МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математическое образование»
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Задачи на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы»

Студент О.А. Вагина
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, Е.В. Бахусова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ 7

§1. Требования ФГОС к математической подготовке учащихся при изучении углубленного курса математики 7

§2. Содержательный анализ программ элективных курсов на использование свойств целых чисел и задач в профильном ЕГЭ по математике 11

§3. Содержательный анализ заданий на использование свойств целых чисел в действующих учебниках с углубленным изучением математики, в заданиях школьных олимпиад 23

§4. Обзор методических систем обучения решению задач по теме «Целые числа» 39

Выводы по первой главе 45

ГЛАВА II. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ «ЗАДАЧИ НА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ» 47

§ 5. Требования, выделяемые к элективным курсам в углубленном курсе математики основной школы 47

§6. Разработка программы элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах» 48

§ 7. Методические рекомендации по использованию элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах» 51

Выводы по второй главе 65

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 66

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 68

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Анализ программ по математике в углубленном курсе общеобразовательной школы показал, что основной теоретический материал на свойства целых чисел изучается в 5 классе и в 6 классе, в старших классах эта тема не получает дальнейшего развития. Но задачи на использование свойств целых чисел являются неотъемлемой составляющей олимпиадных задач по математике всех уровней для учащихся с 5 по 11 классы, входят в содержание 19-го задания профильного ЕГЭ по математике.

Вышесказанные **противоречия** подтверждают актуальность темы исследования: «Задачи на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы».

Указанные противоречия позволили сформулировать проблему диссертационного исследования: выявление условий организации подготовки обучающихся к решению задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика организации подготовки обучающихся к решению задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе общеобразовательной школы.

Цель исследования: выявить условия организации подготовки обучающихся к решению задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования: обучение решению задач на использование свойств целых чисел будет успешным, если выполняются следующие условия: учащиеся должны прочно овладеть базовыми знаниями теоретического материала по теме «Свойства целых чисел» (*сравнение целых чисел, нахождение среднего арифметического чисел, НОД и НОК, решение уравнений с целыми числами, простые и составные числа, делимость целых* *чисел*); учитель должен систематично, не менее, чем один раз в четверть, предлагать учащимся задачи на «Свойства целых чисел» не только в 5-6 классах, но и в последующем изучении математики в 7-11 классах; учитель должен предлагать учащимся задачи разного уровня сложности; у ученика должно быть как можно больше самостоятельного опыта решения задач на «Свойства целых чисел».

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования:**

1. Изучить требования ФГОС основного и среднего общего образования к математической подготовке учащихся при изучении углубленного курса математики.

2. Провести содержательный анализ заданий на использование свойств целых чисел в действующих учебниках с углубленным изучением математики и профильном ЕГЭ по математике, в содержании школьных олимпиад~~ах~~.

3. Выделить классификацию заданий на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

4. Разработать программу элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах» для старших классов.

6. Составить систему задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Д. Пойа [30], Л.М. Фридмана [37], Т.А. Ивановой [13].

Базовыми для настоящего исследования явились работы Ф.А. Бартенева [1], С.В. Конягина [16], Н.П. Кострикиной [17], Т.Н. Мираковой [22], А.А. Шрайнера [39], Ф.М. Шустефа [40].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования; статистические методы обработки результатов.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2018/19 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников по математике, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2018/19 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

3 семестр (2019/20 уч.г.): подборка системы упражнений для подготовки к государственной итоговой аттестации учащихся одиннадцатых классов, связанная с действительными числами, элективный курс по теме «Действительные числа в задачах на вычисления».

4 семестр (2019/20 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Научная новизна исследования: предложены методические рекомендации по решению задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования: выявлены условия обучения учащихся решению задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования: разработана система задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических особенностей и рекомендаций по обучению решения задач на использование свойств целых чисел; разработке элективного курса по теме «Целые числа в олимпиадных задачах» в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. *Экспериментальная проверка* предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета.

По теме исследования имеются 3 публикации: в сборнике трудов IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (апрель, 2019г.) [7]; в сборнике студенческих работ всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (декабрь 2019 г.) [6], в сборнике студенческих работ всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (декабрь 2018 г.) [5].

Участие в конференции «Студенческие дни науки в ТГУ» 1 этап (диплом за 1 место); 2 этап (диплом за 1 место).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по организации обучения решению задач на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

2. Элективный курс «Целые числа в олимпиадных задачах».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы (45 источников), содержит 12 таблиц. Основной текст работы изложен на 70 страницах.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§1. Требования ФГОС к математической подготовке учащихся при изучении углубленного курса математики

Разделение на углубленный и базовый курс при обучении математике в школе начинается с 5 класса. Рассмотрим требования ФГОС к математической подготовке учащихся по теме: «Задачи на использование свойств целых чисел в углубленном курсе общеобразовательной школы». Требования выделены по разделам [35, С.92-112]: «элементы теории множеств и математической логики, числа и выражения, уравнения и неравенства, функции, элементы математического анализа, статистика и теория вероятностей, логика и комбинаторика, текстовые задачи, геометрия».

Рассмотрим каждый раздел из алгебры.

Раздел «Элементы теории множеств и математической логики» выделяет следующие требования учащимся к математической подготовке: «свободно оперировать понятиями: конечное множество, элемент множества, подмножество, пересечение, объединение и разность множеств, числовые множества на координатной прямой, отрезок, интервал, полуинтервал, промежуток с выколотой точкой, графическое представление множеств на координатной плоскости» [35, С.92].

Учащиеся должны свободно знать и свободно использовать понятия: «утверждение, отрицание утверждения, истинные и ложные утверждения, причина, следствие, частный случай общего утверждения, контрпример» [35, С. 92]. Должны уметь: «находить пересечение и объединение множеств, в том числе представленных графически на числовой прямой и на координатной плоскости; проводить доказательные рассуждения для обоснования истинности утверждений» [35, С. 93].

Раздел «Числа и выражения» выделяет требования к знанию понятий: «натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанное число, рациональное число, множество рациональных чисел, иррациональное число, корень степени n, действительное число, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел» [35, С. 94].

Учащиеся должны понимать записи чисел позиционной и непозиционной систем, объяснять разницу между ними, также «переводить числа из одной системы записи (системы счисления) в другую; доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения при выполнении вычислений и решении задач; выполнять округление рациональных и иррациональных чисел с заданной точностью; сравнивать действительные числа разными способами; упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби, числа, записанные с использованием арифметического квадратного корня, корней степени больше 2; находить НОД и НОК разными способами и использовать их при решении задач; выполнять вычисления и преобразования выражений, содержащих действительные числа, в том числе корни натуральных степеней; выполнять стандартные тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных, иррациональных выражений» [35, С. 95-96].

Раздел «Уравнения и неравенства» подразумевает, что после изучения курса учащийся сможет с легкостью оперировать понятиями такими как: «уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений» [35, С. 99]. Сможет решить различные виды уравнений и неравенств, а также системы, некоторые уравнения третей и четвертой степеней, дробно-рациональные и иррациональные.

Ученик сможет решать некоторые типы уравнений такие как: показательные, логарифмические, иррациональные, степенные, а также неравенства и применять их при решении задач; применять теоремы Безу и теорему Виета в решении уравнений. После освоения курса сумеет: «понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать; владеть методами решения уравнений, неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор; использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения; решать алгебраические уравнения и неравенства и их системы с параметрами алгебраическим и графическим методами; владеть разными методами доказательства неравенств; решать уравнения в целых числах; изображать множества на плоскости, задаваемые уравнениями, неравенствами и их системами; свободно использовать тождественные преобразования при решении уравнений и систем уравнений»[35, С. 100].

Раздел «Функции» включает в себя следующие понятия, которыми должен владеть учащийся: «зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график зависимости, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание на числовом промежутке, убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции на числовом промежутке, периодическая функция, период, четная и нечетная функции» [35, С. 104]. А также применять эти понятия на практике.

Также при решении задач применять: «свойства функций четность, периодичность, ограниченность; преобразования графиков функций» [35, С. 106]. Знать понятия и применять свойства и признаки арифметической и геометрической прогрессий при решении задач: числовая последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессия.

Раздел «Элементы математического анализа». После изучения данного раздела должны оперировать понятием и применять на практике при решении задач - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Пользоваться при решении задачи теорией пределов, а также должны: «владеть понятиями бесконечно большие и бесконечно малые числовые последовательности и уметь сравнивать бесконечно большие и бесконечно малые последовательности; владеть понятиями: производная функции в точке, производная функции; вычислять производные элементарных функций и их комбинаций; исследовать функции на монотонность и экстремумы; строить графики и применять к решению задач, в том числе с параметром; владеть понятием касательная к графику функции и уметь применять его при решении задач; владеть понятиями первообразная функция, определенный интеграл; применять теорему Ньютона–Лейбница и ее следствия для решения задач» [35, С. 110].

Раздел «Статистика и теория вероятностей, логика и комбинаторика» подразумевает знание понятий: «генеральная совокупность и выборкой из нее; частота и вероятность события, сумма и произведение вероятностей». Учащийся должен уметь: «вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов; владеть основными понятиями комбинаторики и уметь их применять при решении задач» [35, С. 111].

Понимать «основы теории вероятностей; понятия: дискретные и непрерывные случайные величины, и распределения, независимость случайных величин, математическое ожидание и дисперсия случайных величин, совместные распределения случайных величин, нормальное распределение и примеры нормально распределенных случайных величин, корреляции случайных величин». Освоить суть: «закона больших чисел и выборочного метода измерения вероятностей» [35, С. 112].

Раздел «Текстовые задачи». Учащийся сможет решать различные задачи повышенной трудности; а также: «анализировать условие задачи, выбирать оптимальный метод решения задачи, рассматривая различные методы; строить модель решения задачи, проводить доказательные рассуждения при решении задачи; решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата; анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту; переводить при решении задачи информацию из одной формы записи в другую, используя при необходимости схемы, таблицы, графики, диаграммы» [35, С. 114-115]. Для решения задач на использование свойств целых чисел в углубленном уровне учащиеся должны хорошо владеть понятиями: натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел.

Также должны ученики уметь при выполнении вычислений и решении задач [35, С.92-112]: «доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения; находить НОД и НОК разными способами; анализировать условие задачи, выбирать метод, который является оптимальным для решения задачи, рассматривая различные методы; строить модель решения задачи, приводить доказательные рассуждения при решении задачи; решать задачи, которые требуют перебор вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата; анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту».

§2. Содержательный анализ программ элективных курсов на использование свойств целых чисел и задач в профильном ЕГЭ по математике

Анализ программ элективных курсов по углубленному изучению математики на использование свойств целых чисел представлен в таблице 1. Рассмотрены программы учителей С.В. Панюшкина и Л.М. Козичевой «Делимость чисел в курсе алгебры 8-9 классов с углубленным изучением математики» [28], И.М. Ибрагимовой «Задачи с целыми числами» [12] и О.Ю. Глуховой «Теория делимости» [10].

В программах С.В. Панюшкина, Л.М. Козичева [28] и О.Ю. Глуховой [10] большее значение уделялось задачам на делимость целых чисел. Также О.Ю. Глухова выделяет нестандартные задачи, которые решаются методом перебора и задачи на решение уравнений с целыми числами.

И.М. Ибрагимовой [12] были рассмотрены более разнообразные темы для изучения. Предложены задачи: «на восстановление знаков действий, восстановление цифр натуральных чисел, числовые ребусы, четные и нечетные числа, признаки делимости, разные задачи на делимость, деление с остатком, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, перестановки и зачеркивания цифр в натуральном числе, последние цифры натурального числа».

Задачи по теме «Свойства целых чисел» можно встретить в каждом варианте под номером 19. После анализа заданий ЕГЭ [26] профильного уровня были выделены следующие типы задач на свойства целых чисел, которые чаще встречаются: «*задачи на делимость целых чисел, задачи на решение уравнений с целыми числами, задачи на сравнение целых чисел, задачи на нахождение среднего арифметического чисел, задачи на арифметическую прогрессию*». Анализ представлен в таблице 2.

В таблице 3 представлен обзор элективных курсов по тематике, схожей с тематикой планируемого элективного курса [15], [19], [27], [36].

После анализа элективных курсов Л.Г. Ившиной «Целые числа. Делимость целых чисел» [15], Н.Н. Луценко «Методы решения олимпиадных задач» [19], С.Г. Осиповой «Решение олимпиадных задач при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня» [27], В.В. Федоровой «Числа правят миром» [36] можно сделать вывод, что не все они удовлетворяют требованиям к образовательным результатам. К примеру, элективный курс, который предлагает Л.Г. Ившина рассчитан на 30 часов. Но из требований видим, что элективные курсы должны быть рассчитаны на 17, 34 или 51 учебных часов. Большинство курсов направлено на расширение и углубление знаний по предмету, и малая часть на формирования аналитического и логического мышления.

Таблица 1 - Анализ программ элективных курсов по углубленному изучению математики на использование свойств целых чисел

Название программы, автор, класс	Название соответствующих тем и количество часов на изучение	Примеры заданий (углубленных)
«Делимость чисел в курсе алгебры 8-9 классов с углубленным изучением математики», авторы Панюшкин С.В., Козичева Л.М. [27].	Свойство делимости (4 ч.) Признаки делимости (4 ч.) Частное и остаток (3 ч.) Контрольная работа(1 ч.)	1) Докажите, что, если $b \vdots c$, $a \vdots b$, то $a \vdots c$. 2) Докажите, что, если $a^2 \vdots (a+b)$ то $b^2 \vdots (a+b)$. 3) Пусть $ab \vdots c$ и $(a+b) \vdots c$. Докажите, $(a^2+b^2) \vdots c$.
«Программа элективного курса для учащихся 7 класса«Задачи с целыми числами»,автор Ибрагимова И.М. [12].	Восстановление знаков действий (1 ч.), восстановление цифр натуральных чисел (2 ч.), числовые ребусы (2 ч.), четные и нечетные числа (2 ч.), признаки делимости (3 ч.), разные задачи на делимость (2 ч.), деление с остатком (3 ч.), наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное (1 ч.), перестановки и зачеркивания цифр в натуральном числе (2 ч.), последние цифры натурального числа (1 ч.).	1) На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 333667 для того, чтобы получить число, записывающееся одними восьмерками? 2) Школьник сложил три последовательных натуральных числа, затем три следующих числа и полученные суммы перемножил. У него получилось число 791. Не ошибся ил он? Почему? 3) Найдите цифру, обозначенную звездочкой, в числе 41875*, если это число делится на 18. 4) При делении натурального числа на 67 получился остаток равный 45. У делимого отбросили две последние цифры, после этого число стало делиться на 67без остатка, какие цифры были отброшены?
«Элективный курс «Теория делимости», 8 класс, автор Глухова О.Ю. [10].	Нестандартные задачи, структура, методы и приемы, метод перебора (8 ч.) Делимость чисел (16 ч.) Уравнения в целых числах (10 ч.)	1) В бидоне 12л молока. Как разделить их поровну, если имеются два бидона 8л и 5л? 2) В записи числа74*3* замените * цифрами так, чтобы число делилось на 18. 3) Число х натуральное и при делении на 10 и 13 остаток одинаков и равен 7. Найти число х, если оно больше 350, но меньше 500. 4) Докажите что четная натуральная степень числа 9, уменьшенная на 1, кратна 40.

Таблица 2 - Анализ заданий ЕГЭ по математике на использование свойств целых чисел профильного уровня

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость целых чисел	«Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100. а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90? б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88? в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр» [26].	*Должен знать:* определение Nи Z чисел, определение кратности числа. *Должен уметь:* Анализировать условие задачи, строить модель задачи, проводить доказательные рассуждения, доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения, составлять по условию задачи неравенство и решать его.
2	Задачи на решение уравнений с целыми числами	«Каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим $S_1 = a_1, a_2, \dots, a_{350}$, $S_2 = {a_1}^2, {a_2}^2, \dots, {a_{350}}^2$, $S_3 = {a_1}^3, {a_2}^3, \dots, {a_{350}}^3$, $S_4 = {a_1}^4, {a_2}^4, \dots, {a_{350}}^4$. Известно, что $S_1 = 513$. а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1097, S_3 = 3243$. б) Может ли $S_4 = 4547$? в) Пусть $S_4 = 4547$. Найдите все значения, которые может принимать S_2» [26].	*Должен знать:* определение Nи Z чисел, определение кратности числа, определение арифметической прогрессии. *Должен уметь:* Анализировать условие задачи, строить модель задачи, проводить доказательные рассуждения, решать систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.
3	Задачи на сравнение целых чисел	«В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?	*Должен знать:* определение Nи Z чисел, определение среднего арифметического чисел. *Должен уметь:* анализировать условие задачи, строить модель задачи, проводить доказательные рассуждения, доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения, находить процент от числа, составлять уравнение по условию задачи и решать его.

Продолжение Таблицы 2

		б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7? в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2» [26].	
4	Задачи на нахождение среднего арифметического чисел	«На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли. а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось? б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34? в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске» [26].	*Должен знать:* определение Nи Z чисел, определение среднего арифметического чисел. *Должен уметь:* Анализировать условие задачи, строить модель задачи, проводить доказательные рассуждения, составлять по условию задачи уравнение и решать его, находить среднее арифметическое чисел.
5	Задачи на арифметическую прогрессию	«Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$). а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16? б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900? в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 235» [26].	*Должен знать:* определение Nи Z чисел, определение арифметической прогрессии, формулу для нахождения S арифметической прогрессии. *Должен уметь:* Анализировать условие задачи, строить модель задачи, проводить доказательные рассуждения, решать неравенства.

Таблица 3 - Обзор ЭК по тематике, схожей с тематикой планируемого элективного курса

Название программ ЭК, автор	**Особенности**
Целые числа. Делимость чисел, Ившина Л.Г. [15].	ЭК по математике в рамках предпрофильной подготовки учащихся рассчитан на 30 ч. в 9 классе. ЭК направлен на формирование аналитического и логического мышления при проектировании решения задачи, опыта творческой деятельности учащихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач. В содержание курса входит рассмотрение понятия алгоритма Евклида; свойства остатков при делении; числа, сравнимые по модулю; метод математической индукции; решение уравнений с двумя переменными в целых числах. https://infourok.ru/elektivniy-kurs-po-teme-delimost-chisel-celie-chisla-3720464.html(дата обращения: 19.12.2019).
Методы решения олимпиадных задач, Луценко Н.Н. [19].	ЭК по математике в рамках предпрофильной подготовки учащихся рассчитан на 34 ч. в 10 классе. ЭК направлен на расширение и углубление знаний учащихся по математике; развитие математического мышления и способностей учащихся; подготовка к сдаче ЕГЭ и продолжению успешного обучения в вузе. Данный курс предназначен, как дополнение к школьному материалу, характерен теми же основными понятиями и их структурой, но не копирует его и не выполняет функций дополнительных занятий. https://infourok.ru/programma-elektivnogo-kursa-dlya-klassa-olimpiadnaya-matematika-1619328.html(дата обращения: 19.12.2019).
Решение олимпиадных задач при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня, Осипова С.Г. [27].	ЭК по математике рассчитан на 17 ч. в 10 классах. ЭК ориентирован на расширение и углубление знаний по предмету. Темы программы непосредственно примыкают к основному курсу профильной математики 10 класса. Однако в результате занятий учащиеся должны приобрести навыки и умения решать задачи олимпиадного уровня.В данном ЭК рассмотрены четыре основные темы: «Текстовые задачи, использующие уравнения в целых числах», «Текстовые задачи, использующие делимость целых чисел», «Оценка переменных, организация перебора», «Целочисленные прогрессии». https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/rabochaya_programma_elektivnogo_kursa_po_matematike_175122.html (дата обращения: 19.12.2019).
Числа правят миром, Федорова В.В. [36].	Данный ЭК предназначен для учащихся 10 классов, рассчитан на 17 ч. ЭК направлен на обеспечение прочной базовой математической подготовки с целью продолжения математического образования. В данном ЭК рассмотрены четыре основные темы: «Признаки делимости», «Наибольший общий делитель», «Наименьшее общее кратное», «Текстовые задачи».

	https://multiurok.ru/files/eliektivnyi-kurs-chisla-praviat-mirom-dlia-uchashc.html(дата обращения: 12.12.2019).

Анализ программ элективных курсов [10, 12, 28] по углубленному изучению математики на использование свойств целых чисел показал, что особое внимание элективных курсов уделяется задачам на делимость целых чисел. Остальные типы задач, выделенные нами в ЕГЭ, встречаются не часто.

После анализа заданий ЕГЭ [26] по математике на использование свойств целых чисел профильного уровня можно сделать вывод, что с задачей на свойства целых чисел столкнется каждый ученик при сдаче экзамена. Но у него могут возникнуть трудности при решении данной задачи, не хватит опыта решения аналогичных задач, так как в школьных учебниках задачам на свойства целых чисел в старших классах не уделяется должное внимание.

Решение задач из ЕГЭ по математике профильного уровня

1. Примем за данное число $100a + 10b + c$ где $a -$ цифры сотен, $b -$ цифры десятков и $c -$ цифры единиц. Так как частное этого числа, а также суммы его цифр равно k то выполнено $100a + 10b + c = ka + kb + kc$.

а) Допустим частное 90, то $100a + 10b + c = 90a + 90b + 90c; 10a = 80b + 89c$ что будет являться верным, например, при $c = 0, b = 1, a = 8$: частное числа 810 и суммы его цифр равно 90.

б) Если частное равно 88 то $100a + 10b + c = 88a + 88b + 88c \leftrightarrow 12a = 78b + 87c$.

Получаем: $a < 10 \leftrightarrow 12a < 120 \leftrightarrow 78b + 87c < 120$.

Значит, $b = 0, c = 1$ или $b = 1, c = 0$. Но ни 78 ни 87 не делится на 12. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 88.

в) Пусть k — наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100 и суммы его цифр. Тогда

$$100a + 10b + c = ka + kb + kc \leftrightarrow (100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c.$$

Учитывая, что $b + c > 0$ получаем:

$$9(100 - k) \geq (100 - k)a = (k - 10)b + (k - 1)c \geq (k - 10)(b + c)$$
$$\geq k - 10.$$

Откуда $9(100 - k) \geq k - 10 \leftrightarrow 10k \leq 910 \leftrightarrow k \leq 91.$

Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100 и суммы его цифр равно 91.

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.

2. Пусть количества единиц, двоек, троек и четвёрок среди $a_1, a_2, \dots, a_{350}$ равны m_1, m_2, m_3, m_4 соответственно.

Тогда $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350$ и $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 513.$

а) По условию$S_1 = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 513, S_2 = m_1 + 4m_2 + +9m_3 + 16m_4 = 1097, S_3 = m_1 + 8m_2 + 27m_3 + 64m_4 = 3243,$ где $m_1 + +m_2 + m_3 + m_4 = 350.$

Решая систему четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными, находим: $m_1 = 282, m_2 = 7, m_3 = 27, m_4 = 34.$

Значит, $S_4 = 282 + 16 \times 7 + 81 \times 27 + 256 \times 3411285.$

б) Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4547,$ где$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350,$ то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4197.$

В последнем равенстве левая часть кратна 5, а правая — нет, поэтому S_4 не может быть равным 4547.

в) Если $S_4 = m_1 + 16m_2 + 81m_3 + 256m_4 = 4745,$ где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 350,$ то $15m_2 + 80m_3 + 255m_4 = 4395.$

Кроме того, поскольку $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 513$ получаем:

$$m_2 + 2m_3 + 3m_4 = 163 \leftrightarrow 15m_2 + 30m_3 + 35m_4 = 2445.$$

Вычтем из первого полученного равенства второе:$50m_3 + 210m_4 = 1950 \leftrightarrow 5m_3 + 21m_4 = 195.$

Значит, m_4 делится на 5 и может равняться только 0 или 5.

При $m_4 = 0$ получаем:

$$m_3 = \frac{195 - 21m_4}{5} = 29, m_2 = 163 - 2m_3 - 3m_4 = 85,$$

$$m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 226, S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 917.$$

При $m_4 = 5$ получаем:

$$m_3 = \frac{195 - 21m_4}{5} = 18, m_2 = 163 - 2m_3 - 3m_4 = 112,$$

$$m_1 = 350 - m_2 - m_3 - m_4 = 215, S_2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + 16m_4 = 905.$$

Ответ: а) 11285; б) нет; в) 905 или 917.

3. а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешёл в школу № 2.

Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 10 раз.

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B, а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0{,}9(m+1)B - mB; 10u = (9 - m)B.$$

Если $B = 7$ то $(9 - m)B$ не делится на 10, а $10u$ делится на 10. Но это невозможно, поскольку $10u = (9 - m)B$.

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся A. Тогда получаем:

$$u = (9 - m)A - 0{,}9(8 - m)A; 10u = (18 - m)A = (9 - m)B.$$

Заметим, что если $B = 1$ или $B = 3$, то $10u = (9 - m)B$ не делится на 10.

Если $= 2$ или $B = 4$, то $m = 4$. В первом случае $14A = 10$, а во втором $14A = 20$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При $B = 5$ и $m = 3$ получаем $u = 3$ и $A = 2$. Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 — по 3 балла, в школе № 2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося — 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

4. а) Например, если были написаны по 10 раз числа 11 и 1 и со всеми провели эти действия, то их среднее было равно 6, а после описанных действий оно станет равно 10.

б) Пусть x количество изначально написанных единиц, которые превратятся в нули, а y — количество прочих уменьшаемых чисел. Тогда сумма всех чисел равна $27 \times 20 = 540$, а сумма всех чисел, кроме будущих нулей, равна $540 - x$, и их $20 - x$ штук.

После описанных действий будет $20 - x$ чисел с общей суммой $540 - x - y$.

Значит, $\frac{540-x-y}{20-x} = 34 \leftrightarrow 540 - x - y = 680 - 34x \leftrightarrow 140 = 33x - y$.

Отсюда следует, что $x \geq 5$. Но тогда $y \geq 33 \times 5 - 140 = 25$, что невозможно.

Ответ: а) да б) нет.

5. а) Да. Например, числа 1, 3, 5, 7 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 1 + 3 + 5 + 7 = 16.

б) Так как все данные n чисел натуральные, то наименьшее из них больше или равно 1, а поскольку все эти числа различны (т. е. отличаются друг от друга не менее, чем на 1), то их сумма S не меньше суммы 1 + 2 + ... +, т. е. $S \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

Если известно, что $S <$ 900, то из неравенства $S \geq \frac{n(n+1)}{2}$ следует, что $\frac{n(n+1)}{2} < 900, n(n+1) < 1800,$ откуда $n <$ 42 (при $n \geq 42$ имеем: $n(n+1) < 42 \times 43 > 1800$).

При n = 41 имеем: $n(n+1) < 41 \times 42 > 1800$, натуральные числа от 1 до 41 (без пропусков) составляют арифметическую прогрессию, их количество равно 41, а сумма меньше 900.

Таким образом, наибольшее возможное значение n в пункте б) равно 41.

в) Пусть a_1 — наименьшее из данных n чисел, образующих арифметическую прогрессию, d — разность этой прогрессии.

Тогда по известной формуле сумма этих n чисел равна:

$$\frac{2a_1 + \mathrm{d}(\mathrm{n}-1)}{2} \times n.$$

Если известно, что сумма данных n чисел равна 235, то $\left(2a_1 + \mathrm{d}(\mathrm{n}-1)\right) \times \mathrm{n} = 470.$

Заметим, что $47 = 47 \times 10,$ число 47 простое и $n < 47$ (в пункте б) доказано, что $n \leq 41$), то n — один из делителей числа 10.

Так как $n \geq 3$ то возможные значения n = 5 или n = 10.

Подставим в равенство $\left(2a_1 + \mathrm{d}(\mathrm{n}-1)\right) \times \mathrm{n} = 470$ поочередно n = 5 и n = 10, получаем следующие равенства:

$2a_1 + 4\mathrm{d} = 94$ и $2a_1 + 9\mathrm{d} = 47.$

Первое из этих равенств выполняется, например, при $a_1 = 1, d = 23,$ а второе — при $a_1 = 1, d = 5.$

Прогрессии 1, 24, 47, 70, 93 и 1, 6, 11, …, 46 состоят из 5 и 10 членов, а их сумма равна 235.

Ответ: а) да; б) 41; в) 5 и 10.

§3. Содержательный анализ заданий на использование свойств целых чисел в действующих учебниках с углубленным изучением математики, в заданиях школьных олимпиад

В данном параграфе рассмотрим задачи на использования свойств целых числах в школьных олимпиадах за 5-11 классы.

Анализ представлен в Таблицах 3-9.

Задачи были выбраны с сайта «Всероссийской школьной олимпиады» [8], пособий для учителей Т.Н. Мираковой [22], Ф.А. Бартенева [1], сборника олимпиадных задач Ф.М. Шустефа [40], задачника по элементарной теории чисел В. Серпинского [33], задачника районных математических олимпиад Новосибирской области А.А. Шрайнера [39], зарубежных математических олимпиад С.В. Конягина [16], книги для учителя Н.П. Кострикиной [17].

Олимпиадные задачи с 5-11 классы выделены по следующим типам:

(5 класс, таблица 4)

Задачи на делимость натуральных чисел, задачи на решение уравнений с натуральными числами, задачи на сравнение натуральных чисел, задачи на выполнение арифметических действий с натуральными числами.

(6-11 классы, таблицы 5-10)

Задачи на делимость целых чисел, задачи на решение уравнений с целыми числами, задачи на сравнение целых чисел, задачи с простыми и составными числами, задачи на выполнение арифметических действий с целыми числами.

Также выполним анализ тематического планирования.

Рассмотрим рабочую программу по математике 5-6 класса И.И. Зубаревой, А.Г. Мордковича [11] и методические пособия за 5 и 6 классы Е.В. Буцко, А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонского, М.С. Якира [3, 4].

В 5-6 классах подробно изучаются свойства натуральных и целых чисел, которые смогут понадобится при решении олимпиадных задач вплоть до 11 класса.

Анализ представлен в Таблице 11.

Таблица 4 - Анализ олимпиадных задач по математике, 5 класс

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость натуральных чисел	Витя сказал своему другу Коле: «Я придумал пример на деление, в котором делимое, делитель, частное и остаток оканчиваются соответственно на 1, 3, 5 и 7». Коля сказал, что это невозможно. Кто прав? [8]	*Должен знать:* определение N числа, определения: делимого, делителя, частного, остатка от числа. *Должен уметь:* выполнять деление N числа с остатком.
2	Задачи на решение уравнений с натуральными числами	Продавец закупил партию ручек и продал их. При этом некоторые покупатели купили одну ручку за 10 рублей, а некоторые купили 3 ручки за 20 рублей. Оказалось, что с каждой покупки продавец получал одинаковую прибыль. Найдите цену, по которой продавец закупил ручки [8].	*Должен знать:* определение N числа. *Должен уметь:* составлять уравнение по условию задачи и решать его, выбирать ответ, не противоречащий контексту.
3	Задачи на сравнение натуральных чисел	Существует ли число, которое: 1) равно своему квадрату; 2) равно своему кубу; 3) больше своего квадрата [22]	*Должен знать:* определение N числа, определения: квадрата числа, куба числа. *Должен уметь:* возводить N число в квадрат, в куб, выполнять арифметические операции с N числами.
4	Задачи на выполнение арифметических действий с натуральными числами	Алла загадала трёхзначное число, в котором нет цифры 0, и все цифры различны. Белла записала число, в котором те же цифры идут в обратном порядке. Галя вычла из большего числа меньшее. Какая цифра стоит у полученной разности в разряде десятков?[8]	*Должен знать:* определение N числа, разряды чисел. *Должен уметь:* выполнять арифметические операции с N числами.

Таблица 5 - Анализ олимпиадных задач по математике, 6 класс

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость целых чисел	Вместо звездочек поставить цифры так, чтобы семизначное число 30*0*03 делилось на 13. Найти все решения [22].	*Должен знать:* определения N и Z чисел. *Должен уметь:* Выполнять деление Z чисел, проводить доказательные рассуждения при решении задачи.
2	Задачи на решение уравнений с целыми числами	«Доказать, что уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ не имеет целых решений» [22].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, четные и нечетные числа. *Должен уметь:* Решать уравнения второй степени, проводить доказательные рассуждения при решении задачи.
3	Задачи на сравнение целых чисел	Во время математического тестирования Олег должен был разделить данное число на 2, а к результату прибавить 6. Но он поторопился и вместо этого умножил данное число на 2, а от результата отнял 6. Тем не менее, ответ у него получился правильный. Какое число было дано Олегу [8]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами.
4	Задачи с простыми и составными числами	«Ученики одного класса в течении 7 месяцев собирали деньги для поездки на экскурсию. Было собрано 640 р. 1 к. Сколько учеников было в классе и сколько каждый вносил ежемесячно, если эти взносы были одинаковыми» [22]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, предоставлять число в виде произведения двух N чисел.
5	Задачи на выполнение арифметических действий с целыми числами	«Имеются два набора чисел от 1 до 20. Из этих наборов составляются всевозможные суммы по два числа (слагаемые одной суммы берутся из разных наборов). Сколько среди этих сумм будет таких, которые делятся на 3» [1]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами.

Таблица 6 - Анализ олимпиадных задач по математике, 7 класс

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость целых чисел	Доказать, что выражение $2a^2 + 2b^2$можно представить в виде суммы двух квадратов [40].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определение квадрата числа, формулу разложения квадрата суммы. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, применять формулу разложения квадрата суммы.
2	Задачи на решение уравнений с целыми числами	Решить уравнение $(7 - x^2)^4 + (9 - x^2)^4 = 16$ [22].	*Должен знать:* определения N и Z чисел определения степеней чисел, формулу разложения квадрата суммы. *Должен уметь:* решать уравнения с Z числами четвертой степени, применять формулу разложения квадрата суммы, решать уравнения с помощью замены переменной.
3	Задачи на сравнение целых чисел	На уроке физкультуры весь класс выстроился по росту (у всех детей разный рост). Дима заметил, что людей, которые выше него, в четыре раза больше, чем людей, которые ниже него. А Лёня заметил, что людей, которые выше него, в три раза меньше, чем людей, которые ниже него. Сколько всего человек в классе, если известно, что их не больше 30 [8]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел, признаки делимости на 4 и на 5. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, составлять уравнение по условию задачи.
4	Задачи с простыми и составными числами	Доказать, что числа $2k + 1$ и $9k + 4$являются взаимно простыми [33].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определение взаимно простых чисел, определение простого числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения.
5	Задачи на выполнение арифметических действий с целыми числами	Доказать, что произведение трех последовательных чисел, сложенное со вторым из них, равно кубу второго числа [40].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определение последовательных чисел, определение куба числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, возводить Z число в куб, выполнять умножение многочленов.

Таблица 7 - Анализ олимпиадных задач по математике, 8 класс

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость целых чисел	«Доказать, что $\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6}$является целым числом при любом целом m» [40].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения квадрата числа, куба числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, приводить к общему знаменателю дробные числа.
2	Задачи на решение уравнений с целыми числами	Доказать, что если m и n – целые числа и $m^2-9n^2=6mn$, то $m=n=0$[22].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определение квадрата числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, решать уравнения второй степени с двумя неизвестными.
3	Задачи на сравнение целых чисел	В числовом выражении некоторые цифры заменили буквами. Получилось следующее: 2018A : BCD = AA . Какое числовое выражение было записано изначально? [8].	*Должен знать:* определения N и Z чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, решать задачу методом перебора.
4	Задачи с простыми и составными числами	«Доказать ошибочность утверждения о том, что из каждого натурального числа, записанного в десятичной системе счисления, можно изменив только одну его цифру, получить простое число» [33].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определение простого и составного чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, решать задачу с помощью контрпримера.
5	Задачи на выполнение арифметических действий с целыми числами	Что если сумма (разность) двух чисел ест квадрат, то удвоенная сумма (разность) кубов этих чисел есть сумма трех квадратов [40].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, формулу суммы кубов, определения квадрата числа, куба числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, применять формулу суммы (разности) квадратов и кубов.

Таблица 8 - Анализ олимпиадных задач по математике, 9 класс

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость целых чисел	Четырёхзначное число называется восхитительным, если оно само делится на 25, его сумма цифр делится на 25 и его произведение цифр делится на 25. Найдите все восхитительные числа [8].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, свойства делимости на 5 и на 25. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения.
2	Задачи на решение уравнений с целыми числами	«Если в многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ вместо a, b, c и d подставлять числа -7, 4, -3 и 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной, например: $-7x^3 + 4x^2 - 3x + 6, 4x^3 - 7x^2 + 6x - 3$ и т.д. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень» [17].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определение многочлена с одной переменной, определения: квадрата числа, куба числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, решать уравнения третей степени с одной неизвестной.
3	Задачи на сравнение целых чисел	Число 2019 представили в виде суммы различных нечётных натуральных чисел. Каково наибольшее возможное количество слагаемых [18]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения четного и нечетного чисел, формулу арифметической прогрессии. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, применять формулу арифметической прогрессии.
4	Задачи с простыми и составными числами	«Какие простые числа могут быть делителями чисел вида 111 … 11?» [17]	*Должен знать:* определения N и Z чисел, свойства делимости Z чисел, определения простого и составного чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами.
5	Задачи на выполнение арифметических действий с целыми числами	Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было 1,2,...,10 конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На нечётной минуте он одну из куч делит на две, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На чётной выбирает две кучи и объединяет в одну. Может ли оказаться, что все кучи содержат одно кол-во конфет [8]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения четного и нечетного чисел, формулу арифметической прогрессии. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами.

Таблица 9 - Анализ олимпиадных задач по математике, 10 класс

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость целых чисел	Доказать, что $n^5 + n$ делится без остатка на 30 при всех целых n [40].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения четного и нечетного чисел, определение делимости Z чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, уметь преобразовывать выражения, состоящее из многочленов.
2	Задачи на решение уравнений с целыми числами	«Решить в целых числах уравнение: $xy + x - 5y = -6$» [39].	*Должен знать:* определения N и Z чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, решать уравнения с двумя переменными.
3	Задачи на сравнение целых чисел	Существует ли значение $n \in N$, при котором числа $2^{n+1}— 1$ и $2^{n-1}(2^n— 1)$ одновременно являются кубами целых чисел [16]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения: квадрата числа, куба числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами.
4	Задачи с простыми и составными числами	Найти все натуральные n, что оба числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ простые [39].	*Должен знать:* определения N и Zчисел, определение простого и составного чисел, определение степени числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами.
5	Задачи на выполнение арифметических действий с целыми числами	Доказать, что число, оканчивающееся на 1990, не может быть разностью квадратов двух целых чисел [39].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определение квадрата числа, формулу разности квадратов. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения при решении задачи, выполнять арифметические операции с Z числами, применять формулу разности квадратов.

Таблица 10 - Анализ олимпиадных задач по математике, 11 класс

№	Тип задач	Пример задач	Знания, которые необходимы для решения данной задачи
1	Задачи на делимость целых чисел	«Даны четыре последовательных натуральных числа, больших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумму которых представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, больших 1» [8].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения четного и нечетного чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения; доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения целых чисел.
2	Задачи на решение уравнений с целыми числами	Задача 1. Докажите, что уравнение $x^2 + 2^{2018}x + 2^{2019} = 0$ не имеет целых корней [8].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения четного и нечетного чисел, определение степени числа. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения; решать уравнения с помощью дискриминанта.
3	Задачи на сравнение целых чисел	Можно ли так раскрасить все натуральные числа в красный и синий цвета, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, были разных цветов, и любые два числа, отличающиеся в два раза, были разных цветов [8]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел. *Должен уметь:* анализировать условие задачи; проводить доказательные рассуждения.
4	Задачи с простыми и составными числами	«Найти все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел» [33].	*Должен знать:* определения N и Z чисел, определения простого и составного чисел, определения четного и нечетного чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения; выполнять арифметические действия с целыми числами.
5	Задачи на выполнение арифметических действий с целыми числами	На доске написано n различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем n это возможно [8]?	*Должен знать:* определения N и Z чисел, простого и составного чисел, четного и нечетного чисел. *Должен уметь:* проводить доказательные рассуждения; выполнять арифметические действия с целыми числами.

Таблица 11 - Анализ тематического планирования

Название программы, автор, класс	Название соответствующих тем и количество часов на изучение
Рабочая программа по математике 5-6 класс. И.И.Зубарева, А.Г.Мордкович, 5 класс [11].	**Натуральные числа (46 ч.)** десятичная система исчисления, координатный луч, уравнения; прямая, отрезок, ломаная, луч, прямоугольник; овладели умением сравнивать отрезки, находить длины отрезков, составлять формулы по условию задачи; упрощать буквенные выражения; выполняли вычисления с многозначными числами; решать уравнения, степень числа, деление с остатком.
Рабочая программа по математике 5-6 класс. И.И.Зубарева, А.Г.Мордкович, 6 класс[11].	**Положительные и отрицательные числа (60 ч.)** Положительные числа, отрицательные числа, целые числа, рациональные числа, противоположные числа, модуль числа, координатная прямая. Научить читать геометрическую модель числового промежутка, выполнять действия умножения и деления положительных и отрицательных чисел. Ввести понятия: координатные оси, координатная плоскость, система координат, ось абсцисс, ось ординат, координаты точки на плоскости.
Методическое пособие 5 класс. Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир, 5 класс[3].	**Натуральные числа (23 ч.)** Ряд натуральных чисел, цифры, десятичная запись натуральных чисел, отрезок, длина отрезка, плоскость, прямая, луч, шкала, координатный луч, сравнение натуральных чисел. **Сложение и вычитание натуральных чисел (38 ч.)** Сложение натуральных чисел, свойства, вычитание натуральных чисел, числовые и буквенные выражения, формулы, уравнение, многогранники, равные фигуры, треугольники и его виды, прямоугольник, ось симметрии. **Умножение и деление натуральных чисел (45 ч.)** Умножение, переместительное свойство умножения, сочетательное и распределительное свойства, деление, деление с остатком, степень числа.
Методическое пособие 6 класс. Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир, 6 класс[4].	**Делимость натуральных чисел (23 ч.)** Делители и кратные, признаки делимости на 10, на 5, на 9, на 3, простые и составные числа, НОД, НОК. **Рациональные числа и действия с ними (81 ч.)** Положительные и отрицательные числа, координатная прямая, целые числа, модуль числа, сравнение чисел.

Решение олимпиадных задач (5 класс).

1. Предположим, что такой пример на деление существует. Тогда делимое a, делитель b, частное q и остаток r – нечетные числа. Но из равенства $a = bq + r$ следует, что a – четное число. Полученное противоречие доказывает неверность высказанного предположения. Значит, Коля прав.

2. Пусть закупочная цена ручки x. Тогда прибыль за одну ручку 10 − x, за 3 ручки 20 − 3x. Решая уравнение 10 − x = 20 − 3x, получаем x = 5. Критерии. Верное решение любым способом: 7 баллов. Не обосновывается, что закупочная цена ручки должна быть 5 рублей, но проверяется, что в этом случае условие выполняется: 4 балла. Только правильный ответ без каких-либо пояснений: 2 балла. Ответ: 5 рублей.

3. 1) 0, 1; 2) 0, 2; 3) например, 0, 1.

4. Поскольку мы из большего числа вычитаем меньшее, цифра в разряде сотен у первого числа больше, чем у второго. Тогда в разряде единиц, наоборот, у первого числа цифра меньше, чем у второго. Поэтому при вычитании придётся занять единицу в разряде десятков. Исходно в разряде десятков стояли одинаковые цифры, но теперь у уменьшаемого цифра получилась на единицу меньше, чем у вычитаемого. Значит, придётся занять единицу в разряде сотен. При этом в разряде десятков уменьшаемое оказывается на 9 больше вычитаемого. Значит, в результате получится цифра 9.

Решение олимпиадных задач (6 класс).

1. 3 000 803, 3 020 303, 3 030 703, 3 050 203, 3 060 603, 3 080 103, 3 090 503.

2. Предположим противное: пусть существуют целые числа x_0 и y_0, удовлетворяющие уравнению $3x^2 - 4y^2 = 13$. Тогда имеет место равенство

$3({x_0}^2-1)-4{y_0}^2=10$. Нетрудно заметить, что x_0 – нечетное число, поэтому $({x_0}^2-1)$ делится на 4, следовательно, и 10 должно быть кратным 4.Полученное противоречие доказывает неверность высказанного предположения.

3. Поскольку Олег умножил число на 2 вместо того, чтобы поделить, то на этом шаге он получил результат, который в четыре раза больше необходимого. Значит, разность между этими двумя результатами в три раза больше, чем необходимый результат. Но из условия следует, что эта разность равна 6 + 6 = 12. Значит, необходимый результат равен 12 : 3 = 4. Тогда загаданное число равно 4 · 2 = 8. Ответ: 8.

4. Учащиеся вносили ежемесячно $64001:7=9143$, тогда 9143 - произведение числа учеников класса на ежемесячный взнос. Представим 9143 в виде произведения двух N чисел: $9143=9143\times 1$ и $9143=223\times 41$. Получили: в классе 41 ученик, каждый вносил каждый месяц по 2 р. 23 к. Ответ. 15.

Решение олимпиадных задач (7 класс).

1. $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$. Так как первое слагаемое делится на 8, то доказываемо, очевидно.

2. После замены переменной $y=8-x^2$ исходное уравнение приводится к виду $(y+1)^4+(y-1)^4=16$ или $y^4+6y^2-7=0$.

3. Пусть х — количество людей, которые ниже Димы. Тогда всего в классе учится х (люди, которые ниже Димы) + 4х (люди, которые выше Димы) + 1 (Дима) = 5х + 1 (всего людей в классе). Пусть у — количество людей, которые выше Лёни. Тогда всего в классе учится у (люди, которые выше Лёни) + 3у (люди, которые ниже Лёни) + 1 (Лёня) = 4у + 1 (всего людей в классе). Тогда, если из количества детей в классе вычесть 1, то полученное число будет делиться и на 4, и на 5. То есть будет делиться на 20. В нужном

диапазоне такое число только одно — 20, то есть всего в классе 21 человек. Ответ: 21.

4. Числа $2k+1$ и $9k+4$ являются взаимно простыми, так как $9(2k+1)-2(9k+4)=1$. Так как $9k+4=4(2k-1)+(k+8)$ и $2k-1=2(k+8)-17$, то $(9k+4;\ 2k-1)=(2k-1;\ k+8)=(k+8;\ 17)$. Если $k\equiv 9(mod17)$, то $(k+8;\ 17)=17$. В противном же случае $17 \nmid k+8$ и, следовательно, $(k+8;\ 17)=1$. Следовательно, $(9k+4;\ 2k-1)=17$, если $k\equiv 9(mod17)$ и $(9k+4;\ 2k-1)=1$, если $k\not\equiv 9(mod17)$.

5. $(n-1)n(n+1)+n=n^{3.}$

Решение олимпиадных задач (8 класс).

1. Заданное выражение представляется в виде: $\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$.

2. Рассматривая уравнение $m^2-9n^2=6mn$ как квадратное относительно m, находим, что его дискриминант равен $18n^2$. Чтобы это уравнение имело целочисленные решения необходимо, чтобы $18n^2=k^2$, где $k\in Z$. Так как $n\in Z$, то это возможно только в случае, когда $n=0$. Отсюда $m=0$.

3. Ответ: 20185 : 367 = 55.

4. 3|201, 7|203, 5|205, 2|207 и 11|209. С легкостью можно привести доказательство того, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких, что изменением одной цифры числа n нельзя получить из него простое число. Таковы, например, числа $n=2310k-210,$ где $k=1,2,3,$ ..., так как в этом случае нужно было бы изменить последнюю цифру числа n (т.е. нуль), очевидно, на одну из цифр: 1, 3, 7 или 9; при этом, как легко проверить, 11|n+1, 3|n+3, 7|n+7, 3|n+9 и, видим, что, если меняется одна из цифр натурального числа мы всегда получим составное число.

5. Пусть $a\pm b=c^2$, тогда $2(a^3\pm b^3)=2(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=(a\pm b)[(a\mp b)^2+a^2+b^2]=c^2(a\mp b)^2+(ac)^2+(bc)^2$.

Решение олимпиадных задач (9 класс).

1. Сумма цифр четырехзначного числа не превосходит 36, поэтому у восхитительного числа она должна быть равна 25. Поскольку восхитительное число делится на 25, оно оканчивается либо на 00, либо на 50, либо на 25, либо на 75. Если четырехзначное число оканчивается на 00 или 50, то его сумма цифр не превосходит 9 + 9 + 5 = 23, что нас не устраивает. Если восхитительное число оканчивается на 25, то сумма первых двух цифр должна быть равна 18. Тогда это может быть только число 9925, но у него произведение цифр не делится на 25. Значит, восхитительное число может оканчиваться только на 75. При этом сумма первых его двух цифр равна 13, а их произведение должно делиться на 5. Тогда эти две цифры — 5 и 8 (в любом порядке). Ответ: 5875 и 8575.

2. Все многочлены, о которых идет речь в задаче, имеют общий корень $x = 1$. Действительно, при $x = 1$ значение данного многочлена равно $a + b + c + d$, что при заданных значениях a, b, c и d тождественно равно нулю $(-7 + 4 - 3 + 6 = 0)$ независимо от порядка расположения коэффициентов многочлена. Утверждение доказано.

3. Вычислим сумму 45 наименьших нечётных натуральных чисел: $1 + 3 + \dots + 87 + 89 = \frac{1+89}{2} \times 45 = 2025 > 2019$. Значит, слагаемых меньше, чем 45, но сумма 44 нечётных слагаемых является чётным числом, поэтому слагаемых не больше, чем 43. Пример. $2019 = 1 + 3 + \dots + 81 + 83 + 255$. Ответ: 43.

4. Обозначим p – простое число, которое отлично от 2 и 5. $p + 1$ число: $1, 11, 111, \dots, 111 \dots 11$. По крайней мере два из них дают при делении на p одинаковые остатки. Тогда их разность 11…1100…0 кратна p. Но так как p

отлично от 2 и 5, то 11…11 кратно p. Значит делителями рассматриваемых чисел могут быть все простые числа, кроме 2 и 5.

5. Приведём пример, как Малыш может добиться такого распределения. На первой минуте он делит кучку из 10 конфет на две кучки по 5 конфет. Далее на 2-й, 4-й, 6-й, 8-й минутах он соединяет кучки 1+9, 2+8, 3+7, 4+6 соответственно, а на 3-й, 5-й, 7-й, 9-й минутах делит только что полученную кучу из 10 конфет на две равных части. На 9-й минуте он получает 11 куч по 5 конфет. Ответ. Может.

Решение олимпиадных задач (10 класс).

1. выражение $n^5 + n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ содержит произведение трех последовательных натуральных чисел, а поэтому делится на 6. Сравним наше выражение с произведением пяти последовательных натуральных чисел $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = n^5 - 5n^3 + 4n$. Так как последнее выражение делится на 5, то выражение $n^5 + 4n$ тоже делится на 5, а тогда и выражение $n^5 + n = (n^5 + n4) - 5n$ разделится на 5. Следовательно, оно делится на 30.

2. $xy + x - 5y = -6$, выразим x через y

$$xy + x = 5y - 6$$

$$x = 5y/(y+1)\ -\ 6/(y+1)$$

целые числа при знаменателе равным 1 или -1

если знаменатель =1 то y=0 x=-6

если знаменатель =-1 то y=-2 x $= 10 + 6 = 16$

выразим y через x

$$\mathrm{xy} - 5\mathrm{y} = -\mathrm{x} - 6$$

$$\mathrm{y} = -\mathrm{x}/(x-5) - 6/(x-5)$$

знаменатель = 1, x=6 y=-12

знаменатель = -1, x=4 y= 10

Ответ. (6 -12) (4 10) (16 -2) (-6 0).

Решение олимпиадных задач (11 класс).

1. Пусть n, n+1, n+2, n+3 – данные числа. Если сложить 3 наименьших, то сумма будет 3n+3=3(n+1), а если сложить 3 самых больших числа, то сумма будет равна 3(n+2). Но из данных чисел хотя бы одно – четно, то есть равно 2k, где $k > 3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трех различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

2. Дискриминант этого уравнения равен $2^{4036} - 4 \times 2^{2019} = 2^{2021}(2^{2015} - 1)$. Для наличия целого корня необходимо, чтобы дискриминант был точным квадратом. Однако, число$2^{2021}(2^{2015} - 1)$ не является точным квадратом, так как степень вхождения двойки в любой точный квадрат чётна.

3. Посмотрим на числа 10, 15 и 20. Из условия следует, что их цвета должны попарно отличаться, что невозможно, поскольку цветов всего два. Ответ: нет, нельзя.

4. Пустьr есть одновременно и сумма, и разность двух простых чисел. Число r, очевидно, должно быть больше двух, и поэтому r есть нечетное простое число. Далее, так как r есть и сумма, и разность двух простых чисел, то одно из них должно быть нечетным, а другое четным, т.е. числом 2.

5. Числа −11, −7, −6, −5, ..., 6, 7, 11 дают пример при n = 17. Допустим, что есть хотя бы 18 чисел с таким свойством. Тогда какие-то 9 из них будут одного знака (все положительны или все отрицательны). Среди этих 9 чисел модули двух наибольших будут не меньше 8 и 9 соответственно. Тогда их произведение не может быть равно 77. Ответ. При n = 17.

После выполнения анализа тематического планирования 5-6 классов, можно сделать вывод. Что в 5 классе учащимся хватит знаний для того, чтобы решить олимпиадные задачи из таблицы 3, но только, если предложить им их к концу учебного года, так как деление с остатком и степень числа в программах И.И.Зубарева, А.Г.Мордкович [11] и Е. В. Буцко и др. [3] предлагают к концу года.

Аналогично с олимпиадными задачами за 6 класс. Целые числа учащимся предлагаются к изучению в середине учебного года. Из этого следует вывод, что в начале года шестиклассник может не справиться с заданием, если ему будут предложены отрицательны числа.

Анализ программ по математике в углубленном курсе общеобразовательной школы показал, что основной теоретический материал на свойства целых чисел изучается в 5 классе и в 6 классе, в старших классах эта тема не получает дальнейшего развития.

Если говорить о более старших классах, то начиная с 7 класса задачам на свойства целых чисел практически не уделяется внимания, учащимся предлагаются задачи с рациональными числами. Но задачи на использование свойств целых чисел являются неотъемлемой составляющей олимпиадных задач по математике всех уровней для учащихся с 5 по 11 классы, составляют содержание 19-го задания профильного ЕГЭ по математике.

Поэтому следует чаще предлагать учащимся 7-11 классов задачи на свойства целых чисел (хотя бы раз в четверть).

§4. Обзор методических систем обучения решению задач по теме «Целые числа»

M. Voskoglou [44, C. 600], A. Teppo [43, C. 302], а такжеM. Bonato [41], D. Bresolin [42], F. Yua [45] выделяют, что при изучении множества натуральных и целых чисел у учащихся часто возникают недопонимания самого понятия множества.

Из вышесказанного можно предположить, что у учащихся могут возникнуть трудности при решении задач повышенной трудности.

Выполним обзор методических систем обучения решению задач по теме «Целые числа».

Рассмотрим понятие системы, приведенное Т.А. Ивановой [13, С. 15]: «понятие система определяется как совокупность элементов, находящихся в определенных связях и отношениях друг с другом, которые образуют определенную целостность. Целостность – основное характеристическое свойство системы – предполагает принципиальную несводимость системы к сумме образующих ее частей и невыводимость из какой-либо ее части свойств как целого всей системы».

Т.А. Иванова [14, С. 15] предполагает, что системный подход в исследовании – это выделение состава элементов, которые входят в систему: «установление структуры, описание функций каждого из элементов, его роли и значения в системе».

Т.А. Иванова [14, С. 9] выделяет четыре основных компонента методической системы обучения математике:

«1. целостная структура личности,

2. цели математического образования,

3. гуманитарно-ориентированного содержания,

4. технологии обучения».

А также считает, что «урок математики определяется особенностями учащихся данного класса, целями урока, его содержанием и технологией обучения».

Система обучения Т.А. Ивановой [13, С. 13-14] отличается тем, что в ней основные слагаемые: «мотивированное выявление учебной задачи и ее постановка, поиск ее решения, оценка результата и собственной деятельности учеником».

Основные характеристики развивающего обучения, которые выделены Т.А. Ивановой [13, С. 16]:

«1. Развивающее обучение учитывает и использует закономерности развития, приспосабливается к уровню и возможностям ученика, направлено на развитие всех сфер личности, не только интеллекта, происходит в «зоне ближайшего развития» ребёнка.

2. Педагогические взаимодействия опережают, стимулируют, направляют и ускоряют развитие наследственных данных ученика.

3. Содержание развивающего обучения дидактически построено в логике теоретического мышления (ведущая роль отводится теоретически содержательным обобщениям, дедукции).

4. Развивающее обучение осуществляется как направленная учебная деятельность, в которой ребёнок сознательно ставит цели и задачи и творчески их достигает, осуществляется путём решения учебных задач».

Т.А. Иванова [13, С. 47] выделяет следующий цикл познания математики:

1. «Накопление опыта (общенаучные эмпирические методы: наблюдение, сравнение, анализ, вычисление, построение, измерение, моделирование);

2. Выдвижение гипотез (гипотетикодедуктивные методы: анализ, синтез, аналогия, неполная индукция, обобщение, абстрагирование, интуиция, конкретизация, дедукция);

3. Проверка истинности доказательством (сущность доказательства, законы логики в доказательстве, дедуктивные методы доказательства или опровержения: синтетический, аналитический, от противного, полная индукция, исчерпывающих проб, математическая индукция, контрапозиция, приведение контрпримера);

4. Построение теории (аксиоматический метод);

5. Выход в практику (математическое моделирование)».

Также рассмотрим 7 этапов мотивации при решении задач, выделенные автором [14, С. 103-104]:

1. Показывать учащимся, что необходимость нового диктуется запросами практики.

2. После этапа актуализации предложить учащимся однотипное по форме задание.

3. Прием системности.

4. Создавать «интриги» на уроке, чтобы у учеников вызвать чувство удивления и естественный вопрос «Как это?».

5. Создавать проблемную ситуацию в ходе проведения анализа реализованной ими нерациональной цепочки действий.

6. Привлечь анализ выполненных работ учащихся.

7. Побуждения учащихся к дальнейшей деятельности решение нестандартных, старинных задач.

Т.А. Иванова [14, С. 185-186] рассматривает операции и действия, которые могут помочь при решении задач определенных типов. Для текстовых задач, содержащих целые числа автор выделяет следующие операции:

1. Знакомство с задачей (прочитать задачу вслух; «про себя»; выполнить задания под диктовку учителя; «прочитать» задачу по готовому рисунку или таблице), анализ ее содержания (установить количество элементов, которые есть в задаче; выделить предложения, которые выражают функциональные зависимости между величинами; выделить и зафиксировать искомые величины).

2. Схематично записать задачу.

3. Поиск плана решения задачи.

Рассмотрим пример решения задачи, который приводит Т.А. Иванова [14, С. 185-186]:

«В трех поселках 6000 жителей. Во втором поселку вдвое больше жителей, чем в первом, а в третьем – на 400 жителей меньше, чем во втором. Сколько жителей во втором поселке?

Анализируя эту задачу, ученик осознать следующее: в задаче идет речь об одной ситуации, в которой действует три величины. Обозначим их на естественном языке Ч1, Ч2, Ч3 (число жителей первого, второго и третьего поселков соответственно). По условию известно, что Ч2 $>$ Ч1 в 2 раза, а Ч3 $<$ Ч2 на 400. Искомая величина Ч2».

Дж. Пойа считает основной задачей учителя – приобретение учеником как возможно много опыта самостоятельной работы.

Если же мы оставим его одного с задачей, то скорее всего это не принесет никакой пользы: «Учитель должен помогать, но не слишком много и не слишком мало, так, чтобы ученику оставалась разумная доля работы» [30, С. 13].

Для того чтобы решить задачу, достаточно соблюдать несколько этапов, предложенные в пособии для учителей Дж. Пойя [30, С. 16-24]. Итак, первый этап – нужно осознать постановку задачи, понять, что требуется найти (доказать).

После того, как мы поняли требование переходим ко второму этапу – составим план решения данной задачи. Нам известно, что задачи решаются с помощью различным методов и способов, на данном этапе нужно определить какой из них нам подходит.

Как только мы составили план решения, переходим к третьему этапу – осуществим составленный план, т.е. решим задачу.

И в заключении, четвертый этап- исследуем полученное решение. В случае, если мы при решении задачи выполним все эти этапы, то можем считать, что решение полностью завершено.

Важно, чтобы учитель умел правильно задавать наводящие вопросы ученикам, к примеру, можно использовать такие вопросы, как: «Известна ли вам какая-нибудь аналогичная задача?», Известная ли вам какая-нибудь родственная задача?» [30, С. 28].

Л.М. Фридман [38, С.160] считает, что оценивать мастерство учителя также важно, как и умения и знания учеников. Также важна наглядность, которая сможет обеспечить целый ряд дидактических функций, таких как: «принятия учащимися учебной задачи, мотивирования ее, «настройки» учащегося на процесс обучения, обеспечения школьнику общей ориентировки для его будущей деятельности».

Л.М. Фридман [38, С.161-162] добавляет, что при организации обучения учитель должен учитывать индивидуальные и возрастные особенности детей, изложение материала должно быть доступным для детей; создавать условия для самостоятельного формулирования детьми личных целей урока; должен направить к решению задачи, а не научить ее решать.

Групповую форму Л.М. Фридман [38, С.165] считает оптимальной для качественного усвоения знаний, так как «она создает условия для распределения ролей в классе, учит групповому взаимодействию».

При решении задачи Л.М. Фридман [38, С.11] выделяет, что нужно выяснить: «аналитична ли она, т.е. возможно ли все данные и зависимости задачи перевести на алгебраический язык». Две группы задач, выделенные автором: «а) допускающие синхронный перевод с естественного языка на алгебраический (или параллельную запись частей текста и соответствующих им алгебраических выражений); б) не допускающих синхронного перевода. В последнем случае бывает необходимо перефразировать текст задачи, «придерживаясь больше смысла слов, чем их буквы. В языках различных народов имеются свои особые выражения, идиомы, и если они встречаются, то переводить их на другой язык нужно не буквально, а по смыслу».

Итак, после изучения методических систем обучения можно сделать вывод, что учащиеся должны хорошо овладеть базовыми знаниями для того чтобы решать более сложные задачи. Должна быть мотивационная постановка задачи, поиск решения. И, конечно, оценка результата и собственной деятельности учеником.

Выводы по первой главе

1. Представлен анализ учебной и методической литературы по проблеме использования свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Установлено, что для решения задач на использование свойств целых чисел в углубленном уровне учащиеся должны хорошо владеть понятиями: «натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел». Также должны ученики уметь при выполнении вычислений и решении задач: доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения; находить НОД и НОК разными способами; анализировать условие задачи, выбирать оптимальный метод решения задачи, рассматривая различные методы; строить модель решения задачи, проводить доказательные рассуждения при решении задачи; решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата; анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту.

2. Выполнен содержательный анализ элективных курсов на использование свойств целых чисел и задач в профильном ЕГЭ по математике.

Анализ программ элективных курсов показал, что особое внимание уделяется задачам на делимость целых чисел. Остальные типы задач, встречаются не часто. Анализа заданий ЕГЭ по математике показал, что с задачей на свойства целых чисел столкнется каждый ученик при сдаче экзамена. Но у него могут возникнуть трудности при решении данной задачи, не хватит опыта решения аналогичных задач, так как в школьных учебниках задачам на свойства целых чисел в старших классах не уделяется должное внимание.

3. Проведён анализ заданий на использования свойств целых чисел в действующих учебниках с углубленным изучением математики, в заданиях школьных олимпиад.

Анализ программ по математике в углубленном курсе общеобразовательной школы показал, что основной теоретический материал на свойства целых чисел изучается в 5 классе и в 6 классе, в старших классах эта тема не получает дальнейшего развития. Начиная с 7 класса, задачам на свойства целых чисел практически не уделяется внимания, учащимся предлагаются задачи с рациональными числами. Но задачи на использование свойств целых чисел являются неотъемлемой составляющей олимпиадных задач по математике всех уровней для учащихся с 5 по 11 классы, составляют содержание 19-го задания профильного ЕГЭ по математике. Поэтому следует чаще предлагать учащимся 7-11 классов задачи на свойства целых чисел (хотя бы раз в четверть).

4. Представлен обзор методических систем обучения решению задач по теме «Целые числа».

Установлено, что учащиеся должны хорошо овладеть базовыми знаниями для того чтобы решать более сложные задачи. Должна быть мотивационная постановка задачи, поиск решения. И, конечно, оценка результата и собственной деятельности учеником.

ГЛАВА II. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ «ЗАДАЧИ НА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В УГЛУБЛЕННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»

§ 5. Требования, выделяемые к элективным курсам в углубленном курсе математики основной школы

Одной из составляющих профильного обучения математике в старших классах являются элективные курсы, позволяющие проектировать индивидуальную образовательную программу для каждого учащегося. Элективные курсы должны быть рассчитаны на 17, 34 или 51 учебных часов.

А.Г. Гаспржак выделяет несколько основных целей обучения в профильных классах развитие личности ребенка, распознавание и раскрытие его способностей [9, С.13-15]: «знакомство учащихся с математикой как с общекультурной ценностью, выработка понимания ими того, что математика является инструментом познания окружающего мира и самого себя».

Рассмотрим требования к образовательным результатам после изучения программ ЭК представленные на сайте департамента образования мэрия г.о. Тольятти [25]: *«*знания учащихся, сформированные на определенном уровне освоения, предметные умения, предпрофессиональные умения, элементы функциональной грамотности, навыки, отдельные аспекты ключевых компетентностей, полученный опыт деятельности».

Н.С. Подходова [29, С.48] выделяет основную задачу элективных курсов: «подготовка к осознанному выбора профиля обучения в старшей школе и далее в вузе». Также автор утверждает, что содержание элективных курсов должно дать учащимся знания, которые понадобятся в старшей школе или в вузе.

Напрашивается вывод, что учащимся нужно предлагать элективные курсы не только для расширения и углубления основных знаний по математике, но и для формирования аналитического и логического мышления.

§6. Разработка программы элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах»

Программа элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах» предназначена для учащихся 10 класса, которые участвуют в олимпиадах по математике.

Для освоения данной программы необходимо, чтобы учащийся хорошо владел знаниями. Содержание материала, представленного в программе, начинается с олимпиадных задач, которые используют на школьном этапе. С каждым занятием сложность задач повышается до муниципального, а также региональных уровней. На последних занятиях учащиеся решают задачи из заключительного этапа олимпиад по математике.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

1) данный материал, позволяет учащимся познакомиться с видом олимпиадных задач на целые числа;

2) способствует формированию познавательных универсальных учебных действий учащихся, с помощью олимпиадных задач;

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами: обеспечить более глубокое и осознанное изучение целых чисел; создает условия для решения и анализа олимпиадных задач, содержащих целые числа.

Цель и задачи программы элективного курса:

Цель: формирование навыка решения олимпиадных задач на целые числа.

Задачи курса:

- повторить и систематизировать знания о свойствах множества целых чисел;
- рассмотреть типы олимпиадных задач с целыми числами;
- рассмотреть методы решения олимпиадных задач с целыми числами.

Отличительные особенности данного элективного курса: курс построен по модульному принципу, который позволяет успешно организовать исследовательскую деятельность обучающихся на занятиях; обобщает материал по теме целые числа и олимпиадным задачам с целыми числами.

Программа элективного курса рассчитана на 17 часа (1 ч. в неделю).

Форма занятия: индивидуальная; фронтальная.

Особенности организации учебных занятий:

- при изучении проводятся небольшие теоретические опросы по знанию основных понятий и формул;
- в элективном курсе рассматриваются олимпиадные задачи различных сложностей;

Виды деятельности: фронтальная работа над решением задач, под руководством учителя; фронтальная работа над решением задач, под руководством обучающихся; коллективная проверка выполнения упражнений; обсуждение способов решения задач на вычисления; самостоятельная работа обучающихся с научной литературой.

Виды занятий: урок-лекция; урок-практикум; урок-семинар.

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- знать краткую историю и вклад ученых в развитие понятия множества целых чисел;
- уметь складывать, умножать, вычитать и делить целые числа;
- уметь решать олимпиадные задачи с целыми числами.

Выполнение практических занятий способствует закреплению и увеличению у обучающихся теоретические знания и развитию математических навыков и умений, которые необходимы в практической деятельности, а также в повседневной жизни.

Элективный курс может быть использован в общеобразовательных классах, а также в классах с профильным изучением математики.

Учебно-тематическое планирование представлено в Таблице 12.

Таблица 12 – Учебно-тематическое планирование

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	**Целые числа. Делимость и остатки**	4	
	Понятие целого числа. Свойства	1	Урок-лекция
	Задачи на делимость целых чисел	2	Урок-практикум
	Презентация олимпиадных задач на делимость целых чисел	1	Урок-семинар
II	**Уравнения в целых числах**	4	
	Приемы решений уравнений в целых числах	1	Урок-лекция
	Уравнения в целых числах в олимпиадных задачах	2	Урок-практикум
	Презентация олимпиадных задач с уравнениями в целых числах	1	Урок-семинар
III	**Смешанные задачи на целые числа**	5	
	Методы и приемы, используемые при решении смешанных задач	1	Урок-лекция
	Преобразование суммы и разности целых чисел	1	Урок-практикум
	Презентация олимпиадных задач на преобразование суммы и разности целых чисел	1	Урок-семинар
	Задачи с простыми и составными числами	1	Урок-практикум
	Презентация олимпиадных задач с простыми и составными числами	1	Урок-семинар

IV	**Сравнение чисел**	3	
	Приемы, используемые при решении задач на сравнение целых чисел	1	Урок-лекция
	Задачи на сравнение чисел	1	Урок-практикум
	Презентация олимпиадных задач на сравнение целых чисел	1	Урок-семинар
V	**Закрепление материала**	1	
	Заключительный урок	1	Урок-практикум

§ 7. Методические рекомендации по использованию элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах»

На основании вышеизложенного в §4 мы пришли к выводу, что учащимся редко предлагают элективные курсы для формирования аналитического и логического мышления. Данный элективный курс «Целые числа в олимпиадных задачах» разработан для формирования аналитического и логического мышления. Рассчитан на 17 часов. К каждому уроку разработаны теоретический и практический материал для учащихся. Решение и ответы можно увидеть в приложении.

Раздел 1. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. ДЕЛИМОСТЬ И ОСТАТКИ (4 ч).

1.1. Понятие целого числа. Свойства.

Урок 1. На первом уроке предлагается провести лекцию.

«Целые числа — это натуральные числа, числа, противоположные им, и число нуль» [2, С. 9].

Натуральными числами называются числа, которые используют при счете предметов.

Для того, чтобы решать олимпиадные задачи на целые числа нужно знать, что каждое натуральное число единственным можно представить в виде произведения простых множителей; также Б.А. Будак считает, что нужно знать, что «при делении натурального числа p на натуральное число q возможны $2q$ различных остатков: $0, 1, 2, \ldots, (q - 1)$» [2, С. 9].

Иметь представление о признаках делимости натуральных чисел:

– если число делить на 5 или на 10, то оно даст тот же остаток, что и последняя цифра данного числа;
– если число делить на 4, 25, 50 и на 100, то оно даст тот же остаток, что и число, которое записано двумя последними цифрами данного числа;
– если число делить на 3 и на 9, то оно даст тот же остаток, что и сумма цифр данного числа. Значит, если сумма цифр числа делится на 3 или на 9, то и само оно будет делиться на 3 или на 9.

Нужно заметить, что при решении задач на делимость чисел нужно работать с остатками от деления данных чисел: «все арифметические действия с остатками, кроме деления, повторяют действия с числами, а именно: при сложении чисел складываются остатки, при возведении в степень в эту степень возводятся остатки и т.д» [2, С. 9].

Вопросы и примеры задач.

Вопрос 1. Какие числа называются натуральными?

Вопрос 2. Какие числа называются целыми?

Вопрос 4. Назовите признаки делимости натуральных чисел.

Вопрос 5. Какие числа называются простыми?

Вопрос 6. Какие числа называются составными?

Задача 1. «Задача из папируса Ахмеса. У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семи мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма» [40].

Задача 2. «Найти длину шеста, сначала вертикально прислоненного к стене, затем смещенного так, что его верхний конец опустился на 3 локтя, причем нижний конец отступил от стены на 9 локтей» [40].

1.2. Задачи на делимость целых чисел.

Урок 2. Рассмотреть задачи на делимость следующего характера. Предлагается набор задач спиралевидной схемы подачи, когда каждая задача повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий.

Задача 1.

1) «На какое из указанных чисел не делится произведение $23^2 + 23 \times 26$» [15]?

А) 23; Б) 7; В) 9; Г) 49.

Ответ: в).

2) На какое из указанных чисел делится произведение 213×65?

А) 26; Б) 142; В) 45; Г) 39.

Ответ: г).

Задача 2. «Найти все натуральные числа n, для которых число $n^2 + 1$ делится на $n + 1$» [17].

Задача 3. «Какие простые числа могут быть делителями чисел вида $111 \dots 11$» [9]?

Задача 4. «Может ли число вида $5^n - 1$ делится на $4^n - 1$» [9]?

Задача 5. «Найти все натуральные числа $n > 1$, для которых число $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ делится на n» [33].

Урок 3. На данном уроке предлагается решать задачи на делимость чисел более сложного типа, в сравнении со вторым уроком.

Задача 1. «Цифры a, b, c таковы, что 2c=3a+b. Доказать, что трехзначное число abc делится на 7» [39].

Задача 2. «Найти все натуральные числа a, для которых число $a^{10} + 1$ делится на 10» [25].

Задача 3. **«**Докажите, что ни при каком натуральном n значение выражения $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169» [17].

Задача 5. «Доказать, что многочлен $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, где n – натуральное число, делится без остатка на $(x-1)^2$» [40].

1.3. Презентация олимпиадных задач на делимость целых чисел.

Урок 4.

Для данного урока предлагается заранее сообщить учащимся задание. Каждый учащийся выступает с решением своей задачи. После выступления можно задавать интересующие вопросы.

Задание для урока 4. Подготовить одну задачу из олимпиад за 10 класс по теме «Делимость целого числа». Решить задачу, подготовить решение в презентации.

Раздел 2. УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ (4 ч.).

2.1. Приемы решений уравнений в целых числах.

Урок 5. На данном уроке предлагается провести лекцию.

Основные приёмы для решения уравнений в целых числах:

Разложение уравнения на множители с последующим перебором возможных вариантов.

Пример 1. «Решить уравнение в натуральных числах $2xy = x^2 + 2y$» [2].

Пример 2. «Решить уравнение в целых числах $2x + 1 = y^2$».

Уравнения с использованием делимости целых чисел.

Пример 3. «Доказать, что уравнение $y^2 = 5x^2 + 6$ не имеет решений в целых числах» [2].

2.2. Уравнения в целых числах в олимпиадных задачах.

Урок 6.

Рассмотреть задачи следующего характера.

Задача 1. «Сумма двух натуральных чисел равна 50, а произведение на 11 меньше, чем разность их квадратов. Найдите эти числа» [23].

Задача 2. «Если в многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ вместо a, b, c и d подставлять числа -7, 4, -3 и 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной, например: $-7x^3 + 4x^2 - 3x + 6, 4x^3 -$

$7x^2 + 6x - 3$ и т.д. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень» [17].

Задача 3. «Докажите, что если уравнение n-й степени с целыми коэффициентами имеет целый корень, отличный от нуля, то он является делителем свободного члена» [17].

Урок 7.

Рассмотреть задачи более сложного уровня.

Задача 1. «Решить в целых числах уравнение: $xy + x - 5y = -6$» [30].

Задача 2. «Найти все пары натуральных чисел A≠B, для которых система $\begin{cases} \cos Ax + \cos Bx = 0 \\ A\sin Ax + B\sin Bx = 0 \end{cases}$, имеет решение» [16].

Задача 3. «При каждом значении n∈N решить уравнение $(x + y)^n = x^n + y^n$» [8].

Задача 4. «Доказать, что для любого значения п ∈N существует ровно один набор чисел $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющий уравнению $(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 = 1/(n+1)$» [16].

2.3. Презентация олимпиадных задач с уравнениями в целых числах.

Урок 8.

Для данного урока предлагается заранее сообщить учащимся задание. Каждый учащийся выступает с решением своей задачи. После выступления можно задавать интересующие вопросы.

Задание для урока 8. Подготовить одну задачу из олимпиад за 10 класс по теме «Уравнения в целых числах». Решить задачу, подготовить решение в презентации.

Раздел 3. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ НА ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА (5 ч.).

3.1. Методы и приемы, используемые при решении смешанных задач.

Урок 9.

На данном уроке предлагается провести лекцию.

Для решения смешанных задач можно использовать следующие методы и приёмы: «разложение на множители с последующим перебором возможных вариантов, использование делимости целых чисел, рассмотрение остатков, использование оценок с последующим перебором возможных значений» [2, С. 14].

Если два числа a и b представлены в виде произведения простых множителей $a = {p_1}^{n_1} \cdot {p_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot {p_l}^{n_l}$, $b = {p_1}^{m_1} \cdot {p_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot {p_l}^{m_l}$, тогда НОД и НОК этих чисел можно вычислить данным образом:

НОД$(a, b) = {p_1}^{min(n_1, m_1)} \cdot {p_2}^{min(n_2, m_2)} \cdot \ldots \cdot {p_l}^{min(n_l, m_l)}$,

НОК$(a, b) = {p_1}^{max(n_1, m_1)} \cdot {p_2}^{max(n_2, m_2)} \cdot \ldots \cdot {p_l}^{max(n_l, m_l)}$.

Замечание: НОД(a, b) $\cdot$ НОК$(a, b) = a \cdot b$.

Пример 1. «При каких $n \in Z$ выражение $\frac{3n+2}{n-1}$ является целым числом?

Решение: так как $\frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$, то исходное число будет целым, только если целым будет число $5\, n - 1$, что возможно при $n - 1 \in \{\pm 5, \pm 1\}$.

Ответ: $n = -4;\ 0;\ 2;\ 6$» [2, С. 14].

Пример 2. «Доказать, что дробь $n^2 - n + 1\, n^2 + 1$ несократима ни при каком n.

Решение: преобразуем исходную дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1} = 1 - \frac{n}{n^2+1}$. Если сократима дробь $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$, то сократима дробь $\frac{n}{n^2+1}$. Если сократима дробь $\frac{n}{n^2+1}$, то сократима дробь $\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$и сократима дробь $\frac{1}{n}$, что неверно. Следовательно, исходная дробь несократима» [2, С. 14].

Рассмотреть задачи следующего характера.

Два элемента a и b группы называются *перестановочными* или *коммутирующими*, если $a * b = b * a$. Если все элементы группы коммутируют между собой, то такая группа называется *коммутативной или Абелевой* [2, с.23].

Указания: 1) доказательство свойств проводятся в общем виде, при этом можно ссылаться на определение группы и ранее доказанные свойства; 2) для «опровержения» свойства достаточно привести контпример.

3.2. Преобразование суммы и разности целых чисел.

Урок 10.

Рассмотреть задачи следующего характера.

Задача 1. «Докажите, что значение выражения $(5 + 10^{n+1})(1 + 10 + \cdots + 10^n) + 1$ при любом натуральном n можно представить в виде квадрата натурального числа» [20].

Задача 2. «Взяли два различных натуральных числа. Эти число сложили, перемножили, вычли из большего данного числа меньшее и разделили большее на меньшее. Оказалось, что сумма всех четырех результатов равна 441. Найдите эти числа» [17].

Задача 3. «Доказать, что число, оканчивающееся на 1990, не может быть разностью квадратов двух целых чисел» [39].

Задача 4. «Доказать, что любое число $n \in N$, большее 32, представимо в виде суммы нескольких натуральных чисел, сумма обратных величин которых равна 1» [16].

Указание. Значения $n = 33, 34, 35, \ldots, 73$ требуемому условию удовлетворяют.

Задача 5. «Доказать, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$не является целым числом ни при каком значении $n \in N$, большем 1» [16].

3.3. Презентация олимпиадных задач на преобразование суммы и разности целых чисел.

Урок 11.

Для данного урока предлагается заранее сообщить учащимся задание. Каждый учащийся выступает с решением своей задачи. После выступления можно задавать интересующие вопросы.

Задание для урока 11. Подготовить одну задачу из олимпиад за 10 класс по теме «Преобразование суммы и разности целых чисел». Решить задачу, подготовить решение в презентации.

3.4. Задачи с простыми и составными числами.

Урок 12.

Рассмотреть задачи следующего характера.

Задача 1. «Найти все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел» [33].

Задача 2. «Найти все натуральные числа n, для которых каждое из шести чисел $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13, n+15$ является простым» [33].

Задача 3. **«**Найти все натуральные n, что оба числа 2^n-1 и 2^n+1 простые» [39].

Задача 4. «Доказать, что при любом значении $n \in Z$ + число $19-8^n+17$ является составным» [16].

Задача 5. «Доказать, что существует бесконечно много значений $n \in Z$, для которых любое число вида m^4+n $(m \in N)$ является составным» [16].

3.5. Презентация олимпиадных задач с простыми и составными числами.

Урок 13.

Для данного урока предлагается заранее сообщить учащимся задание. Каждый учащийся выступает с решением своей задачи. После выступления можно задавать интересующие вопросы.

Задание для урока 13. Подготовить одну задачу из олимпиад за 10 класс по теме «Простые и составные числа». Решить задачу, подготовить решение в презентации.

Раздел 4. СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ (4 ч.).

4.1. Приемы, используемые при решении задач на сравнение целых чисел.

Урок 14.

На данном уроке предлагается провести лекцию.

Для решения задач из данного раздела воспользуемся приемами:

— При сравнении однотипных числовых выражений следует привести исходную задачу к сравнению двух целых чисел.

— Для сравнения разнотипных числовых выражений a и b нужно подобрать число c так, чтобы оно было сравнимо с a и b. К примеру, «для обоснования неравенства $a > b$ находят число c такое, что $a > c$ и $c > b$» [2, С. 19].

Также можно ввести некоторую вспомогательную функцию $f(x)$ и с ее помощью заменить начальную задачу на сравнение значений функции $f(x)$ при заданных значениях аргумента.

Пример 1. «Сравните числа $99!$ и 50^{99}» [24].

Пример 2. «Доказать, что

1) $100\,002^4 > 9997^5$;

2) $31^{11} < 17^{14}$;

3) $76^8 > 10^{15}$».

4.2. Задачи на сравнение целых чисел.

Урок 15.

Рассмотреть задачи следующего характера.

Задача 1. «Существует ли значение $n \in N$, при котором числа $2^{n+1}— 1$ и $2^{n-1}(2^n— 1)$ одновременно являются кубами целых чисел» [16]?

Задача 2. «Доказать, что ни при каком натуральном n число $n^2 + 5n + 4$ не является квадратом никакого натурального числа» [39].

Задача 3. «Какое из чисел больше $2^{3^{2^3}}$ или $3^{2^{3^2}}$?» [17]

4.3. Решение и презентация задачи.

Урок 16.

За время элективного курса каждый ученик самостоятельно выбирает задачу по любому из данных типов и решает ее. На уроке-семинаре каждый ученик показывает решение с презентацией своей задачи.

Раздел 5. ЗАКРЕПЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА (1 ч).

5.1. Заключительный урок.

Урок 17.

На данном уроке предлагается обсудить с учащимися задачи, которые были, по их мнению, самые трудные, решить снова, разобрав подробно каждый шаг из решения. Для этого учителю нужно сообщить заранее, чтобы каждый из учеников выбрал сложную задачу для урока.

Решение задач к элективному курсу

«Целые числа в олимпиадных задачах».

Урок 1.

1. 7*7*7*7*7=16807.

2. используем теорему Пифагора: $x^2 = (x-3)^2 + 9^2, x = 15.$

Урок 2.

1. Ответ: в) 9; г) 39.

2. n=1. Действительно, $n^2 + 1 = n(n+1) - (n-1)$, то из $n + 1\backslash n^2 + 1$ следует, что $n + 1\backslash n - 1$, а последнее для натуральных n возможно лишь тогда, когда $n - 1 = 0$, т.е. когда $n = 1$. 2) пусть p и q – данные простые числа, причем $p - q = 2$. Тогда $p + q = 2(q + 1)$. Значит $p + q$ кратно 4, так как q нечетно ($q + 1$ четно). При делении на 3 число q может давать остатки 1 или 2, т.е. $q = 3k + 1$ или $q = 3k + 2$. Первое невозможно, иначе $p = q + 2 = 3k + 3$, т.е. p не является простым. Следовательно, $q = 3k + 2, p + q = 2(3k + 3) = 2 \times 3(k + 1)$, т.е. p+q делится на 3 и на 12 (так как p+q делится и на 4).

3. Пусть p – это простое число, которое не является 2 и 5. Рассмотрим $p + 1$ число: $1, 11, 111, \dots, 111 \dots 11$. По крайней мере два из них дают при делении на p одинаковые остатки. Тогда их разность 11…1100…0 делится на p. Но поскольку p отлично от 2 и 5, то 11…11 делится на p. Значит

делителями рассматриваемых чисел могут быть все простые числа, кроме 2 и 5.

4. Если n четное, то число 4^n оканчивается цифрой 6, поэтому число $4^n - 1$ оканчивается цифрой 5, т.е. делится на 5. Если n нечетное, то $4^n - 1$ делится на 3 $(3 = 4^1 - 1)$. Так как число $5^n - 1$ не делится ни на 5, ни на 3, то $5^n - 1$ не делится на $4^n - 1$.

5. Искомые числа – все нечетные числа > 1. Действительно, если n – нечетное число > 1, то $\frac{n-1}{2}$ есть натуральное число и для $k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$, как легко заметить, $n | k^n + (n-k)^n$ (так как $(-k)^n = -k^n$). Следовательно, $n | 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$. Пусть теперь n – четное число и пусть 2^s – высшая степень двойки, делящая n (число s натуральное). Так как $s < 2^s$, то для четных k, очевидно, $2^s | k^n$, для нечетных же k (число которых в последовательности $1, 2, \dots, n-1$ равно $\frac{n}{2}$) на основании теоремы Эйлера имеем $2^{k^{s-1}} \equiv 1 (mod\, 2^s)$, так что и $k^n \equiv 1 (mod\, 2^s)$ (ибо $2^{s-1} | n$), откуда $1^n + 3^n + \dots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} (mod\, 2^s)$. Поэтому, учитывая, что $2^n + 4^n + \dots + (n-2)^n \equiv 0 (mod\, 2^s)$, имеем $1^n + 2^n + \dots + +(n-1)^n \equiv \frac{n}{2} (mod\, 2^s)$. Если теперь предположить, что $n | 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$, то так как $2^s | n$, мы получим сравнение $0 \equiv \frac{n}{2} (mod\, 2^s)$, из которого следует $2^s | \frac{n}{2}$ и $2^{s+1} | n$, что противоречит определению числа s. Итак, если n четное, то $n \nmid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$.

Урок 3.

1. 100а+10в+с=100а+(2с-3а)*10+с=70а+21с=7*(10а+3с) т.е делится на 7, что и требовалось.

2. если a – натуральное число, r – остаток от деления числа a на 10, то $a^{10} + 1$ делится на 10 тогда и только тогда, когда число $r^{10} + 1$ делится на 10. Таким образом, вместо r мы должны брать только числа 0, 1, …, 9, для которых число $a^{10} + 1$ делится на 10, суть натуральные числа вида $10k + 3$ и $10k + 7$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.

3. $n^2 + 5n + 16 = 169k.$

Имеем $n^2 + 5n + 16 - 169k = 0, D = 25 - (16 - 169k) = 4 \times 169k - 39 = 13 \times (52k - 3)$. Ясно, что D не может быть квадратом натурального числа, так как D делится нацело на 13, но не делится на $13^2(52k - 3$ не делится на 13). Отсюда следует, что данное уравнение $n^2 + 5n + 16 = 169k$ не имеет решений натуральных, а также и рациональных ни при каких натуральных n и k. Мы с помощью доказательства получили противоречие. Это значит, что утверждение доказано.

4. Выражение $n^5 + n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$ содержит произведение трех последовательных натуральных чисел, а поэтому делится на 6. Сравним наше выражение с произведением пяти последовательных натуральных чисел $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) = n^5 - 5n^3 + 4n$. Так как последнее выражение делится на 5, то выражение $n^5 + 4n$ тоже делится на 5, а тогда и выражение $n^5 + n = (n^5 + n4) - 5n$ разделится на 5. Следовательно, оно делится на 30.

5. Дважды применить теорему Безу.

Урок 5.

1.

$$2xy = x^2 + 2y,$$
$$y^2 - 2\mathrm{y} = (\mathrm{x} - \mathrm{y})^2,$$
$$(y - 1)^2 - (\mathrm{x} - \mathrm{y})^2 = 1,$$
$$(2\mathrm{y} - \mathrm{x} - 1)(\mathrm{x} - 1) = 1,$$
$$\mathrm{x} = 2, \mathrm{y} = 2.$$

Ответ: (2; 2).

2. Предположим, что $x < 0$, тогда $0 < 2x < 1$ и $y^2 \in/ Z$. При $x = 0$ также $y /\in Z$. Пусть $x > 0$, тогда $2x = (|y| - 1)(|y| + 1)$, из данного следует, что $|y| - 1 = 2p, |y| + 1 = 2q$ и $0 \leq p$. Откуда

$$2q - 2p = 2,$$
$$2\mathrm{p}(2\mathrm{q} - \mathrm{p} - 1) = 2.$$

Рассмотрим возможные варианты:

1) $2p = 2, 2\mathrm{q} - \mathrm{p} - 1 = 1, \mathrm{p} = 1, \mathrm{q} - \mathrm{p} = 1, p = 1, q = 2$. Значит $y = \pm 3, x = 3$.

2) $2p = 1, 2q - p - 1 = 2 \Longleftrightarrow \emptyset$.

Ответ: (3; 3), (3; −3).

Уравнения с использованием делимости целых чисел.

3. Запишем уравнение в виде

$$y^2 - x^2 = 4x^2 + 6,$$

$$(\mathrm{y} - \mathrm{x})(\mathrm{y} + \mathrm{x}) = 4x^2 + 6.$$

Анализируя полученное уравнение, видим, что правая часть - чётное число, это значит, что левая часть тоже должна быть чётным числом. Если $(y + x)$ чётно, то $(y - x)$ также чётно. Левая часть уравнения кратна четырем, но правая часть некратна. Значит уравнение не имеет решений.

Урок 6.

1. пусть a и b искомые натуральные числа, тогда:

$$\begin{cases} a + b = 50, \\ ab + 11 = a^2 - b^2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 50 - b, \\ 50b - b^2 + 11 = 2500 + b^2 - b^2 - 100b, \end{cases}$$

$$b^2 - 150b + 2489 = 0, D = b^2 - 4ac = 22\,500 - 9\,956 = 12544,$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{150 \pm 112}{2}, b_1 = 131 \text{ (посторонний корень)}, b_2 = 19. a = 50 - 19 = 31.$$

2. все многочлены, о которых идет речь в задаче, имеют общий корень $x = 1$. Действительно, при $x = 1$ значение данного многочлена равно $a + b + c + d$, что при заданных значениях a, b, c и d тождественно равно нулю $(-7 + 4 - 3 + 6 = 0)$ независимо от порядка расположения коэффициентов многочлена. Утверждение доказано.

3. пусть $ax^n + bx^{n-1} + \cdots + kx + l = 0$ – уравнение n-ой степени с целыми коэффициентами, имеющее целый корень x_0.

Тогда справедливо тождество

$a{x_0}^n + b{x_0}^{n-1} + c{x_0}^{n-2} + \cdots + kx_0 + l = 0,\ x_0\big(a{x_0}^{n-1} + b{x_0}^{n-2} +$ $+c{x_0}^{n-3} + \cdots + k\big) = -l$ (1).Так как левая часть тождества (1) делится на x_0 ($a{x_0}^{n-1} + b{x_0}^{n-2} + c{x_0}^{n-3} + \cdots + k$ – целое число), то и его правая часть делится на x_0, т.е. x_0является делителем свободного члена l.

Урок 7.

1. $xy + x - 5y = -6$

выразим x через y

$$xy + x = 5y - 6$$

$$x = 5y/(y+1)\ -\ 6/(y+1)$$

целые числа при знаменателе равным 1 или -1

если знаменатель =1 то y=0 x=-6

если знаменатель =-1 то y=-2 x $= 10 + 6 = 16$

выразим y через x

$$\mathrm{xy} - 5\mathrm{y} = -\mathrm{x} - 6$$

$$\mathrm{y} = -\mathrm{x}/(x-5) - 6/(x-5)$$

знаменатель = 1, x=6 y=-12

знаменатель = -1, x=4 y= 10

Ответ (6 -12) (4 10) (16 -2) (-6 0).

Урок 9.

1. Из того что $\frac{3n+2}{n-1} = \frac{3n-3+5}{n-1}\ =\ 3 + \frac{5}{n-1}$, можно сделать вывод, что начальное число целое, только в том случае, если целое число $5\,n\ -\ 1$, а данное возможно только при $n - 1\ \in\ \{\pm 5, \pm 1\}$.

Ответ: $n\ =\ -4;\ 0;\ 2;\ 6.$

2. Преобразуем исходную дробь $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} = 1 - \frac{n}{n^2 + 1}$. Если возможно сократить данную дробь $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$, тогда возможно сократить и следующую дробь $\frac{n}{n^2 + 1}$. Если возможно сократить данную дробь $\frac{n}{n^2 + 1}$, огда возможно сократить и следующую дробь $\frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n}$ и тогда следующую дробь тоже можно сократить $\frac{1}{n}$, а это неверно. Напрашивается вывод, что исходную дробь нельзя сократить.

Указания: 1) доказательство свойств проводятся в общем виде, при этом можно ссылаться на определение группы и ранее доказанные свойства; 2) для «опровержения» свойства достаточно привести контпример.

Урок 10.

4. *Указание.* Значения $n = 33, 34, 35, \ldots, 73$ требуемому условию удовлетворяют.

Выводы по второй главе

1. Представлены требования к элективному курсу, выполнен сравнительный анализ элективных курсов схожих по тематике.

Анализ показал, что учащимся нужно предлагать элективные курсы не только для расширения и углубления основных знаний по математике, но и для формирования аналитического и логического мышления.

2. Разработана программа элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах».

Данный элективный курс построен по модульному принципу, что позволяет успешно организовать исследовательскую деятельность обучающихся на занятиях; обобщает материал по теме целые числа и олимпиадным задачам с целыми числами; способствует формированию познавательных УУД учащихся.

3. Представлены методические рекомендации по использованию элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах».

Данный элективный курс рассчитан на 17 часов. К каждому уроку разработаны теоретические и практические материалы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделим основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

1. Представлен анализ учебной и методической литературы по проблеме использования свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы. Установлено, что для решения задач на использование свойств целых чисел в углубленном уровне учащиеся должны оперировать понятиями: натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел. Также должны ученики уметь при выполнении вычислений и решении задач: доказывать и использовать признаки делимости суммы и произведения; находить НОД и НОК разными способами; уметь делать анализ условия задачи, чтобы подобрать подходящий метод решения задачи, при этом рассматривать различные методы; строить модель решения задачи, проводить доказательные рассуждения при решении задачи; решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата; анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту.

2. Выполнен содержательный анализ элективных курсов на использование свойств целых чисел и задач в профильном ЕГЭ по математике.

Анализ программ элективных курсов показал, что особое внимание уделяется задачам на делимость целых чисел. Другие типы задач, встречаются не часто.

Анализа заданий ЕГЭ по математике показал, что с задачей на свойства целых чисел столкнется каждый ученик при сдаче экзамена. Но у него могут возникнуть трудности при решении данной задачи, не хватит опыта решения аналогичных задач, так как в школьных учебниках задачам на свойства целых чисел в старших классах не уделяется должное внимание.

3. Проведён анализ заданий на использования свойств целых чисел в действующих учебниках с углубленным изучением математики, в заданиях школьных олимпиад. Анализ программ по математике в углубленном курсе общеобразовательной школы показал, что основной теоретический материал на свойства целых чисел изучается в 5 классе и в 6 классе, в старших классах эта тема не получает дальнейшего развития. Начиная с 7 класса, задачам на свойства целых чисел практически не уделяется внимания, учащимся предлагаются задачи с рациональными числами. Но так как задачи на использование свойств целых чисел являются неотъемлемой составляющей олимпиадных задач по математике всех уровней для учащихся с 5 по 11 классы, составляют содержание 19-го задания профильного ЕГЭ по математике. Поэтому следует чаще предлагать учащимся 7-11 классов задачи на свойства целых чисел (хотя бы раз в четверть).

4. Представлен обзор методических систем обучения решению задач по теме «Целые числа». Установлено, что учащиеся должны хорошо овладеть базовыми знаниями для того чтобы решать более сложные задачи. Должна быть мотивационная постановка задачи, поиск решения. И, конечно, оценка результата и собственной деятельности учеником.

5. Представлены требования к элективному курсу, выполнен сравнительный анализ элективных курсов схожих по тематике. Анализ показал, что учащимся нужно предлагать элективные курсы не только для

расширения и углубления основных знаний по математике, но и для формирования аналитического и логического мышления.

6. Разработана программа элективного курса под названием «Целые числа в олимпиадных задачах». Данный курс построен по модульному принципу; обобщает материал по теме целые числа и олимпиадным задачам с целыми числами; способствует формированию познавательных УУД учащихся.

7. Представлены методические рекомендации по использованию элективного курса «Целые числа в олимпиадных задачах». Данный элективный курс рассчитан на 17 часов. К каждому уроку разработаны теоретические и практические материалы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартенев Ф.А. Нестандартные задачи по алгебре. Пособие для учителей. - М., «Просвещение», 1976. – 93 с.

2. Будак Б.А. Математика. Сборник задач по углублённому курсу [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Б. А. Будак [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 3-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 329 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

3. Буцко Е.В., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Математика 5 класс. Методическое пособие. Москва.: Издательский центр «Вентана-Граф», 2012 С. 3-4.

4. Буцко Е.В., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Математика 6 класс. Методическое пособие. Москва.: Издательский центр «Вентана-Граф», 2019 С. 288.

5. Вагина О.А Задачи на целые числа в школьном курсе математики г. Тольятти // материалы Всероссийской студенческой научно-практическая междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» сборник

студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис (Тольятти, 5 декабря 2018года). – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2018. – 1 оптический диск. - С. 213-215.

6. Вагина О.А. Задачи на использование свойств целых чисел в углубленном курсе математики общеобразовательной школы// Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: материалы Международной заочной научно-практической конференции (4–10 июня, 2018 г.). – Луганск: Книта, 2018. С. 92- 96.

7. Вагина О.А. О задачах повышенной трудности по теме "Натуральные и целые числа" в курсе математики основной школы / Н.С. Симонова, О.А. Вагина О.А.//Математика и математическое образование: сборник трудов IX Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, ТГУ, 24-26 апреля 2019 года) / под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2019. - с. 267-273.

8. Всероссийская олимпиада школьников по математике для школьников города Москвы. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://olympiads.mccme.ru/vmo/

9. Гаспржаком А.Г. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область «Математика»/Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. – М.:Вита-Пресс, 2004. – 96 с.

10. Глухова О.Ю Элективный курс «теория делимости» / О.Ю. Глухова // Вестник. 2017. – № 19. С. 11-15.

11. Зубарева А.Г. Программы. Математика. 5-6 классы. Алгебра. 7-9 классы. Алгебра и начала и начала математического анализа. 10-11 классы / авт.-сост. И.И. Зубарева и А.Г. Мордкович. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Мнемозина, 2009. – 63 с.

12. Ибрагимова И.М. Программа элективного курса для учащихся 7 класса «Задачи с целыми числами» : [Электронный ресурс] : / .И.М. Ибрагимова – Электрон. текстовые дан. – Москва: [б.и.], 2012. – Режим доступа: https://infourok.ru/material.html?mid=10388

13. Иванова Т.А. Современный урок математики: теория, технология. Практика: Книга для учителя. – Н. Новгород: НГПУ, 2010 – 288 с.

14. Иванова Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе:учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов/ Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П Григорьева; под ред. Т.А. Ивановой. – 2-е изд., испр. и доп.- Н. Новгород: НПГУ, 2009.-355 с.

15. Ившина Л.Г. Элективный курс «Целые числа, делимость числел». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infourok.ru/elektivniy-kurs-po-teme-delimost-chisel-celie-chisla-3720464.html

16. Конягин С.В. Зарубежные математические олимпиады./Конягин С. В., Тоноя н Г. А., Шарыгин И. Ф. и др.; Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — (Б-ка мат. кружка). — 416 с.

17. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.

18. Котлярова В. В., Воронина Е. В. Пифагорейская программа как основа развития математики // Молодой ученый. — 2016. — №10. — С. 1423-1425.

19. Луценко Н.Н. Элективный курс «Методы решения олимпиадных задач». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://infourok.ru/programma-elektivnogo-kursa-dlya-klassa-olimpiadnaya-matematika-1619328.html

20. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразо- ват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

21. Мерзляк А.Г. Математика: программы: 7-11 классы с углублённым изучением математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир - 2-е изд., стереотип. – М.: Ветрана-Граф, 2020. – 150 с.

22. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах: пособие для учителя. – 87 с.

23. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Л.А. Алек- 120 сандрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская, П.В. Семенов. – 12-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с.

24. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

25. Образовательный портал городского округа Тольятти. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.do.tgl.ru/

26. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru/

27. Осипова С.Г. Элективный курс «Решение олимпиадных задач при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня». [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/rabochaya_programma_elektivnogo_kursa_po_matematike_175122.html

28. Панюшкин С.В., Козичева Л.М. Делимость чисел в курсе алгебры 8-9 классов с углубленным изучением математики. Методическая разработка.- Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2018. – 56 с.

29. Подходова Н.С. Проблемы реализации профильного обучения и особенности отбора элективных курсов //Вестник Герценовского университета. – Выпуск №3. 2007 – С.45-48.

30. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. – М.: Госучпедгиз, 1961. – 209 с.

31. Пойа Д. Математика и правдопододные рассуждения. под редакцией С.А. Яновской. Пер. с английского И.А. Вайнштейна. М., Наука, 1975 — 464 с.

32. Потапова Н. Ю. Решение нестандартных задач по математике с использованием информационных технологий // Школьная педагогика. — 2017. — №2.1. — С. 43-47.

33. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М., «Просвещение», 1968. – 162 с.

34. Утеева Р.А. Дифференцированные задания по математике. 6 класс: Пособие для учителя. Тольятти, Тф СГПУ, 1996. -53 с.

35. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. – Последнее обновление 07.02.2017.

36. Федорова В.В. Элективный курс «Числа правят миром». [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://multiurok.ru/files/eliektivnyi-kurs-chisla-praviat-mirom-dlia-uchashc.html

37. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика. Учеб. пособие для учителей и студентов педвузов и колледжей. – М.: Школьная Пресса, 2002. С. 20–51.

38. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике / Учебное пособие - М.: УРСС, 2005. - 244с.

39. Шрайнер А. А. Задачи районных математических олимпиад Новосибирской области. – Новосибирск, 2000. – 169 с.

40. Шустеф Ф.М. Сборник олимпиадных задач по математике / Ф.М. Шустеф. — Минск:. Вышэйшая школа, 1977. – 85 с.

41. Bonato M., Fabbri S., Umilta` C., and Zorzi M. The Mental Representation of Numerical Fractions: Real or Integer [Text] / M. Bonato // Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance. University of Oradea Publisher, 2007. – PP. 1410-1419.

42. Bresolin D. Optimal decision procedures for MPNL over finite structures, the natural numbers, and the integers [Text] / D. Bresolin // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2013. – PP. 98-115.

43. Teppo A. Visual representations as objects of analysis: the number line as an example [Text] / A. Teppo // Springer. University of Oradea Publisher, 2013. – PP. 600-613.

44. Voskoglou M. and Kosyvas G. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers [Text] / M. Voskoglou // Redimat. University of Oradea Publisher, 2012. – PP. 301-336.

45. Yua F., Ko K. On logarithmic-space computable real numbers [Text] / F.Yua // Elsevier. University of Oradea Publisher, 2012. – PP. 712-714.