МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Задачи наглядной геометрии как средство интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы»

Студент М.В. Глухова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор Р.А. Утеева
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

Вопрос о роли задач наглядной геометрии для учащихся отечественной школы рассматривался еще в эпоху школьной реформы середины XIX в.

Дальнейшее развитие проблема включения наглядной геометрии в программу школьного курса математики приобрела в XX веке.

Одним из примеров учебника того времени может служить наглядная геометрия А.М. Астряба [1]. Более современным изданием, которое широко известно учителям математики служит учебное пособие для 5-6 классов И.Ф. Шарыгина и Л.Н. Ерганжиевой [70].

Анализ школьных учебников «Математика» 5-6 классов показал, что элементы наглядной геометрии включены в содержание большинства из них. Однако в курсе геометрии 7-9 классов уже не уделяется должного внимания задачам наглядной геометрии. Поэтому на практике учителя не всегда имеют возможность использовать задачи наглядной геометрии в качестве средств математического развития обучающихся.

Проблемы обучения наглядной геометрии учащихся общеобразовательной школы рассмотрены в ряде диссертационных исследований. Например, в диссертации Л.Н. Ерганжиевой [27] основное внимание уделено геометрической деятельности и формированию наглядно-интуитивных представлений учащихся 5-6 классов с целью их общекультурного развития.

Г.Ю. Гаркавцевой [13] рассмотрены методические подходы к обучению младших школьников геометрии на различных этапах начального образования, принципы организации деятельности учащихся в процессе изучения курса и методические приемы (сравнения, выбора, конструирования и преобразования). Разработан и апробирован курс для педагогов по теме «Наглядная геометрия».

В докторской диссертации А.Я. Цукаря предметом исследования явились «средства обучения математике, несущие образные и практические компоненты, необходимые для выявления содержательной стороны при формировании у школьников понятий, усвоении ими способов действий» [69].

Проблема обучения задачам наглядной геометрии тесно связана с проблемой формирования математического мышления и проблемой интеллектуального развития школьников. Они нашли отражение в ряде диссертационных исследований.

В докторской диссертации Э.Г. Гельфман [14] интеллектуальное воспитание учащихся в процессе обучения математике осуществляется средствами учебных текстов.

Иной подход к проблеме интеллектуального воспитания учащихся общеобразовательной школы при обучении геометрии представлен в докторской диссертации Л.И. Боженковой. Суть подхода в «приобретении учениками опыта осознанной саморегуляции процесса учебно-познавательной деятельности посредством управления обогащением умственного опыта учащихся» [7].

Предметом исследования в диссертации Л.П. Терентьевой [62] явилось интеллектуальное развитие младшего школьника, а диссертации А.Ю. Ярецкой [76] − интеллектуальное воспитание старших дошкольников.

Анализ представленной выше научно-методической литературы и практического опыта свидетельствует о том, что проблема интеллектуального развития учащихся общеобразовательной школы остается актуальной в теории и методике обучения геометрии.

Актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями* между: необходимостью интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы и недостаточным использованием методических возможностей задач наглядной геометрии, как средств такого развития; необходимостью формирования предметных (геометрических) знаний и умений и недостаточным количеством часов, отводимых на изучение геометрии в школе.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических возможностей задач наглядной геометрии как средств интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: система задач наглядной геометрии как средство интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы на основе технологии развивающего математического мышления В.А. Гусева.

Цель исследования заключается в выявлении методических возможностей задач наглядной геометрии как средств интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что использование в процессе обучения планиметрии и стереометрии системы задач наглядной геометрии на основе технологии развивающего математического мышления В.А. Гусева будет способствовать интеллектуальному развитию обучающихся.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования:**

1. Определить основные цели и задачи интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы.

2. Раскрыть роль логического и пространственного мышления в интеллектуальном развитии обучающихся.

3. Описать технологию развивающего математического мышления В.А. Гусева.

4.Проанализировать содержание задач наглядной геометрии в учебниках математики 5-6 классов и геометрии 7-11 классов.

5. Выделить типы задач наглядной геометрии и для каждого типа представить цепочку задач.

6.Разработать элективный курс по теме «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге».

7. Провести педагогический эксперимент и представить его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы В.А Гусева [22], Т.А. Ивановой [30], Г.И. Саранцева [47], М.А. Холодной [68], И.С. Якиманской [74].

Базовыми для настоящего исследования явились работы Л.Н. Ерганжиевой [27], В.В. Орлова [41], В.А. Смирнова, И.М. Смирновой [49], А.Я. Цукаря [69], И.Ф. Шарыгина [72].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе, систематизация и обобщение теоретического и практического материала по теме диссертации.

Основные этапы исследования:

1 этап (2018/19уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ научно-методической литературы и практических работ, нормативных документов (стандартов, программ).

2 этап (2018/19уч.г уч.г.): Определение теоретических основ обучения решению задач наглядной геометрии как средств интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы.

3 этап (2019/20 уч.г.): Определение методических основ обучения решению задач наглядной геометрии как средств интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы.

*4 этап (*2019/20 уч.г.): Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Самарская область, г.о. Тольятти, МБУ «Школа № 23» и НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет».

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем обоснована технология развития математического мышления В.А. Гусева и определены методические возможности задач наглядной геометрии как средств интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что его результаты расширяют представления учителей математики и магистров математического образования о сущности понятия «интеллектуальное развитие обучающихся и различных подходах к проектированию систем задач наглядной геометрии как средств такого развития.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем

− представлен анализ содержания наглядной геометрии в учебниках математики 5-6 классов и геометрии 7-11 классов;

– выделены типы задач наглядной геометрии и для каждого типа составлена система дифференцированных задач;

– разработан элективный курс по теме «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге».

Полученные результаты могут быть использованы учителями математики на практике в общеобразовательной школе и при проведении дополнительных занятий в математической школе.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивалась: выбором различных методов исследования, опорой на результаты ранее проведенных исследований и личным опытом работы учителем математики в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в самостоятельном решении поставленных задач, в том числе: в подборке задач каждого типа; разработке программы и методического сопровождения элективного курса «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге»; проведении педагогического эксперимента с обучающимися 9 классов, формулирование выводов и рекомендаций.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на:

− международной заочной научно-практической конференции «Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях» (Луганск, 4–10 июня, 2018 г.);

− IX Международной научно-методической дистанционной конференции-конкурсе молодых ученых, аспирантов и студентов «Эвристика и дидактика математики» (Донецк, май,2020 г);

− Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (г. Тольятти, ТГУ, декабрь 2018, 2019 гг.);

− фестивале методических идей молодых педагогов в Самарской области (г. Нефтегорск, 2018 г.);

− научно-практической конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ (2018; 2019; 2020 гг.– дипломы за 3 место на I этапе и IIэтапах).

Результаты исследования также обсуждались на заседаниях методических объединений учителей математики МБУ «Школа № 23», были представлены на педагогическом совете в рамках обмена опытом среди учителей школы.

Экспериментальная проверка предлагаемых задач и методических рекомендаций была осуществлена в период производственных (научноисследовательской работы НИР 1-4) и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики в МБУ «Школа № 23» (Самарская область, г.о. Тольятти).

Результаты исследования представлены в 5 публикациях [15,16,17,18,19].

На защиту выносятся:

1. Технология развития математического мышления В.А. Гусева при обучении решению задач наглядной геометрии общеобразовательной школы.
2. Типология задач наглядной геометрии и методические особенности каждого типа.
3. Элективный курс по теме: «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 99 рисунков, 3 таблицы, список используемой литературы (81 источник). Основной текст работы изложен на 70 страницах.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ КАК СРЕДСТВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Основные цели и задачи интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы

Одной из задач современного математического образования школьников является их интеллектуальное развитие, а средством – математические задачи, в том числе задачи наглядной геометрии [79].

Прежде всего, определим понятие математического развития, которое согласно А.А. Столяру, будем понимать, как «процесс качественного изменения в познавательной деятельности личности, который происходит в результате формирования элементарных математических представлений и понятий» [60, с.24].

Проблеме интеллектуального обучения, развития и воспитания учащихся посвящены ряд исследований известных психологов и методистов. Отметим лишь наиболее фундаментальные исследования, являющиеся методологической основой нашей магистерской диссертации.

И.С. Якиманская отмечает, что «интеллектуальное обучение –обучение, которое, обеспечивая полноценное усвоение знаний, формирует учебную деятельность и тем самым непосредственно влияет на умственное развитие» [73].

В монографии М.А. Холодной определяются задачи интеллектуального воспитания учащихся в рамках инновационной «обогащающей модели» обучения математике. В частности, отмечается роль учителя современной школы в реализации им функции проектирования процесса интеллектуального развития каждого конкретного ученика [68, с. 199].

По мнению автора, «проблема интеллектуального воспитания учащихся имеет два аспекта: во-первых, повышение продуктивности интеллектуальной деятельности ученика (за счет приобретения знаний, освоения разнообразных способов познания, развития интеллектуальных способностей, выработки культуры интеллектуальной деятельности, формирования потребности в умственном труде и т.д.) и, во-вторых, развитие индивидуального своеобразия склада его ума (за счет поддержки индивидуальных интеллектуальных склонностей, предпочитаемых способов познания, избирательности в выборе учебного содержания и т.д.)» [68].

В докторской диссертации Э.Г. Гельфман определены пути интеллектуального воспитания учащихся в процессе обучения математике средствами учебных текстов, сформулированы методические принципы их конструирования. Автор так определяет *интеллектуальное воспитание*: «это такая форма организации образовательного процесса, которая позволяет создать условия для самосовершенствования интеллектуальных способностей каждого ребенка с целью подготовки его к успешной и самодостаточной жизнедеятельности» [14, с.17].

В основу концепции интеллектуального воспитания учащихся при обучении геометрии Л.И. Боженковой положена идея «о приобретении учениками опыта осознанной саморегуляции процесса учебно-познавательной деятельности» [7].

Автор дает следующую трактовку *понятия «интеллектуальное воспитание учащихся»*: «это управление обогащением умственного опыта учащихся, содействующее развитию базовых интеллектуальных способностей, неразрывно связанных с математическими способностями, становлению математической грамотности и субъектных качеств ученика, необходимых для полноценного функционирования в современном обществе» [7].

Так, В.А. Крутецкий показал, что «интеллектуальная воспитанность в математике предполагает умение выделять инвариантные связи между элементами задачи, наличие глубины и широты анализа математического материала, гибкость и обратимость мыслительных операций, способность к свертыванию процесса математического рассуждения и т.д» [38].

А.Я. Хинчин [67] отмечал «роль математики в воспитании у учащихся стремления к полноте аргументации, критичность по отношению к необоснованным обобщениям и др.».

У.У. Сойер [58] выделил «определенные черты интеллектуальной воспитанности в области математики, такие как желание исследовать, интерес к закономерностям, поиск унификаций, готовность мыслить в режиме «как если бы».

Ориентация на решение задач интеллектуального воспитания, учащихся позволяет говорить о новых тенденциях в развитии современной школы, связанных с пересмотром основных компонентов школьного образования: его назначения, содержания, критериев эффективности, форм и методов обучения, роли школьного учебника, функций учителя».

Б.Т. Лихачев [39] писал: «Интеллектуальное развитие – формирование способности к овладению и пользованию различными типами мышления (эмпирическим, образным, теоретическим. конкретно-историческим, диалектическим и т.д. в их единстве). Его органической частью является умение подвергать самостоятельному анализу события и явления действительности, делать самостоятельные выводы и обобщения, а также речевое развитие: владение и свободное пользование словарным богатством языка».

А.Д. Пойа определяет интеллект, как «особый дар человека, отмечая, что решение задач является специфической особенностью интеллекта» [45].

Д.Б. Богоявленская вводит понятие «интеллектуальная активность» в качестве единицы анализа творчества [6].

В работе A.W. Staats отмечается, что «содержательной стороной интеллектуального развития является общедуховное, включающее в себя определенный объем основных научных знаний о мире и способность философской, конкретно-исторической оценки действительности» [80].

Ведущую роль в структуре интеллекта занимает мышление, организующее любой познавательный процесс.

И.С. Якиманская отмечала, что «образное мышление является равноценной формой интеллектуальной деятельности, имея довольно сложные формы проявления и разнообразные функции» [74].

Для интеллектуального развития существуют приемы умственной деятельности.

Так, Д.Н. Богоявленский и Н.А. Менчинская [6] считают, что «для умственного развития наиболее характерной чертой является не только накопление фонда знаний, но и своего рода умственных операций, приемов, хорошо „отработанных“ и прочно закрепленных, которые можно отнести к интеллектуальным умениям».

По мнению Т.А Ивановой, «очень важным для интеллектуального развития школьников являются этапы поиска доказательства. При умело разработанной методике, здесь имеются неограниченные возможности приобщения школьников к методам познания, как общим, так и частным в их естественной взаимосвязи: анализу и синтезу, сравнению и аналогии, индукции и дедукции» [30].

«При разработке технологии этапа доказательства теорем важно обучать школьников, как общим логическим методам доказательств, так и частным приемам. Учителю важно учитывать новизну для учащихся метода или приема доказательства. Методика обучения школьников новому методу состоит в том, что после проведенного доказательства конкретной теоремы учитель обращает внимание школьников на метод рассуждений, вместе с ними вскрывает особенности этого метода и проводит обобщение – выделяет сущность нового метода» [81].

Основными целями курса математики основной школы являются:

1. Овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных

представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений.

2. Формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач.

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования отмечается: «обучающийся должен пользоваться *на базовом уровне* понятиями геометрических фигур; извлекать информацию о геометрических фигурах, представленную на чертежах в явном виде; применять для решения задач геометрические факты, если условия их применения заданы в явной форме; решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам, изображать типовые плоские фигуры и фигуры в пространстве от руки и с помощью инструментов» [65].

Авторы учебного пособия «Наглядная геометрия» для учащихся 5-6 классов одной из задач обучения математике отмечают развитие логического и пространственного мышления ребёнка [24,52,70].

Итак, на основе проведённого анализа можно сделать вывод о том, что интеллектуальное развитие школьников:

−может быть обеспечено разнообразными задачами наглядной геометрии;

− его уровень определяется уровнем логического и пространственного мышления учащихся.

§2. О роли логического и пространственного мышления в интеллектуальном развитии обучающихся

В работах А.М. Астряба [1], И.Ф. Шарыгина, Л.Н. Ерганжиевой [70], И.С. Якиманской [73] раскрыта роль и значение наглядной геометрии в формировании логического и пространственного мышления обучающихся.

В основу нашего исследования положены идеи И.С. Якиманской и Л.В. Виноградовой о том, что основной функцией:

– «пространственного мышления подразумевается свободное оперирование пространственными образами, созданными на различной наглядной основе, их преобразование с учетом требований задачи, а главным содержанием этого вида является оперирование пространственными образами в процессе решения задач на основе создания этих образов путем восприятия пространственных свойств и отношений объектов» [73, с. 106];

– логического мышления является отделение правильных способов рассуждений от неправильных [11].

В ФГОС основного общего образования отмечается, что «учащийся должен развивать топологические представления, характеризующихся умением выделять объект на фоне, менять их местами, видеть расположение друг относительно друга, выделять контур предмета, выделять области на основе интуитивных представлений о непрерывности и связности, различать внутреннюю, внешнюю области, границу фигуры, создавать пространственные первичные образы фигур, формировать представления геометрических фигур и геометрических отношениях» [65].

Одним из условий успешного усвоения учащимися геометрии является наличие у них хорошо развитых пространственных и логических представлений.

Основной единицей пространственного мышления является образ, в котором отражены пространственные характеристики объекта.

Н.Л. Стефанова и Н.С. Подходова выделяют уровни развития пространственного мышления, определяемые в основном типами оперирования пространственными образами. Развитие пространственного мышления преимущественно характеризуется умением мысленно измерять:

– положения объекта;

– структуру объекта, т.е. измерять положение частей, удалять их. Этот тип предполагает оперирование частями в уме. Однако в ходе обучения, учащиеся могут выполнять задания практически, с соответствующими частями танграма, выполненными из картона, пластмасса или другого материала;

– как положение, так и структуру объекта одновременно и неоднократно [59, с.285].

И.Ф. Шарыгин рассматривает такие виды мышления:

– «логическое мышление, обеспечивает овладение учащимися умениями в решении различных практических и межпредметных задач;

– наглядное –действенное мышление, позволяет закрепить умения в изображении фигур геометрических и развить воображение у учащихся;

– образное и ассоциативное мышление учащихся, способствует развитию коммуникативных умений, включающих в себя умение объяснять, описывать адекватно ситуацию и воспринимать информацию;

– пространственное мышление, развивает геометрическую интуицию, геометрическое зрение в таких видах деятельности как оригами, геометрические головоломки;

– интуитивное мышление, вырабатывает сложную координацию движения кисти и пальцев, чувство формы;

– творческое мышление - способность к озарению» [72].

Итак, можно сделать вывод о том, что логическое и пространственное мышление играют важную роль в интеллектуальном развитии каждого школьника. Средством такого развития являются задачи наглядной геометрии.

§3. Технологии развития математического мышления В.А. Гусева при обучении решению задач наглядной геометрии

В теории и методике обучения математике известны различные технологии обучению решению задач, в частности технологии Т.А. Ивановой [30], Г.И. Саранцева [47], Л. М. Фридмана [66].

В основу данного исследования была выбрана технология *развития математического мышления В.А. Гусева* при обучении решению задач наглядной геометрии [21], как наиболее соответствующая нашей цели и задачам исследования.

Не вдаваясь в определение математического мышления, В.А. Гусев выделяет следующие его характеристики:

1. Четкое формулирование проблемы, задачи, задания.

2. Понимание математического материала, т.е. раскрытие в нем существенного, осознание причины его возникновения, взаимосвязи с другими явлениями, места в системе окружающих явлений.

3. Умение «выводить некоторые следствия из изучаемого факта (число таких следствий, уровень их значимости и сложности зависят от индивидуальных способностей и особенностей учащихся)» [21].

4. Активное участие ученика в процессе получения таких следствий, которое обеспечивает понимание самого факта.

5. Воспитание у учащегося потребности в строгости, в обоснованности выводов и умозаключений.

6. Развитие самостоятельности мышления и умений приобретать дальнейшие знания самостоятельно.

Для реализации технологии развивающего мышления В.А. Гусев предлагает «цепочку новой информации, которой может овладеть ученик в меру своих возможностей, потребностей и способностей» [21]. В основу построения такой цепочки автором положены следующие *два типа задач:*

I.«Задачи, несущие новую информацию, которые могут быть решены параллельно с изучением обязательного материала, т. е. для их решения достаточно имеющихся на данный момент знаний» [21, с 251].

К данному типу отнесены следующие *виды:*

1. «*Первый вид задач*, несущих новую информацию, состоит из задач (теорем) двух подвидов:

а) задачи, составляющие основу изучаемого на уроках теоретического материала, они явно выделены, являются обязательным для изучения (воспроизведения) учебным материалом;

б) задачи, без овладения которыми невозможно успешно решать задачи.

2. *Второй вид задач,* несущих новую информацию, составляют задачи, результаты решения которых часто используются при дальнейшем изучении учебного материала, однако они не попадают в выделенный для обязательного изучения материал» [21, с 252].

3. «*К третьему виду задач*, несущих новую информацию, относятся задачи, результаты решения которых используются при решении задач повышенной сложности. Степень применимости следует специально определять, имея в виду систему задач, традиционно решаемых в школе. Эти задачи в подавляющем большинстве не могут решаться в массовой школе (на базовом уровне обучения), так как для их решения просто нет соответствующего учебного времени.

4. *К четвертому виду задач*, несущих новую информацию, следует отнести задачи, содержащие интересные яркие факты, являющиеся достижениями математической мысли прошлого. Ясно, что эти задачи явно предназначены для углубленного изучения математики.

Задачи третьего и четвертого видов составляют систему задач, относящихся к углубленному изучению математики. Учитель должен располагать большим списком таких задач для обеспечения развития индивидуальных особенностей и способностей учащихся» [21, с. 253].

II. «**Задачи, которые не могут быть решены параллельно с изучаемым в классе теоретическим материалом,** так как для их решения нужны дополнительные теоретические сведения или новые методы, которые появятся позднее. Задачи типа II содержат один вид–пятый» [21, с 251].

5. *К пятому виду относятся задачи,* которые выходят за рамки школьных учебников даже углубленного уровня.

В магистерской диссертации нами на основе технологии развития математического мышления В.А.Гусева составлена «цепочка задач, несущих новую информацию» по теме «Равновеликие и равносоставленные многоугольники» для учащихся 8-9 классов для базового (схема 1) и для математического (углубленного) уровня (схема 2).

Определение понятия равносоставленных фигур

Определение 1. «Если один многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из них составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называются равносоставленными» [1].

Задачи первого вида

1. «Докажите теорему о равносоставленности треугольника с параллелограммом, имеющим основанием основание треугольника, а высоту, равную половине высоты треугольника» [48].

Задачи второго вида

1. «Докажите теорему о равносоставленности треугольника и прямоугольника с основанием, равным большей стороне треугольника, а высотой, равной половине соответствующей высоты треугольника» [3].

2. Докажите, что параллелограмм диагоналями делится на 4 равновеликих треугольника.

Задачи третьего вида

1. Составьте трапецию из квадрата и прямоугольного треугольника [1].

2. Составьте трапецию из прямоугольника и двух прямоугольных треугольников.

Схема 1

Базовый уровень

Цепочка задач новой информации по теме «Равносоставленные и равновеликие многоугольники»

Задачи - основа изучаемого на уроках теоретического материала

Задачи - закрепляющие основу изучаемого на уроках теоретического материала

Второй вид задач – дополнительные задачи

Схема 2

Углубленный уровень

Цепочка задач новой информации по теме «Равносоставленные и равновеликие многоугольники»

Третий вид задач - задачи повышенной сложности

Четвертый вид задач - задачи, содержащие интересные яркие факты, являющиеся достижениями математической мысли прошлого

Пятый вид задач –задачи на новые свойства равносоставленности и равновеликости

3. Составьте трапецию из четырёх прямоугольных треугольников.

4. Составьте трапецию из трёх равносторонних треугольников.

5. Составьте трапецию из двух равнобедренных треугольников.

6. Составьте трапецию из равностороннего и прямоугольного треугольников.

7. Составьте трапецию из двух трапеций.

8. Составьте трапецию из двух прямоугольных треугольников.

Определение понятий равновеликих фигур

Определение 2. «Если площади двух многоугольников равны, то эти многоугольники называются равновеликими» [1].

Задачи первого вида

1. Докажите, что два треугольника с равными основаниями и равными высотами равновелики.

Задачи второго вида

1. Докажите, что медиана делит треугольник на две равновеликие части.

2.Докажите, что параллелограмм диагоналями делится на 4 равновеликих треугольника.

3. Докажите, что трапеции диагоналями делятся на 3 пары равновеликих треугольников.

Задачи третьего вида

1. Дан параллелограмм. Постройте равновеликий ему прямоугольник.
2. Дан параллелограмм. Постройте равновеликий ему параллелограмм, не равный данному.
3. Дан параллелограмм. Постройте равновеликую ему трапецию.
4. Дан параллелограмм. Постройте равновеликий ему треугольник.

Теорема Бояйи – Гервина

Теорема: Два многоугольника, имеющих равные площади, равносоставлены [8, с. 11].

Задача первого вида

1. «Доказать, что если фигура A равносоставлена с фигурой B, а фигура B равносоставлена с фигурой C, то фигуры A и C также равносоставлены» [8].

Задачи второго вида

1.«Всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником».

2. «Доказать, что два равновеликих параллелограмма, имеющих общее основание, равносоставлены» [48, с. 233].

Задачи третьего вида

1. «Внутри данного треугольника ABC найдите такую точку O, что площади треугольников BOL, COM и AON равны (точки L, M и N лежат на сторонах AB, BC и CA, причём OL||BC, OM||AC и ON||AB, Рис.1)» [48].

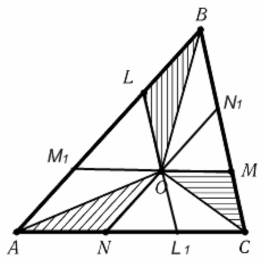


Рис.1

2. «Пусть задан треугольник *ABC* и отрезок *PQ*. Докажите, что всегда можно построить прямоугольник *PQMN*, равновеликий данному треугольнику» [48].

Теорема Пифагора

Теорема: «Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах» [1].

Задача первого вида:

1. Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равносоставлен с квадратами, поостренными на катетах.

Задачи второго вида:

1. Докажите, что прямоугольник со сторонами 25 и 49 нельзя разрезать на такие две части, из которых можно сделать квадрат.

2. Прямоугольник со сторонами 25 и 49 разрежьте на пять частей и сложите их них квадрат

Выводы по первой главе

В данной главе рассмотрены основные цели интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы.

На основе исследований ученых о развитии математического мышления, раскрыта роль наглядной геометрии в формировании логического и пространственного мышления у обучающихся общеобразовательной школы.

Обоснована технология развития математического мышления В.А. Гусева, которая на наш взгляд, наиболее ориентирована на интеллектуальное развитие учащихся средствами задач наглядной геометрии.

Построена цепочка задач, несущих новую информацию по теме «Равносоставленные и равновеликие многоугольники» для учащихся 9-10 классов.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ КАК СРЕДСТВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§4. Примеры задач наглядной геометрии в учебниках математики 5-6 классов и в учебниках геометрии 7-11 классов

Первым российским учебником по начальному курсу геометрии, построенном на принципе фузионизма, стала книга М.О. Косинского «Наглядная геометрия» [37].

Для изучения наглядной геометрии в 5-6 классах общеобразовательной школы имеется достаточное количество учебно-методических материалов авторов В.А. Гусева [24], В.А. Смирнова, И.М. Смирновой, И.В. Ященко [55], И.Ф. Шарыгина, Л.Н. Ерганжиевой [71].

Наглядная геометрия представлена в учебниках геометрии 7-11 классов Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева и др. [3,4]; А.В. Погорелова [42, 43]; В.В. Казакова [31,32,33,34]; И.М. Смирновой, В.А. Смирнова [48].

Выполним анализ задачного материала по учебнику *И.Ф. Шарыгина, Л.Н. Ерганжиевой* [70].

Примеры задач для 5 класса

Задача 1 [70, с. 22]**.** «На рис показан способ разрезания квадрата со стороной в четыре клетки по сторонам клеток на две разные части.

Найдите пять других способов».

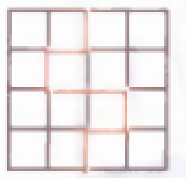


Рис.2

Задача 2. Разрежьте фигуры на две равные части. Разрезать можно не только по сторонам, но и по диагоналям клеточек.

Рис.3

Задача 3 [70, с.53]**.**На рис изображена фигура площадью 2 $см^2$. Нарисуйте еще две фигуры площадью 2 $см^2$.

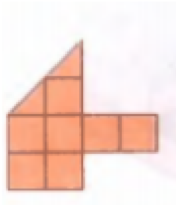


Рис.4

Задача 4. Покажите, что треугольник и прямоугольник на рисунке имеют одинаковые площади.

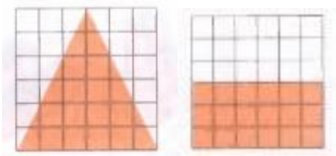


Рис.5

Примеры задач для 6 класса по теме «Геометрия клетчатой бумаги»

Задача 5 [70, с. 128]**.** «Примем площадь одной клетки за единицу. Вершины треугольника лежат в узлах клеток. Как найти площадь этого треугольника, если это прямоугольный треугольник, две стороны которого проходят по сторонам клеток».

Задача 6 [70, с. 128]. Начертите два разных прямоугольных треугольник площади, которых равны 2 клеткам.

В теме «Бордюры»

Задача 7 [70, с. 145]. «Можно ли замостить плоскость равными шестиугольниками?

Задача 8 [70, с. 145]**.** «Кусок бумаги имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна четырем, а другая — девяти единицам длины.

Разрежьте этот прямоугольник на две равные части так, чтобы, сложив их определенным образом, получить квадрат».

Задача 9. **«**Участок с четырьмя колодцами, имеющий форму правильного треугольника надо разделить на такие участки, чтобы они были одинаковы по форме, равны по площади, и чтобы на каждом из них было по колодцу. Как это сделать?»

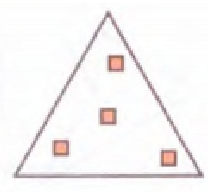


Рис.6

Примеры задач для 5 класса в учебнике В.А. Гусева [24, с. 72]**:**

В теме «Взаимное расположение плоскостей и геометрических фигур» рассматриваются задачи на различные возможности взаимного расположения плоскостей и геометрических фигур.

Задача 10. **«**При пересечении какой фигуры плоскостью получается в сечении: а) квадрат, б) точка, в) отрезок, г) круг?»

Задача 11. **«**Начертите куб, поставьте на каждом из трёх рёбер, выходящих из одной его вершины, по одной точке. Постройте плоскость, которая пересекает куб и проходит через эти три точки. Какая фигура будет пересечением куба и плоскости?»

Примеры задач для 6 класса:

В теме «Развёртки многогранников» представлены задачи на разрезание многогранников по ребрам, разворачивании поверхности на плоскости, а также умения делать выкройки фигур и склеивать их.

Задача 12 [24, с. 229]**.** «Сделайте развёртку изображенного на рисунке прямоугольного параллелепипеда (Рис.7). Сколько различных вариантов развёрток вы можете получить? Изобразите полученные развёртки».

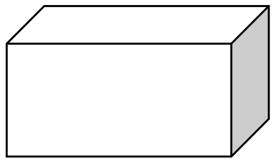


Рис.7

Примеры задач для 5-6 класса в учебнике В.А. *Смирнова, И.М. Смирновой, И.В. Ященко:*

Задача 13 [52, с. 11]**.** «Сколько точек попарных пересечений могут иметь три прямые? Изобразите различные случаи».

Задача 14 [52, с. 28]**. «**Расположите углы, изображенные на Рис. 8, в порядке их возрастания».

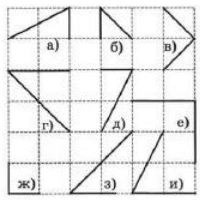


Рис.8

Задача 15 [52, с. 108]. «Придумайте способ приближенного измерения длины окружности колеса велосипеда».

В теме «Графы» представлены задачи на составления фигуры, образованной конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из них (граф).

Задача 16 [52, с. 119]**.** «Какие из графов, изображенные на Рис. 9, являются уникурсальными?».

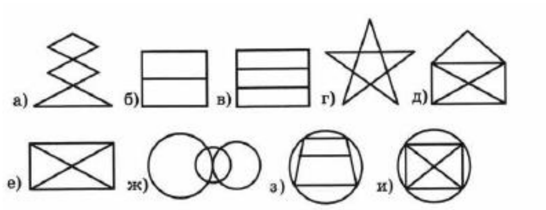


Рис.9

Примеры задач для 7 класса в учебнике *И.М. Смирновой, В.А. Смирнова:*

В теме «Основные геометрические фигуры» представлены задачи на изображения основных геометрических фигур и работу с ними.

Задача 17[48, с.10]**.** «Изобразите прямую и три точки, две из которых принадлежат прямой, а третья нет».

Задача 18[48, с.14]**.** «На сколько частей делят прямую одна точка; две точки; три точки?»

Задача 19 [48, с.36]**.** «Простая ломанная имеет 10 вершин. Сколько у неё сторон?»

Задача 20 [48, с.62]**.** «Четыре населенных пункта расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника. В каком месте следует построить пекарню, чтобы сумма расстояний от неё до всех четырех данных пунктов была наименьшей».

Примеры задач для 8 класса:

В теме «Теорема Эйлера»

Задача 21 [48, с.112]. «Укажите какое – нибудь разбиение выпуклого четырёхугольника на выпуклые четырёхугольники»

Задача 22 [48, с.113]. «В многоугольнике вырезали дырку в форме многоугольника. Оставшуюся часть разбили на многоугольники. Чему равно В-Р+Г для этого разбиения».

В теме «Средняя линия треугольника»

Задача 23 [48, с.136]. «Постройте треугольник, если заданы середины его сторон».

Задача 24 [48, с.137]. «Восстановите ромб по точке пересечения его диагоналей и серединам двух смежных сторон»

В теме «Многоугольники, вписанные в окружность»

Задача 25 [48, с.151]**.** «Нарисуйте четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник, вписанные в данные окружности».

Задача 26 [48, с.164]**.** «На рисунке укажите буквы латинского алфавита, имеющие центр симметрии».

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Примеры задач для 9класса:

В теме «Площадь фигуры»

Задача 27 [48, с.233]**.** «В параллелограмме вырезали дырку прямоугольной формы.

Проведите прямую, делящую оставшуюся часть параллелограмма на две равновеликие части».

По теме «Равносоставленность и задачи на разрезание» представлены задачи на составления и преобразования фигур из разрезанных кусочков.

Задача 28 [48, с.257]**.** «Параллелограмм разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник».

Задача 29 [48, с.257]**.** «Разрежьте правильный восьмиугольник на ромбы».

В теме «Моделирование многогранников» задачи на составления модели многогранника.

Задача 30 [48, с. 345]**. «**Нарисуйте развертки прямоугольного параллелепипеда и правильной четырёхугольной пирамиды».

Задача 31 [48, с. 346]**.** «Сделайте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырёхугольников, пятиугольников и шестиугольников с одинаковыми сторонами. Изготовьте с помощью этого конструктора какие-нибудь модели многогранников».

В учебнике *Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б Кадомцева, Э.Г. Поздняковой, И.И. Юдиной* [3] представлено много задач базового уровня.

Примеры задач для 7 класса:

Задача 32 [3, с.53]**. «**С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части».

Задача 33 [3, с.51]**. «**Начертите треугольник ABC и отметьте точкуDна стороне AC.Через D с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника».

Примеры задач для 8 класса:

Задача 34 [3, с.81]. «Внутри угла дана точка А. Постройте прямую, проходящую через точку А и отсекающую на сторонах угла равные отрезки».

Задача 35 [3, с.113]**.** **«**Какие из смежных букв имеют ось симметрии:
А, Б, Г, Е, О, F».

Задача 36 [3, с.112]**.** **«**Постройте ромб по двум диагоналям; по стороне и углу».

Задача 37 [3, с.121]**.** «Вырежете из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: равнобедренный треугольник; прямоугольник; параллелограмм, отличный от прямоугольника. Сравните площади полученных фигур».

Примеры задач для 9 класса:

Задача 38 [3, с.314]**.** **«**Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью: ABC_1. Докажите, что построенное сечение-параллелограмм».

Задача 39 [3, с. 316]**.** **«**Изобразите тетраэдр DABC, отметьте точки Ми Nна рёбрах BDи CD и внутреннюю точкуK граниABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK».

В учебнике *А.В. Погорелова* [42] задачный материал представлен после каждого параграфа.

Примеры задач для 7 класса:

В теме «Основные свойства простейших геометрических фигур» даны задачи на изучения простейших геометрических фигурах.

Задача 40 [42, с.20]**.** «Постройте на глаз треугольник с равными сторонами (равносторонний треугольник). Проверьте точность построения измерением сторон».

В теме «Геометрические построения» рассмотрены задачи на построения медианы, высоты, окружности, треугольника.

Задача 41 [42, с.69]**.** «Дан треугольник (Рис.10). Постройте его медианы и высоты».

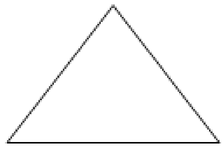


Рис.10

Примеры задач для 8 класса:

В теме «Четырёхугольники» предложены задачи на изучения свойств четырёхугольника и окружности Эйлера.

Задача 42 [42, с.86]**.** «Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трёх заданных точках, не лежащих на одной прямой? Постройте их».

Задача 43 [42, с.91]**.** «В общем случае на окружности Эйлера лежат девять точек (середины сторон треугольника, середины отрезков, соединяющих его ортоцентр с вершинами, и основания высот треугольника). Сколько различных точек из них лежат на окружности Эйлера в случае равностороннего треугольника?»

Примеры задач для 9 класса:

Задача 44 [42, с.206]**.** «Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вершину».

Задача 45 [42, с.218]**.** «Три латунных куба с рёбрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. какое ребро у этого куба?»

Задачный материал учебников *В.В. Казакова* [31,32,33] представлен следующими примерами.

Примеры задач для 7 класса:

В теме «Прямая и ее части. Окружность. Угол» рассматриваются задачи на нахождения углов.

Задача 46 [31, с. 25]**.** Дано: $\angle 1$ составляет $\frac{1}{3}$ часть прямого угла. Найти: $\angle 2$.

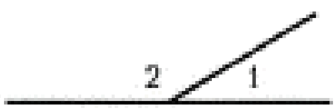


Рис.11

Задача 47 [28, с. 25]**.**Дано: $\angle 1 = 35^0$. Найдите: $\angle 3 + \angle 4$.

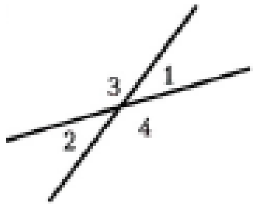


Рис.12

Задача 48 [31, с. 26]**.**Дано: $\angle AKC = 100^0, \angle BKD = 110^0$.Найти: $\angle DKC$.

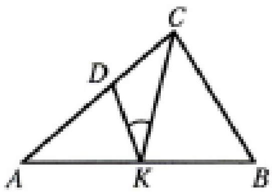


Рис.13

Примеры задач для 8 класса:

В теме «Четырёхугольники» представлены задачи на вычисления.

Задача 49 [32, с. 27]**.** ABCD- трапеция, M и N – середины боковых сторон. Найдите BC.

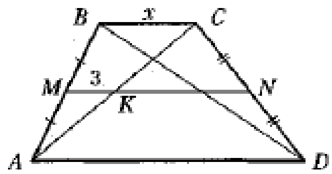


Рис.14

Задача 50 [32, с. 28]**.**Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой ι.

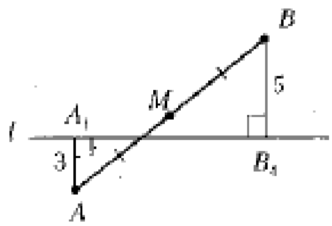


Рис.15

Примеры задач для 9класса:

В теме «Окружность» рассматриваются задачи на вычисления радиуса, диаметра окружности, углов.

Задача 51 [33, с. 22]**.** AB=26, CD=24. Найдите OK.

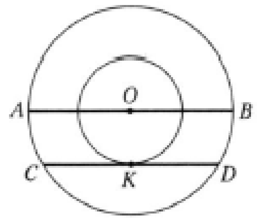


Рис.16

Задача 52 [33, с. 22]**.** Найдите угол x.

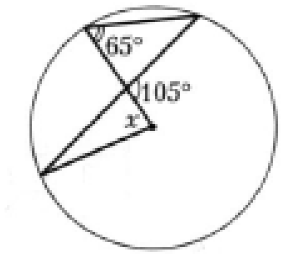


Рис.17

Задача 53 [33, с. 24]**.** Найдите радиус.

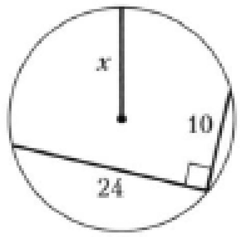


Рис.18

Примеры задач для 10 класса:

В теме «Параллельность прямых и плоскостей» даны задачи на вычисления длины, на нахождения углов в геометрических фигурах.

Задача 54 [34, с. 45]**.** Дано: MNPK-параллелограмм, KP лежит в α. Найти: BC.

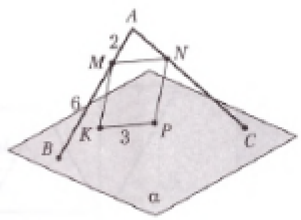


Рис.19

Задача 55 [34, с. 46]**.**Дано: АМ ∥ BN ∥ CK, AB=18, BC=36,NK=24. Найти: MN.

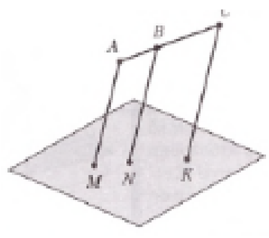


Рис.20

Задача 56 [34, с. 46]**.**Дано: параллелепипед, $\angle\text{МКР} = 118^{0}$. Найти: $\angle\text{КР}N$.

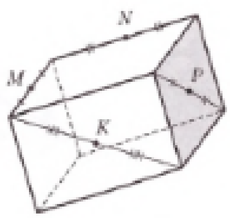


Рис.21

Примеры задач для 10 класса в учебнике Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Л.С. Киселевой, Э.Г. Поздняк:

В теме «Правильные многогранники» представлены задачи практического характера.

Задача 57 [4, с. 79]**.** «Перерисуйте развертку правильного тетраэдра на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку (сделав необходимые припуски для склеивания) и склейте из нее тетраэдр».

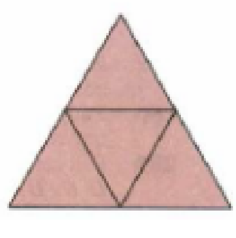


Рис.22

В теме «Перпендикулярность прямых и плоскость» представлены задачи на построения геометрических фигур и нахождения его сечения.

Задача 58 [4, с.56].Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$и постройте его сечение плоскостью, проходящей через ребро AA_1 и перпендикулярной к плоскости BB_1D_1.

В теме «Понятие вектора в пространстве» дана задача на нахождения векторов на готовом рисунке.

Задача 59 [4, с.86] **.**На рисунке изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки М и К- середины ребер B_1C_1и A_1D_1. Укажите на этом рисунке все пары:

a. сонаправленных векторов;
b. противоположно направленных векторов;
c. равных векторов.

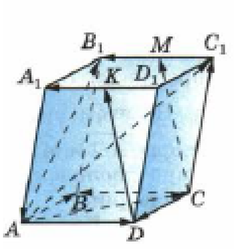


Рис.23

Примеры задач для 11 класса:

В теме «Метод координат в пространстве. Движение» представлены задачи на нахождения координат вершин геометрических фигур, а также координаты векторов.

Задача 60 [4, с. 108]**.** Даны координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; A(0;0;0), B(0;0;1), D(0;1;0) и A_1(1;0;0). Найдите координаты остальных вершин куба.

Задача 61 [4, с. 108]**.** По данным рисунка найдите координаты векторов$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}$, если OA=4, OB=9, OC=2, а M, Nи P-середины отрезков AC , OC и CB.

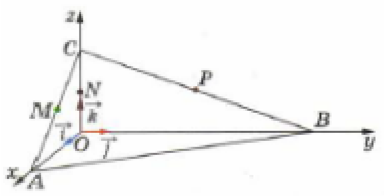


Рис.24

Проанализировав учебники разных авторов можно сказать то, что содержание линии «Наглядная геометрия» способствует формированию у учащихся первичных представлений о геометрических абстракциях реального мира, закладывает основы формирования правильной геометрической речи, развивает образное мышление и пространственное представление.

Итак, на основе анализа содержания задач наглядной геометрии в учебниках для 5-11 классов можно выделить следующие типы:

– задачи на равновеликость и равносоставленность многоугольников;

– задачи на разрезание, складывание и перегибания фигур;

–геометрические головоломки;

–задачи на составление геометрических фигур из спичек.

Как показывает практика, достижение заявленных целей математического развития обучающихся с помощью задач наглядной геометрии возможно при системном и систематическом использовании таких задач на уроках математики и во внеурочной деятельности.

Цепочка взаимосвязанных задач лучше воспринимается, запоминается и усваивается школьниками, чем набор изолированных друг от друга задач. Так, например, в теме: задачи на разрезания фигур сначала учащимся предлагаются задачи на разрезания плоских фигур одним разрезом, а потом более сложные задачи на разрезания, например, правильного шестиугольника на 12 равных шестиугольников.

§5. Типология задач наглядной геометрии

Рассмотрим особенности и примеры основных типов задач наглядной геометрии как средства математического развития обучающихся основной школы. Задачи на равновеликость и равносоставленность многоугольников рассмотрены нами выше.

2.*Задачи на разрезание и складывание фигур*

Решение задач 2 типа способствует развитию у обучающихся геометрического мышления, представлений о том, что такое одинаковые по форме и по размеру фигуры; формирует представления о том каким образом мысленно разрезать фигуры на части, из которых можно затем составить другие фигуры.

Задачи для 5-6 классов:

Задача 1 [54, с. 48]**.** Проведите какую-нибудь прямую, делящую треугольник на две равные части.

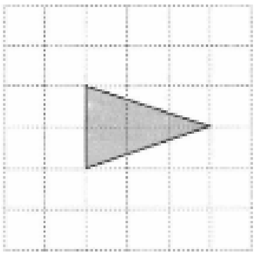


Рис.25

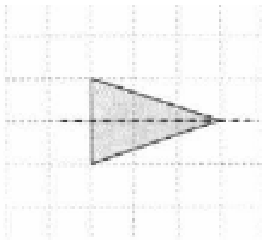


Рис.26

Решение: Рис.26.

Задача 2 [54, с. 50]**.** Через точку А проведите прямую, делящую шестиугольник на две равные части.

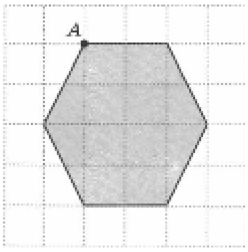


Рис.27

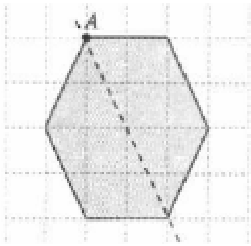
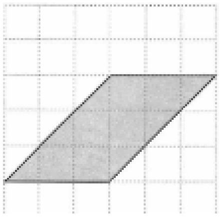


Рис.28

Решение: Рис.28.

Задача 3 [54, с. 53]. Проведите прямую, разрезав по которой четырёхугольник, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



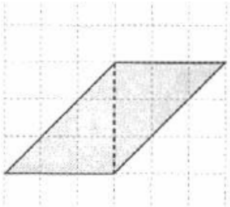
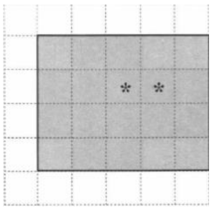


Рис.29 Рис.30

Решение: Рис.30.

Задачи для 7-9 классов:

Задача 4 [54, с. 62]**.** Разрежьте прямоугольник на две равные части так, чтобы в каждой их них была звездочка.



…..

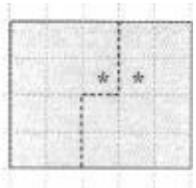
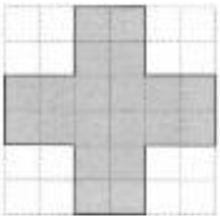


Рис.31….. Рис.32

Решение: Рис.32.

Задача 5 [54, с. 61]**.** Многоугольник разрежьте на несколько частей, из которых можно сложить квадрат.



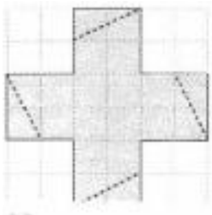


Рис.33 Рис.34

Решение: Рис.34.

Задачи для 10-11 классов:

Задача 6 [64]. Каждая грань куба $6 \times 6 \times 6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.)

Решение:

Клетку в углу грани можно накрыть тремя способами (целиком в грани, с перегибом через одно ребро угла, с перегибом через другое ребро угла). Значит, каждая клетка накрыта не более чем тремя квадратами.

Пример. Рассмотрим обычное покрытие куба квадратами, когда каждая грань покрыта девятью квадратами.

Из обычного покрытия можно получить повёрнутое: оставим нетронутыми две противоположные грани, а на остальных четырёх гранях сдвинем все квадраты по кольцу на одну клетку.

Так как пару противоположных граней можно выбрать тремя способами, то повёрнутых покрытий получится ровно три.

Покажем, что не совпадают никакие два квадрата на покрытиях, повёрнутых по-разному.

Действительно, рассмотрим одну грань. На рисунке отмечены центры покрывающих её квадратов: крестиками, если эта грань не сдвигалась, чёрными и белыми точками – если сдвигалась в одном или другом направлении. Видно, что никакие центры, а значит и никакие квадраты не совпали.

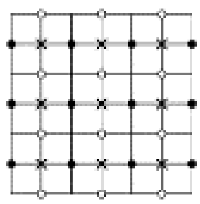


Рис.35

Задача 7 [72]**.** «Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб 2 × 2 × 2».

Решение: Рис.36.

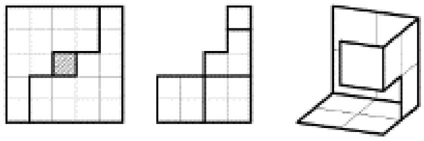


Рис.36

3. *Геометрические головоломки*

Решение задач 3 типа направлено на формирование у обучающихся конструктивных навыков, представлений о симметрии, логического мышления, пространственного воображения.

Задачи для 5-6 классов:

Задача 1 [55, с. 69]**.** Прозрачную коробку заполняют кубиками с ребром, равным 1 см. Сколько кубиков войдёт в коробку?

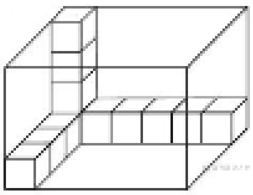


Рис.37

Решение:

В одном слое 6 · 4 = 24 кубика. Таких слоев 4, следовательно, 4 · 24 = 96 кубиков.

Задача 2 [54, с. 45]**.** На Рис. 38 изображены два прямоугольника. Они разбивают плоскость на четыре части. Нарисуйте два прямоугольника так, чтобы они разбивали плоскость на шесть частей.

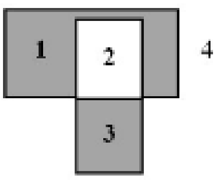


Рис.38

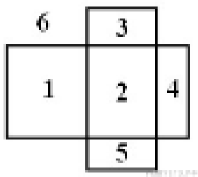


Рис.39

Решение: Рис.39.

Задача 3 [54, с. 19]**.** Продолжите составление паркета на Рис.40 из восьмиугольников и квадратов, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два восьмиугольника и один квадрат. Раскрасьте восьмиугольники одним цветом, а квадраты –другим.

Решение: Рис.41.

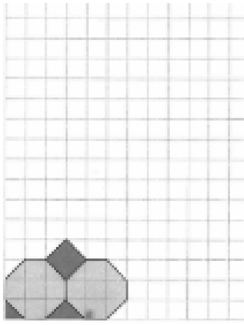
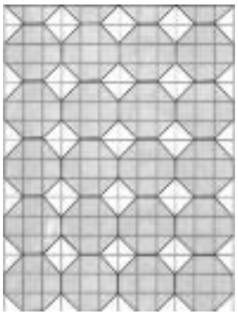



Рис.40 Рис.41

Задача 4 [49, С. 30]**.** На Рис. 42 на клетчатой бумаге изображены фигуры, симметричные относительно изображённой прямой. Нарисуйте фигуру, симметричную заштрихованной фигуре относительно данной прямой.

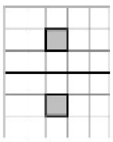
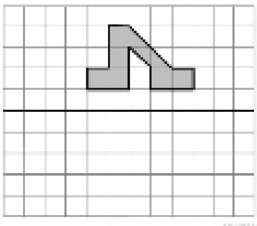
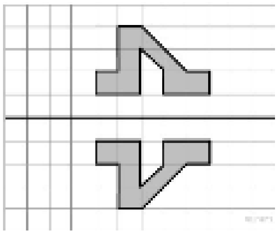




Рис. 42 Рис. 43

Решение: Рис. 43.

Задачи для 7-9 классов:

Задача 5 [75]. **«**Зачеркните все шестнадцать точек, изображённых на рисунке, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки».

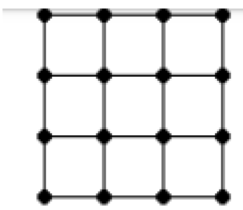
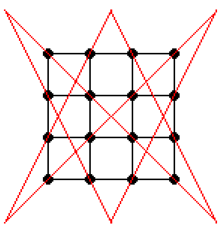



Рис. 44 Рис. 45

Решение: Рис. 45.

Задача 6 [Саммат, 2014]. Сколько клеток таблицы 8×8 можно закрасить так, чтобы никакие 3 центра закрашенных клеток не лежали на одной прямой?

Решение: Можно закрасить 16 клеток (Рис. 46).

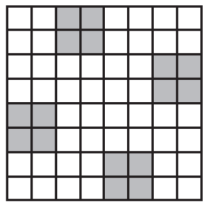


Рис. 46

Раскрасить больше 16 клеток нельзя: тогда на какой-то горизонтали появится третья окрашенная клетка.

Задача 7 [75]. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольники со стороной 1 (см. Рис.47). Какое наименьшее количество треугольников надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольника?

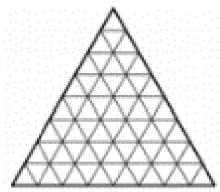


Рис. 47

Решение:

Всего точек пересечения линий 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45, а у треугольника три вершины, так что по крайней мере 45: 3 = 15 треугольников придётся закрасить.

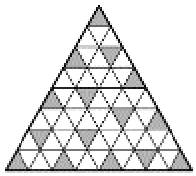


Рис. 48

Задачи для 10-11 классов:

Задача 8 [75]. Кощей Бессмертный испытывает Ивана-царевича. На клетчатой доске 5 × 9 он отметил невидимыми чернилами квадрат 2 × 2. Ивану разрешается, выбрав несколько клеток, спросить у Кощея, есть ли среди них хотя бы одна отмеченная, на что Кощей обязан ответить правдиво: «да» или «нет». Сможет ли Иван найти отмеченный квадрат, задав не более 5 вопросов?

Решение:

1 ход − спрашиваем есть ли в отмеченных квадрат, если да, то значит квадрат в верхней части таблицы 3*9, если нет, то в нижней части таблицы 3*9.

2 ход − спрашиваем есть ли в отмеченных на втором рисунке, если да, то квадрат в левой части таблицы 3*5, если нет, то в правой части таблицы 3*5.

3 ход − спрашиваем есть ли в отмеченной на третьем рисунке, если да, то квадрат в левой части таблицы 3*3, если нет, то в правой части таблицы 3*3.

4 ход − спрашиваем есть ли в отмеченных на четвертом рисунке, если да, то квадрат в верхней части таблицы 2*3, если нет, то в правой части таблицы 2*3.

5 ход − спрашиваем есть ли в отмеченной на пятом рисунке, если да, то квадрат в левой части таблицы 2*2, если нет, то в правой части таблицы 2*2.

За 5 ходов нашли квадрат.

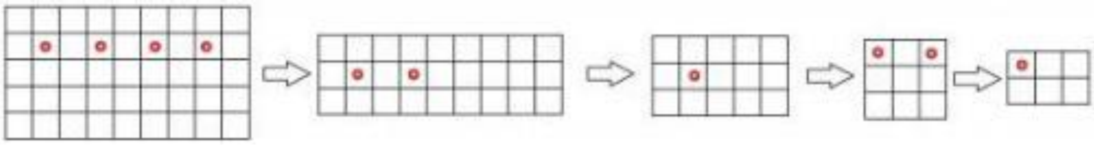


Рис. 49

Задача 9 [75]. «На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4 × 4. Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток».

Решение:

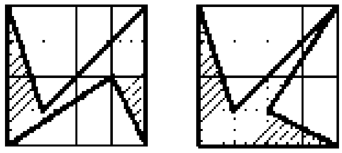


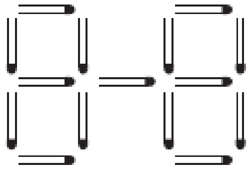
Рис. 50

Задачи на составление геометрических фигур из спичек

Задачи 4 типа на составление геометрических фигур из спичек научат обучающихся составлять и трансформировать различные фигуры, помогут развить геометрическое воображение, выполнять наиболее удобные чертежи при решении задач.

Задачи для 5-6 классов:

Задача 1 [22, с. 343]. «Составьте из 15 спичек фигуру, изображенную на Рис. 51. Затем переложите две спички так, чтобы образовалась фигура, состоящая из пяти равных квадратов».



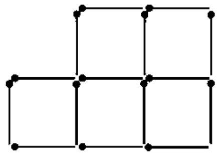
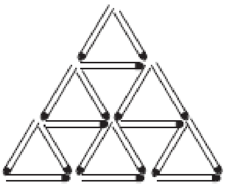


Рис.51 Рис.52

Решение: Рис.52.

Задача 2 [24, с. 39]. «Уберите пять спичек в фигуре, представленной на Рис. 53, так, чтобы осталось пять треугольников (два решения)».



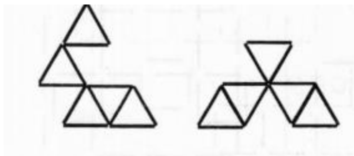


Рис. 53 Рис. 54

Решение: Рис.54.

Задача 3 [24, с. 16]. «Составьте из 12 спичек неквадратную симметричную фигуру, которая при прибавлении четырех спичек превращается в пять равных квадратов».

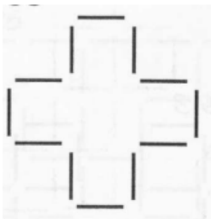
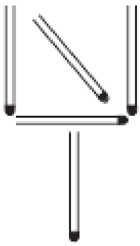


Рис.55

Решение: Рис. 55

Задача 4 [24, с. 55]. «Переложите две спички так, чтобы спичка, расположенная внутри совка, выложенного из спичек (Рис.56), оказалась вне его».



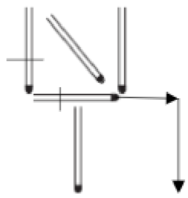
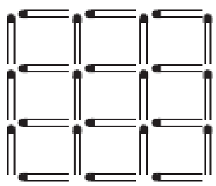


Рис. 56 Рис. 57

Решение: Рис. 57.

Задача 5 [22, с. 338]. «Уберите восемь спичек так, чтобы осталось только два квадрата (Рис. 58)».



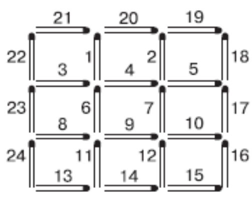


Рис. 58 ……… Рис. 59

Решение:

Всего на Рис. 58 изображено 14 квадратов (девять маленьких, четыре, состоящих из четырех маленьких, и один большой.

Для удобства обозначим спички числами (Рис. 59). Уберем спички: 1, 3,8,11,12,10,5,2.

Задача 6 [52]. Изобразите какой-нибудь равнобедренный треугольник, основанием которого является отрезок АВ, а вершина С находиться в одном из узлов сетки.

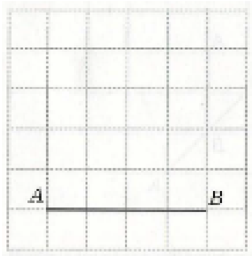


Рис. 60

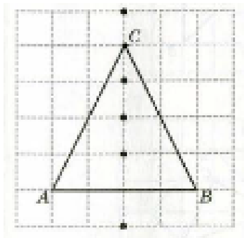


Рис. 61

Решение: Рис. 61.

Задача 7 [52]**.** Изобразите квадрат, одной стороной которого является отрезок АВ.

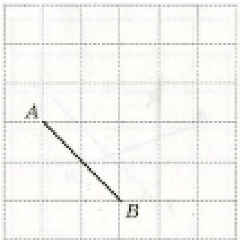


Рис. 62

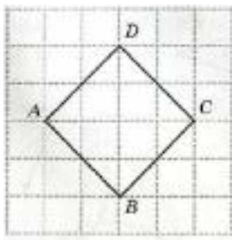


Рис. 63

Решение: Рис. 63.

Задача 8 [52]. Изобразите четырехстороннюю ломанную, проходящую через все данные точки.

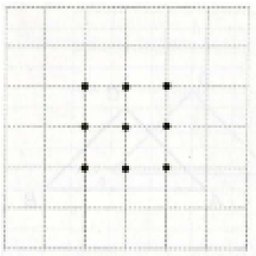


Рис. 64

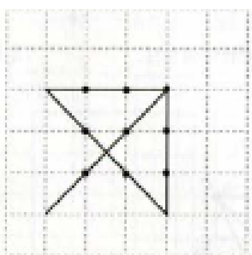


Рис. 65

Решение: Рис. 65.

§6. Элективный курс по теме «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге»

Программа элективного курса «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге» предназначена для учащихся 9-10 классов общеобразовательного профиля и рассчитана на 17 часов. Она направлена на углубление и обобщение знаний и умений учащихся по геометрии, а также на подготовку их к сдаче ОГЭ и ЕГЭ в рамках итоговой аттестации по математике. Для её реализации достаточно знаний и умений по математике, полученных в основной школе.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1. При изучении темы «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге» у учащихся развиваются пространственное мышление и геометрическое воображение, формируется графическая культура.

2. Задачи на клетчатой бумаге включены в задания ОГЭ, ЕГЭ по математике и встречаются в олимпиадах.

Педагогическая целесообразность программы объясняется следующими мотивами: небольшое количество часов, отводимых на изучении геометрии на базовом уровне в общеобразовательных классах, не позволяет в рамках программных часов, рассмотреть разнообразные задачи на клетчатой бумаге; решение задач по указанной теме способствует формированию у старшеклассников наглядно-образного мышления; применения нестандартных приемов решения; систематизации и обобщения геометрических понятий, их свойств и основных формул.

Цель элективного курса: сформировать приемы и методы решения задач на правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге.

Новизна программы состоит в том, что она знакомит учащихся с типами задач на клетчатой бумаге, которые практически не встречаются в школьных учебниках геометрии основной и старшей школы.

Содержание элективного курса включает два основных модуля:

I. Задачи на правильные многоугольники на клетчатой бумаге.

1. Задачи на вычисления площади и длины.
2. Задачи на нахождения вписанного угла.
3. Олимпиадные задачи.

II. Задачи на правильные многогранники на клетчатой бумаге.

4. Задачи на построение правильных многогранников.
5. Комбинаторные задачи.
6. Задачи на нахождения центров граней.
7. Задачи на нахождение кратчайших путей.
8. Задачи на вычисления.
9. Олимпиадные задачи.

Приведем примеры задач каждого модуля.

Задача 1 [46]**.** «Найдите площадь квадрата, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. Рис.66). Ответ дайте в квадратных сантиметрах».

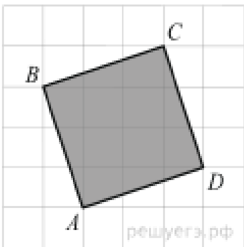


Рис.66

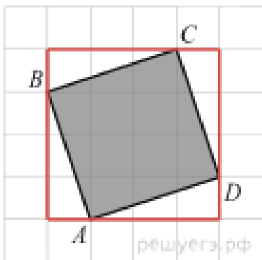


Рис.67

Решение:

Площадь квадрата равна разности площади прямоугольника и четырех равных прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного квадрата Рис.67. Поэтому

$$S = 4 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 10$$

Задача 2. Найдите величину угла АОВ. ABCDEF – правильный шестиугольник.

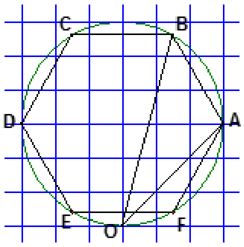


Рис.68

Задача 3 [Олимпиада Саммат**].** В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат: а) за 5 или менее; б) за 4 или менее; в) за 3 или менее таких перегибания?

Задача 4 [53]**.** На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр, аналогично показанному на Рис 69.

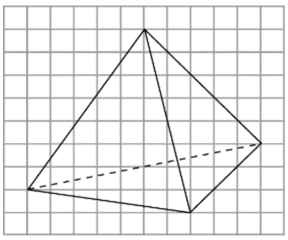


Рис.69

Задача 5 [53]. Сколько имеется путей длины 3 по ребрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину.

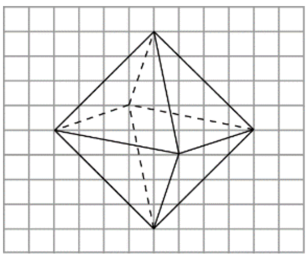


Рис.70

Решение: 8.

Задача 6 [53]**.** Вершинами какого многогранника являются центры граней куба Рис 71?

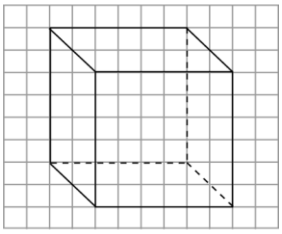


Рис.71

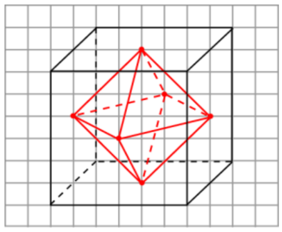


Рис.72

Решение: Октаэдра Рис.72.

Задача 7 [54]**.** Найдите длину кратчайшего пути по поверхности октаэдра, соединяющего вершины A и B. Ребра октаэдра равны 1 (Рис.73)

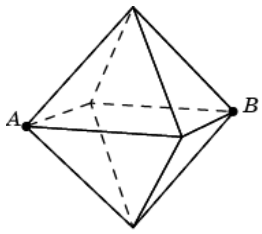


Рис.73

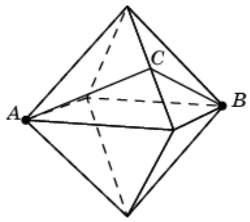


Рис.74

Решение:

Искомый путь проходит через середину Cребра октаэдра. Его длина равна $\sqrt{3}$ (Рис.74).

Задача 8. Чему равна площадь поверхности пространственного креста (Рис.75), если рёбра образующих его кубов равны единице?

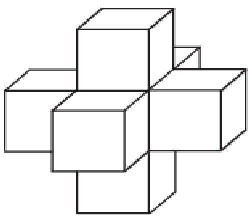


Рис.75

Решение: 30.

Задача 9 [75]**.** «Как из семи «уголков», каждый из которых склеен из трёх кубиков 1 × 1 × 1, и шести отдельных кубиков 1 × 1 × 1 составить большой куб 3 × 3 × 3? Можно ли это сделать так, чтобы все отдельные кубики оказались в серединах граней большого куба?»

Решение:

1. Центральный куб внутренний соприкасается только с центральными кубиками граней. Если все шесть отдельных маленьких кубиков поместить в центры граней большого, то внутренний центральный кубик станет отделенным и не сможет быть частью угла любого. А седьмого отдельного маленького нет. 2. Нельзя.

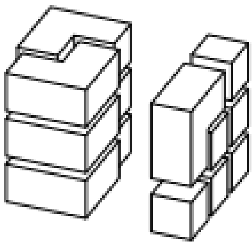


Рис.76

При решении цепочки задач, следует особое внимание обучающихся уделить алгоритму вычисления площадей многоугольников.

Существует несколько способов решения задач на вычисления площадей на клетчатой бумаге:

«*Метод разбиения:*

1. Разбить многоугольник на треугольники, прямоугольники.

2. Вычислить площади полученных фигур.

3. Найти сумму или разность всех площадей полученных фигур.

Метод дополнительного построения: достроить фигуру до прямоугольника; найти площади полученных дополнительных фигур и площадь самого прямоугольника» [50].

При реализации программы элективного курса большую помощь учителю оказывают учебное пособие В.А. Смирнова и И.М. Смирновой [50], в котором приводятся задачи на построение геометрических фигур на клетчатой бумаге, относящиеся к различным темам школьного курса геометрии и способствующие развитию конструктивных умений учащихся.

Второй раздел завершается контролем знаний за весь пройденный курс и защитой проектов. Список рекомендуемой для учителя литературы [9, 12, 26, 29, 36, 37, 44, 46, 49, 57, 61].

Темы проектов для учащихся

1. Геометрические задачи на клетчатой бумаге

План работы:

1. Подберите задачи по теме «Параллелограммы» на клетчатой бумаге.
2. Решите задачи.
3. Подготовьте презентации к решениям.

2. Геометрические задачи на клетчатой бумаге

План работы:

1. Подберите задачи по теме «Трапеции» на клетчатой бумаге.
2. Решите задачи.
3. Подготовьте презентации к решениям.

3.Геометрические задачи на клетчатой бумаге

План работы:

1. Подберите задачи по теме «Треугольники» на клетчатой бумаге.
2. Решите задачи.
3. Подготовьте презентации к решениям.

В контрольную работу можно включить задания, ориентированные на подготовку к ОГЭ и ЕГЭ, аналогичные заданиям из источника [40],

Задача 1. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см (см. Рис. 77). Ответ дайте в квадратных сантиметрах

Задача 2. На клетчатой бумаге с размером клетки $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ см $\times$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ см изображён круг. Найдите площадь закрашенного сектора (см. Рис. 78). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Задача 3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности (см. Рис. 79).

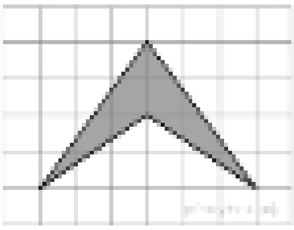
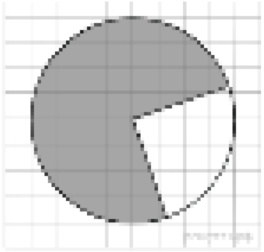
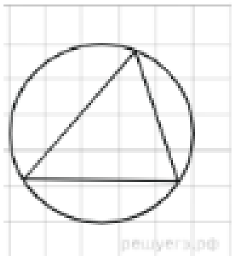
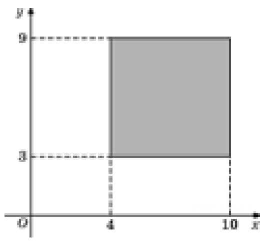




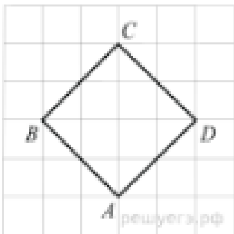
Рис.77 Рис.78 Рис.79

Задача 4. Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (4; 3), (10; 3), (10; 9), (4; 9) (см. Рис. 80).

Задача 5. На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ изображён квадрат. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат (см. Рис. 81).

Задача 6. На рисунке изображен параллелограмм ABCD. Используя рисунок, найдите $sin\angle HBA$ (см. Рис. 82).





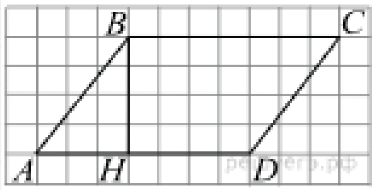


Рис. 80 Рис.81 Рис.82

Ключи: 1–6; 2 – 12; 3 – 2,5; 4 – 36; 5-2; 6 – 0,6.

§7. Педагогический эксперимент и его результаты

Констатирующий и поисковый этапы эксперимента приводились на базе МБУ «Школа №23» г.о. Тольятти, в период прохождения педагогической практики в качестве учителя математики. В эксперименте участвовало 45 учеников 9-х классов, которые обучаются по учебнику Л.С. Атанасяна.

Цель констатирующего этапа эксперимента – это выявить у учащихся уровень умений решать задачи на клетчатой бумаге.

Как известно, учащимся 9 классов необходимо сдавать ОГЭ по математике, как обязательный предмет. В ОГЭ по математике присутствуют задания по геометрии, которые учащиеся должны уметь решать.

Для успешной сдачи экзамена им необходимо решить 8 заданий: 6 заданий по алгебре и 2 задания по геометрии. В блоке заданий по геометрии присутствуют задания по наглядной геометрии, а именно задания на клетчатой решетке. В школьном курсе геометрии мало уделяют этому блоку внимание.

Цель поискового этапа эксперимента – апробировать задачи, разработанные и представленные в диссертации.

Итоги эксперимента подводились на основе наблюдений, бесед с учащимися и результатов выполнения ими контрольной работы.

Ниже представлены 2 варианта контрольной работы.

1 вариант

Задача 1 [46]. **«**На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь».

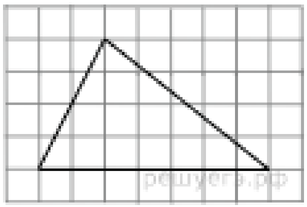
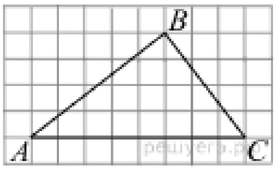


Рис.83 Рис.84

Решение:

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к данному основанию. Необходимо провести высоту **(**Рис.86) $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$.

Задача 2 [46]**.** «На клетчатой бумаге с размером клетки 1х1 изображён треугольник *ABC*. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону *AC* *(*Рис.85)».



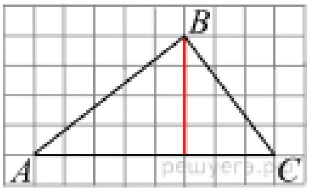


Рис.85 Рис.86

Решение:

Опустим высоту из точки на прямую АС. Посчитаем количество клеточек. Высота равна 4 (Рис.86).

Задача 3. Найдите площадь трапеции (Рис.87).

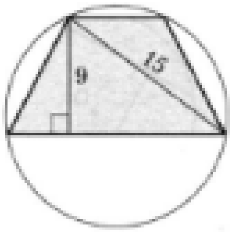


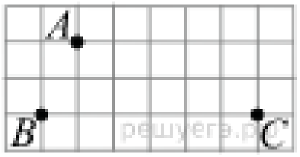
Рис.87

Решение:

Так как трапеция вписана в окружность, значит она равнобедренная. Диагонали в равнобедренной трапеции равны. Найдем площадь.

$$S = \frac{\sqrt{{d_1}^2 - h^2} + \sqrt{{d_2}^2 - h^2}}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{15^2 - 9^2} + \sqrt{15^2 - 9^2}}{2} \cdot 9 = \frac{20}{2} \cdot 9 = 90.$$

Задача 4 [46]**.** «На клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC. Ответ выразите в сантиметрах (Рис. 88)».



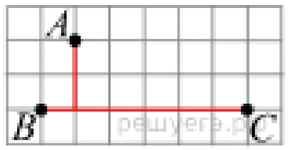


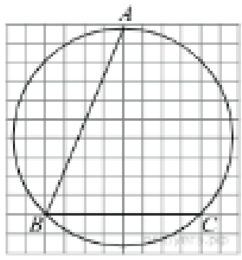
Рис.88 Рис.89

Решение:

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

По рисунку определяем это расстояние, оно равно двум клеткам, или 2 см (Рис. 89).

Задача 5 [46]**.** Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах (Рис.90).



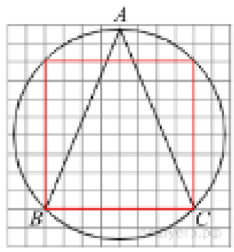


Рис.90 Рис.91

Решение:

Проведём дополнительное построение (Рис.91).

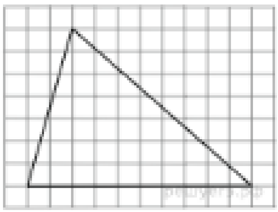
Дуга *BC* составляет ровно четверть окружности, следовательно, она равна 360°:4 = 90°. Угол *BAC* — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую опирается, значит, он равен половине дуги *BC*= 90°:2 = 45°.

Треугольник ABC– равнобедренный, следовательно

$\angle ABC = \frac{180^0 - 45^0}{2} = 67{,}5^0.$

2 вариант

Задача 1 [46]**.** «На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь (Рис.92)».



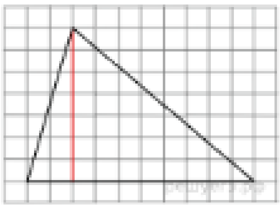


Рис.92 Рис.93

Решение:

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию.

Необходимо провести высоту и вычислить (Рис.93):

$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 = 35.$

Задача 2 [46]**.** «На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC (Рис.94)».

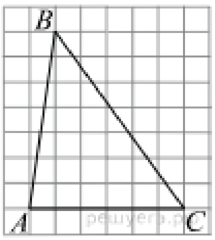


Рис.94

Решение:

Из рисунка видно, что длина стороны AC равна 6. Длина средней линии равна половине длины стороны AC, следовательно, 3.

Задача 3. Площадь трапеции равна $32\sqrt{3}$. Найдите AB (Рис.95).

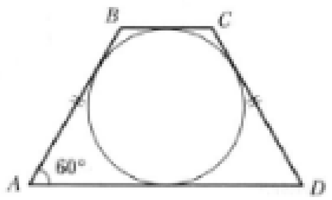


Рис.95

Решение:

Из рисунка видно, что трапеция ABCD равнобедренная. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

AB+CD=BC+AD→ AB=CD →AB+CD=2 AB

$$h = AB \cdot sin60^0 = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{(AD + BC) \cdot h}{2} = \frac{(\mathrm{AB} + \mathrm{CD}) \cdot h}{2}$$

$$32\sqrt{3} = \frac{2\ \mathrm{AB}}{2} \cdot h$$

$$32\sqrt{3} = \frac{2\ \mathrm{AB}}{2} \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB^2 = 64 \to AB = 8$$

Задача 4 [46]**.** «На клетчатой бумаге с размером клетки 1см х 1см отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой ВС. Ответ выразите в сантиметрах (Рис.96)».

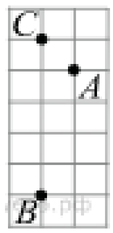


Рис.96

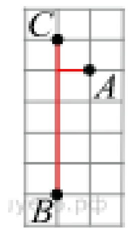
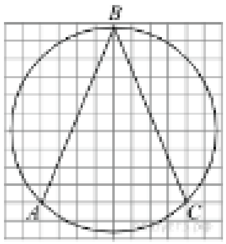


Рис.97

Решение:

Расстояние от точки до прямой равно перпендикуляру, опущенному из этой точки на прямую. По рисунку определяем это расстояние, оно равно 1 см (Рис.97).

Задача 5 [46]**.** Найдите угол *ABC*. Ответ дайте в градусах (Рис.98).



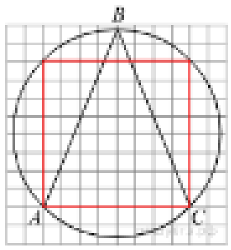


Рис.98 ………… Рис.99

Решение:

Проведём дополнительное построение. Дуга АС составляет ровно четверть окружности, следовательно, она равна 360°:4 = 90°. Угол *ABC* — вписанный, поэтому он равен половине дуги, на которую опирается, значит, он равен половине дуги *AC*= 90°:2 = 45° (Рис.99).

Результаты контрольной работы представлены в таблице 1.

Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что затруднения у учащихся связаны с задачами на вычисления площади фигур вписанной и описанной окружности и нахождения градусной меры угла в окружности.

Таблица 1− Результат контрольной работы

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступали к заданию
1.	89 % (40)	11% (5)	0 %
2.	78% (35)	22% (10)	0 %
3.	62 % (28)	25 % (11)	13 % (6)
4.	89 % (40)	11% (5)	0 %
5.	47 % (21)	22 % (10)	31 % (11)

Задачу на нахождения площади фигур вписанной и описанной окружности всего 62 % решили верно, 25 % допустили ошибки, а 13 % не приступали к этому заданию. Самые большие затруднения вызвало 5 задание: верно решили меньше половины, всего 47 %, неверно решили 22 %, а 31 % не приступали к решению вообще. Так же следует отметить, что задачи на измерение площадей геометрических фигур по клеточкам и нахождения расстояния от точки до прямой дали достаточно высокий процент (89 %).

Основные результаты выполнения контрольной работы и типы ошибок учащихся по каждому заданию представлены в таблице 2 и 3.

Таблица 2 − Основные виды ошибок

Задание 1		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула
0	5	0
Задание 2		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула
0	10	0
Задание 3		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула
1	5	5
Задание 4		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула
0	5	0
Задание 5		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула
1	4	5

Критерии оценивания работы:

Ниже 50 % выполнения заданий – отметка 2

От 50 % до 60 % выполнения заданий – отметка 3

От 61 до 89 % выполнения заданий – отметка 4

От 90 до 100 % выполнения заданий – отметка 5

Таблица 3 − Результат контрольной работы

Оценка	Количество учеников, получивших данную отметку
«5»	22 % (10)
«4»	36 % (16)
«3»	31 % (14)
«2»	11 % (5)
Итого	45

Таким образом, можно сделать вывод о том, что большинство учащихся умеют решать задачи по теме «Наглядная геометрия», а именно задачи, которые даны в заданиях ОГЭ.

Большие затруднения у учащихся связаны с задачами на нахождения площади фигур, вписанных или описанных в окружность и нахождения градусной меры угла в окружности.

Выводы по второй главе

Во второй главе был проведен анализ задач наглядной геометрии в учебниках математики 5-6 классов и в учебниках геометрии 7-11 классов.

Основным результатом данной главы являются составленная система задач, включающая следующие типы:

– задачи на равновеликость и равносоставленность многоугольников;

– задачи на разрезание, складывание и перегибания фигур;

– геометрические головоломки;

–задачи на составление геометрических фигур из спичек.

Также разработана программа элективного курса «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге», предназначенная для учащихся 9-10 классов общеобразовательного профиля.

Представлено его учебно-методическое сопровождение, в том числе подобрана литература для реализации курса; темы проектов для организации проектной деятельности учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опираясь на технологию и методику развития математического мышления В.А. Гусева [21], в рамках нашего исследования было:

– установлено, что одной из актуальных проблем современной теории и методики обучения математике является выявление методических возможностей задач наглядной геометрии как средств интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы;

– доказано, что важнейшими методологическими основаниями интеллектуального развития обучающихся в процессе обучения математике являются системный и дифференцированный подходы;

– определены основные цели интеллектуального развития обучающихся общеобразовательной школы;

– раскрыты роль наглядной геометрии в формировании логического и пространственного мышления у обучающихся общеобразовательной школы.

– обоснована технология развития математического мышления В.А. Гусева, которая наиболее ориентирована на интеллектуальное развитие учащихся средствами задач наглядной геометрии;

– построена цепочка задач, несущих новую информацию по теме «Равносоставленные и равновеликие многоугольники» для учащихся 9-10 классов;

– представлен анализ задач наглядной геометрии в учебниках математики 5-6 классов и в учебниках геометрии 7-11 классов;

– обоснована типология задач наглядной геометрии и по каждому типу представлена система дифференцированных задач;

– разработана программа элективного курса «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге», предназначенная для учащихся 9-10 классов общеобразовательного профиля;

– проведен педагогический эксперимент, в ходе которого апробирована система задач и представлены его результаты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д. и др. Геометрия для 8–9 классов: учеб. пособие для учащихся шк. И классов с углубл. изуч. математики/ А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В. И. Рыжик. –М.: Просвещение, 1991. – 415 с.

2. Астряб А.М. Наглядная геометрия (Лабораторный метод изложения): Первая ступень. Начальный курс геометрии. 6-е изд. – М.: Госиздат, 1923. − 160 с.

3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия 7–9 классы. − М.: Просвящение, 2017. –383 с.

4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия 10–11 классы. − М.: Просвещение, 2013. –255 с.

5. Барбул И.И. Начальное обучение геометрии [Текст]: Автореферат дис. на соискание учен. степени канд. пед. наук /. Барбул Иван Иванович. АПН РСФСР. Науч.-исслед. ин-т общего и политехн. образования. - Москва: [б. и.], 1966. − 22 с.

6. Богоявленский Д.Н. Менчинская Н. А. Психология усвоения знаний в школе. — М.: Изд–во АПН РСФСР, 1959. – 347 с.

7. Боженкова Л.И. Методическая система обучения геометрии, ориентированная на интеллектуальное воспитание учащихся общеобразовательной школы: Автореферат дисс.. д–ра пед. наук. –М., 2007. – 51 с.

8. Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. — М.: Гостехиздат, 1956. — 64 с. — (Популярные лекции по математике; вып. 22).

9. Березин В. Правильные многогранники. //Квант. – 1973. – №5. – С.26-27.

10. Бурмистрова Т.А. Математика. Сборник рабочих программ. 5–6 классы - М.: Просвещение, 2014. – 80 с.

11. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе-Ростов н/Д.: Феникс, 2005. –252 с.

12. Гамаюнов, В.Н. Тайна геометрических чертежей // Квант, 1976, №1. С. 9–11.

13. Гаркавцев Г.Ю. Геометрическая подготовка учащихся 1-4 классов в курсе "Наглядная геометрия" [Текст]: Автореферат дис. на соискание учен. степени канд. пед. наук / Гаркавцева Галина Юрьевна. Моск. гос. гуманитар. ун-т им. М.А. Шолохова. - Москва, 2009. –19 с.

14. Гельфман Э.Г Конструирование учебных текстов по математике, направленных на интеллектуальное воспитание учащихся основной школы [Текст]: Автореферат дис. на соискание учен. степени докт. пед. наук / Гельфман Эмануила Григорьевна –М.: МПГУ, 2004. – 46 с.

15. Глухова М.В. Задачи наглядной геометрии как средство математического развития обучающихся основной школы// Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: материалы Международной заочной научно-практической конференции (4–10 июня, 2018 г.). – Луганск: Книта, 2018. –С. 92– 96.

16. Глухова М.В. Задачи наглядной геометрии в школьном курсе математики // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2018 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2018. – С. 218–219.

17. Глухова М.В. Роль наглядной геометрии в формировании логического и пространственного мышления обучающихся // «Молодежь.

Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 5 декабря 2019 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд–во ТГУ, 2019.

18. Глухова М.В. Элективный курс «Правильные многоугольники и многогранники на клетчатой бумаге» // Эвристика и дидактика математики: материалы IX Международной научно-методической дистанционной конференции-конкурса молодых ученых, аспирантов и студентов. – Донецк: Изд-во ДОнНУ, 2020.

19. Глухова М.В Интеллектуальное развитие обучающихся в процессе обучения геометрии // «Студенческие Дни науки в ТГУ»: научно–практическая конференция (Тольятти, апрель-май 2020 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд–во ТГУ, 2020. – 1 оптический диск.

20. Горина Л.В. Одна за всех… Формула Пика // Математика. Все для учителя. №3. – 2013. – С. 24-28.

21. Гусев В.А., Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы- М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 456 с.

22. Гусев В.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе: психология математического образования: учеб. Пособие для вузов/авт.-сост. В.А. Гусев. – М.: Дрофа, 2010. − 473 с.

23. Гусев В.А., Орлов В.В., Панчищина В.А. Методика обучения геометрии /Учебное пособие -М.: «Академия», 2004. – 368 с.

24. Гусев В.А. Геометрия 5-6 классы. −М.: ООО «ТИД «Русское слово-РС», 2002. – 256 с.

25. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления / Пер. с англ. Н.М. Никольской- М.: Совершенство, 1997. –208 с.

26. Екимова М.А. Кукин Г.П. Задачи на разрезание. −М.: МЦНМО, 2002. − 120с.

27. Ерганжиева Л.Н. Изучение наглядной геометрии в курсе математики 5-6 классов [Текст]: Автореферат дис. на соискание учен. степени канд. пед. наук / Ерганжиева Лариса Николаевна. - Москва, 1992. −17 с.

28. Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. 5—6 классы. Рабочая программа. Методические рекомендации к линии УМК И.Ф. Шарыгина, Л.Н. Ерганжиевой: учебно-методическое пособие / Л.Н. Ерганжиева, О.В. Муравина. — М.: Дрофа, 2017. − 132 с.

29. Зинченко В. П., Вергилес Н. Ю. Формирование зрительного образа. — М.: Педагогика, 1969– 105 с.

30. Иванова Т.А., Перевощикова Е.Н., Кузнецова Л.И, Григорьева Т.П. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов/ Под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. –Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.

31. Казаков В.В. Наглядная геометрия .7 класс /В.В. Казаков. –2–е изд.-Минск: Аверсэв, 2013. –126 с.

32. Казаков В.В. Наглядная геометрия .8 класс /В.В. Казаков. –2–е изд.-Минск: Аверсэв, 2015. –107 с.

33. Казаков В.В. Наглядная геометрия .9 класс /В.В. Казаков. –4–е изд.-Минск: Аверсэв, 2015. –96 с.

34. Казаков В.В. Наглядная геометрия .10 класс /В.В. Казаков. –4–е изд.-Минск: Аверсэв, 2015. –87 с.

35. Клековкин Г.А. Геометрия 5 класс. Учеб. пособие / Г.А. Клековкин. –М.: Рус. слово, 2001. –320 с.

36. Кон И.С. Психология старшеклассников. — М.: Просвещение, 1980.192 с.

37. Косинский М.О. Наглядная геометрия: Для детей от 9 до 12 лет – СПб.: Мартынов, 1902. − 90 с.

38.Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьни ков. - М.: Просвещение, 1968. – 432с.

39. Лихачев Б.Т. Педагогика: Курс лекций / Учеб. пособие для студентов педагог, учеб. Л65 заведений и слушателей ИПК и ФПК. –4–е изд. перераб, и доп. — М.: Юрайт. –М.– 607с.

40. Межрегиональная олимпиада школьников САММАТ: 2012–2017, задания заключительного этапа тура.

41. Орлов В.В. Построение основного курса геометрии общеобразовательной школы в концепции личностно ориентированного обучения [Текст]: Автореферат дис. на соискание учен. степени канд. пед. наук /Орлов Владимир Викторович. – Санкт-Петербург, 2000. –384 с.

42. Погорелов А.В. Геометрия 7–9 классы. М.: Просвещение, 2014. – 240с.

43. Погорелов А.В. Геометрия 10–11 классы. М.: Просвещение, 2009. – 178 с.

44. Потоскуев Е.В. О принципах наглядности в геометрии [Электронный ресурс]/ Потоскуев Е.В. // Математика в школе. – 2017. – №5. – С. 18–26. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=29864247 – Последнее обновление 08.01.2020.

45. Пойа Д.А. Математические открытия. — М.: Наука, 1976. – 448 с.

46. Решу ОГЭ, ЕГЭ: математика образовательный портал [Электронный ресурс]. –Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru/test?id=29349186 – Последнее обновление 26.04.2020.

47. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе [Текст]: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун– тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. –224 с.

48. Смирнов В.А., Смирнова И.М., Геометрия 7–9 классы – М.: Мнемозина, 2015. – 376 с.

49. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрические задачи с практическим содержанием. – М.: МЦНМО, 2015. –2–е изд., доп. –216 с.

50. Смирнов В.А. Геометрия на клетчатой бумаге: учебное пособие для общеобразовательных учреждений / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова. - Москва: Изд-во МЦНМО, 2009. – 259с.

51. Смирнова И., Смирнова В. Каскады из правильных многогранников/ И. Смирнова, В. Смирнова //Квант. – 1980. – №3. – С.17–21.

52. Смирнов В.А., Смирнова И.М., Ященко И.В. Наглядная геометрия- М.: МЦНМО, 2013. –272с.

53. Смирнов В.А., Смирнова И.М., Ященко И.В. Наглядная геометрия. Рабочая тетрадь № 1– М.: МЦНМО, 2012. – 88 с.

54. Смирнов В.А., Смирнова И.М., Ященко И.В. Наглядная геометрия. Рабочая тетрадь № 3– М.: МЦНМО, 2012. – 88 с.

55. Смирнов В.А., Смирнова И.М., Ященко И.В. Наглядная геометрия. Рабочая тетрадь № 4. – М.: МЦНМО, 2012. – 88 с.

56. Смирнова И. М. Педагогика геометрии: Пособие для учителей математики. [Электронный ресурс]. URL: https://drofaventana.ru/files/pedagogika_geometrii.pdf (Дата обращения: 26.01.2020), 264с.

57. Смолянский М. История международных олимпиад / С. Токарев // 1973/ - №11. – С.71–73.

58. Сойер У.У. Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972. –192 с.

59. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математики. Курс лекций. – М.: Дрофа,2008. – 416 с.

60. Столяр А.А. Столяр А.А. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. 2104 «Математика» и 2105 «Физика» / А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

61. Сухомлинский В.А. Сердце отдаю детям / В.А. Сухомлинский. – Киев: Радяньска школа, 1974. –288 с.

62. Терентьева Л.П. Интеллектуальное развитие младшего школьника в процессе обучения [Текст]: Автореферат дис. на соискание учен. степени канд. пед. наук / Терентьева Лариса Павловна. – Чебоксары, 2000. –204 с.

63. Утеева Р.А. Практико-ориентированная подготовка магистров математического образования к проектированию содержания элективных курсов /Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции (с межд. участием) / отв. ред. Т.С. Мамонтова. – Ишим: Изд–во ИГПИ им. П.П. Ершова, 2013. – С. 73–78.

64. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы. – М.: Айрис-пресс,2010. –296 с

65. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5-9 класс). [Электронный ресурс]. − Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. − Последнее обновление 26.12.2019.

66. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике / Учебное пособие – М.: УРСС, 2005. – 244с.

67. Хинчин А.Я. О воспитательном эффекте уроков математики // Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. М.: УРАО, 2001. С. 243–263.

68. Холодная М.А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования. −2-е изд, перераб. и доп. / СПб.: Питер, 2002. −272 с.

69. Цукарь А.Я. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием образного мышления[Текст]: Автореферат дис. на соискание учен. степени канд. пед. наук / Цукарь Анатолий Яковлевич. – Новосибирск, 1999. –33 с.

70. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. Учебное пособие для V — VI классов. — М: МИРОС, 1995. — 240 с.

71. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. 5–6 классы. Рабочая программа. Методические рекомендации к линии УМК И.Ф.

Шарыгина, Л.Н. Ерганжиевой: учебно-методическое пособие / Л.Н. Ерганжиева, О.В. Муравина. — М.: Дрофа, 2017. – 132.

72. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 класса ср. шк. –М.: Просвещение, 1989.

73. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников − М. Педагогика, 1980. − 242 с.

74. Якиманская И.С. Развивающее обучение — М.: Педагогика, 1979. – 144 с.

75. Яковлев И.В. Олимпиадная математика. Задачник. [Электронный ресурс]. –Режим доступа: https://mathus.ru/math/matholymp67.pdf

76. Ярецкая А.Ю. Развивающая игра как средство интеллектуального воспитания старших дошкольников/ автореферат диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук-Москва, 2016. –221 с.

77. Schoenfeld, Alan H, ed. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in. New York: MacMillan, 1992. – 334–370 p.

78. Legendre, A.M. Elements of geometry. Cambridge: Printed by Hilliard And Metcalf, 1825. – 567p.

79. Feuerstein R. The theory of structural cognitive modifiability / R. Feuerstein // Learning and thinking styles: Classroom interaction. - Washington, D.C.: Nat. Educat. Assoc., 1990. – P. 68–134.

80. Staats A.W. Intelligence and child development: What intelligence is and how it is learned and functions / A.W. Staats, G.L. Burns // Genetic Psychol. Monograph. - Provincetown: Mass. Journal Press, 1981. – № 104. – P. 237–301.

81. Lopes P.N. Emotional intelligence, personality, and perceived quality social relationships / P.N. Lopes, P. Salovey, R. Straus // Pers. &Individ. Diff. – Amsterdam: Elsevier, 2003. – № 35. – P. 641–658.