

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Уровневая дифференциация при обучении неравенствам в старших
классах общеобразовательной школы»

Студент

О.Л. Иванова
(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент Н.А. Демченкова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ НЕРАВЕНСТВАМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ СТАРШИХ КЛАССОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ.....	7
§ 1. Понятие уровневой дифференциации, основные цели и задачи уровневой дифференциации	7
§2. Методы, формы, средства уровневой дифференциации.....	10
§3. Содержание теоретического и задачного материала по теме «Неравенства» в различных учебниках алгебры для старшей школы	14
Выводы по первой главе.....	17
ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УРОВНЕВОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ НЕРАВЕНСТВАМ В СТАРШИХ КЛАССАХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ	18
§4. Методические рекомендации применения уровневой дифференциации при обучении неравенствам	18
§5. Задачи ЕГЭ по теме исследования	21
§6. Элективный курс по теме «Тригонометрические неравенства» для учащихся математического профиля	39
§7. Педагогический эксперимент и его результаты	55
Выводы по второй главе.....	58
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	59
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	61

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В курсе школьной алгебры тема «Неравенства» занимает важное место, неравенства активно используются для решения различных задач во многих разделах математики. Данная тема содержит разнообразный теоретический материал, множество задач и различные способы их решения [20].

В обучении алгебре уровневая дифференциация имеет особое значение, потому что алгебра объективно является одной из самых сложных дисциплин школы и вызывает затруднения у многих школьников. Но в то же время имеется немалое число учащихся с ярко выраженными способностями к этому предмету. Разрыв в способностях учащихся требует особого подхода к подготовке материала урока.

Неравенства в старших классах позволяют использовать все преимущества уровневой дифференциации обучения, обеспечивая каждому ученику возможность достижения планируемых результатов в обучении с учетом его индивидуальных особенностей.

Присутствие задач по теме «Неравенства» в едином государственном экзамене и необходимость качественной подготовки учащихся к данному экзамену также подтверждает актуальность данной темы.

Противоречия между обучением по стандартной программе и необходимостью внесения индивидуальных корректировок к ученикам с учетом их индивидуальных особенностей, значимостью изучения и проблемой освоения темы неравенств формируют актуальность темы исследования [6].

Проблема данного исследования: применение уровневой дифференциации при обучении неравенствам в старших классах общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: уровневая дифференциация при обучении решению неравенств в курсе алгебры старшей школы.

Цель исследования: разработка методики применения уровневой дифференциации при обучении теме «Неравенства» в курсе алгебры старшей школы.

Гипотеза исследования основана на предположении того, что методические возможности индивидуального подхода к ученикам при использовании уровневой дифференциации при обучении неравенствам в старших классах общеобразовательной школы позволит повысить качество обучения математике.

Для достижения поставленной цели нужно решить следующие **задачи**:

1. Проанализировать теоретический и задачный материал темы «Неравенства», в школьных учебниках 10-11 классов.
2. Выделить методы, формы и средства, используемые при обучении теме «Неравенства».
3. Сформулировать методические рекомендации для обучения теме «Неравенства» с применением технологии уровневой дифференциации обучения.
4. Проанализировать задачи единого государственного экзамена по теме «Неравенства».
5. Описать проведение констатирующего этапа педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы И.Э. Унт [75], В.А. Орлова [71], В.В. Фирсова [79].

Базовыми для настоящего исследования явились: работы В.В. Елисеева [18], Н.С. Маслова [37], И.М. Осмоловской [53], К.Г. Селевко [69].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта

работы учителей алгебры; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2018/19 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2018/19 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2019/20 уч.г.): проведение анализа задач ЕГЭ по теме исследование, разработка элективного курса по теме диссертации.

4 семестр (2019/20 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования – МБУ «Школа №44» г.о. Тольятти.

Научная новизна исследования заключается в разработке теоретических основ применения уровневой дифференциации при обучении неравенствам в старших классах общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в разработке методики применения уровневой дифференциации при обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры старшей школы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в ней разработаны: элективный курс «Тригонометрические неравенства» для учащихся старших классов математического профиля; методические рекомендации по применению уровневой дифференциации при обучении неравенствам.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались: сочетанием теоретических и практических методов исследования; анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей и рекомендаций по применению уровневой дифференциации при обучении решению неравенств в старших классах общеобразовательной школы; разработке элективного курса для учащихся старших классов общеобразовательной школы.

Апробация результатов исследования осуществлялась путем выступлений на: научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2018 г., диплом за II место на первом этапе); XIV всероссийской научно-практической конференции «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (18 апреля 2018, г. Пенза); всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, 5 декабря 2018 года); научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ», секция «Теория и методика обучения математике» с докладом по теме «Методика обучения решению квадратных неравенств в курсе алгебры основной школы» (апрель 2019 г., диплом за I место на первом этапе); научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2019 г., диплом за III место, на втором этапе); научно-практическая конференция «Студенческие Дни науки в ТГУ» (Тольятти, апрель-май 2020 года).

Основные результаты исследования отражены в трех публикациях [21, 35, 36].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации применения уровневой дифференциации при обучении неравенствам в старших классах общеобразовательной школы.
2. Элективный курс «Тригонометрические неравенства» для учащихся математического профиля.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, 2 глав, заключения, содержит 7 рисунков, 1 таблицу, список использованной литературы (91 источник). Основной текст работы изложен на 70 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ НЕРАВЕНСТВАМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ СТАРШИХ КЛАССОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие уровневой дифференциации, основные цели и задачи уровневой дифференциации

Практически во всех классах встречаются ученики с разным уровнем подготовки, знаниями и способностью к обучению, несмотря на распространенное разделение старших классов на базовый и математический профили. Обычно преподаватель выбирает методы и формы обучения, ориентированные на успешное обучение среднестатистического ученика заложенные программой обучения. При таком подходе ученики с низкой подготовкой не успевают достаточно хорошо освоить тему неравенств наравне с остальными, у них может ослабнуть образовательный интерес, который в свою очередь может привести к еще большему ухудшению успеваемости. Ученики с сильной подготовкой и способностями в свою очередь не смогут достигнуть того образовательного уровня, который им по силам, упустят возможность развиваться, без проблем справляясь с задачами которые рассчитаны на средний уровень, могут потерять желание совершенствоваться в решении задач [8].

Проблему разрыва в эффективности обучения учеников с различным уровнем подготовки и способностями решает дифференцированный подход в обучении.

«Если перевести слово дифференциация (difference) с латинского языка, то получим расслоение целого на различные формы, части, ступени, разделение, а если посмотреть перевод французского слова «differentiation» – разница» [55].

У разных авторов существует очень много определений дифференциации обучения, рассмотрим некоторые из них:

1. «Дифференциация обучения – это форма организации учебной деятельности обучающихся, при которой учитывается их склонности, интересы и проявившиеся способности» [55].

2. «Дифференциация – это разделение обучающихся на группы на основании каких-либо индивидуальных способностей для отдельного обучения (И.Э. Унт)» [75].

3. «Дифференциация – это средство индивидуализации обучения (В.М. Монахов, В.А. Орлов, В.В. Фирсов)» [79].

4. «Дифференциация обучения – это группировка обучающихся на основе учета их индивидуальных способностей для обучения по несколько иным учебным планам, программам, технологиям (В.В. Елисеев)» [18].

5. «Дифференциация обучения – это учет индивидуальных особенностей обучающихся в той форме, когда обучающиеся группируются на основании каких-либо особенностей для отдельного обучения; обычно обучение в этом случае происходит по нескольким различным учебным планам и программам (С.Н. Митин, Н.С. Маслов)» [37].

6. «Дифференциация обучения – это способ организации учебного процесса, при котором учитываются индивидуально-типологические особенности личности в форме специального создания различий в процессе и результатах обучения (И.М. Осмоловская)» [53].

7. «Дифференциация обучения (дифференцированный подход в обучении) – это:

1) создание разнообразных условий обучения для различных школ, классов, групп с целью учета особенностей их контингента;

2) комплекс методических, психолого-педагогических и организационно-управленческих мероприятий, обеспечивающих обучение в гомогенных группах (К.Г. Селевко)» [69].

Уровневая дифференциация, предполагает такую организацию обучения, при которой школьники, обучаясь по одной программе, имеют

право и возможность усваивать ее на различных планируемых уровнях, но не ниже уровня обязательных требований [79].

«Грамотно спланированное введение дифференцированного обучения в теме «Неравенства» поможет достичь предметных результатов по ФГОС:

- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических неравенств, их систем;

- использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения неравенств» [78].

«А также достичь поставленных целей:

- создание оптимальных условий для выявления задатков, развитие интересов и способностей каждого ученика;

- удовлетворение познавательных потребностей, совершенствование мыслительной деятельности, развитие интересов учащихся, выявление способностей и задатков, формирование профессиональных качеств;

- целенаправленно воздействовать на формирование творческого индивидуального, профессионального потенциала общества в целях рационального использования возможностей каждого члена общества в его взаимоотношениях с социумом;

- решение назревших проблем школы путем создания новой методической системы дифференцированного обучения учащихся, основанной на принципиально новой мотивационной основе» [18, с.8].

И.Э. Унт выделяет следующие цели дифференциации:

1. Обучающая цель, в которую входит усовершенствование знаний, навыков и умений. Углубление знаний каждого учащегося, в зависимости от индивидуальных способностей.

2. Развивающая цель. Подразумевается развитие логического мышления, а так же умений учебной деятельности.

3. Воспитывающая цель. Необходимо учитывать уже сформированный познавательный интерес учащихся и развивать новые, создавать

предпосылки для развития мотивации и положительного отношения к учебе [75].

Дифференциация обучения решает следующие задачи:

- повышение качества знаний;
- вовлечение в образовательный процесс учащихся;
- развитие познавательного интереса;
- уменьшение пробелов в знаниях учащихся [12].

В методических рекомендациях к учебнику Г.К. Муравина сказано, что при алгоритмическом изучении материала, для отработки всех этапов решения задач в учебнике предоставляется система творческих заданий. Это значит, что каждое последующее задание будет взаимосвязано с предыдущим [41]. Основные методы решения неравенств переносятся с курса алгебры средней школы. Особая роль отводится неравенствам с параметрами, для решения которых необходимо уметь находить нестандартные пути решения [42].

§2. Методы, формы, средства уровневой дифференциации

Процесс обучения является взаимодействием содержания, целей, методов, форм и средств обучения.

«Методы обучения – это упорядоченная деятельность педагога и учащихся, направленная на достижение заданной цели обучения» [58, с. 470].

Известно множество различных классификаций методов обучения, рассмотрим некоторые из них.

Например, существует классификация, включающая в себя различные методы обучения, такие как: наглядные, практические и словесные. Такая классификация основана на источниках знаний. Если за основание классификации взять характер познавательной деятельности, то в основном будут использоваться другие методы, такие как: объяснительно-иллюстративный, эвристический, репродуктивный, исследовательский [68].

Я.И. Груденов выделяет такие методы обучения: «метод целесообразных задач, эвристический метод, вопросно-ответный метод, алгоритмический метод, метод элементарных и неэлементарных задач, объяснительно-иллюстративный метод» [13].

В течение долгих лет были сформированы эти методы обучения, теперь главная задача учителя – грамотно комбинировать и применять на практике, в зависимости от учебной цели, различные методы.

В теме «Неравенства» чаще всего используются алгоритмический метод и метод целесообразных задач.

Суть алгоритмического метода состоит в решении задач по изученному ранее, определенному алгоритму [89].

«Определить алгоритм можно как понятное предписание, которое указывает, какие операции и в какой последовательности нужно выполнять для решения задач определенного типа. Алгоритм должен включать в себя последовательность выполняемых шагов, необходимые пояснения и рекомендации для его выполнения. При этом он должен быть максимально компактным» [71, С.56].

Метода целесообразных задач заключается в том, что учащимся предлагаются такие задачи, которые подготовят их к изучению новой темы, к пониманию определения или теоремы, а также самостоятельной работе во время урока [56].

При работе с этим методом, Я.И. Груденов [13], в своей книге, даёт совет брать меньшее количество подготовительных задач, но подбирать такие, чтобы каждая могла быть рассмотрена при изучении различных учебных элементов несколько раз.

Усвоение учебного материала учащимися происходит с помощью различных форм обучения. Понимание учителем содержания форм обучения дает возможность повышать качество и эффективность обучения. Форма обучения во время урока подбирается учителем и зависит от разных аспектов: целей, содержания, методов и средств обучения [35].

«Под формой обучения подразумевается способ организации учебной деятельности учащихся. Формы обучения бывают: индивидуальной, групповой, фронтальной и коллективной» [76].

«Под *индивидуальной* формой обучения подразумевается работа учителя с каждым учеником. То есть, перед каждым учеником ставится такая цель или задача, решение которой он добивается лично. Выполнение задания каждый учащийся осуществляет самостоятельно, но учитель, с учетом уровня знаний, может оказывать помощь.

Оценивается деятельность каждого ученика также отдельно, в сравнении с его прямыми результатами и определенными нормами для данных заданий. При этой форме обучения основная задача учителя – организация самостоятельной деятельности каждого ученика и ее контроль.

Групповая форма обучения отличается тем, что учащиеся разбиваются на группы и поставленная цель выполняется коллективно, с участием каждого члена группы. Итоги подводятся относительно деятельности целой группы» [76]. Групповая форма является самой оптимальной для организации дифференцированного обучения, так как для каждой отдельной группы можно подобрать отдельные задания. Конечно, основной проблемой может стать разделение учащихся по группам. Главным вопросом становится определение тех свойств, в зависимости от которых создаются группы [32]. Встречается предложение разделить класс на «сильных», «средних» и «слабых» учеников, но не объясняется, как определить к какой из групп относится ученик. Ученые берут за основу разные критерии деления на группы. Кто-то берет за основу уровень успеваемости, кто-то степень познавательной активности и интерес к учебе (Е.С. Рабунский) или же трудоспособность и способность к учению в целом (А.А. Бударный). Но остается вопрос, какое свойство и в какой степени нужно учитывать при делении на группы [49]. И.Э. Унт [75] придерживается следующего: в зависимости от заданий и производится деление на группы, для решения

могут требоваться больше умственные способности или же имеющийся уровень знаний учащихся [75].

«При *фронтальной* форме обучения учитель работает одновременно со всем классом. Перед классом ставится одинаковая учебная задача и учитель, вместе с учащимися ее достигает, с помощью объяснения материала или прорешивания заданий на доске. Данная форма обучения менее подходит для дифференциации.

При *коллективной* форме обучения учащимся предлагается общее задание, выполнять которое они должны самостоятельно, без помощи учителя. Задача учителя – направлять деятельность учащихся в нужное русло, мотивировать их к самостоятельному достижению цели, подтолкнуть общему обсуждению задания друг с другом. Итог работы подводится для всего класса в целом» [76].

При дифференцированном изучении темы «Неравенства» можно использовать все формы, в зависимости от этапа урока.

Также, огромную роль при организации урока имеют средства обучения.

Все те материалы, которые учитель может задействовать во время урока, и являются средствами обучения [31].

При обучении теме «Неравенства» используются все основные средства обучения, например, учебник, задачник, тетрадь. Но для полноценной дифференцированной работы потребуются дополнительные средства обучения. Такие как, различные дидактические материалы: алгоритмы решения различных заданий, памятки, раздаточные материалы, карточки, презентация урока [26].

«Средства обучения облегчают восприятие и усвоение материала учащимися. Но слишком частое их использование может привести к ухудшению развития абстрактного мышления учащихся» [25].

Благодаря использованию разнообразных средств обучения реализуется принцип наглядности. Максимальная польза от наглядных

пособий будет в том случае, если ученики самостоятельно его изготовят и будут пользоваться им постоянно [8, с.82]. При изучении темы «Неравенства» особенно важно пользоваться различными средствами, так как тема является сложной.

§3. Содержание теоретического и задачного материала по теме «Неравенства» в различных учебниках алгебры для старшей школы

Рассмотрим учебники за 10-11 класс по алгебре и началам математического анализа, проведем анализ теоретического и задачного материала.

В учебнике А.Г. Мордковича профильного уровня за 10 класс тема «Неравенства» не выделяется отдельно, а рассматривается внутри главы «Тригонометрические уравнения». В учебнике приводятся решения простейших тригонометрических неравенств и несколько систем неравенств [44].

В задачнике А.Г. Мордковича представлены различного уровня сложности задания на решение тригонометрических неравенств. А также есть задания на решение систем тригонометрических неравенств, все они отмечены автором учебника как «трудные» [45].

А в учебнике за 11 класс неравенства рассматриваются в параграфах «Показательные неравенства», «Логарифмические неравенства». А также глава 6 полностью посвящена уравнениям и неравенствам и их системам. В ней рассматриваются равносильность неравенств, неравенства с модулем, иррациональные неравенства, неравенства с двумя переменными.

В задачнике к каждому параграфу приводятся задания, разделенные по уровню сложности на простые, средние и трудные. Большинство заданий среднего уровня сложности [46].

В учебнике Ш.А. Алимова [1] для 10-11 классов тема «Неравенства» рассматривается в нескольких параграфах. В параграфе «Равносильные уравнения и неравенства» понятие равносильности неравенств вводится по

аналогии с равносильностью уравнений, приводятся три примера с решением. В упражнениях к этому параграфу в основном задания на решение уравнений и только три номера относятся к неравенствам.

Далее в учебнике есть параграф «Иррациональные неравенства», который отмечен как дополнительный, более сложный материал. В параграфе разобраны девять различных заданий с подробным решением. Все задания к параграфу разные по уровню сложности, а также есть разные по способу решения.

В главе учебника «Показательная функция» есть отдельный параграф, посвященный показательным неравенствам. А далее идёт параграф «Системы показательных уравнений и неравенств».

Также у Алимова есть параграфы «Логарифмические неравенства» и «Примеры решения простейших тригонометрических неравенств». После каждого параграфа в учебнике идет задачный материал, который имеет деление на обязательные, дополнительные и трудные задачи [1].

Если рассмотреть учебники Г.К. Муравина за 10 и за 11 классы, то сразу бросается в глаза, что неравенства не выделяются отдельными главами или параграфами.

Например, в оглавлении учебника за 10 класс неравенства встречаются только в последней главе, посвященной повторению, в параграфе «Уравнения и неравенства». Но, тем не менее, упражнения на решение неравенств встречаются во многих параграфах, таких как:

- «Непрерывность и монотонность функций»;
- «Квадратичная и дробно-линейная функции»;
- «Понятие корня n -й степени»;
- «Функция $y=a^x$ »;
- «Понятие логарифма».

Аналогичную картину мы видим и в учебнике 11 класса. Задания встречаются разного уровня сложности, но их недостаточно, чтобы закрепить знания по решению разных видов неравенств [47, 48].

Рассмотрим еще учебник Ю.М. Колягина [24] за 10 класс профильного уровня. Во второй главе учебника «Показательная функция» есть параграф «Показательные уравнения и неравенства», в котором рассматривается три неравенства с решением. После параграфа идут упражнения, большая часть которых относится к уравнениям. Заданий на решение неравенств к этому параграфу представлено очень мало.

В следующей главе «Степенная функция» есть параграф «Равносильные уравнения и неравенства». В этом параграфе очень много теоретического материала относится к уравнениям, подразумевается, что неравенства учащиеся смогут решать по аналогии. При изучении логарифмической функции также уделяется внимание логарифмическим неравенствам.

Следует отметить, что в главе «Системы уравнений» не рассматриваются неравенства вовсе. Далее неравенства встречаются только в главе «Тригонометрические функции», где рассматривается решение простейших тригонометрических неравенств [24].

С точки зрения изучения темы удобнее, когда неравенства выделяются отдельным параграфом, в таком случае в теме будет разобрано больше примеров с решениями, а также будет больше упражнений различных по уровню сложности.

Из всех рассмотренных учебников, лучше всего неравенства разобраны в учебниках А.Г. Мордковича.

Выводы по первой главе

В первой главе представлены теоретические основы обучения квадратным неравенствам:

- рассмотрены основные цели и задачи дифференциации при обучении теме «Неравенства»;
- рассмотрены методы, формы и средства, используемые при дифференцированном подходе в обучении теме «Неравенства»;
- был произведен анализ теоретического и задачного материала темы «Неравенства» учебников разных авторов для старшей школы.

При дифференцированном изучении темы «Неравенства» можно использовать все формы обучения, в зависимости от этапа урока. При анализе учебников за 10-11 классы, можно прийти к выводу, что лучше всего задачный материал представлен в учебниках А.Г. Мордковича так как, в каждой теме имеется достаточное количество примеров, чтобы учитель во время уроков смог организовать дифференцированный подход в обучении темы «Неравенства» старшей школы.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УРОВНЕВОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ НЕРАВЕНСТВАМ В СТАРШИХ КЛАССАХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§4. Методические рекомендации применения уровневой дифференциации при обучении неравенствам

В данном параграфе приведем некоторые методические рекомендации по дифференциации обучения, которые могут применяться при изучении темы «Неравенства» в курсе алгебры.

Рассмотрим этапы уровневой дифференциации:

- определение критериев дифференциации;
- проведение диагностики;
- распределение обучающихся по группам;
- определение способов дифференциации;
- реализация дифференцированного подхода к обучающимся на различных этапах урока;
- диагностический контроль результатов [69].

Приведём методические рекомендации на каждом из перечисленных этапов.

1. Определение критериев дифференциации. Чаще всего учитель условно разделяет класс на три группы: «сильные», «средние» и «слабые» учащиеся. При этом кто-то берет за основу разделения критерий успеваемости, а кто-то – способности обучающихся. Важно помнить, что деление на такие группы не является постоянным, группы являются подвижными, и учащиеся могут переходить из одной группы в другую. Рассмотрим основные критерии деления на группы. Обученность – совокупность уже имеющихся знаний у учащегося, а также умение учиться. Уровень усвоения знаний – важно верно определить, какого уровня достиг ученик, а также на каком этапе развития умений и навыков он находится.

Обучаемость – способность учащегося к обучению, то есть его восприимчивость к усвоению новых знаний, новых способов их получения. Это понятие близко к понятию Л.С. Выготского «зона ближайшего развития», так как показывает потенциальное развитие учащегося. Критерии для деления на группы могут быть разнообразными и не должны ограничиваться перечисленными. Но они будут взаимосвязаны с тремя основными критериями.

2. Проведение диагностики. Работая в школе, учитель может использовать результаты диагностики, проведенной школьным психологом. Но можно проводить диагностику и самостоятельно. Данный этап является важным для распределения обучающихся по группам в дальнейшем [27].

3. Распределение обучающихся по группам. В зависимости от результатов диагностики учащихся нужно разделить на несколько условных групп. Важно не допустить негативного отношения учащихся к выделенным группам, для этого можно не выделять группы открыто. В некоторых случаях ученики могут самостоятельно принимать решения по выбору заданий различного уровня сложности [72].

4. Определение способов дифференциации. Каждый учитель самостоятельно принимает решение, нужна ли дифференцированная работа на уроке, в зависимости от темы, типа урока и его целей. Чаще всего дифференциация происходит по уровню сложности заданий или объему. Но могут быть выделены дифференциации в зависимости от темпа работы учащихся, по степени самостоятельности, по характеру помощи (стимулирующая, направляющая, обучающая).

При дифференциации заданий по объему чаще всего подразумеваются дополнительные задания для тех учащихся, кто справился с основными раньше других. Дополнительные задания могут быть индивидуальными, например, можно раздать их на карточках. Но при таком способе дифференциации учащиеся должны быть знакомы с правилами организации работы [90].

К дополнительному заданию можно приступать только после выполнения и проверки основного. Дополнительные задания можно выполнять не полностью, а только частично, ведь они не являются обязательными [51].

5. Реализация дифференцированного подхода к обучающимся на различных этапах урока. На каждом этапе урока учитель может выделять различные группы учащихся. Но нужно помнить, что весь урок не должен быть дифференцированным. А также выделение открытых групп может привести к негативным последствиям. Для учителя важно предвидеть ошибки, которые могут совершать учащиеся. Необходимо знание учебных программ и умение выявлять основные цели и задачи обучения [88].

6. Диагностический контроль результатов. Важно иметь обратную связь, проводить контроль результатов, отмечать затруднения учащихся, ошибки [87].

Также при изучении темы «Неравенства» можно использовать дифференцированный контроль знаний. В конце урока можно проводить разноуровневые самостоятельные работы.

Приведём пример такой самостоятельной работы при изучении тригонометрических неравенств. Работа состоит из трех вариантов различных по уровню сложности. В каждом варианте задания также расположены от простого к сложному.

Вариант 1.

1. $\sin x > \frac{1}{2}$

2. $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$

3. $3\operatorname{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) > 2$

4. $2 \sin 3x < 1$

5*. $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) > 1$

Вариант 2.

$$1. \sin x < \cos x$$

$$2. \sin 3x < \sin x$$

$$3. \sin^2 4x > \frac{1}{2}$$

$$4. \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6 < 0$$

$$5^*. \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6^*. \sin^2 2x + 2 \cos 2x < 1$$

Вариант 3.

$$1. \sqrt{3} \cos^{-2} x < 4 \operatorname{tg} x$$

$$2. \cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$$

$$3. \frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{\cos x} < 0$$

$$4. \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} > -1$$

$$5^*. \log_{\sin^2 x} \cos x \leq \frac{1}{2}$$

$$6^*. 5 + 2 \cos 2x \leq 3|2 \sin x - 1|$$

Дифференциация обучения даёт возможность раскрыть индивидуальность учащегося, выявить развитые способности и склонности учеников [77].

§5. Задачи ЕГЭ по теме исследования

Каждый учитель математики желал бы подготовить всех своих учеников к успешной сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ). В этом может помочь дифференцированный подход в обучении – эффективное средство при подготовке обучающихся к сдаче ЕГЭ, в частности, при подготовке к выполнению тестовой части экзамена. В работе рассматриваются различные способы дифференциации для организации подготовки учащихся к выпускным экзаменам. Основная цель использования данного подхода – обучение каждого на уровне его возможностей и

способностей, что дает каждому учащемуся возможность получить максимальные по его способностям знания и реализовать свой личностный потенциал, что позволяет сделать учебный процесс более эффективным, подготовить всех учащихся к сдаче ЕГЭ и сдать экзамен на требуемом качественном уровне [66].

Дифференциация проходит по уровню качества знаний с учетом психологических особенностей учащихся: с высоким уровнем качества знаний, со средним уровнем качества знаний, с низким уровнем качества знаний [50].

Усилия, направленные на организацию подготовки к сдаче ЕГЭ с учетом требований дифференциации процесса обучения, приводят к определенному росту успеваемости класса в целом и каждого ученика в отдельности [43].

Обучение проводится с учетом способностей учащихся. У учащихся вырабатываются устойчивые навыки решения задач связанных с темой «Неравенства». Благодаря многообразию заданий, стимулирующих познавательную деятельность, можно добиться повышения активности учащихся в общем учебном процессе. Обязательным элементом обучения является анализ. Он не только отражает результаты действующей модели, но также представляет основу для корректировки и дальнейшего её совершенствования [84].

Единый государственный экзамен по математике делится на два уровня: базовый и профильный. Тема «Неравенств» в курсе алгебры и математики занимает достаточно большое место и поэтому задачи связанные с ней могут встретиться в нескольких заданиях из экзамена [57].

В данном параграфе рассмотрим тестовые варианты единого государственного экзамена. В базовом уровне задачи связанные неравенства встретятся в номерах 17, в профильном уровне это обязательно в задаче 15 (С3), но также неравенства могут попасться в заданиях под номером 10 [66].

Для начала рассмотрим задачи базового уровня. Под номером 17 может встретиться два вида задач: в одном необходимо сопоставить приведенные в задаче неравенства и решения в виде таблицы. Решения могут задаваться в виде графических или числовых промежутков. В другом виде задачи дается рисунок прямой с точками, в котором необходимо сопоставить точки со значениями [85].

Пример 1 [57].

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенства	Решения
А) $2^x \geq 2$	1) $x \geq 1$
Б) $0,5^x \geq 2$	2) $x \leq 1$
В) $0,5^x \leq 2$	3) $x \leq -1$
Г) $2^x \leq 2$	4) $x \geq -1$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам: АБВГ.

Решение. Выразим переменную x :

$$\text{А) } 2^x \geq 2,$$

$$2^x \geq 2^1,$$

$x \geq 1$, следовательно, первый вариант;

$$\text{Б) } 0,5^x \geq 2,$$

$$\frac{1^x}{2} \geq 2,$$

$$2^{-x} \geq 2^1,$$

$$-x \geq 1,$$

$x \leq -1$, это третий вариант ответа;

$$\text{В) } 0,5^x \leq 2,$$

$$\frac{1^x}{2} \leq 2,$$

$$2^{-x} \leq 2^1,$$

$$-x \leq 1,$$

$$x \geq -1, \text{ четвертый вариант;}$$

$$\Gamma) 2^x \leq 2,$$

$$2^x \leq 2^1,$$

$x \leq 1$, следовательно, второй вариант ответа.

Ответ: 1342.

В данном примере, для решения задачи ученику необходимо умение решать простейших показательных неравенств, которые в обязательном порядке изучаются на уроках алгебры старшей школы. Большинство задач под этим номером не требуют от учеников глубоких знаний преобразований и замен значений, для их решения достаточно, чтобы ученики владели базовыми навыками [91].

Пример 2 [62]. На прямой отмечены точки K, L, M и N .

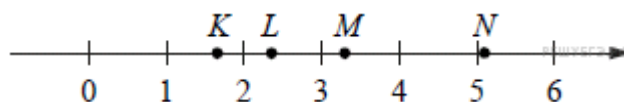


Рис. 1. Рисунок к примеру 2.

Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца, которые им соответствуют.

Точки	Числа
А) K	1) $\log_2 10$
Б) L	2) $\frac{7}{3}$
В) M	3) $\sqrt{26}$
Г) N	4) $0,6^{-1}$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам: АБВГ.

Решение. Рассмотрим соотношения:

$$\text{А) } 3 = \log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16 = 4;$$

$$\text{Б) } 2 = \frac{6}{3} < \frac{7}{3} < \frac{9}{3} < 3;$$

$$\text{В) } 5 = \sqrt{25} < \sqrt{26} < \sqrt{36} = 6;$$

$$\text{Г) } 1 = 1^{-1} < 0,6^{-1} < 0,5^{-1} = 2.$$

Ответ: 4213.

При решении задач подобных примеру 2 ученику необходимо уметь находить ближайшие к точкам целочисленные значения и сравнивать их с данными значениями.

Помимо самих задач с неравенствами, умение составлять и решать неравенства может понадобиться в задачах под номером 18 на анализ утверждений.

В профильном уровне экзамена, в задании 10 (задачи с прикладным содержанием) содержатся: линейные, квадратные, степенные, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические неравенства, что требует от ученика наличия знаний по множеству разделов темы «Неравенства». Помимо умения решать неравенства, от ученика здесь требуется правильно его составить по условию задачи. Рассмотрим несколько примеров из данного задания [19].

Пример 3 [19].

Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия – монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 100 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение. Решение задачи сводится к решению неравенства

$$r(p) \geq 240.$$

$$r(p) = q \cdot p = (100 - 10p) \cdot p = 100p - 10p^2,$$

$$r(p) \geq 240,$$

$$10p^2 - 100p + 240 \leq 0,$$

$$p^2 - 10p + 24 \leq 0,$$

$$4 \leq p \leq 6.$$

Ответ: 6.

Пример 4 [10].

Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t – время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$ – начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ \text{ мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200° . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

Решение. Задача сводится к нахождению $\varphi \leq 1200^\circ$. наибольшего решения неравенства при заданных значениях параметров ω и β :

$\varphi \leq 1200$, произведем замену,

$$2t^2 + 20t \leq 1200,$$

$$t^2 + 10t - 600 \leq 0,$$

$$-30 \leq t \leq 20 \text{ минут.}$$

Учитывая, что время – неотрицательная величина, получаем $t \leq 20$, угол намотки достигнет значения 1200 градусов при $t = 20$ минут.

Ответ: 20.

В примерах 3 и 4 ученик должен уметь грамотно составлять неравенства из данных ему условий, здесь требуется внимательность, и понимание базовых правил неравенств. Если ученик грамотно составит неравенство, решение самого неравенства не представляет никакой трудности. Здесь потребуется практика решения текстовых задач, поняв их общий принцип ученик, следуя выведенным алгоритмам, сможет решить любую задачу, представленную под этим номером.

Рассмотрим несколько примеров задания 15 (С3) профильного уровня экзамена ЕГЭ. Здесь требуется решить неравенство, оно может быть рациональным, содержащим радикалы, показательным, логарифмическим, с логарифмами по переменному основанию, с модулем или смешанным. Решение данного задания сдается в письменном виде [61].

Традиционно, при решении более сложных неравенств вначале нужно найти область допустимых значений (ОДЗ), но А.Г. Мерзляк не вводит понятие ОДЗ, а область определения неравенств, обосновывая это тем, что порою нахождение ОДЗ бывает объемной и довольно сложной задачей для учащихся. Особое внимание уделяется двум подходам решению неравенств: метод равносильных переходов и метод следствий [43].

Пример 5 [60]. Решите неравенство

$$2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x.$$

Решение. Последовательно получаем:

$$2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x,$$

$$2^{x^2} \leq 2^{x+2},$$

$$x^2 \leq x + 2,$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0,$$

$$-1 \leq x \leq 2.$$

Ответ: $[-1; 2]$.

Данный пример, как и первый рассмотренный пример из задач ЕГЭ содержит показательное неравенство, но этот уже из профильного уровня ЕГЭ. Этот пример относительно простой и имеет краткое решение.

Пример 6 [67]. Решите неравенство

$$((x + 1)^{-1} - (x + 6)^{-1})^2 \leq \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2}.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$((x + 1)^{-1} - (x + 6)^{-1})^2 \leq \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2}$$

$$\frac{|x^2 - 10x| - 25}{(x^2 + 7x + 6)^2} \geq 0,$$

$$\begin{cases} x \neq 6, \\ x \neq -1, \\ |x^2 - 10x| \geq 25. \end{cases}$$

Решим неравенство $|x^2 - 10x| \geq 25$:

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 25 \geq 0, \\ x^2 - 10x - 25 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 + 5\sqrt{2}, \\ x \leq 5 - 5\sqrt{2}, \\ x = 5 \end{cases}$$

Исключая из полученного набора точки -6 и -1 получаем множество решений исходного неравенства:

$$(-\infty; -6) \cup (-6; 5 - 5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5 + 5\sqrt{2}; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; 5 - 5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5 + 5\sqrt{2}; +\infty).$

В этом примере присутствует «смешанное неравенство» – есть модуль и степень, решается различными преобразованиями для получения множества решений.

Пример 7 [82]. Решите неравенство

$$(2x + 1) \log_5 10 + \log_5 \left(4^x - \frac{1}{10}\right) \leq 2x - 1.$$

Решение. Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$(2x + 1) \log_5 10 + \log_5 \left(4^x - \frac{1}{10}\right) \leq 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5 \left(10^{2x+1} \left(4^x - \frac{1}{10}\right)\right) \leq \log_5 5^{2x-1},$$

$$\begin{cases} 4^x - \frac{1}{10} > 0, \\ 10^{2x+1} \left(4^x - \frac{1}{10}\right) \leq 5^{2x-1} \end{cases}$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$10 \cdot 10^{2x} \left(4^x - \frac{1}{10}\right) \leq \frac{5^{2x}}{5},$$

$$4^x \left(4^x - \frac{1}{10} \right) \leq \frac{1}{50},$$

Пусть $4^x = y$, тогда имеем:

$$y^2 - \frac{1}{10}y - \frac{1}{50} \leq 0,$$

$$-\frac{1}{10} \leq y \leq \frac{1}{5},$$

Откуда, учитывая первое неравенство системы получаем:

$$\frac{1}{10} < 4^x \leq \frac{1}{5},$$

$$-\log_4 10 < x \leq -\log_4 5.$$

Ответ: $(-\log_4 10; -\log_4 5]$.

Также умение обращаться с неравенствами могут понадобиться при выполнении заданий под номером 9.

Примеры под этим номером могут содержать логарифмы – достаточно сложные примеры для учеников с базовой подготовкой из-за того, что на тему логарифмические неравенства может выделяться мало уроков. В решении данного примера также присутствует замена значения – еще один навык на изучение, которого выделяется, не так много времени [33].

Пример 8 [52].

Решите неравенство $\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \log_8^2 x}}{\log_8 x} < 2$.

Решение. После замены $t = \log_8 x$, получаем $\frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t}{t} < 0$. Значит,

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t > 0, \text{ или} \\ t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t < 0, \\ t > 0 \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 4t^2 < 4t^2 - 4t + 1, \\ 4t^2 \leq 1, \\ t < 0 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \leq t < 0.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$-\frac{1}{2} \leq \log_8 x < 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \leq x < 1.$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 4t^2 > 4t^2 - 4t + 1, \\ 4t^2 \leq 1, \\ t > 0 \end{cases}$$

$$0 < t < \frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0 < \log_8 x < \frac{1}{2},$$

$$1 < x < \sqrt{8}.$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{4}; 1 \right) \cup (1; \sqrt{8}).$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}; 1 \right) \cup (1; \sqrt{8}).$

В данном примере ученик столкнется с радикалами, логарифмами и заменой переменных.

Пример 9 [14].

Решите неравенство $\left| 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \right| \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}.$

Решение. Неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{cases} 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}, \\ -2x^2 - \frac{19}{8}x + \frac{1}{8} \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} \leq 0, \\ x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 3)(x + \frac{3}{4}) \leq 0, \\ (x + 1)(x - \frac{1}{2}) \leq 0 \end{cases}$$

Изобразим решение на рисунке, чтобы наглядно показать ответ к данному примеру (Рис. 2).

$$-1 \leq x \leq 3.$$

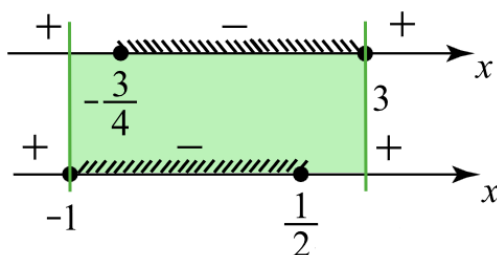


Рис. 2. Рисунок к примеру 9.

Ответ: $[-1; 3]$.

При решении этого неравенства с модулем мы пришли к совокупности двух неравенств.

Пример 10 [53]. Решите неравенство

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geq x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x}.$$

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$x^2 + \frac{3x - 25}{x(x - 5)} - \frac{5}{x} \geq x^2 - \frac{1}{x - 4},$$

$$\frac{3x - 25 - 5(x - 5)}{x(x - 5)} + \frac{1}{x - 4} \geq 0,$$

$$\frac{-2x}{x(x - 5)} + \frac{1}{x - 4} \geq 0,$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x-5} \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-5-2(x-4)}{(x-4)(x-5)} \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3-x}{(x-4)(x-5)} \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 3, \\ 4 < x < 5. \end{cases}$$

Отметим на числовой прямой точки и выясним знак функции на интервалах (Рис. 3).

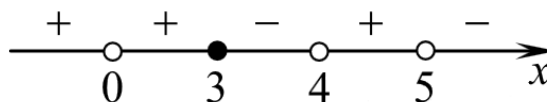


Рис. 3. Рисунок к примеру 10.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 3] \cup (4; 5)$.

После множества преобразований привели наше неравенство к системе неравенств и определили знаки функции на полученных интервалах. Навыки решения неравенств методом интервалов может понадобиться при решении различных типов неравенств: квадратных, иррациональных и т.д.

Пример 11 [52]. Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2} + \frac{x^2+2x+2}{(x-3)^2} \leq \frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Решение.

Сделаем замену $a = \frac{x-1}{x+2}, b = \frac{x+1}{x-3}$.

Тогда:

$$a + b = \frac{(a+b)^2}{(x+2)(x-3)} = \frac{2x^2-x+5}{(x+2)(x-3)}.$$

Неравенство принимает вид:

$$a^2 + b^2 \leq \frac{(a+b)^2}{2},$$

Откуда:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab &\leq 0, \\ (a - b)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+2} &= \frac{x+1}{x-3}, \\ x^2 - 4x + 3 &= x^2 + 3x + 2, \\ x &= \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{1}{7}$.

Умение находить и выполнять замены как в этом примере требует натренированности в решении подобных задач, знания формул сокращенного умножения.

Данный пример допускает решение и без замены переменных, с помощью тождественных преобразований неравенство приводится к виду:

$$\frac{(7x-1)^2}{(x+2)^2(x-3)^2} \leq 0.$$

Откуда также получается ответ $x = \frac{1}{7}$.

Пример 12 [3]. Решите неравенство:

$$\log_{x^2+x}(x^2 - 2x + 1) \leq 1.$$

Решение. 1) Если $x^2 + x > 1$, то:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ 0 < x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Откуда $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1$ или $x > 1$ (Рис. 4).

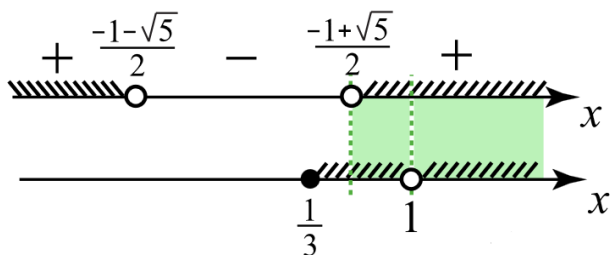


Рис. 4. Рисунок к примеру 12.

2) Если $0 < x^2 + x < 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0, \\ x^2 + x > 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geq x^2 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 < 0, \\ x(x + 1) > 0, \\ 3x \leq 1. \end{cases}$$

Откуда $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < -1$ или $0 < x < \frac{1}{3}$ (Рис. 5).

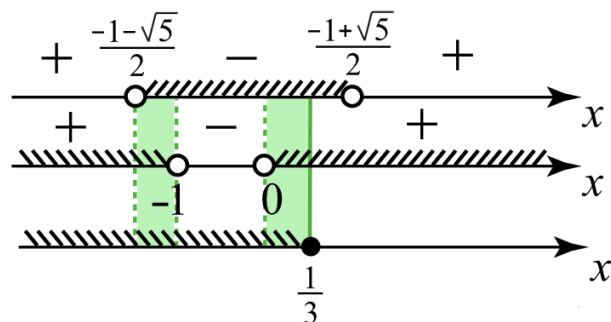


Рис. 5. Рисунок к примеру 12.

Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства:

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < -1 \text{ или } 0 < x < \frac{1}{3} \text{ или } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1 \text{ или } x > 1.$$

Ответ: $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1) \cup (0; \frac{1}{3}] \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.

Подобные примеры не решить без основательной подготовки, без дифференциации обучения сложно дать ученикам знания и практику для решения таких длинных и сложных для базового уровня задач.

Пример 13 [22]. Решите неравенство:

$$\log_{(x-2)^2} \frac{5-x}{4-x} \leq 1 + \log_{(x-2)^2} \frac{1}{x^2 - 9x + 20}.$$

Решение. Найдем ограничения на x .

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3, \\ \frac{x-5}{x-4} > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3, \\ \begin{cases} x < 4, \\ x > 5. \end{cases} \end{cases}$$

Далее заданное неравенство будем рассматривать только на множестве $M = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$.

На M :

$$\log_{(x-2)^2} \frac{5-x}{4-x} \leq 1 + \log_{(x-2)^2} \frac{1}{x^2 - 9x + 20},$$

$$\frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-5| - \frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-4| \leq 1 - \frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-5| - \frac{1}{2} \log_{|x-2|} |x-4|,$$

$$\log_{|x-2|} |x-5| \leq 1,$$

$$\log_{|x-2|} |x-5| \leq \log_{|x-2|} |x-2|,$$

$$(|x-2| - 1) \cdot (|x-5| - |x-2|) \leq 0,$$

$$(x-2-1) \cdot (x-2+1) \cdot (x-5-x+2) \cdot (x-5+x-2) \leq 0,$$

$$(x-3) \cdot (x-1) \cdot (2x-7) \geq 0,$$

$$(x-3) \cdot (x-1) \cdot (x-3,5) \geq 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty; 1)$	$(1; 3)$	$(3; 3,5)$	$(3,5; +\infty)$
Знак рационального выражения	-	+	-	+

Рис. 6. Рисунок к примеру 13.

С учетом ограничений на x получим множество решений исходного неравенства:

$$(1; 2) \cup (2; 3) \cup [3, 5; 4) \cup (5; +\infty).$$

Ответ: $(1; 2) \cup (2; 3) \cup [3, 5; 4) \cup (5; +\infty)$.

Этот пример потребует от ученика умений правильного нахождения ограничений x , знания логарифмов и алгоритма решения методом интервалов.

Пример 14 [54]. Решите неравенство:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \leq \frac{3}{4}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Применим эту формулу к каждому слагаемому левой части и получим:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \leq \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \leq \frac{3}{4}, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)(x+4)}{x(x+3)} \geq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4, \\ -3 < x < -2, \\ -2 < x < -1, \\ -1 < x < 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

Пример 15 [86]. Решите неравенство:

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1.$$

Решение. Приведем решение первым способом, рассмотрим два случая. Первый случай $x^2 > 1$:

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq 1,$$

$$(x + 1)^2 \leq x^2,$$

$$2x + 1 \leq 0,$$

$$x \leq -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условия $x^2 > 1$, получаем:

$$x < -1.$$

Второй случай $0 < x^2 < 1$:

$$\log_{x^2}(x + 1)^2 \leq 1,$$

$$(x + 1)^2 \geq x^2,$$

$$2x + 1 \geq 0,$$

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем:

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ или } 0 < x < 1.$$

Множество решений неравенства системы:

$$(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1).$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1).$

Решение вторым способом:

$$\log_{x^2}(x + 1)^2 \leq 1,$$

$$\frac{\lg(x + 1)^2}{\lg x^2} \leq 1,$$

$$\frac{\lg(x + 1)^2 - \lg x^2}{\lg x^2} \leq 0,$$

$$\begin{cases} \frac{(x + 1)^2 - x^2}{x^2 - 1}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Решение третьим способом. Перепишем правую часть неравенства:

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \leq \log_{x^2} x^2.$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{cases} (x^2 - 1)((x+1)^2 - x^2) \leq 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)(x+1-x)(x+1+x) \leq 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

И получим тот же ответ:

$$\begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

По данному примеру видно, что чем больше способов решения примера освоит ученик, тем больше возможностей для решения задачи будет иметься у него в распоряжении, что повысит шансы на успешную сдачу экзамена.

Как видно из примеров задач, на экзамене могут встречаться разнообразные по своему виду и сложности неравенства, требующие от ученика хорошие навыки решения неравенств, глубокие знания смежных тем [63].

В настоящее время возникает необходимость готовить выпускников к итоговой аттестации по математике в форме ЕГЭ на базовом и профильном уровне сложности. Использование дифференциации при подготовке к ЕГЭ позволяет выработать в процессе обучения на уроках математики индивидуальный подход к каждому ученику. Что не только акцентирует внимание на особенностях личностного восприятия предмета и реализует

потребности каждого учащегося в особом подходе и средствах обучения, но и повышает уровень собственных достижений и возможностей в процессе усвоения знаний на уроке, а также при выполнении домашнего задания. А это, в свою очередь, способствует развитию познавательной активности учащихся и их самореализации в учебно-воспитательном процессе. В результате учащиеся успешно сдают ЕГЭ [9].

§6. Элективный курс по теме «Тригонометрические неравенства» для учащихся математического профиля

Элективные занятия дают возможность шире и глубже изучать программный материал, задачи повышенной трудности, больше рассматривать теоретический материал, внедрять принцип опережения. Тематика задач не выходит за рамки основного курса, но уровень их трудности – повышенный.

Программа данного элективного курса «Тригонометрические неравенства» предназначена для учащихся 10 классов. Она направлена на углубление, обобщение знаний и умений обучающихся при решении различных неравенств.

Взяв за основу типовые учебные программы, можно самостоятельно разработать авторские и модифицированные программы элективных курсов.

К модифицированным программам относятся программы, разработанные на основе уже существующих примерных учебных программ, но с внесенными изменениями и дополнениями в содержание предмета.

Авторские программы – основаны на авторской концепции построения содержания учебного курса по данному предмету.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1) данный элективный курс поможет обеспечить овладение учащимися разделом тригонометрии в программе по математике на повышенном уровне;

2) систематизирует знания учащихся о методах решения тригонометрических уравнений и неравенств;

3) подготовит учащихся к решению тригонометрических заданий единого государственного экзамена.

Педагогическая целесообразность состоит в следующем:

– элективный курс выполняет не только компенсирующую функцию, но и ориентирован на расширение базового уровня знаний учащихся по математике, является предметно-ориентированным и дает учащимся возможность познакомиться с нестандартными приемами и методами решения тригонометрических неравенств;

– отдельные вопросы, рассматриваемые в курсе, выходят за рамки обязательного содержания. Вместе с тем, они тесно примыкают к основному курсу. Поэтому данный элективный курс будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических знаний и умений, предусмотренных школьной программой.

Цель и задачи программы элективного курса:

Цель: освоение учащимися основных методов решения неравенств, рассматриваемых в данном курсе, направленных на формирование у учащихся предметных компетентностей и успешную сдачу ЕГЭ.

Задачи курса:

– расширить и углубить знания по тригонометрии, повысить интерес к её изучению;

– сформировать представление об основных методах решения математических задач, существенно обогатить опыт учащихся по их применению;

– систематизировать имеющиеся обширные, но разрозненные теоретические знания из основного курса математики, раскрыть их внутренние взаимосвязи;

- способствовать развитию интеллектуальных и творческих способностей учащихся, интереса и практических умений в исследовательской деятельности.

Отличительные особенности данного элективного курса:

- данный элективный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, углублению и систематизации знаний по тригонометрии при подготовке к экзаменам

- практика показывает громадный разрыв между содержанием школьной программы по математике и теми требованиями, которые налагаются на учащихся при сдаче ЕГЭ, поэтому данная программа призвана ликвидировать этот разрыв и подготовить учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по разделу «Тригонометрия».

Программа элективного курса рассчитана на 17 часа (1 ч. в неделю).

Форма занятий:

Занятия курса организуются в нескольких формах:

- индивидуальной;
- фронтальной;
- работа в парах.

Особенности организации учебных занятий:

- при проведении элективного курса проводятся викторины, теоретические опросы по знанию основных понятий и формул;

- программа курса составлена с учетом принципа «от простого - к сложному»;

- изучение содержания элективного курса распределено с учетом его достаточности для качественного изучения содержащихся в программе материалов.

Виды деятельности:

- фронтальная работа при решении неравенств, под руководством учителя;

- фронтальная работа при решении неравенств;
- совместная проверка выполнения заданий;
- обсуждение способов решения неравенств.

Виды занятий:

- урок-лекция;
- урок-практикум;
- урок-семинар.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- знать и применять формулы тригонометрии;
- знать алгоритмы решений тригонометрических уравнений и неравенств;
- знать и уметь применять различные способы решений уравнений и неравенств разных видов;
- уметь анализировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать, самостоятельно работать с математической литературой и использовать информационные технологии.

Основными формами подведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

- текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется во время проведения занятий путем проведения теоретических опросов и коллективных проверок выполнения заданий;
- дополнительный контроль проводится с помощью домашних заданий;
- итоговый контроль осуществляется проведением итогового занятия, на котором обучающиеся представляют свои проекты.

В таблице 1 представим учебно-тематическое планирование к данному элективному курсу.

Содержание элективного курса

Раздел 1. Тригонометрические формулы (3 ч.).

Занятие 1. Урок обобщение.

Основные тригонометрические тождества.

Формулы, выражающие соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Вычисление по известному значению одной из тригонометрических функций значений остальных тригонометрических функций.

Таблица 1 – Учебно-тематическое планирование

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
Раздел I	Тригонометрические формулы	3	
Занятие 1	Урок обобщение	1	Урок-лекция
Занятие 2-3	Решение простейших тригонометрических уравнений	2	Урок-практикум
Раздел II	Решение тригонометрических неравенств различными методами	11	
Занятие 4-5	Решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности	2	Урок-практикум
Занятие 6-8	Графический метод решения тригонометрических неравенств	3	Урок-практикум
Занятие 9-11	Решение тригонометрических неравенств с помощью метода интервалов	3	Урок-практикум
Занятие 12-14	Решение систем с тригонометрическими неравенствами	3	Урок-практикум
Раздел III	Подведение итогов	3	
Занятие 15	Контрольный тест	1	Урок-зачет
Занятие 16-17	Защита проектов	2	Урок-семинар

Формулы приведения, преобразования тригонометрических функций.

Решение тригонометрических выражений, используя формулы приведения.

Занятие 2-3. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Цель: систематизировать, обобщить, расширить знания и умения учащихся, связанные с применением формул тригонометрии и решением простейших тригонометрических уравнений.

Раздел 2. Решение тригонометрических неравенств различными методами (11 ч.).

Занятие 4-5. Решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

Цель:

- повторить и систематизировать знания учащихся по решению тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.
- вспомнить и закрепить алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств.

Занятие 6-8. Графический метод решения тригонометрических неравенств.

Цель: повторить и закрепить знания учащихся в решении тригонометрических неравенств с помощью графиков функций.

Занятие 9-11. Решение тригонометрических неравенств с помощью метода интервалов.

Цель:

- изучить алгоритм метода интервалов при решении тригонометрических неравенств;
- научить учащихся решению тригонометрических неравенств с помощью метода интервалов.

Занятие 12-14. Решение систем с тригонометрическими неравенствами.

Цель: углубить знания в решении систем с тригонометрическими неравенствами.

Раздел 3. Подведение итогов (3 ч.).

Занятие 15. Контрольный тест.

Контрольный срез проводится в форме итогового тестирования. Далее приводится тест, рассчитанный на один урок, по окончании которого учитель ставит зачет/незачет, либо оценивает учащихся по бальной системе. В тесте содержится шесть упражнений с выбором варианта ответа, а для более

сильных учащихся в области тригонометрии есть дополнительное задание, которое подразумевает написание полного решения.

Занятие 16-17. Защита проектов.

Выступления учеников по темам своих проектов.

Темы исследовательских работ для учащихся в рамках данного элективного курса

Учащимся на выбор предлагаются темы проектов, которые можно использовать как для индивидуальной работы, так и для групповой. Выполнение проектов поможет учащимся развивать навыки самостоятельной работы, поиска и анализа информации.

Темы выдаются в начале изучения элективного курса. Защита готовых проектов осуществляется на последних уроках-семинарах. Лучшие работы отбираются на школьную научную конференцию учащихся.

1. Системы тригонометрических неравенств.

План работы:

- изучить статью из журнала «Квант» (Болибрух А. Решение систем тригонометрических неравенств, 1987. – №11. –С. 46-49);
- разобрать решения всех представленных примеров;
- решить на выбор одно из упражнений в конце статьи;
- подготовить и оформить проект.

2. Решение тригонометрических неравенств.

План работы:

- изучить статью из журнала «Квант» (Демьянов В. Тригонометрические неравенства, 1971, №4. С. 43-50.);
- разобрать решения всех представленных примеров;
- решить на выбор два неравенства из представленных в конце статьи;
- подготовить и оформить проект.

3. Вычисления в тригонометрии.

План работы:

– составить типологию задач, представленных в статье журнала «Квант» (Рудой Б. Вычисление и тригонометрия. Задачи, 1992, №10. –С. 56.);

– решить по одному заданию каждого типа;

– подготовить и оформить проект.

4. Тригонометрические уравнения.

План работы:

– изучить статью из журнала «Квант» (Савин А. Тригонометрия 1996, №4, С.32-33);

– придумать и решить задачу, которую можно решить с помощью формулы данной в статье (подобную представленным в статье);

– подготовить и оформить проект.

5. Тригонометрические уравнения.

План работы:

– изучить статью из журнала «Квант» (Шабунин М. Тригонометрические уравнения, 1973, №2, С. 58-63);

– разобрать решения всех представленных примеров;

– решить на выбор одно из упражнений в конце статьи;

– подготовить и оформить проект.

Рекомендуемая литература для учителя [2, 17, 28, 29, 30, 34, 38, 39, 40 59, 70, 73, 74] и для учащихся [5, 16, 30, 38, 64, 65, 81, 83].

Методические рекомендации по проведению элективного курса:

Раздел 1. Тригонометрические формулы (3 ч.).

Занятие 1. Урок обобщения.

На первом уроке необходимо вспомнить основные тригонометрические тождества: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. А так же повторить формулы преобразования тригонометрических функций, формулы приведения.

Вычисление по известному значению одной из тригонометрических функций значений остальных тригонометрических функций.

Решение тригонометрических выражений, используя формулы приведения [11]. Можно провести небольшую самостоятельную работу «Преобразование тригонометрических выражений» [34].

Упростите выражения:

I вариант.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(5\pi - \alpha) + \sin(\alpha - 2\pi) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

II вариант.

$$1 - \frac{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)} + \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

III вариант.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right).$$

Занятие 2-3. Решение простейших тригонометрических уравнений [1,3].

Пример 1. Решить уравнение:

$$\cos 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k;$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решить уравнение:

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 2 = 0.$$

Пусть $\cos \frac{x}{2} = t, (|t| \leq 1)$, тогда уравнение примет вид:

$$t_1 = 1,$$

$$t_2 = -\frac{2}{3}.$$

Оба корня уравнения удовлетворяют условию допустимого значения t , следовательно, переходим к обратной замене.

$$\cos \frac{x}{2} = 1,$$

$$x = 4\pi n, n \in Z;$$

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{2}{3},$$

$$x = \pm 2 \arccos \left(-\frac{2}{3} \right) + 4\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = 4\pi n, n \in Z; x = \pm 2 \arccos \left(-\frac{2}{3} \right) + 4\pi n, n \in Z.$

Пример 3. Решить уравнение:

$$\sin x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0; \\ 2 \sin x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi k, k \in Z; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \pi k, k \in Z; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$

Пример 4. Решить уравнение:

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0.$$

$$\text{т.к. } \cos x \neq 0, \text{ то } \frac{2 \sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\cos x} = 0,$$

получаем:

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$2 \operatorname{tg} x = 3;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2};$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in Z.$

Пример 5. Решить уравнение:

$$3 \sin^2 x - 4 \cos x \sin x + \cos^2 x = 0.$$

Так как, $\cos^2 x \neq 0$, то $\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$.

$$3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = t \text{ (замена)}$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0;$$

$$t_1 = 1 \text{ или } t_2 = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3};$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$.

Ниже приводятся упражнения для решения в классе, или же в качестве самостоятельной или домашней работы (на усмотрение учителя).

Для всех заданий в скобках приведены ответы.

Решить уравнения:

6. $\operatorname{tg} 3x = 3$. (Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$).

7. $\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$. (Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$).

8. $\sin(4x + \frac{\pi}{6}) = 2$. (Ответ: $x = \emptyset$).

9. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

(Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$).

9. $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

(Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$).

10. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$. (Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$).

11. $\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9\sin^2 3x - 24\sin 3x + 16} = -4$.

(Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, n \in Z$).

$$12. (\sin x - \frac{1}{3}) (\cos x + \frac{2}{5}) = 0.$$

$$(\text{Ответ: } x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z; x = \pm \arccos(-\frac{2}{5}) + 2\pi n, n \in Z).$$

$$13. \sin^2 \frac{2x}{5} - 10 \sin \frac{2x}{5} \sin \frac{x}{5} + 25 = 25 \cos^2 \frac{x}{5}. (\text{Ответ: } x = 5\pi n, n \in Z).$$

$$14. \sin x + 2 \cos x = 0. (\text{Ответ: } x = -\arctg 2 + \pi n, n \in Z).$$

$$15. \sin x - 4 \cos x = 0. (\text{Ответ: } x = \arctg 4 + \pi n, n \in Z).$$

$$16. \sin^2 x - 10 \sin x \cos x + 21 \cos^2 x = 0.$$

$$(\text{Ответ: } x = \arctg 7 + \pi n, n \in Z; x = \arctg 3 + \pi n, n \in Z).$$

$$17. \sin^2 2x - 6 \sin 2x \cos 2x + 5 \cos^2 2x = 0.$$

$$(\text{Ответ: } x = \frac{1}{2} \arctg 5 + \frac{\pi}{2} n, n \in Z; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z).$$

$$18. 6 \sin^2 x + 4 \sin(\pi - x) \cos(2\pi - x) - 1 = 0.$$

$$(\text{Ответ: } x = \arctg \frac{1}{5} + \pi n, n \in Z; x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z).$$

Раздел 2. Решение тригонометрических неравенств различными методами (11 ч.).

Занятие 4-5. Решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

20 [80]. Решите неравенство:

$$\sin x \geq \frac{1}{2}.$$

21 [15]. Решить неравенство:

$$3 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) < \sqrt{3}.$$

Преобразовав данное неравенство, получим:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) < \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$-\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) < \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Обозначим $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$ через t , тогда $\operatorname{tg} t > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (Рис. 7).

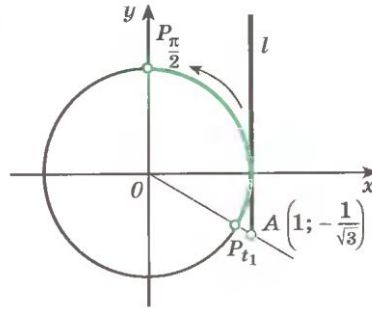


Рис. 7. Рисунок к примеру 21.

На рисунке 7 выделена соответствующая дуга l . Так как $t_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, получаем $-\frac{\pi}{6} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$. Перейдем к переменной x :

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Выполнить задания:

22. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Ответ: $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

23. $2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$. (Ответ: $x \in \left(-\frac{13\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

24. $5 \cos(x - \pi/6) - 1 \geq 0$.

(Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} - \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$).

25. $3 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$. (Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

26. $\sin x > 2/3$.

(Ответ: $x \in \left(\arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n; \pi - \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

27. $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x \geq 1$. (Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$).

28. $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \sqrt{2}$. (Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$).

29. $\cos x + \sin x \geq \sqrt{2}$. (Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$).

30. Решить неравенство $\sin x + \cos 2x < 1$.

(Ответ: $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 3\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

31. Решить неравенство $\sin x < 0,3$.

(Ответ: $x \in (-\pi - \arcsin 0,3 + 2\pi n; \arcsin 0,3 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$).

32. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x < -1$.

(Ответ: $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

Занятие 6-8. Графический метод решения тригонометрических неравенств.

Выполнить задания [15]:

33. Решить неравенство $\sin x > 0$.

Ответ: $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$.

34. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \leq 1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

35. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

(Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$).

36. Решить неравенство $\sqrt{3}\operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$.

(Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$).

37. Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

(Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

38. Решить неравенство $\sin x \leq 0,5$.

(Ответ: $x \in \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$).

39. Решить неравенство $2 \cos 2x + 3 \cos x - 2 > 0$.

(Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

40. Решить неравенство $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ответ: $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$).

41. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x < 3$.

(Ответ: $x \in (\operatorname{arctg} 3 + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$).

Занятие 9-11. Решение тригонометрических неравенств с помощью метода интервалов [23].

Выполнить задания:

42 [80]. Решить неравенство $5 \sin x > 20 \sin^3 x$.

43. Решить неравенство $2 \cos 2x \cos x > 0$.

(Ответ: $\left[\begin{array}{l} \pi/2 + 2\pi n < x < 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ 5\pi/4 + 2\pi k < x < 3\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ -\pi/4 + 2\pi l < x < \pi/4 + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$).

44. Решить неравенство $\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

(Ответ: $\left[\begin{array}{l} -\pi/8 + \pi n < x < \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \pi/8 + \pi k < x < 3\pi/8 + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ \pi/2 + \pi t < x < 5\pi/8 + \pi t, t \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$).

Занятие 12-14. Решение систем с тригонометрическими неравенствами.

45 [30]. Найти корни уравнения $\cos x = 0,5$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \leq 0$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

46. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}.$$

Ответ: $x = \pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. [19]

47. Выполнить задания:

Найти все решения совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right., \text{удовлетворяющие неравенству } \cos x > 0.$$

(Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$).

Раздел 3. Подведение итогов (3 ч.).

Занятие 15. Контрольный тест.

Контрольный срез проводится в форме итогового тестирования. Далее приводится тест, рассчитанный на один урок, по окончании которого учитель ставит зачет/незачет, либо оценивает учащихся по бальной системе. В тесте содержится шесть упражнений с выбором варианта ответа, а для более сильных учащихся в области тригонометрии есть дополнительное задание, которое подразумевает написание полного решения.

Контрольный тест [34]

1. Решить неравенство $\sin x \geq \frac{1}{2}$.
2. $x \in [\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2}{3} + 2\pi n]$ $n \in \mathbb{Z}$;
3. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
4. $x \in [\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n]$;
5. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
6. Решить неравенство $3\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}) < \sqrt{3}$.
7. $x \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
8. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
9. $x \in (\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3}), n \in \mathbb{Z}$;
10. $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
11. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x \geq -1$.
12. $x \in \mathbb{R}$;
13. $x \in \emptyset$;
14. $x \in [\frac{3\pi}{4} + \pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$;
15. $x \in (\frac{3\pi}{4} + \pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
16. Решить неравенство $\sin^3 x \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) + \cos^3 x \cos(\frac{\pi}{2} - 3x) > \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

$$17. x \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n\right), n \in \mathbb{Z};$$

$$18. x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$$

$$19. x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

20. Задание, требующее развернутого решения.

Решить неравенство методом интервалов $\frac{\cos^2 x \sin x}{\sin 3x} \geq 0$.

Ответы к тесту: 1-а; 2-а; 3-в; 4-в; 5- $x \in (\pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi n) \cup (\frac{2\pi}{3} + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Занятие 16-17. Защита проектов.

Эти уроки проходят в форме уроков-семинаров, на которых учащиеся представляют свои работы. Каждая группа (или каждый учащийся) защищают свои проекты, с помощью доклада и презентации. После чего отвечают на вопросы слушателей. И происходит общее обсуждение темы.

Список источников для проектирования элективного курса [4, 7, 11, 15, 23, 30, 34, 36, 82].

§7. Педагогический эксперимент и его результаты

Констатирующий этап педагогического эксперимента проводился на базе МБУ «Школа №44» г. о. Тольятти в 2019/2020 учебном году.

Цель констатирующего этапа эксперимента в том, чтобы изучить и проанализировать школьную практику обучения математике.

В ходе эксперимента использовались следующие методы исследования: анкетирование учителей, анализ опыта учителей, беседа.

Анкетирование было направлено на выяснение отношения к дифференцированным заданиям во время уроков. Опрос производился среди учителей математики в количестве 8 человек. Для учителей была предложена анкета, состоящая из 7 вопросов, с выбором варианта ответа.

1. Как Вы относитесь к разделению учащихся в одном классе на группы по уровню знаний, для работы в группах во время урока? Результат: положительно – 5, нейтрально – 2, отрицательно – 1.

2. Считаете ли Вы, что домашнее задание должно быть дифференцированным? Результат: да – 3, нет – 5.

3. На Ваш взгляд, достаточно ли задачного материала в учебнике, по которому вы работаете, для организации полноценной дифференцированной работы на уроке? Результат: да – 1, нет – 7.

4. Как Вы считаете, влияет ли дифференцированный подход на улучшение качества знаний учащихся? Результат: да – 8, нет – 0.

5. Как Вы считаете, целесообразно ли использовать дифференцированный подход при подготовке к ЕГЭ? Результат: да – 5, нет – 3.

6. Пробовали ли Вы применять дифференцированный подход в обучении на своих уроках? Результат: да – 8, нет – 0.

7. Считаете ли Вы, что дифференцированный подход более трудоемкий по сравнению с традиционным обучением? Результат: да – 7, нет – 1.

Также учителям были заданы три вопроса, при ответе на которые требовался развернутый ответ.

1. Основываясь на каких критериях, Вы разделяете учащихся на группы?

2. Какие положительные изменения Вы заметили при использовании дифференцированного обучения?

3. Какие затруднения Вы испытывали при организации дифференцированного обучения?

При ответе на развернутые вопросы учителя выделили положительную тенденцию в качестве знаний, но отметили, что подготовить дифференцированный материал к урокам в полной мере довольно трудоемкий процесс, поэтому не все уроки удавалось провести с дифференциацией обучения. Основным критерием для разделения на группы

была общая успеваемость по предмету и активность ученика на уроке, вовлеченность в процесс обучения.

Выводы по второй главе

Во второй главе приведены методические рекомендации по проведению дифференциации обучения, подробно рассмотрены этапы уровневой дифференциации, которые могут применяться при изучении темы «Неравенства» в курсе алгебры старшей школы.

При анализе задач единого государственного экзамена было отмечено, что использование дифференциации при подготовке к решению задач ЕГЭ связанных с темой «Неравенства» позволяет в процессе обучения на уроках алгебры применить индивидуальный подход к каждому ученику и увеличить эффективность подготовки.

Разработан элективный курс для учителей математики старших классов, который можно использовать для углубления знаний при изучении темы «Тригонометрические неравенства».

Проведен педагогический эксперимент – опрос учителей математики на тему использования дифференциации обучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выпускной квалификационной работы получены следующие результаты:

1. Сформулированы цели и задачи дифференциации обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры старшей школы.

2. Рассмотрены методы, формы и средства, используемые при дифференциации обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры старшей школы.

3. Проанализировано содержание теоретического и задачного материала темы «Неравенства» учебников разных авторов для старшей школы. Можно прийти к выводу, что лучше всего задачный материал представлен в учебниках А.Г. Мордковича, так как в каждой теме имеется достаточное количество примеров для организации дифференцированного подхода в обучении теме «Неравенства».

4. Проанализированы задачи единого государственного экзамена двух уровней сложности, связанные с темой «Неравенства». Большое количество разнообразных задач различной сложности требует от учеников серьезной подготовки для успешной сдачи экзамена, дифференцированный подход в обучении позволит подготовить каждого ученика на подходящем под его способности уровне.

5. Выведены методические рекомендации обучения теме «Неравенства» в курсе алгебры старшей школы.

6. Разработан и приведен элективный курс по теме «Тригонометрические неравенства» для учеников старших классов общеобразовательной школы.

Опрос и беседа с учителями математики в ходе констатирующего этапа педагогического эксперимента показал, что уровневая дифференциация при обучении такого сложного предмета как математика может успешно

применяться в педагогической практике и давать положительные результаты по успеваемости учащихся.

Разработанный элективный курс можно применять учителями математики при изучении темы «Тригонометрические неравенства» или на отдельных уроках, для углубления знаний при изучении рассматриваемой темы.

Ввиду важности и содержательности связанного с «Неравенствами» материала, качественное освоение темы и приобретенные навыки служат ученикам практическим целям в дальнейшем. Поэтому преимущества при применении уровневой дифференциации при обучении теме «Неравенства» обеспечат каждому ученику возможность достижения планируемых результатов в обучении с учетом его индивидуальных особенностей.

Данную магистерскую диссертацию можно использовать при подготовке к внедрению дифференцированного подхода при обучении теме «Неравенства» в курсе алгебры в старших классах общеобразовательной школы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / Ш.А. Алимов и др. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.
2. Балк, М.Б., Паравян Н.А. Неравенства Гюйгенса и их применение // Математика в школе, №2, 1974, с. 70–74.
3. Башмаков, М.И. Уравнения и неравенства. / М.И. Башмаков. – М.: Наука. 1976. – 96 с.
4. Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа. [Текст]: Учебник для 10-11 классов средней школы. 2-е изд. – М.: 1992. - 351 с.
5. Болибрух, А. Решение систем тригонометрических неравенств / А. Болибрух, В. Уроев, М. Шабунин // Квант. – 1987. – №11. –С. 46-49.
6. Боровских, А.В. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема «Неравенства». [Электронный ресурс]/ А.В. Боровских, В.Е. Веревкина // Наука и школа. Московский педагогический государственный университет. – 2015. - №5. – С. 77 – 87. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24852670>. - Последнее обновление 19.05.2018.
7. Бородуля, И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства. [Текст] – М.: Просвещение, 1989. – 239 с.
8. Брадис, В.М. Методика преподавания математики в средней школе / В.М. Брадис; под редакцией А.И. Маркушевича. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1954. – 504 с.
9. Бурлакова, И.В. Применение дифференциации на уроках математики при подготовке к ЕГЭ, обобщение опыта работы учителя математики / И.В. Бурлакова. – Сочи: МБУ №7, 2015. – С. 35

10. Вавилов, В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. – М.: Наука, 1988. – 240 с.
11. Виленкин, Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ для 10 класса [Текст]: Учебное пособие для учащихся школы и класса с углублённым изучением математики. – М.: Мнемозина, 1992. – 335 с.
12. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252с.
13. Груденов, Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики [Текст]: книга для учителя / Груденов Я.И. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
14. Далингер, В.А. Различные способы решения неравенств вида $|f(x)|+|g(x)|>|f(x)+g(x)|$ [Электронный ресурс]/ В.А. Далингер, Е.А. Пустовит // Ученые записки Забайкальского государственного университета. – 2012. - №6. – С. 124 – 128. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18076619>. - Последнее обновление 18.05.2018.
15. Дворянинов, С. Задачи В3, В7 – тригонометрия [Текст] // С. Дворянинов // Математика. – 2011. – № 8. – С.24-25.
16. Демьянов, В. Тригонометрические неравенства /В. Демьянов // Квант.– 1971.– №4. –С. 43-50.
17. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.
18. Елисеев, В.В. Управление дифференцированным обучением в общеобразовательной школе. Ульяновск: ИПК ПРО, 1995. – с. 8-17.
19. Епифанова, Н.М. Неравенства в текстовых задачах: учебное пособие [Электронный ресурс] / Н.М. Епифанова. – Ярославль: ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2007. – 45 с. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29807097>. – Последнее обновление 29.05.2018.

20. Епишева, О.Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности [Текст]: книга для учителя / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

21. Иванова, О.Л. Уровневая дифференциация при обучении неравенствам в старших классах общеобразовательной школы / О.Л. Иванова // «Студенческие Дни науки в ТГУ»: научно-практическая конференция (Тольятти, апрель-май 2020 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2020. – 1 оптический диск.

22. Ивлев, Б. М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учебное пособие для 10-11 классов сред. шк. / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990. – 48 с.

23. Клещев, В.А. Обобщение метода интервалов на тригонометрической окружности. [Текст] // Математика в школе. –1992. – № 6. –С. 17-18.

24. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. Для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 336 с.: ил.

25. Колягин, Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. Для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 264 с.: ил.

26. Коржевина, Е.К. Об обучении решению квадратных уравнений без использования формул корней [Электронный ресурс] / Е.К. Коржевникова, Т.Н. Матыцина, Н.Л. Марголина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2017. – С. 128-130. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-obuchanii-resheniyu-kvadratnyh-uravneniy-bez-ispolzovaniya-formuly-korney>. – Последнее обновления 15.05.2018.

27. Коропец, З.Л. Нестандартные методы решения неравенств и их систем / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева, Орел, 2012. – 125 с.

28. Корянов, А.Г., Прокофьев А.А. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами. // Математика в школе. 2011. №1. – стр. 18-26. и 2011. №2. – стр. 25-32.

29. Корянов, А.Г., Прокофьев А.А. Различные подходы к решению задач С5 ЕГЭ. // «Математика», 2011, № 5. – стр.11–21.

30. Костаева, Т.В. Методы решения тригонометрических уравнений. – Саратов: ГАУ ДПО «СОИРО», 2016. –60с

31. Лоскутникова, А.В. Организация самостоятельной работы учащихся старших классов при обучении их решению уравнений и неравенств с модулем [Электронный ресурс] / А.В. Лоскутникова, Е.Н. Медведева // Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы обучения математике, информатике, экономике и естественнонаучным дисциплине в средней и высшей школе». – 2019. – С. 153 – 156. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41510015>. - Последнее обновление 18.05.2018.

32. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

33. Майсеня, Л. И. Алгебраические уравнения и неравенства, функции, логарифмы: учеб. пособие для учащихся колледжей / Л. И. Майсеня, С. Б. Махнач, Д. И. Радюк, Н. И. Романовская. – 2006. – 226 с.

34. Макеева, А.В. Карточки по тригонометрии. 10-11классы: Дидактический материал для учителей. – Саратов, ОАО Издательство Лицей, 2002. –128 с.

35. Маликова, О.Л. Методический анализ содержания темы «Неравенства» в курсе алгебры основной школы / О.Л. Маликова // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции «Артемовские чтения». Пензенский государственный университет; под общей редакцией М.А. Родионова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. – С. 191-194.

36. Маликова, О.Л. Неравенства в основной школе / О.Л. Маликова // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск.– С.236-238.

37. Маслов, Н.С. Концепция развития армавирской средней школы № 4 по проблеме: «Интегрированно-дифференцированный подход к обучению, развитию и профильной ориентации учащихся в условиях СОШ» // Завуч. – 1999. - № 2.

38. Мерзляк, А.Г. Полонский В., Якир М. Тригонометрия. Задачник к школьному курсу 8-11. –М: АСТ-Пресс,1998.–656 с

39. Мерзляк, А.Г. Алгебра. 10 класс : учебник для общеобразоват. учеб. заведений : академический уровень, профилильный уровень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х.: Гимназия, 2011. — 368 с. : ил.

40. Мерзляк, А.Г. Алгебра. 11 класс : учебник для общеобразоват. учеб. заведений : академический уровень, профилильный уровень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х.: Гимназия, 2011. — 431 с. : ил.

41. Методические рекомендации к учебнику Г.К. Муравина Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс.: пособие / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 287 с.: ил.

42. Методические рекомендации к учебнику Г.К. Муравина Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: пособие / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 145 с.: ил.

43. Моисеева, В.Н. Методика формирования у старшеклассников логических приемов мышления при решении уравнений и неравенств. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://www.dissercat.com/>. – Последнее обновление 12. 03. 2019.

44. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.: ил.

45. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.: ил.

46. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. – 3-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 264 с.: ил.

47. Муравин, Г.К. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318, [2] с.: ил.

48. Муравин, Г.К. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 318, [2] с.: ил.

49. Нахман, А.Д. Технологические аспекты обучения решению неравенств [Электронный ресурс] / А.Д. Нахман // Вестник тульского государственного университета. Серия современные образовательные

технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин. – 2018. - №1(17). – С. 211 – 213. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36387890>. - Последнее обновление 13.05.2018.

50. Никитина, Н. Н. Личностно-ориентированное обучение в теории и технологии // – Ульяновск. –ИПК. ПРО, 1998

51. Нуну, Е.И. Квадратные уравнения и неравенства с параметрами [Электронный ресурс] / Е.И. Нуну // Студенческая наука и XXI век. – 2016. – № 13. – С. 33-35. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27386022>. – Последнее обновление 18.01.2018.

52. Образовательный портал для подготовки к экзаменам РЕШУ ЕГЭ. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ege.sdamgia.ru/>. – Последнее обновление 12. 03. 2019.

53. Осмоловская, И.М. Каждый школьник талантлив по-своему // Директор школы. – 2000. – № 2 –с. 67-68

54. Панкратова, Л.В. Научно-образовательный потенциал математических неравенств [Электронный ресурс] / Л.В. Панкратова // Математический вестник педвузов и университетов волго-вятского региона. – 2014. – №16. – С. 238-243. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28101355>. - Последнее обновление 27.01.2018.

55. Педагогический энциклопедический словарь / гл. ред. Б.М. Бим-Бад. – М. : Большая российская энциклопедия, 2002. – 528 с.

56. Пивина, И.А. Методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля [Электронный ресурс] / И.А. Пивина // Вестник Таганрогского государственного педагогического университета. – 2018. - №1. – С. 222-228. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35140043>. - Последнее обновление 18.05.2018.

57. Подготовка к ЕГЭ по математике Школково. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://shkolково.net/>. – Последнее обновление 12. 03. 2019.

58. Подласый, И.П. Педагогика: Новый курс [Текст]: Учебник для студентов высших учебных заведений: в 2 книгах. Книга 1: Общие основы. Процесс обучения / И.П. Подласый. – М.: Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 2003. – 576 с.

59. Потапов, М.К. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике: Справ. пособие. – Изд. 3-е, стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 416 с.

60. Потапов, М.К. Алгебра и начала математического анализа. Книга для учителя. 11 класс: базовый и профильный уровни / М.К. Потапов, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2009. – 256 с. : ил.

61. Потапов, М.К. Функции. Уравнения. Неравенства / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко, Т. М. Вуколова. – М.:Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1995. – 164 с.

62. Пратусевич, М.Я. Алгебра и начала анализа. 11 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: профильный уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2010. – 463 с. : ил.

63. Пустовит, Е.А. Развитие универсальных учебных действий учащихся основной школы при решении алгебраических задач с модулем. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://www.dissercat.com/>. – Последнее обновление 12. 03. 2019.

64. Рудой, Б. Вычисление и тригонометрия. Задачи /Б. Рудой Шабунин //Квант.– 1992. – №10. –С. 56.

65. Савин, А. Тригонометрия / А. Савин // //Квант.– 1996. – №4. –С. 32-33.

66. Садовничий, Ю.В. ЕГЭ 2020. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств / Ю. В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 93с.

67. Санникова, А.Н. Методические приемы обучения решению уравнений и неравенства с модулями в старшей школе [Электронный ресурс] / А.Н. Санникова // Журнал Информационно – коммуникационные

технологии в педагогическом образовании. – 2015. - №1 (34). – С. 28 – 30. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23755856>. - Последнее обновление 18.05.2018.

68. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике: методология и теория [Текст]: учеб. пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 292 с.

69. Селевко, Г.К. Педагогические технологии на основе эффективности управления и организации учебного процесса / Учебное пособие. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.

70. Смолянов, А. Применение тригонометрических подстановок в алгебре / А. Смолянов // Первое сентября. – М., 1996. – №26. – С.14.

71. Стефанова, Н.Л. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум [Текст]: учебное пособие для студентов математических факультетов педагогических университетов / Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др. – М.: Дрофа, 2007. – 320 с.

72. Тестов, В.А. О некоторых проблемах при изучении неравенств [Электронный ресурс]/ В.А. Тестов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2015. - №17. – С. 279 – 289. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28213876>. - Последнее обновление 15.05.2018.

73. Токарева, Л.И. Неравенства / Л.И. Токарева // Первое сентября.–М., 1998.– №15. – С.2-4.

74. Токарева, Л.И. Тригонометрические неравенства. Приемы доказательств / Л.И. Токарева // Первое сентября. – М., 2002. – №44, 47. – С.22-26; С. 23-26.

75. Унт, И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И.Э. Унт. – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.

76. Утеева, Р.А. Формы учебной деятельности учащихся на уроке [Текст]: / Р.А. Утеева // Научно-теоретический и методический журнал: Математика в школе. – 1995. – №2. – С. 33

77. Фалилеева, М.В. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами [Электронный ресурс] / М.В. Филеева // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 4-5. – С. 1230-1235. – Режим доступа: <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=31396>. – Последнее обновление 29.05.2018.

78. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fgos.ru/LMS/wm/wm_fgos.php?id=sred – Последнее обновление 20.06.2020.

79. Фирсов, В.В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения / В.В. Фирсов М., 1994 - 194 с.

80. Хабибуллин, К.Я. Систематизируем методы решения тригонометрических уравнений. [Текст] // Образование в современной школе. – 2009. – № 9. – С. 30-38.

81. Шабунин, М.И. Тригонометрические уравнения / М. Шабунин, С. Черемных // Квант. – 1973. – №2. –С. 58-63.

82. Шабунин, М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – М.: БИНОМ. Лабораторий знаний, 2008. – 384 с.: ил.

83. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 10 класса средней школы – М.: Просвещение, 1989.

84. Шестаков, С.А. ЕГЭ 2018. ЕГЭ 2018. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень) [Текст] / С. Шестаков. – М.: МЦНМО, 2018. – 352 с.

85. Шестаков, С.А. Решаем неравенства [Электронный ресурс] / С. Шестаков. // Математика. Методический журнал для учителей математики. – 2015. – №2. – С. 56-60. – Режим доступа: http://pets.scainlain.ru/0Yagubov/vk/neravenstva_02_metod_intervalov_i_razlozhenie_na_m.pdf. – Последнее обновление 29.05.2018.

86. Шестаков, С.А. Решаем неравенства [Электронный ресурс] / С. Шестаков. // Математика. Методический журнал для учителей математики. – 2015. – №11. – С. 56-62. – Режим доступа: https://yaroslavka-school.edu.yar.ru/metod_dot_sluzhba/matematika_2015-11.pdf. – Последнее обновление 29.05.2018.

87. Almog, N. Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions [Text] / N. Almog, B. Ilany // 2012. – PP. 1-3.

88. Davidson, A. The priorities and challenges of primary teachers' knowledge in their mathematics planning [Electronic resource] / Aylie Davidson // Conference: Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, At Adelaide. – USA, 2016. – 8 p. Mode of access: <https://www.researchgate.net/publication/310380602>. – Last update 03.06.2018.

89. Stapel, E. Solving Quadratic Inequalities. Concepts. Examples [Electronic resource] / Elizabeth Stapel // PurpleMath. – 2012. – Mode of access: <http://www.purplemath.com/modules/ineqqquad.htm>. – Last update 01.06.2018.

90. The Free High School Science Texts: Textbooks for High School Students Studying the Sciences Mathematics Grades 10-12 / FHSST Authors. – FHSST, 2008. – 624 p.

91. Zawaira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. – 360 p.