-1|$.

Решение. Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$(5x+3)^2 < (2x-1)^2;$$

$$(5x+3-2x+1)(5x+3+2x-1) < 0;$$

$$(3x+4)(7x+2) < 0;\ x \in \left(-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{7}\right).$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{7}\right)$.

Задача 3 [36, С. 186]. Решить неравенство $|x^2 - 7x + 3| <$ $|x^2 + 5x - 10|$.

Решение. Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$(x^2-7x+3)^2<(x^2+5x-10)^2;$$

$$(x^2-7x+3-x^2-5x+10)(x^2-7x+3+x^2+5x-10)<0;$$

$$(-12x+13)(2x^2-2x-7)<0.$$

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2};\ \frac{13}{12}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2};\ +\infty\right).$$

Ответ: $x\in\left(\frac{\mathbf{1-\sqrt{15}}}{\mathbf{2}};\ \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{12}}\right)\cup\left(\frac{\mathbf{1+\sqrt{15}}}{\mathbf{2}};\ +\infty\right)$.

Задача 4 [36, С. 186]. Решить неравенство $\left|\frac{1-x}{1+3x}\right|>|1+x|$.

Решение. Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$\left(\frac{1-x}{1+3x}\right)^2>(1+x)^2;$$

$$\left(\frac{1-x}{1+3x}+1+x\right)\left(\frac{1-x}{1+3x}-(1+x)\right)>0;$$

Приводится общий знаменатель, записывается под одну черту:

$$\left(\frac{1-x+1+x+3x+3x^2}{1+3x}\right)\left(\frac{1-x-1-x-3x-3x^2}{1+3x}\right)>0;$$

$$\frac{(3x^2+3x+2)(3x^2+5x)}{1+3x}<0;$$

$$(3x^2+3x+2)>0,\text{ т.к } D<0.$$

$$\frac{(3x^2+5x)}{1+3x}<0; x\in\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right).$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)$.

Задача 5 [14, С. 243]. Решить неравенство $(0{,}2)^{|-x|}>(0{,}04)^{|x-9|}$.

Решение. Показательное неравенства приводится к одному основанию и рассматривают показатели: $(0{,}2)^{|-x|}>(0{,}2)^{2^{|x-9|}}$;

$$|-x|<2|x-9|;$$

$$|x| < |2x - 18|.$$

Записывается соответственное выражение, переносится все в левую сторону и применяется разность квадратов:

$$x^2 < (2x - 18)^2;$$

$$(x - 2x + 18)(x + 2x - 18) < 0;$$

$$(-x + 18)(3x - 18) < 0; x \in (-\infty; 6)(18;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 6)(18;\ +\infty)$.

4. Система задач на тему «Решение неравенства с модулем графическим методом»

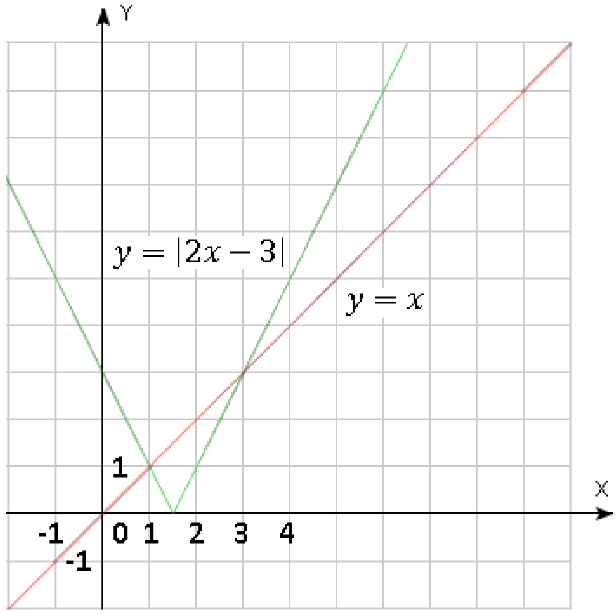
Графический метод решения неравенств с модулем состоит в том, чтобы разбить левую и правую часть неравенства на две функции, построить их в одной прямоугольной системе координат. Если дано неравенство вида $f(x) > g(x)$, то нужно найти, на каком промежутке график функции $f(x)$ находится выше чем график функции $g(x)$. Если дано неравенство вида $f(x) < g(x),$ то необходимо определить, на каком промежутке график функции $f(x)$ находится ниже чем график функции $g(x)$.

Задача 1 [30, С. 356]. Решить неравенство $|2x - 3| < x$.

Решение. Необходимо построить графики функций $y = |2x - 3|$ и $y = x$ (Рис. 7).

Решениями неравенства являются только те числа x (точки x оси абсцисс), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = |2x - 3|$ расположены ниже прямой $y = 3$.

Следовательно, решением исходного неравенства является интервал $(1; 3)$.



Ответ: $x \in (1; 3)$.

Рис. 7.

Задача 2 [58, С. 97]. Решить неравенство $|x + 1| > |x - 1|$.

Решение. Необходимо построить графики функций $y = |x + 1|$ и $y = |x - 1|$ (Рис. 8).

Решениями неравенства являются только те числа x (точки x оси абсцисс), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = |x + 1|$ расположены выше прямой $y = |x - 1|$.

Следовательно, решением исходного неравенства является интервал $(0;\ +\infty)$.

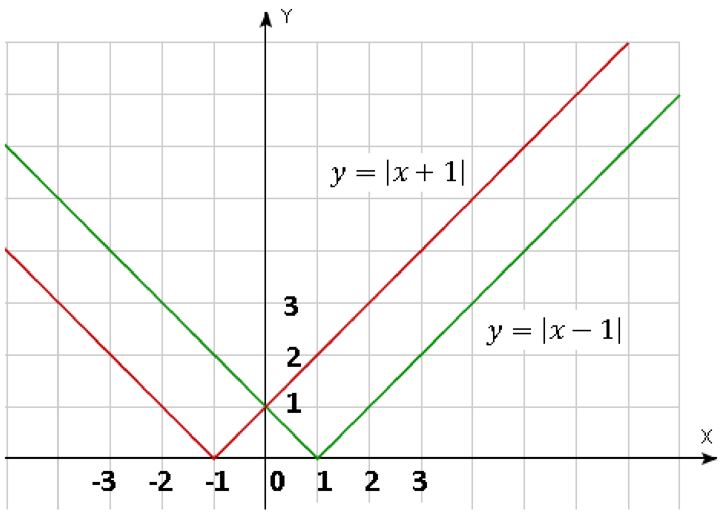


Рис. 8.

Ответ: $x \in (0;\ +\infty)$.

Задача 3 [15, С. 211]. Решить неравенство $|x^2 - 7x + 12| \geq 6$.

Решение. Необходимо построить графики функций $y = |x^2 - 7x + 12|$ и $y = 6$ (Рис. 9).

Решениями неравенства являются только те числа x (точки x оси абсцисс), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = |x^2 - 7x + 12|$ расположены выше прямой $y = 6$ или совпадают.

Следовательно, решением исходного неравенства является: $x \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$.

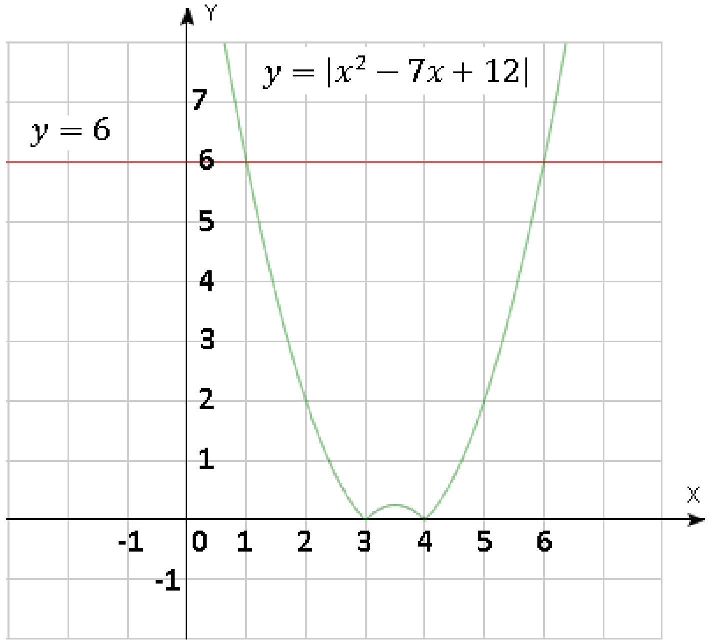


Рис. 9.

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$.

Задача 4 [59, С. 425]. Решить неравенство $\left|2 - \sqrt{x+2}\right| > x - 2$.

Решение. Необходимо построить графики функций $y = \left|2 - \sqrt{x+2}\right|$ и $y = x - 2$ (Рис. 10).

Решениями неравенства являются только те числа x (точки x оси абсцисс), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = \left|2 - \sqrt{x+2}\right|$ расположены выше прямой $y = x - 2$.

Следовательно, решением исходного неравенства является: $x \in [-2;\ 2)$.

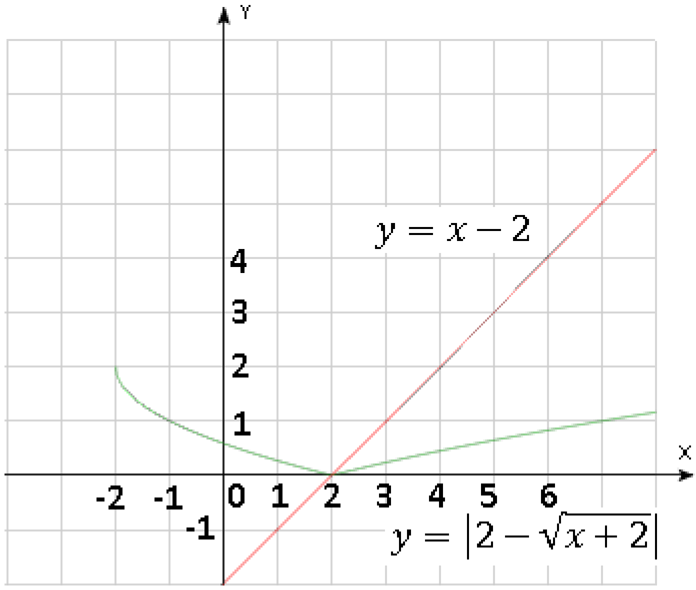


Рис. 10.

Ответ: $x \in [-2;\ 2)$.

Задача 5 [36, 73]. Решить неравенство $3^{|x|} \leq \cos 2x$.

Решение. Необходимо построить графики функций $y = 3^{|x|}$ и $y = \cos 2x$ (Рис. 11).

Решениями неравенства являются только те числа x (точки x оси абсцисс), для каждого из которых соответствующие точки графика функции $y = 3^{|x|}$ расположены ниже $y = \cos 2x$ или совпадают.

Следовательно, решением исходного неравенства является: $x \in \{1\}$.

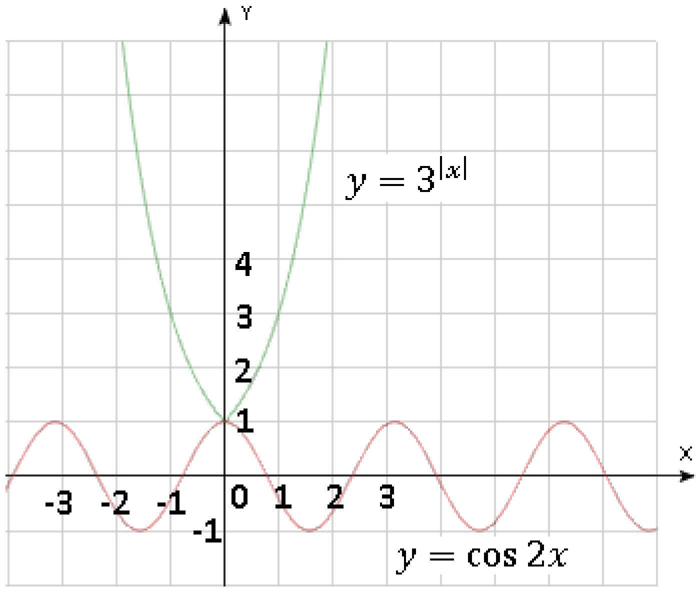


Рис. 11.

Ответ: 1.

5. Система задач на тему «Решение неравенства с модулем методом замены переменной»

Метод замены переменной при решении неравенств с модулем, нужно применять лишь в том случае, когда можно перейти к более простому неравенству и вообще избавиться от знака модуля, решив линейное, квадратное или показательное неравенство и др.

Задача 1 [36, С. 188]. Решить неравенство $x^2 - 4|x| + 3 > 0$.

Решение. Производится замена $t = |x|$:

$$t^2 - 4t + 3 > 0;$$

$$t < 1; t > 3.$$

Выполняется обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l}|x| < 1;\\ |x| > 3.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x < 1;\\ x > -1.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x > 3;\\ x < -3.\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x \in (-1; 1);\\ x \in (-\infty;\ -3) \cup (3;\ +\infty).\end{array}\right.$$

Решением данной совокупности является объединение решений двух неравенств: $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-1; 1) \cup (3;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-1; 1) \cup (3;\ +\infty)$.

Задача 2 [36, С, 188]. Решить неравенство $(x-2)^2 - 4|x-2| - 96 < 0$.

Решение. Производится замена $t = |x - 2|$:

$$t^2 - 4t - 96 < 0;$$

$$t < 12; t > -8.$$

Выполняется обратная замена:

$$\left\{\begin{array}{l}|x-2| < 12;\\ |x-2| > -8.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x-2 < 12;\\ x-2 > -12.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x-2 > -8;\\ x-2 < 8.\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x < 14;\\ x > -10.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x > -6;\\ x < 10.\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x \in (-10; 14);\\ x \in R.\end{array}\right.$$

Решением данной системы является пересечение решений двух неравенств: $x \in (-10; 14)$. **Ответ:** $x \in (-10; 14)$.

Задача 3 [36, С, 188]. Решить неравенство $(x^2 - 5x)^2 - 5|5x - x^2| - 6 < 0$. **Решение.** Производится замена $t = |5x - x^2|$:

$$t^2 - 5t - 6 < 0;$$

$$t < 6; t > -1.$$

Выполняется обратная замена: $\begin{cases} |5x - x^2| < 6; \\ |5x - x^2| > -1. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5x - x^2 < 6; \\ 5x - x^2 > -6. \end{cases} \\ x \in R. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0; \\ x^2 - 5x - 6 < 0. \end{cases} \\ x \in R. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-1; 2) \cup (3; 6); \\ x \in R. \end{cases}$$

Решением данной системы является пересечение решений двух неравенств: $x \in (-1; 2) \cup (3; 6)$. **Ответ:** $x \in (-1; 2) \cup (3; 6)$.

Задача 4 [14, С. 123]. Решить неравенство $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0; \\ 2^x + 2^x \geq 2^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x < 0; \\ 2^x + 2^{-x} \geq 2^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \quad (2) \end{array} \right.$$

Решается система (1):

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ 2^x + 2^x \geq 2^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; \\ 2^{x+1} \geq 2^{\frac{3}{2}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; \\ x + 1 \geq \dfrac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; \\ x \geq 0{,}5. \end{cases}$$

Решение систем (1) : $x \in [0{,}5; +\infty)$.

Решается система (2): $\begin{cases} x < 0; \\ 2^x + 2^{-x} \geq 2^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

Решение второго неравенства системы:

$$2^x + 2\frac{1}{2^x} - 2^{\frac{3}{2}} \geq 0.$$

Выполняется замена $t = 2^x$: $t + \frac{1}{t} - 2^{\frac{2}{3}} \geq 0$;

$$t^2 - 2^{\frac{3}{2}}t + 1 = 0; D = 8 - 4 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2}{2} = \sqrt{2} \pm 1.$$

Выполняется обратная замена:

$$\begin{cases} t \leq \sqrt{2} - 1; \\ t \geq \sqrt{2} + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \leq \sqrt{2} - 1; \\ 2^x \geq \sqrt{2} + 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 2^x \le \log_2\left(\sqrt{2}-1\right); \\ \log_2 2^x \ge \log_2\left(\sqrt{2}+1\right). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \log_2\left(\sqrt{2}-1\right); \\ x \ge \log_2\left(\sqrt{2}+1\right). \end{cases}$$

Решение систем (2) : $x \in \left(-\infty;\ \log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$.

Решением исходного неравенства является объединение решений систем (1) и (2): $x \in\ \left(-\infty;\ \log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\ \cup [0{,}5; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty;\ \log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\ \cup [0{,}5; +\infty)$.

Задача 5 [36, С. 188]. Решить неравенство $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left|x + \frac{1}{x}\right| - 3 \le 0$.

Решение. Необходимо выполнить замену: $t = \left|x + \frac{1}{x}\right|$. Тогда:

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2};$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2;$$

Получается следующее уравнение: $t^2 - 4t - 5 \le 0$.

$$t \ge -1; t \le 5.$$

Выражение $\left|x + \frac{1}{x}\right|$ всегда больше или равно -1.

Выполняется обратная замена: $\left|x + \frac{1}{x}\right| \le 5$.

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} \le 5; \\ x + \dfrac{1}{x} \ge -5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1 - 5x}{x} \le 0; \\ \dfrac{x^2 + 1 + 5x}{x} \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}; 0\right)\left(0; \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right); \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right). \end{cases}$$

Решением исходного неравенства является пересечение решений неравенств системы: $x \in \left(\frac{-5-\sqrt{21}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{-5-\sqrt{21}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

§8. Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе ГБОУ СОШ с. Васильевка Ставропольского района Самарской области в период прохождения преддипломной практики (с 25 апреля по 26 мая 2020 г.). В эксперименте участвовало 5 учеников 11-го класса, обучающиеся по учебнику, ориентированному на общеобразовательные классы, А.Г. Мордковича.

Целью констатирующего этапа эксперимента – это выявить у учащихся фактический уровень сформированности умения решать неравенства с модулем, применяя различные методы и приемы.

Для этого была составлена контрольная работа, в двух вариантах, которая была предложена учащимся, где представлены следующие *типы задач на нахождение решения неравенства с модулем вида:*

а) $|f(x)| \vee b$; б) $|f(x)| \vee g(x)$; в) $|f(x)| \vee |g(x)|$.

Ниже представлены варианты контрольной работы, где продемонстрировано решение задач.

Вариант 1

Задача 1 [34, С.29]. Решить неравенство $|2x-1|+|6x-3|<12$.

Решение. Необходимо вынести общий множитель во втором модуле: $|2x-1|+3|2x-1|<12$.

Далее приводятся подобные слагаемые и делятся обе части неравенства на 4: $4|2x-1|<12$; $|2x-1|<3$.

После необходимо разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число 2: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$.

Если перевести аналитическую модель $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$. на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho\left(x;\frac{1}{2}\right)<\frac{3}{2}$, т.е. удалены от точки $\frac{1}{2}$ на расстояние, меньшее чем $\frac{3}{2}$. На $\frac{3}{2}$ от точки с координатой $\frac{1}{2}$ удалены на координатной прямой точки, с координатами -1и 2, а меньше чем на $\frac{1}{2}$, точки, которые находятся между этими числами.

Значит, решением данного неравенства является: $x \in (-1; 2)$.

Ответ: $x \in (-1; 2)$.

Задача 2 [14, С. 59]. Решить неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-\frac{x^2}{2}} \geq 3^{|3x-12|+2x}$.

Решение. Необходимо привести обе части неравенства к основанию 3:

$$3^{-2x+x^2} \geq 3^{|3x-12|+2x}.$$

Решается показательное неравенство переходом к показателям степеней и упрощается: $2x + x^2 \geq |3x - 12| + 2x$;

$$|3x - 12| \leq x^2 - 4x.$$

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 3x - 12 \leq x^2 - 4x; \\ 3x - 12 \geq x^2 - 4x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0; \\ x^2 - x - 12 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3] \cup [4;\ +\infty); \\ x \in (-\infty; -3] \cup [4;\ +\infty). \end{cases}$$

Решением системы является пересечение данных промежутков:$x \in (-\infty; -3] \cup [4;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [4;\ +\infty)$.

Задание 3 [25, С. 36]. Решить неравенство: $\log_{0,7}|x - 3| \geq \log_{0,49}(x^2 + 12x + 36)$.

Решение. Необходимо выполнить преобразование данного неравенства используя свойства логарифма: $\log_{0,7}|x - 3| \geq \log_{0,49}(x + 6)^2$;

$$\log_{0,7}|x - 3| \geq \log_{0,7}|x + 6|.$$

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} |x - 3| \leq |x + 6|; \\ |x - 3| > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (|x - 3|)^2 - (|x + 6|)^2 \leq 0; \\ x - 3 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x - 3)^2 - (x + 6)^2 \leq 0; \\ x \neq 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9(2x + 3) \leq 0; \\ x \neq 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right); \\ x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty). \end{cases}$$

Решением данной системы является пересечение решений этих двух неравенств: $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$. **Ответ:** $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Вариант 2

Задача 1 [36, С. 184]. Решить неравенство $|3x-9| \geq 6$.

Решение. Сначала необходимо разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число 3: $|x-3| \geq 2$.

Если перевести аналитическую модель $|x-3| \geq 2$ на геометрический язык, то получится, что нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x;3) > 2$, т.е. удалены от точки 3 на расстояние, большее 2. На 2 единицы от точки с координатой 3 удалены на координатной прямой точки с координатами 1и 5, а больше чем на 2 единицы, точки, которые находятся левее и правее чем 1 и 5 соответственно.

Решением данного неравенства является: $x \in (-\infty; 1] \cup [5;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [5;\ +\infty)$.

Задача 2 [59, С. 430]. Решить неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-\frac{1}{2}x^2} \geq 2^{|2x-10|+x}$.

Решение. Необходимо привести обе части неравенства к основанию 3:

$$2^{-4x+x^2} \geq 2^{|2x-10|+x}.$$

Решается показательное неравенство переходом к показателям степеней и упрощается: $-4x+x^2 \geq |2x-10|+x$;

$$|2x-10| \leq x^2-5x.$$

Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2x-10 \leq x^2-5x; \\ 2x-10 \geq -x^2+5x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-7x+10 \geq 0; \\ x^2-3x-10 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5;\ +\infty); \\ x \in (-\infty; -2] \cup [5;\ +\infty). \end{cases}$$

Решением системы является пересечение данных промежутков: $x \in (-\infty; -2] \cup [5;\ +\infty)$. **Ответ:** $x \in (-\infty; -2] \cup [5;\ +\infty)$.

Задание 3 [25, С. 22]. Решить неравенство: $\left|\log_3{}^2 x - 2\right| \geq |\log_3 x|$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Выполняется замена $t = \log_3 x$:

$$|t^2-2| \geq |t|.$$

$$(t^2-2)^2 \geq (t)^2.$$

$$(t^2-t-2)(t^2+t-2) \geq 0;$$

$$(t-2)(t+1)(t+2)(t-1) \geq 0;$$

$$t \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty).$$

Выполняется обратная замена и находятся решения на промежутках:

Если $t \leq -2$: $\log_3 x \ \leq -2 \Rightarrow x \ \leq \frac{1}{9}$.

Если $-1 \leq t \leq \ 1$:

$$\begin{cases} \log_3 x \geq -1; \\ \log_3 x \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x \geq -\log_3 \dfrac{1}{3}; \\ \log_3 x \leq \log_3 \dfrac{1}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3}; \\ x \leq 3. \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right].$$

Если $t \geq 2$: $\log_3 x \geq 2 \Rightarrow x \geq 9$.

Решением данного неравенства является объединение решений на трех промежутках: $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup \ \left[\frac{1}{3}; 3\right] \cup [9; +\infty)$.

Ответ:$x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup \ \left[\frac{1}{3}; 3\right] \cup [9; +\infty)$.

В Таблице 7 представлены результаты контрольной работы.

Анализ таблицы показывает, что больше всего затруднений у учащихся вызывают задания, где нужно решить неравенство с модулем вида $|f(x)| \vee b$ используя метод решения, на основе геометрической интерпретации модуля. (справилось только 2 человека из 5). Кроме того, большие трудности у учащихся возникают при решении логарифмических неравенств. С этим задание справилось также 40%, один учащийся совсем не приступил к выполнению данного задания.

Таблица 7 - Результаты контрольной работы

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не преступили к заданию
1.	40% (2)	60% (3)	0% (0)
2.	60% (2)	20% (2)	0% (0)
3.	20% (1)	40% (3)	20% (1)

Помимо этого, стоит заметить, что большинство учащихся усвоили метод решения неравенств с модулем на основе определения понятия модуля.

В Таблице 8 представлены выявленные виды ошибок у учащихся при решении неравенств с модулем.

Таблица 8 – Выявленные ошибки учащихся

Задание 1. Виды ошибок		
Неверное истолкование геометрического смысла модуля	Вычислительная ошибка	Неправильно выбрано окончательное решение
2	1	0
Задание 2. Виды ошибок		
Неверное решение показательного неравенства	Вычислительная ошибка	Неправильно выбрано окончательное решение
0	1	1
Задание 3. Виды ошибок		
Неверное решение логарифмического неравенства	Вычислительная ошибка	Неправильно выбрано окончательное решение
2	1	0

В Таблице 9 представлены полученные результаты:

Таблица 9 - Количественный анализ контрольной работы

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	0% (0)
«4»	40% (2)
«3»	20% (2)
«2»	20% (1)

Таким образом, можно сделать вывод о том, что подавляющее большинство учащихся испытывают затруднения при решении задач по теме «Неравенства с модулем». Большие затруднения у учащихся вызывают неравенства, где нужно применять метод, на основе геометрической интерпретации, а также логарифмическими неравенствами. Помимо этого, учащиеся допускают большое количество арифметических ошибок, в результате чего приходят к неправильному ответу, несмотря на то, что алгоритм решения неравенств верный.

В рамках *поискового этапа эксперимента* во второй половине 2019-2020 учебного года на базе ГБОУ СОШ с. Васильевка в старших классах была осуществлена апробация систем задач на усвоение различных методов решения неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, представленных нами §7 главы II работы, по темам: «Решение неравенства с модулем на основе определения модуля», «Решение неравенства с модулем, используя геометрическую интерпретацию», «Решение неравенства с модулем графическим способом», «Решение неравенства с модулем методом замены переменной», «Решение неравенства с модулем методом возведения в квадрат».

Выводы по второй главе

Во второй главе были получены следующие результаты:

1. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Неравенства с модулем». Определено, что при обучении учащихся данной теме, необходимо научить выделять наиболее рациональные методы решения неравенств с модулем, акцентировать итог изучения на практическом применении знаний учеников, стараться показывать компактное оформления решений неравенств.

2. Выделены основные типы задач в едином государственном экзамене в углубленном курсе математики общеобразовательной школы по теме «Неравенства с модулем». Выявлено, что в первой части экзамена задачи по теме исследования не встречаются; во второй части встречаются в задаче №15 (С3. Неравенства) и задаче №18 (С5. Задача с параметром).

3. Разработан элективный курс по теме «Логарифмические неравенства с модулем» для учащихся математического профиля, в котором были рассмотрены их различные виды и методы решения.

4. Разработаны системы задач, направленные на усвоение методов решения неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, которые удовлетворяют требованиям Л.В. Виноградовой. При составлении системы задач рассматривались следующие методы решений неравенств с модулем: на основе определения модуля; на основе геометрического смысла модуля; графический метод; метод замены переменных; метод возведения в квадрат.

5. Проведен педагогический эксперимент и представлены его результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты исследования.

1. Выявлены основные цели и задачи обучения решения неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Так, решение неравенств с модулем способствует развитию логического мышления у учащихся; формированию у них умения: находить рациональный метод решения для разных видов неравенств с модулем, выдвигать собственные идеи для решения, самоконтроля у учащихся, акцентировать внимание на основной идее их решения.

2. Выполнен и предоставлен анализ содержания теоретического и задачного материалов темы «Неравенства с модулем» в учебниках алгебры 7-9 классов, алгебры и началах математического анализа 10-11 классов.

3. Выявлены методические особенности обучения учащихся решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

4. Представлены методические рекомендации по обучению теме «Неравенства с модулем».

Определено, что при обучении учащихся данной теме, необходимо научить выделять наиболее рациональные методы решения неравенств с модулем, акцентировать итог изучения на практическом применении знаний учеников, стараться показывать компактное оформления решений неравенств.

5. Выделены основные типы задач в едином государственном экзамене в углубленном курсе математики общеобразовательной школы по теме «Неравенства с модулем».

Выявлено, что в первой части экзамена задачи по теме исследования не встречаются; во второй части встречаются в задаче №15 (С3. Неравенства) и задаче №18 (С5. Задача с параметром).

6. Разработан элективный курс по теме «Логарифмические неравенства с модулем» для учащихся математического профиля, в котором были рассмотрены их различные виды и методы решения.

7. Разработаны системы задач, направленные на усвоение методов решения неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы, которые удовлетворяют требованиям Л.В. Виноградовой.

При составлении системы задач рассматривались следующие методы решений неравенств с модулем:

- на основе определения модуля;
- на основе геометрического смысла модуля;
- графический метод;
- метод замены переменных;
- метод возведения в квадрат.

8. Проведены констатирующий и поисковый этапы эксперимента.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10 класс: углубл. уровень / [М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, В.Н. Соломин, А.Н. Головин]. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 2017. -301с.: ил.
2. Алимов, Ш.А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю. В. Сидоров. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 255 с.: ил.
3. Алимов, Ш.А. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю. В. Сидоров. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 287 с.: ил.
4. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. / М.И. Башмаков. – М.: Наука. 1976. – 96 с.
5. Боженкова Л.И. Познавательные универсальные учебные действия в обучении математике // Наука и школа. - 2016. - № 1. - С. 54-60. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25738426. - Последнее обновление 18.05.2020.
6. Боровских А.В. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства». [Электронный ресурс] / А.В. Боровских., В.Е. Веревкина// Наука и школа. Московский педагогический государственный университет. – 2015. - №5. – С. 77 – 87. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=24852670. - Последнее обновление 19.05.2020.
7. Вавилов В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. – М.: Наука., 1988. – 240 с.

8. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252с.

9. Власова А.П. Показательная и логарифмическая функции в задачах и примерах / А.П. Власова, Н.И. Латанова, Н.В. Евсеева – М.: 2010. – 60 с.

10. Далингер В.А. Геометрическая интерпретация модуля в задачах / В.А. Далингер // Математика в школе, 2002. - №8. – С. 61 –63.

11. Далингер, В.А. Различные способы решения неравенств вида |f(x)|+|g(x)|>|f(x)+g(x)| [Электронный ресурс] / В.А. Далингер, Е.А. Пустовит // Ученые записки Забайкальского государственного университета. – 2012. - №6. – С. 124 – 128. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=18076619. - Последнее обновление 18.05.2020.

12. Ивлев Б.М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учеб. пособие для 10-11 кл. ср. пед. шк. / Б.М. Ивлев, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, С.И. Шварцбурд . – М.: Просвещение, 19900. – 48 с.

13. Карсакова Н.Б. Решение уравнений и неравенств с модулем [Электронный ресурс] / Н.Б. Корсакова // Образование в современной школе. – 2008. - №11. – С. 9 – 16. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id= 17355095. - Последнее обновление 18.05.2020.

14. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. Для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 336 с.: ил.

15. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. Для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 264 с.: ил.

16. Колягин Ю.М. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин.- М.: Просвещение, 2017. – 128 с.

17. Коропец З.Л. Нестандартные методы решения неравенств и их систем / З.Л. Коропец, А. А. Коропец, Т.А. Алексеева, Орел, 2012. – 125 с.

18. Лисненко А.П. Методика обучения решению неравенств с модулем в курсе алгебры основной школы/ А.П. Лисненко: бакалаврская работа по направлению подготовки «Педагогическое образование», направленность (профиль) «Математика и информатика. – Тольятти, ТГУ. – 2018. – 82 с.

19. Лисненко А.П. Методика обучения решению неравенств с модулем в углубленном курсе математики общеобразовательной школы // «Студенческие Дни науки в ТГУ»: научно-практическая конференция (Тольятти, апрель-май 2020 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. – 1 оптический диск.

20. Лисненко А.П. Некоторые методы решения неравенств с модулем в школьном курсе математики // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2019 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019.

21. Лисненко А.П. Неравенства с модулем // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ /отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – С. 234-236.

22. Лисненко А.П. Элективный курс «Логарифмические неравенства с модулем» для учащихся математического профиля // Вестник магистратуры. -2020. - № 6(105).

23. Лоскутникова А.В. Организация самостоятельной работы учащихся старших классов при обучении их решению уравнений и неравенств с модулем [Электронный ресурс] / А.В. Лоскутникова, Е.Н. Медведева // Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы обучения математике, информатике, экономике и естественнонаучным дисциплине в средней и вышей школе». – 2019. – С. 153 – 156. – Режим

доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41510015. - Последнее обновление 18.05.2020.

24. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

25. Майсеня Л.И. Алгебраические уравнения и неравенства, функции, логарифмы: учеб. пособие для учащихся колледжей / Л. И. Майсеня, С. Б. Махнач, Д. И. Радюк, Н. И. Романовская. – 2006. – 226 с.

26. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень/ [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др.]. – М.: Просвещение, 2018. – 304 с.: ил.

27. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др.]. – М.: Просвещение, 2018. – 351 с.: ил.

28. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 7-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 447 с.: ил.

29. Марач С.М. Задачи М.И. Скинави с решениями / С.М. Марач, П.В. Полуносик. – Мн.: 1998. – 448 с.

30. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 класс: учебник для общеобразоват. учеб. заведений: академ. уровень, профил. уровень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Х.: Гимназия, 2011. — 431 с.: ил.

31. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. - 2-е изд, испр. - М.:Дрофа, 2008. – 415 с.

32. Моисеева В.Н. Методика формирования у старшеклассников логических приемов мышления при решении уравнений и неравенств: 13.00.02 / Астраханский гос. университет. - Астрахань, 2010. - 25 с.

33. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: метод. пособие для учителя / А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2000. – 144 с.

34. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.: ил.

35. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.: ил.

36. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. – 3-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 264 с.: ил.

37. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. – 3-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 264 с.: ил.

38. Мордкович А.Г. Алгебра, 7-9 классы: Метод. пособие для учителя / А.Г. Мордкович. - 2-е изд., дораб. - М.: Мнемозина, 2001. – 143 с.

39. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

40. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: учебник / А.Г. Мордкович. – 12-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2010. – 256 с.

41. Муравин Г.К. Методические рекомендации к учебнику Г.К. Муравина «Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс».: пособие / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 287 с.: ил.

42. Муравин Г.К. Методические рекомендации к учебнику Г.К. Муравина «Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс».: пособие / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 145 с.: ил.

43. Муравин, Г.К. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318, [2] с.: ил.

44. Муравин, Г.К. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 318, [2] с.: ил.

45. Нахман А.Д. Технологические аспекты обучения решению неравенств [Электронный ресурс] / А.Д. Нахман // Вестник тульского государственного университета. Серия современные образовательные технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин. – 2018. - №1(17). – С. 211 – 213. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36387890. - Последнее обновление 13.05.2020.

46. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.: ил.

47. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни /

С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.: ил.

48. Никольский, С.М. Алгебра. 7 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.: ил – (МГУ – школе).

49. Никольский, С.М. Алгебра. 8 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 301 с.: ил – (МГУ – школе).

50. Никольский, С.М. Алгебра. 9 класс.: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.: ил – (МГУ – школе).

51. Образовательный портал для подготовки к экзаменам РЕШУ ЕГЭ. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/. – Последнее обновление 12. 03. 2020.

52. Пивина И.А. Методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля [Электронный ресурс] / И.А. Пивина //Вестник Таганрогского государственного педагогического университета. – 2018. - №1. – С. 222-228. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35140043. - Последнее обновление 18.05.2020.

53. Подготовка к ЕГЭ по математике Школково. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://shkolkovo.net/. – Последнее обновление 12. 03. 2020.

54. Потапов М.К. Алгебра и начала математического анализа. Книга для учителя. 11 класс: базовый и профил. Уровни / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2009. – 256 с.: ил.

55. Потапов М.К. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: пособие для учителей общеобразовательных организаций / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2015. – 191 с.

56. Потапов М.К. Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс: пособие для учителей общеобразовательных организаций / М.К. Потапов, А.В. Шенкин. – М.: Просвещение, 2015. – 191 с.

57. Потапов М.К. Функции. Уравнения. Неравенства / М.К. Потапов, В. В. Александров, П.И. Пасиченко, Т.М. Вуколова. – М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1995. – 164 с.

58. Пратусевич М.Я. Алгебра и начала анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2009. – 415 с.: ил.

59. Пратусевич М.Я. Алгебра и начала анализа. 11 класс: учеб. Для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2010. – 463 с.: ил.

60. Примерная основная общеобразовательная программа среднего общего образования (Одобрено решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию. Протокол от 28 июня 2016 г. №2/16-з)

61. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика (Одобрено Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15)

62. Пустовит Е.А. Развитие универсальных учебных действий учащихся основной школы при решении алгебраических задач с модулем: 13.00.02 / Уральский гос. пед. университет. - Екатеринбург, 2015. - 24 с.

63. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств / Ю. В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 93с.

64. Санникова А.Н. Методические приемы обучения решению уравнений и неравенства с модулями в старшей школе [Электронный ресурс] / А.Н. Санникова // Информационно – коммуникационные технологии в педагогическом образовании. – 2015. - №1 (34). – С. 28 – 30. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23755856. - Последнее обновление 18.05.2020.

65. Седакова В.И. Модуль числа [Электронный ресурс] / В.И. Седакова, А.Э. Тагирова // Педагогический опыт: теория, методика, практика. – 2016. - №2 (7). – С. 67 – 72. – Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26100256. - Последнее обновление 18.05.2020.

66. Тестов В.А. О некоторых проблемах при изучении неравенств [Электронный ресурс]/ В.А. Тестов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2015. - №17. – С. 279 – 289. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28213876. - Последнее обновление 15.05.2020.

67. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/. – Последнее обновление 07.06.2020.

68. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 06.10.2009 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/. – Последнее обновление 25.05.2020

69. Хамедова Н.А. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля [Электронный ресурс]/ Н.А. Хамедова // Вестник современной науки. – 2016. - №1(15). – С.18 – 20. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25896782. - Последнее обновление 13.05.2020.

70. Цыпкин А.Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – 3-е изд., испр. – М.: 2007. – 640 с.

71. Чаплыгин В.Ф. Сравнение и классификация в упражнения с модулями / В.Ф. Чаплыгин // Математика в школе, 2003. - №9. – С. 48 –50.

72. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – М.: БИНОМ. Лабораторий знаний, 2008. – 384 с.: ил.

73. Almog N. Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions [Text] / N. Almog, B. Ilany // 2012. – PP. 1-3.

74. Almog N. Solutions and misconceptions [Text] / N. Almog, B. Ilany // 2012. – PP. 1-3.

75. Ciltas A. Diagnostic learning difficulties related to equation and inequality that contain terms with absolute value [Text] / A. Ciltas, E. Tatat // International online journal of educational sciences, 2011. – PP. 461-473.

76. Cvetkovski Z. Inequalities. Theorems, techniques and selected problems [Text] Z. Cvetkovski // Springer, 2012. – PP. 80-83.

77. Michaele Steele J. The Cauchy-Schwarz Master Class [Text] / J. Michaele Steele // An introduce tho the art of mathematical inequalities. Cambridge University Press, 2004.- PP. 19-21.