

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Задачи на тождественные преобразования тригонометрических
выражений как средство развития алгоритмической культуры обучающихся»

Студент

П.А. Бякова

(И.О.Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

к.п.н., доцент, Н.Н. Кошелева

(ученая степень, звание, И.О.Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.....	11
§1. Основные цели и задачи обучения тождественным преобразованиям в школьном курсе математики.....	11
§2. Основные понятия и типы тождественных преобразований тригонометрических выражений.....	20
§3. Методическая схема обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.....	28
§4. Требования к системе задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры.....	33
Выводы по первой главе.....	45
ГЛАВА II. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.....	47
§5. Основные формы и методы обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.....	47
§6. Система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня	52
§7. Элективный курс «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».....	58
§8. Результаты педагогического эксперимента	65
Выводы по второй главе.....	79
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	81
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	86
Приложение А Система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений.....	95

Приложение Б Система задач для оценки когнитивного критерия алгоритмической культуры школьников.....	105
Приложение В Результаты констатирующего этапа исследования.....	109
Приложение Г Результаты контрольного этапа исследования.....	111

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и научная значимость настоящего исследования обусловлена тем, что процесс активной модернизации, который происходит на сегодняшний день в рамках апробации и внедрения Федерального государственного образовательного стандарта (полного) общего образования (ФГОС), привел к тому, что на первое место были выдвинуты требования к результатам обучения, которые являются в системе образования наиболее значимыми. Исходя из этого, в качестве цели современного образования в школе выступает создание таких педагогических условий, в которых обучающийся сможет наиболее эффективно реализоваться в образовательном процессе, и которые подготовят его к тому, чтобы он смог стать субъектом осуществления продуктивной самостоятельной деятельности во все жизненные периоды своего пути. Осуществление перехода к новому ФГОС предполагает, что должна быть внедрена качественно новая модель процесса обучения [60].

В образовательном процессе при изучении математики в качестве одной из основных содержательно-методических линий школьного курса выступает изучение математических выражений и их тождественных преобразований [16, 64]. Основная цель при изучении данного материала состоит в том, что должна проводиться работа по развитию формально-оперативных умений учащихся до такого уровня, чтобы они могли использовать данные знания в процессе решения задач по математике, а также по смежным предметам [51, 18]. Однако, основной курс математики в школе не всегда справляется с данной задачей, и в этом случае повысить уровень эффективности обучения по конкретному предмету или теме позволяет внедрение элективных курсов.

Одним из основных направлений в курсе математики в школе является линия изучения тригонометрических выражений. Выявление взаимосвязи тригонометрических выражений и тождественных преобразований в

процессе решения уравнений играет важную роль, так как позволяет научить детей более эффективно решать уравнения с использованием преобразований тригонометрических выражений и способствует развитию алгоритмической культуры обучающихся [17].

Алгоритмическая культура представляет собой набор определенных алгоритмических представлений, навыков и умений, которые являются составной частью общей культуры человека [32]. В процессе жизни человека результат любой его деятельности определяется тем, насколько хорошо он умеет составлять алгоритмы собственных действий. Ожидаемый результат деятельности может быть достигнут только при планировании и выполнении правильной последовательности совершаемых манипуляций. Именно поэтому формирование алгоритмической культуры на этапе школьного обучения является актуальным, т.к. в процессе выявления и построения алгоритма деятельности происходит формирование таких личностных качеств человека, которые определяют точность и последовательность его деятельности.

Актуальность и научная значимость исследования обусловлена:

- требованиями ФГОС основного общего образования к реализации деятельностного подхода в обучении математике;
- важностью формирования алгоритмической культуры на базе школьного образования;
- отсутствием в существующих на данный момент учебниках систематизированной системы задач, включающих в себя профильные задачи, а также задачи олимпиадного уровня, разработанностью множеств методик по использованию задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений как средства развития алгоритмической культуры обучающихся.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени **противоречиями** между необходимостью научно-обоснованного изучения использования задач на

тождественные преобразования тригонометрических выражений как средства развития алгоритмической культуры обучающихся и недостаточной разработанностью методических основ использования данного типа задач; изучения большого объема теоретического материала, связанного с обучением тождественным преобразованиям тригонометрических выражений на углубленном уровне и недостаточной разработанностью системы задач по данной теме и оценки эффективности этих задач для развития алгоритмической культуры обучающихся.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических основ использования задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений как средств развития алгоритмической культуры обучающихся.

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: задачи на тождественные преобразования тригонометрических выражений как средство развития алгоритмической культуры обучающихся.

Цель исследования: разработка методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, направленной на развитие алгоритмической культуры обучающихся.

Гипотеза исследования состоит в том, что алгоритмическая культура обучающихся будет сформирована, если будет применена в процессе обучения разработанная нами методика обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений с применением предложенных нами систем задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования:**

1. Проанализировать основные цели и задачи обучения тождественным преобразованиям в школьном курсе математики.

2. Исследовать основные понятия и типы тождественных преобразований тригонометрических выражений.

3. Изучить методическую схему обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.

4. Проанализировать требования к системе задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры.

5. Определить основные формы и методы обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.

6. Разработать систему задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня.

7. Разработать элективный курс «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

8. Проанализировать результаты педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы Т.А. Ивановой [25], Л.С. Капкаевой [27, 28], Г.И. Саранцева [56] и других исследователей.

Базовыми для настоящего исследования явились также работы А.Я. Блоха [14], Л.И. Боженковой [15], А.Г. Мордковича [45].

Методы исследования: в рамках организации исследования при написании магистерской диссертации использовался теоретический анализ психолого-педагогической, учебно-методической и научной литературы; эмпирические методы: наблюдение и обобщение опыта работы педагогов, констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента.

Опытно-экспериментальной базой исследования явилась кафедра «Высшая математика и математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет» и ГБОУ СОШ с.Пискалы.

Основные этапы исследования:

1 этап (2018/2019 уч.г.): анализ основных теоретических исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативно-правовой

документации (стандартов, образовательных программ, рабочих программ), анализ опыта работы в школе по проблеме диссертационного исследования.

2 этап (2018/2019 уч.г.): определение методических основ исследования по теме диссертации; выделение схемы обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.

3 этап (2019/2020 уч.г.) разработка технологии использования системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры обучающихся, разработка элективного курса «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

4 этап (2019/2020 уч.г.): оформление диссертационного исследования; корректировка материала, который был представлен ранее; уточнение аппарата диссертационного исследования; непосредственное проведение эксперимента; анализ полученных результатов и их описание; формулировка выводов по результатам диссертационного исследования.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нём разработана система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированная на развитие алгоритмической культуры обучающихся.

Теоретическая значимость исследования определяется тем, что в диссертации

- выявлены основные цели и задачи развития алгоритмической культуры, требования к системе задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры;

- рассмотрены различные подходы к использованию задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированных на развитие алгоритмической культуры;

- представлена система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированная на развитие алгоритмической культуры.

Практическая значимость исследования заключается в разработке:

1. Методической схемы обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры.

2. Система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня, ориентированной на развитие алгоритмической культуры.

3. Элективного курса «Тождественные преобразования тригонометрических выражений», ориентированного на развитие алгоритмической культуры.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались: эффективным сочетанием теоретических и практических методов осуществления диссертационного исследования, комплексным анализом педагогической практики, а также личным опытом проведения экспериментального исследования.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в разработке методической схемы обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений, системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня и разработке элективного курса «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования в процессе личного участия автора в организации экспериментальной работы.

На защиту выносятся:

1. Методическая схема обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений, ориентированная на развитие алгоритмической культуры.

2. Система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня, ориентированная на развитие алгоритмической культуры.

3. Элективный курс «Тождественные преобразования тригонометрических выражений», ориентированный на развитие алгоритмической культуры.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 19 рисунков, 12 таблиц, список использованной литературы (69 источников), 4 приложения. Основной текст работы изложен на 94 страницах.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§1. Основные цели и задачи обучения тождественным преобразованиям в школьном курсе математики

Использование различных задач на уроках математики в общеобразовательной школе способствует применению обучающимися собственных знаний и умений. Именно поэтому организация совершенствования методик по решению задач является сегодня самой важной проблемой, которая стоит перед преподавателями по математике. Большую роль в процессе решения данной проблемы занимает организация работы по обучению детей различным математическим методам решения задач [57].

Линия тождественных преобразований представляет собой один из основных разделов содержательных линий реализации курса алгебры на этапе школьного образования. Изучение данного раздела происходит в течение всего школьного обучения, начинается его изучение еще в период начального образования [13].

Организация обучения применению различных формул и преобразованию выражений происходит в большую часть времени, отведенного на изучение математики в период школьного обучения. В начальной школе начинают изучаться простейшие преобразования, которые основываются на свойствах арифметических операций [10]. Однако, основная нагрузка в процессе формирования навыков и умений осуществления преобразований происходит в период преподавания курса алгебры на ступени основного образования, что обусловлено следующими причинами:

- 1) происходит резкое увеличение количества типов преобразований, которые должен уметь выполнять обучающийся;

2) при изучении преобразований в период обучения детей в средних и старших классах происходит усложнение деятельности в процессе обоснования преобразований и определения условий, при которых они могут применяться;

3) на этой ступени происходит выделение и изучение обобщенных понятий тождества, тождественных преобразований, равносильных преобразований и логических следований [2].

В процессе изучения темы «Тождественные преобразования» на уроках алгебры в средней школе отмечается возникновение ряда проблем. В частности, при выполнении тождественных преобразований очень важную роль играет то, насколько у ребенка сформированы знания об основных свойствах операций и о том, какие алгоритмы применяются в данных операциях [54]. В качестве главной цели, преследуемой в процессе изучения на уроках алгебры темы «Тождественные преобразования» выступает стремление показать обучающимся, какие пути преобразования тождеств являются наиболее эффективными [59]. Также выделяют еще несколько учебных целей, которые достигаются при организации изучения линии тождественных преобразований [58]. Они отображены в таблице 1.

Формирование первичных представлений о тождественных преобразованиях происходит на этапе начального школьного образования при изучении основных законов осуществления арифметических действий. Далее изучение данной темы систематически и более углубленно происходит в процессе реализации курса алгебры с седьмого по одиннадцатый класс [5, 7]. В таблице 2 нами представлена основная последовательность того, как происходит изучение тождественных преобразований при реализации курса алгебры в основной школе [43].

Таблица 1 - Учебные цели изучения линии тождественных преобразований [43]

Категории целей	Примеры обобщенных типов целей		
	I уровень	II уровень	III уровень
Знание	Термины, буквенная символика, способы записи и чтения различных видов выражений, основные тождества, правила, алгоритмы выполнения, частные приемы тождественных преобразований выражения.	Определения основных понятий и преобразований, связи и отношения между ними, следствия из основных тождеств, обобщенные приемы тождественных преобразований, способы решения основных типов задач.	Логическая основа формул и приемов составления и преобразования выражений, их связь со свойствами и правилами действий над числами, искусственные приемы тождественных преобразований выражений.
Понимание	Ученик правильно воспроизводит термины и формулы, смысл правил тождественных преобразований и учебных заданий, алгоритмы и частные приемы их решения, иллюстрирует их примерами, составляет несложные буквенные выражения.	Ученик интерпретирует тождества как правила и алгоритмы действий, приводит контрпримеры, подводит выражение под понятие или формулу, понимает идею подстановки, выделяет ситуации применимости формул и приемов тождественных преобразований.	Ученик преобразует словесный и наглядный материал в алгебраические выражения и обратно, используя обобщенные связи между выражениями, выводит следствия из формул и правил, выделяет идеи и методы преобразований, перестраивает известные и находит новые приемы преобразований.
Умения и навыки	Умения выполнять простейшие тождественные преобразования выражений, осуществлять числовые подстановки, выполнять преобразования по образцу или на основе помощи извне.	Умения выражать в основных формулах одни переменные через другие, выполнять типовые преобразования в стандартных ситуациях, самостоятельно использовать формулы, алгоритмы и приемы тождественных преобразований и их контроля.	Умения выполнять типовые преобразования в нестандартных ситуациях, самостоятельно использовать обобщенные и искусственные приемы тождественных преобразований, доказывать и выводить новые формулы, самостоятельно их использовать.

Таблица 2 - Последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы [43]

№	Класс	Виды выражений
1	7 класс	Целые (одночлены и многочлены)
2	8 класс	Дробные (дробные рациональные выражения, арифметические квадратные корни)
3	9 класс(10 класс)	Иррациональные (степень с рациональным показателем, корни n-й степени)
4	10 класс	Тригонометрические выражения
5	11 класс	Логарифмические выражения

В исследованиях Р.К. Линдона и других зарубежных авторов было отмечено, что для любого класса функций алгебры существует система тождеств [65, 67, 68].

Согласно учебнику А.Г. Мордкович, впервые понятие тождества вводится в седьмом классе и определяется следующим образом: тождество представляет собой определенное равенство, которое является верным при любых значениях, которые могут быть присвоены входящим в состав равенства переменным [44]. Например: $a+b=b+a$, $ab=ba$. Затем, в процессе дальнейшего обучения вводится понятия тождественно равных выражений, которые представляют собой выражения, в которых соответственные значения являются равными при любых значениях, которые могут быть присвоены входящим в состав равенств переменным [44, 49].

При дальнейшем обучении происходит введение понятия тождественного преобразования выражений, которое понимается в качестве процесса замены исходного выражения на тождественно равное ему выражение [44]. В некоторых определениях слово «тождественное» не используют и говорят только о «преобразовании выражений», однако, следует помнить, что речь идет именно о тождественном преобразовании [13]. В соответствии с ФГОС общего образования, обучение математике должно быть основано на планируемых результатах, которые необходимо достигнуть в процессе изучения курса математики на этапе школьного образования. В таблице 3 нами представлены планируемые результаты, на

которые должно быть направлено изучение темы «Тождественные преобразования» в процессе реализации основного курса алгебры в школе [15].

Основная суть применения метода тождественных преобразований заключается в том, что организуется использование преобразования различных алгебраических выражений при помощи осуществления замены выражения или одного из его структурных компонентом на тождественно равное ему для достижения целевых требований, выдвигаемых в рамках решения задачи [19].

С каждым годом педагоги продолжают сталкиваться с проблемой применения обучающимися нерациональных приемов вычислений и преобразований. Нередко школьники допускают ошибки и в случае применения верных приемов решения, причем не только на уроках и в процессе контрольно-оценочной деятельности, но и при выполнении заданий ОГЭ и ЕГЭ [34, 36]. Именно поэтому необходимо совершенствовать методику обучения применения тождественных преобразований.

В своих исследованиях С.Е. Ляпиным указывается, что для совершенствования методики обучения школьников методам тождественных преобразований необходимо осуществлять подбор познавательных задач таким образом, чтобы их содержание не отвлекало внимание обучающихся от новой задачи повторным исследованием уже изученных понятий, законов и свойств [40].

Таблица 3 - Планируемые результаты изучения линии тождественных преобразований (когнитивная область) [40]

Формулировки целей-ориентиров	Учебные задачи (УЗ) для формирования умений, характеризующих достижение планируемых результатов на уровнях:		Средства помощи
	базовом: ученик научится	повышенном: ученик имеет возможность научиться	
Ц I: целеполагание	а) планировать все УЗ базового уровня; б) выбирать УЗ из повышенного уровня; в) фиксировать УЗ в таблице «Индивидуальный план изучения темы»		а) классификация типов
Ц II: открытие УИ и формирование познавательных УУД при решении УЗ	1) анализировать текст учебника или набор объектов и составлять схему определения понятия , изучаемого в теме; 2) устанавливать структуру и признаки тождеств; 3) анализировать доказательство теорем в тексте учебника; составлять план доказательства; выделять обоснования; 4) анализировать решение данных задач, перечислять выполненные преобразования	5) сравнивать данные объекты и выбирать тождества; 6) выполнять поиск доказательства теорем с помощью схем, составлять план доказательства, реализовать его; выявлять идею доказательства; 7) анализировать, обобщать решение типовых задач и составлять предписания для их решения	б) математических выражений; в) предписания для разложения на множители, для сокращения дробей, приведения их к общему знаменателю; г) прием саморегуляции для выполнения заданий типа: «Упростить», «Найти значение выражения»
Ц III, IV: применение, контроль знаний при решении УЗ, формирование познавательных, регулятивных УУД	1) определять тип и вид математического выражения; 2) называть основные тождества, проговаривать изученные формулы, справа налево и наоборот; приводить примеры; 3) проговаривать предписания для преобразования выражений; для заданий базового уровня: 4) представлять выражения в виде произведения множителей; 5) называть способы доказательства тождеств и использовать их; 6) регулировать свою деятельность при выполнении преобразований математических выражений	7) формулировать определения типов математических выражений; 8) классифицировать алгебраические выражения; 9) называть преобразования первой группы и устанавливать их связь с числовыми множествами; для заданий высокого уровня сложности : 10) обосновывать процесс доказательства тождеств; 11) выполнять преобразования математических выражений с обоснованием	д) таблица коммуникативной компетентности
Ц V: формирование коммуникативных действий	На своем уровне освоения темы: а) работать в группе, выполнять взаимоконтроль, взаимопроверку; б) помогать товарищам; в) составлять КР, г) проверять решение этой КР товарищем; д) искать информацию для подготовки письменного и устного сообщения; е) выступать с сообщением; ж) участвовать в обсуждении; з) написать эссе, реферат и др.		е) приемы организации УПД
Ц VI: формирование регулятивных действий	а) формулировать цели УПД; б) делать самопроверку; в) оценивать свою УПД в соответствии с объективными критериями; г) делать выводы по итогам предыдущей УПД, о дальнейших действиях; д) планировать и осуществлять коррекцию УПД		

Автор говорит о том, что выполнение тождественных преобразований должно осуществляться как при помощи устных задач, так и при помощи письменных упражнений. При этом, если текст задачи не подразумевает определенного способа решения, то лучше всего использовать именно устные решения, когда это возможно. В процессе решения задач на тождественные преобразования необходимо стимулировать обучающихся к самостоятельному нахождению наиболее рациональных способов вычислений. Если в условии задачи сказано, что нужно выполнить тождественные преобразования заданных выражений, необходимо попросить обучающихся о том, чтобы они начали выполнять преобразования мысленно и выбрали те из них, которые, на их взгляд, являются наиболее выгодными. При этом педагог должен ориентироваться на уровень знаний каждого обучающегося по теме урока на данный момент [40].

В исследованиях Ю.Н. Макарычева указывается, что использование тождественных преобразований может быть применено в любой области знаний по математике, т.к. при выполнении любого математического задания существует потребность в том, чтобы заменить одно выражение на другое, которое является более простым и удобным для того, чтобы решить указанную задачу [35]. Можно выделить следующие приемы, применяемые в процессе организации решения задач, в которых необходимо использовать тождественные преобразования (табл. 4).

Таблица 4 - Приемы решения задач на тождественные преобразования [35]

Тип задачи	Алгоритм выполнения приема
Упрощение выражений	1. Изучить особенности данного выражения. 2. Установить, какие из следующих тождественных преобразований нужно выполнить, чтобы привести данное выражение к простейшему виду, - общие алгебраические преобразования (раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых, разложение на множители, приведение дробей к общему знаменателю, действия с дробями и т.п.), специальные преобразования (правила действия со степенями, корнями, логарифмами, использование тригонометрических тождеств). 3. Выполнить выбранные преобразования, используя соответствующие частные приемы. Записать ответ, если нужно, упростив его.
Разложение выражения на множители	1. Изучить особенности данного выражения. 2. Если есть общий множитель у всех слагаемых, вынести его за скобки. 3. Рассмотреть выражение, освобожденное от общего множителя; установить, нельзя ли использовать формулы сокращенного умножения, группировку слагаемых, правила действия со степенями, с корнями, потенцирование, формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и т.д. 4. Если п. 3 не имеет места, установить, нельзя ли применить способ группировки, ориентируясь на знаки слагаемых, их коэффициенты, их степени и разложение по степеням какого-либо множителя и т.п. 5. Выполнить выбранные преобразования, используя соответствующие приемы. Записать ответ.
Доказательство тождеств	1. Изучить особенности выражения в каждой части равенства. 2. Установить, какое из следующих путей доказательства тождества удобно использовать для доказательства, - упростить одну часть равенства (левую или правую), чтобы получить другую; упростить обе части равенства, чтобы получить равные выражения; доказать, что разность выражений, стоящих в разных частях данного равенства равна нулю. 3. Установить, какие из специальных преобразований нужно использовать для реализации выбранного в п. 2 пути доказательства. 4. Выполнить выбранные специальные преобразования, используя соответствующие правила, формулы и приемы по плану, выбранному в п.2. 5. Сделать вывод о равенстве двух выражений. Сделать общий вывод о доказанности тождества.

В пятом и шестом классе у обучающихся происходит формирование навыков выполнения простейших тождественных преобразований, которые основаны на использовании основных законов и свойств арифметических действий, что обусловлено необходимостью развития у обучающихся культуры вычислений [3], которая продолжает затем совершенствоваться в период остального школьного обучения. Согласно примерной основной образовательной программе основного общего образования, у выпускника 7-9 классов должны быть сформированы следующие навыки после изучения темы «Тождественные преобразования» [53]:

- использование несложных преобразований, направленных на осуществление вычисления значений числовых выражений, которые содержат в себе степени, имеющие натуральный показатель, а также степени, имеющие целый отрицательный показатель;
- применение несложных преобразований для целых выражений, которые используются в процессе раскрытия скобок, а также при подборе подобных слагаемых;
- использование формул сокращенного умножения;
- осуществление несложных преобразований выражений с квадратными корнями и дробно-линейных выражений.

Таким образом, в результате проведения теоретического анализа литературы по проблеме исследования нами выяснено, что в качестве сути метода тождественных преобразований следует понимать процесс, при котором организуется использование преобразований различных алгебраических выражений при помощи осуществления замены выражения или одного из его структурных компонентом на тождественно равное ему выражение для достижения целевых требований, выдвигаемых в рамках решения задачи [38]. В качестве главной цели, преследуемой в процессе изучения на уроках алгебры темы «Тождественные преобразования» выступает стремление показать обучающимся, какие пути преобразования тождеств являются наиболее эффективными. При этом выяснено, что

школьники допускают ошибки и в случае применения верных приемов решения, причем не только на уроках и в процессе контрольно-оценочной деятельности, но и при выполнении заданий ОГЭ и ЕГЭ.

§2. Основные понятия и типы тождественных преобразований тригонометрических выражений

В основном курсе математики отсутствует тригонометрия в качестве отдельной дисциплины, изучаемой в процессе школьного обучения. Несмотря на это ее изучение проводится на уроках геометрии в процессе основной школы и продолжается на уроках алгебры и начала анализа во время старшего школьного обучения. Таким образом, в результате систематического изучения математики обучающиеся сталкиваются с основами тригонометрии несколько раз.

В результате накопления материала становится возможным выделить и общие черты всех рассматриваемых преобразований и на этой основе ввести понятия тождественного и равносильного преобразований. Понятия тождества и тождественного преобразования явно вводятся в курсе алгебры 7 класса. В учебнике Ю. Н. Макарычева «Алгебра» для 7 класса [35] вначале вводится понятие тождественно равных выражений: «Два выражения, значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными». Затем дается определение тождества: «Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством».

Приводятся примеры:

- 1) $3(x + y)$ и $3x + 3y$ – тождественно равные выражения;
- 2) $2x + y$ и $2xy$ не являются тождественно равными выражениями;
- 3) $3(x+y) = 3x+ 3y$ – тождество;
- 4) верные числовые равенства $a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$; $ab = ba$; $(ab)c = a(bc)$;

5) $a + 0 = a$; $a + (-a) = 0$; $a - b = a + (-b)$; $a \cdot 1 = a$; $a \cdot (-b) = -ab$;
 $(-a) \cdot (-b) = ab$.

В 8 классе в связи с изучением рациональных дробей и квадратных корней в учебнике того же автора понятие тождества уточняется: «Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных».

В учебнике А. Г. Мордковича «Алгебра» для 7 класса [44] приводится сразу и уточненное понятие тождества: «Тождество – это равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в его состав переменных». Следует заметить, что в учебнике А. Г. Мордковича понятие тождества вводится после изучения самих преобразований, в отличие от учебника Ю. Н. Макарычева, где сначала вводится это понятие.

В учебниках алгебры Ш. А. Алимова и др. понятие тождества не вводится в 7-9 классах, а вводится только в 10 классе в теме «Тригонометрические тождества». Далее дается определение: «равенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв (т.е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл), называют тождеством, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств» [4].

Следует обратить внимание на то, что понятие тождественного преобразования дается в школьном курсе алгебры не в полной общности, а только в применении к выражениям. Преобразования разделяются на два класса: тождественные преобразования – это преобразования выражений, а равносильные – преобразования формул [20]. В случае, когда возникает потребность в упрощении одной части формулы, в этой формуле выделяется выражение, которое и служит аргументом применяемого тождественного преобразования.

Процесс освоения различных видов преобразований на втором этапе начинается с введения формул сокращенного умножения. Далее рассматриваются преобразования, связанные с операцией возведения в

степень, с различными классами элементарных функций - показательных, степенных, логарифмических, тригонометрических. Каждый из этих типов преобразований проходит этап изучения, на котором внимание сосредоточивается на усвоении их характерных особенностей [24, 26].

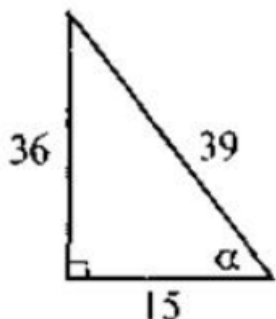
Уровень сформированности соответствующих умений должен позволять ученику использовать тождественные преобразования в процессе решения разнообразных задач, в том числе при изучении курса алгебры и начал математического анализа в 10-11 классах. В 9 классе на этапе обобщающего повторения полезно организовать составление систематизационных таблиц, информационных схем. Информационные схемы могут быть различными, но обязательной систематизации подлежат все изученные в курсе алгебры 7-9 кл. тождества. Процесс составления этой таблицы начинается в седьмом классе, продолжается в восьмом, а в девятом классе полезно обобщить определение квадратного корня, свойства квадратных корней и сформулировать определение корня степени n ($n \in \mathbb{N}$); свойства корней степени n , записать их, тем более что ученики уже использовали кубические и другие корни.

Далее рассмотрим подробнее обучение тождественным преобразованием тригонометрических выражений. Общее содержание школьного курса тригонометрии может быть разделено на три части, которые отделены друг от друга по времени и очень различаются не только по смыслу, но также по применяемым действиям и упражнениям: тригонометрия в планиметрии, теоремы синусов и косинусов, тригонометрические отношения [50]. Тригонометрический материал впервые появляется в курсе планиметрии в восьмом классе. Вводятся тригонометрические зависимости в прямоугольном треугольнике. Решаются прямоугольные треугольники, доказывается основное тригонометрическое тождество, выводятся значения тригонометрических углов 30° , 45° , 60° . Рассматриваются задачи на построение угла по значению тригонометрической функции [61].

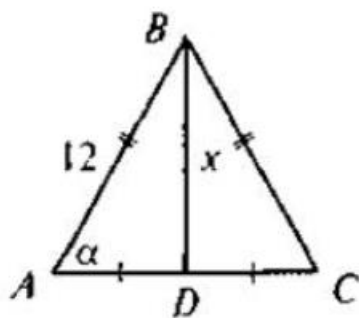
В девятом классе доказываются и применяются теоремы синусов и косинусов. Вводятся формулы для нахождения координат точки через длину радиус-вектора точки и угол между лучом и положительной полуосью Ox . Тригонометрические отношения определяются на основании единичной окружности, а не при помощи использования прямоугольного треугольника. Происходит изучение формул приведения.

Следующая встреча с тригонометрией происходит уже при изучении алгебры и начал анализа. В рамках данного этапа обучения под тригонометрическими отношениями уже понимаются функции углов, однако, углы при этом являются произвольными, а измерение их мер происходит в радианах. Происходит трансформация постановки задач и формулируется новое обоснование их решений, что приводит к появлению новых формул. Далее речь идет о тригонометрических функциях, их свойствах, которые позволяют упрощать выражения, решать уравнения и неравенства [39]. При любом построении тригонометрической линии учитель может при наличии времени начать работу по изучению тригонометрии еще в восьмом классе, т.к. большое число упражнений (на построение, преобразование, доказательство тождеств, вывод формул, решение уравнений с аргументом от 0° до 90°) выполняются «геометрически» [8, 48]. Например, следующие задачи:

Задача 1. По данным на рисунке 1 найдите $\cos \alpha$.



Задача 2. По данным рисунка найдите x .



Т.А. Бурмистрова в сборнике рабочих программ определяет следующие типы тождественных преобразований, которые изучаются в рамках темы «Тождественные преобразования тригонометрических выражений»: преобразование выражений, содержащих буквенные данные; выражения, основанные на формулах, тождественные преобразования рациональных выражений, основываясь на правилах действия над многочленами и алгебраическими дробями; преобразования для разложения многочленов на множители; преобразование выражений, которые содержат квадратные корни и степени с целыми показателями.

Согласно учебнику С.М. Никольского, в рамках темы «Преобразование тригонометрических выражений» изучаются следующие формулы, используемые в процессе преобразования: свойства тригонометрических выражений и основные формулы при решении задач; формулы косинуса и синуса разности и суммы двух углов; формулы суммы и разности синусов и косинусов; формулы для дополнительных углов; формулы для половинных и двойных углов; формулы для произведения синусов и косинусов;

Таким образом, тема «Преобразование тригонометрических выражений» занимает важное место в курсе школьной математики. Если говорить о сформированности умений, направленных на решение тригонометрических уравнений, следует акцентировать внимание на том, что данные умения складываются в систему [23], которую мы изобразили на рисунке 1. Важность сформированности умений, направленных на решение тригонометрических уравнений, обусловлена тем, что при их решении обучающиеся активно используют тождественные преобразования и, для

более полного усвоения данной темы они должны усвоить основы решения тригонометрических уравнений.

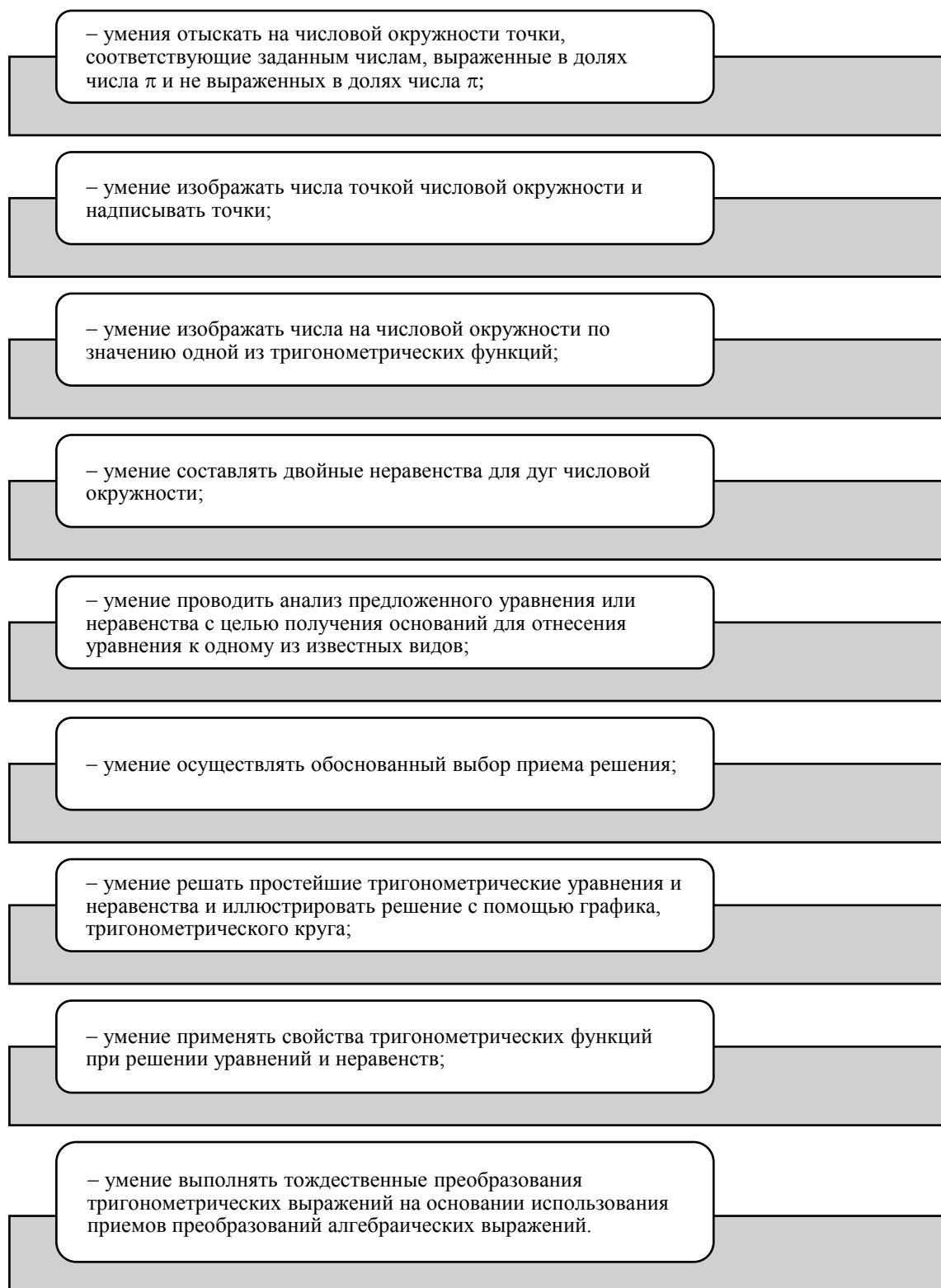


Рисунок 1 - Система умений, направленных на решение тригонометрических уравнений и неравенств [23]

Все вышерассмотренные умения, направленные на решение тригонометрических уравнений и неравенств, формируются на протяжении долгого периода. При этом в процессе формирования у детей приемов преобразования тригонометрических выражений или неравенств происходит постепенное развитие этих умений, обусловленное новым изучаемого материала.

Под преобразованием тригонометрических выражений понимают упрощение, выполняемое с помощью формул из тригонометрии [25].

В тождественных преобразованиях тригонометрических выражений активно используются следующие алгебраические приемы: осуществление добавления и вычитание одинаковых слагаемых; вынесение общего множителя за скобки; умножение и деление структурных элементов выражения на одну и ту же величину; использование изученных формул на сокращенное умножение; выделение полного квадрата; разложение квадратного трехчлена на несколько множителей; добавление новых переменных для того, чтобы упростить преобразование [25].

Существуют основные типы заданий, которые решаются при помощи приемов преобразования тригонометрических выражений [52]:

1) во время преобразования выражения, содержащего большое количество тригонометрических выражений, необходимо привести его к минимальному количеству видов функций. Для этого следует воспользоваться основными тригонометрическими тождествами, формулами приведения и другими формулами:

а) основными тригонометрическими тождествами являются следующие:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

2) если выражение содержит функции с разными аргументами, необходимо привести их к одному аргументу;

3) если для упрощения выражений необходимо получить кофункцию, необходимо воспользоваться формулами приведения:

$$\sin(\pi + t) = \sin \pi \cos t + \cos \pi \sin t = 0 \cdot \cos t + (-1) \cdot \sin t = -\sin t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos t - \sin \frac{\pi}{2} \sin t = 0 \cdot \cos t - 1 \cdot \sin t = -\sin t$$

4) если в выражении имеются функции высоких степеней, то можно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством или же формулами понижения степеней:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

5) для преобразования некоторых выражений необходимо использовать дополнительные формулы, которые не рассматривались в предыдущих вопросах. Данное правило используется в тех случаях, когда выше рассмотренные формулы не могут быть применены:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

6) С помощью следующих формул можно избавиться от произведения функций, перейдя к сумме:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

7) Переход к половинным углам проводится следующим образом:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}$$

При осуществлении преобразований тригонометрических выражений, в которых содержатся дроби, активно могут быть использованы различные свойства пропорций, приемы и правила сокращения дробей, приведение дробей к общему знаменателю [63]. При этом также можно организовать выделение целой части дроби, осуществлять умножение числителя и знаменателя дроби на одинаковую величину, но при этом необходимо обязательно учитывать, что числитель и знаменатель должны быть однородными. При необходимости можно представлять дробь в виде суммы или разности нескольких более простых дробей [22].

Таким образом, под преобразованием тригонометрических выражений понимают упрощение, выполняемое с помощью основных тригонометрических тождеств, формул приведения и других формул. В тождественных преобразованиях тригонометрических выражений активно используются следующие алгебраические приемы: осуществление добавления и вычитание одинаковых слагаемых; вынесение общего множителя за скобки; умножение и деление структурных элементов выражения на одну и ту же величину; использование изученных формул на сокращенное умножение; выделение полного квадрата; разложение квадратного трехчлена на несколько множителей; добавление новых переменных для того, чтобы упростить преобразование.

§3. Методическая схема обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений

Для того, чтобы разработать собственную методическую схему обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений, нами были изучены различные учебники с целью определения основного

порядка, которого придерживаются педагоги, признанные в отечественной науке. При проведении анализа мы брали учебники для профильных классов и учебники по тригонометрии, т.к. в рамках нашего исследования предполагается разработка элективного курса, при реализации которого мы предпочитаем использовать более подробную схему обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений.

В учебнике А.Г. Мордковича и П.В. Семенова предлагается схема обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений на уровне 10 класса в профильном классе, которая описана нами ниже. Данный учебник был взят нами за основу исследования. На первом этапе обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений проводится изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов [45]:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Согласно учебнику, изучение данных формул является самым важным в процессе обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений, т.к. с их помощью возможно вывести практически все основные формулы тригонометрии.

На следующем этапе обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений происходит изучение тангенса суммы и разности аргументов и соответствующие им формулы [45]:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Затем начинается изучение формул приведения. Обучение строится на том, что если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение $\frac{\pi}{2} + t$; $\frac{\pi}{2} - t$; $\pi + t$; $\pi - t$; $\frac{3\pi}{2} + t$; $\frac{3\pi}{2} - t$ и подобные, то оно может быть приведено к более простому виду, в котором в качестве аргумента

тригонометрической функции выступает только аргумент t . Именно данные формулы представляют собой формулы приведения. Примеры формул приведения [45]:

$$\sin(\pi + t) = \sin \pi \cos t + \cos \pi \sin t = 0 \cdot \cos t + (-1) \cdot \sin t = -\sin t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos t - \sin \frac{\pi}{2} \sin t = 0 \cdot \cos t - 1 \cdot \sin t = -\sin t$$

Педагог при этом акцентирует внимание на том, что, наименование преобразуемой функции после приведения к функции аргумента может сохраниться, а может также измениться на родственное: синус может превратиться в косинус, а котангенс в тангенс и т.д. При этом также обращает внимание обучающихся на то, что перед полученным выражением может появиться знак «минус», однако, это происходит не во всех ситуациях. Также проводится работа, направленная на то, чтобы дети могли запомнить практически все формулы приведения [45]:

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$ или $2\pi - t$, то наименование тригонометрической функции сохраняется;

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$ или $\frac{3\pi}{2} - t$, то наименование изменяется на родственное;

3) перед полученной функцией от аргумента t необходимо ставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция в том случае, если $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Затем проводится изучение формул двойного аргумента, которые позволяют выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ через $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$. Проводится доказательство следующих формул двойного аргумента [45]:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Далее вводится понятие преобразования сумм тригонометрических выражений в произведения. Делается акцент на то, что данные формулы являются наиболее полезными в процессе преобразования тригонометрических выражений, т.к. они позволяют сумму и разность синусов или косинусов разложить на множители. Проводится изучение следующих формул [45]:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

На следующем этапе обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений проводится формирование навыков преобразования произведений тригонометрических выражений в суммы. У детей акцентируется внимание на том, что любая математическая формула на практике может применяться как справа налево, так и слева направо. Именно поэтому в тригонометрии также может осуществляться преобразование произведений тригонометрических выражений в сумму. Изучаются следующие формулы [41]:

$$\begin{aligned}\sin s \cos t &= \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2} \\ \cos s \cos t &= \frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2} \\ \sin s \sin t &= \frac{\cos(s-t) - \cos(s+t)}{2}\end{aligned}$$

Затем осуществляется обучение преобразованию выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin(x+t)$. Приводится доказательство следующей функции:

$$\sin x + B \cos x = C \sin(x+t), \text{ где } C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

И на последнем этапе обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в рамках данного учебника проводится обучение основным методам преобразования тригонометрических выражений. Обобщаются данные об изученных основных методах преобразования тригонометрических выражений, изученных ранее: введение новой переменной и разложение на множители, и выделяются частные случаи этих методов: частный случай метода введения вспомогательного аргумента [45].

Далее проводится анализ учебника по тригонометрии под редакцией С.А. Теляковского [59]. В рамках данного учебника в процессе обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений в целом образовательный процесс проводится по тому же принципу, что и в рассмотренном выше примере, формирование навыков преобразования тригонометрических выражений проводится по тем же этапам. Однако, к решению предлагаются более сложные задания, а также проводится изучение не всех формул приведения, рассмотренных выше, и не уделяется внимание частным случаям применения методов преобразования тригонометрических выражений [59]. При этом также в рамках данного учебника предварительно проводится работа по углублению знаний о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе, а также проводится углубленное формирование представлений о свойствах синуса, косинуса, тангенса и котангенса. На основании этих двух методик обучения мы составили собственную методическую схему обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений. Отразим ее на рисунке 2.

Таким образом, в рамках теоретического анализа литературы по проблеме исследования мы разработали методическую схему обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений: углубленное изучение синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов; углубленное изучение свойств синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов; изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса

суммы аргументов; изучение тангенса суммы и разности аргументов и соответствующие им формулы; формулы приведения; изучение формул двойного аргумента; понятие преобразования сумм тригонометрических выражений в произведения; обучение преобразованию произведений тригонометрических выражений в суммы; обучение основным методам преобразования тригонометрических выражений.

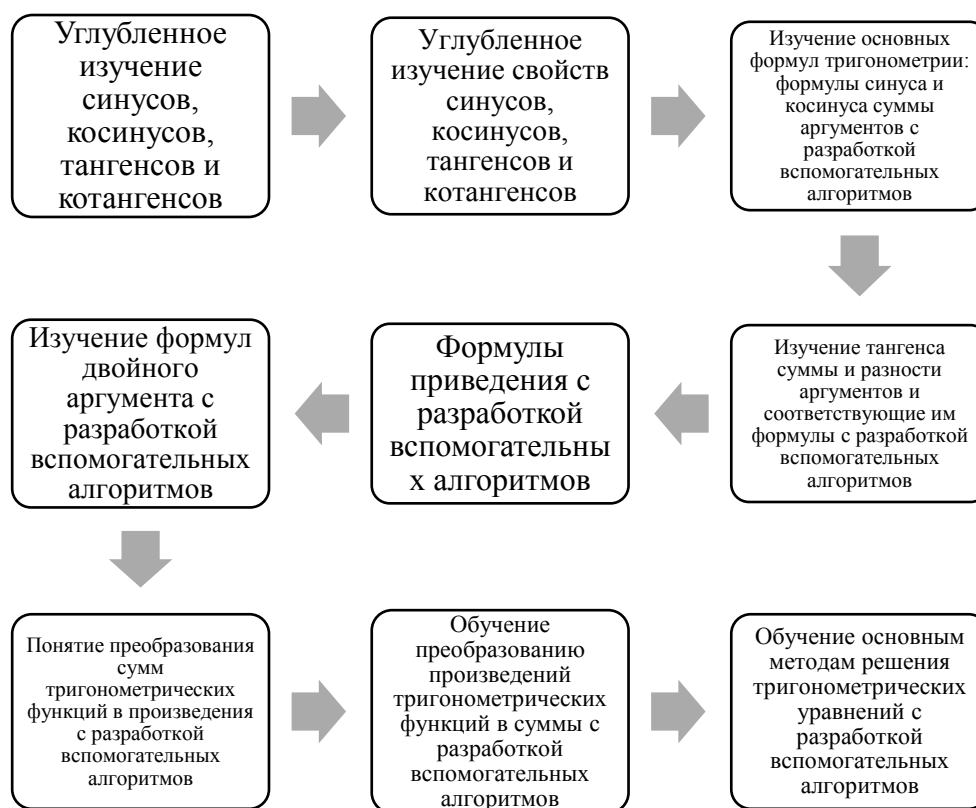


Рисунок 2-Методическая схема обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений

§4. Требования к системе задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры

В процессе преподавания раздела «Тождественные преобразования» в курсе обучения в основной школе проводится работа по формированию математического аппарата для того, чтобы обучающиеся могли эффективно решать задачи по математике, а также по смежным предметам. В качестве

одной из наиболее важных задач изучения данного раздела является формирование алгоритмической культуры ребенка, которая необходима в дальнейшем для изучения обучающимися других дисциплин, а также для формирования у них навыков дедуктивных рассуждений [46]. Использование преобразований символической формы выражения способствует развитию у обучающихся воображения, развивает у них способности к проявлению математического творчества [62]. При изучении раздела «Тожественные преобразования» обучающиеся активно используют преобразование выражений в процессе работы с показательными, логарифмическими и тригонометрическими выражениями, что помогает им более эффективно решать соответствующие уравнения, неравенства и их системы.

Определение алгоритмической культуры обучающихся в рамках изучения математических дисциплин в курсе школьного обучения выступает в качестве главного условия для эффективной реализации принципов прикладной направленности [47].

Определение «алгоритм» обладает большой важностью в научных и практических исследованиях. Данное понятие всегда активно изучалось философами, психологами, математиками, информатиками, кибернетиками и педагогами. Следует отметить, что в различных науках трактовка данного феномена различна и имеет специфику, которая соответствует особенностям предмета исследования в каждой из наук. Различными авторами дается определение «алгоритма» на основании различных позиций, которых они придерживаются [28].

Приведем самые распространенные формулировки и подходы к определению понятия «алгоритм». Впервые понятие Algorithmi было введено Мухамедом бен-Муса аль-Хорезми еще в 9 веке нашей эры. Согласно мнению Н.И. Кондакова, алгоритм представляет собой определенное описание в соответствии с определенными шагами, которое используется для механического процесса выполнения «единообразного и опирающегося на конечное множество правил решения любой конкретной задачи из какого -

либо класса задач данного определенного типа» [29, С. 30]. В качестве ключевых моментов в данном определении следует отметить, что автор указывает, что существует класс задач, который может быть разбит на решение в соответствии с определенными этапами. В математической энциклопедии предоставлено более узкое определение данного понятия, согласно которому под алгоритмом следует понимать определенное точное описание, на основании которого происходит вычислительный процесс, который может, в свою очередь, называться алгоритмическим [28].

В исследованиях С.Л. Рубинштейна в качестве алгоритмического процесса выступает процесс решения задачи, который осуществляется в соответствии с конкретно выделенными этапами [55, С. 143]. Согласно его мнению, в процессе первого этапа осуществляется проведение анализа, при помощи которого выделяется то, что дано и то, что необходимо найти. Во время второго этапа происходит освобождение данных от различных привходящих обстоятельств, к примеру, при помощи изображения на чертеже. Далее, во время третьего этапа определяется, каким образом должна быть решена задача в соответствии с условиями и требованиями и проводится непосредственное решение. Л.С. Рубинштейном было отмечено, что в процессе алгоритмизации мышления происходит трансформация мыслительных процессов и их динамики [55]. «На первых порах мыслительная деятельность определяется по преимуществу подвижными динамическими соотношениями, складывающимися и изменяющимися в самом процессе решения задачи. В ходе самой мыслительной деятельности по мере того, как субъект повторно разрешает одни и те же или однородные задачи, в ней образуются и фиксируются откладывающиеся в субъекте более или менее устойчивые механизмы - автоматизмы, навыки мышления, которые начинают детерминировать мыслительный процесс. Поскольку определенные механизмы сложились, они определяют в той или иной мере протекание деятельности, но и они сами в свою очередь определяются ею, складываясь в зависимости от ее протекания» [28, С. 56].

В области психолого-педагогического исследования Л.Н. Ланда различает между собой определения «алгоритм» и «алгоритм обучения». Согласно мнению автора, алгоритм, используемый в процессе обучения, имеет следующие различия с общим понятием алгоритма: «операции, допускаемые для алгоритмических предписаний, часто предполагают апелляцию к пониманию того, что делает человек, к явному учёту смысла, содержания языковых выражений и т.п. Можно сказать, что в отличие от алгоритмов в строгом математическом смысле, алгоритмические предписания допускают правила, которые обращены не только к формальным, но и к содержательным операциям» [31, С. 21].

Философами и математиками алгоритм понимается в качестве точного предписания, которое определяет все действие по совершению вычислительного процесса, как указывают в своих исследованиях И.В. Виноградов и А.П. Савин. При этом исследователями акцентируется внимание на том, что конечный результат, который получается в итоге вычислительного процесса, в большей степени зависит от произвольных исходных данных, которые являются некоторой совокупностью всех возможных данных [33, С. 56].

В точных науках под алгоритмом понимают однозначное предписание, на основании которого осуществляется преобразование имеющихся данных для того, чтобы достигнуть необходимого результата. Согласно данному определению, если точно выполнять алгоритм, всегда возможно правильно решить задачу из рассматриваемого класса, для которого данный алгоритм разработан. При этом эффективность процесса решения задачи зависит от того, насколько точно выполняется последовательность команд, предусмотренных алгоритмом [33, С. 56]. Следовательно, в качестве алгоритма следует понимать однозначное предписание, на основании которого осуществляется преобразование имеющихся данных для того, чтобы достигнуть необходимого результата.

Понятие «алгоритм» в математике выступает в качестве основного и фундаментального. Каждый обучающийся в процессе обучения на уроках математических дисциплин постоянно использует алгоритмы и приходит от заданных условий к результату решения задачи. Использование алгоритмов, конечно, происходит не только на уроках математики, однако, в отличие от других наук, для того чтобы произошло эффективное формирование математических понятий и освоение методов решения, как правило, невозможно выполнять действия без того, чтобы следовать определенному алгоритму, выполнять задания по этапам и последовательно [30]. На данном подходе основаны основные правила по решению различных стандартных уравнений и неравенств, согласно данному подходу разработаны основные методы для решения типовых задач по математике, в соответствии с данным подходом определяются правила построения графиков функций и различные другие частные вопросы. Как правило, если в математике не удастся установить определенный алгоритм решения, то данные уравнения, неравенства и задачи считаются нестандартными.

Алгоритмический подход – это обучение учащихся методу решения задания через применение алгоритма, который описывает этот метод. Важно, чтобы алгоритм был кратким и понятным, чтобы даже слабые ученики смогли его применить. Использование алгоритмов при решении задач способно повысить результативность обучения, а также перейти от контроля к самоконтролю. Более того, строгая последовательность действий очень дисциплинирует учащихся не только в плане оформления решения задач, но и в плане организации действий для достижения результата.

Также алгоритмический подход может помочь не только слабым учащимся, но и более сильным ученикам. После того, как были изучены основные алгоритмы решения задач, учащиеся могут предложить свой, более короткий или интересный алгоритм решения одной и той же задачи, что влияет на развитие творческого мышления. Можно делать так, чтобы ученики сами анализировали задачу, а затем составляли алгоритм ее

решения. То есть создавать такую проблемную ситуацию, из которой ученики должны будут найти рациональный выход. Данный прием поспособствует повышению познавательного интереса к урокам математики. Но для того, чтобы научиться творчески мыслить, сначала нужно отработать решения задач с помощью основных алгоритмов. Затем уже можно предлагать ученикам нестандартные задачи, в которых они должны будут отыскать знакомую задачу и привести алгоритм её решения.

Обычно под термином «алгоритмическая культура» подразумевают совокупность специфических алгоритмических представлений и навыков, которые на современном этапе развития общества должны составлять часть общей культуры отдельной личности и, следовательно, определять целенаправленный компонент профессионального образования [11, с. 34]. В других исследованиях под алгоритмической культурой принято понимать «совокупность специфических алгоритмических представлений, умений и навыков, которые на современном этапе развития общества должны составлять часть общей культуры человека» [4, С. 3].

Алгоритмическая культура представляет собой ту часть математической культуры, которая стимулирует развитие у детей специальных представлений о понятии «алгоритм» [47].

В отечественной психологии П.П. Блонским, Л.С. Выготским, А.Н. Леонтьевым, Н.А. Менчиской, С.Л. Рубинштейном и другими исследователями отмечается, что весь процесс интеллектуального развития осуществляется в соответствии с динамической системой изменений качественного и количественного характера, которые происходят на уровне психической деятельности, обусловленные возрастным развитием и полученным жизненным опытом. Таким образом, уровень развития алгоритмической культуры личности во многом зависит от уровня интеллектуального развития человека, но при этом также способствует дальнейшему познавательному развитию ребенка [9, 21].

Алгоритмическая культура считается частью математической культуры, способствующей формированию и развитию особенных представлений, связанных с понятием алгоритма. Одним из определяющих условий становления алгоритмической культуры является потребность личности в гармоничном сочетании интеллектуальных способностей и духовных основ. Поэтому ее обязательными компонентами должны быть, с одной стороны, интеллектуальное развитие (знания, умения и навыки, способы творческой деятельности, способность к самоорганизации), с другой – личностные мотивы (познавательные, нравственные интересы) [69].

Разноуровневая структура алгоритмической культуры дает также возможность ученикам использовать основные принципы альтернативного мышления, которые не противоречат их собственным суждениям и стремлениям. Выбор альтернативы определяется представлениями исполнителя возможности достижения результата (прогнозно-эвристической функцией алгоритмического мышления). Это вооружает учащихся знаниями и умениями принятия принципиальных решений, максимально освобождая их от элементов субъективизма, независимо от количества полученной информации.

И. Г. Шеин [6] выделил умения, входящие в понятие алгоритмической культуры:

- 1) умение действовать по данному алгоритму безошибочно;
- 2) умения «открывать» алгоритм;
- 3) обосновать полученные алгоритмы;
- 4) находить более рациональные алгоритмы;
- 5) переходить от развернутых действий к свернутым и наоборот;
- 6) проверить правильность алгоритмов;
- 7) видеть взаимосвязь алгоритмов.

Эти умения можно формировать в процессе ознакомления учащихся с различными алгоритмами.

Знакомство младших школьников с алгоритмами возможно осуществлять двумя способами:

- 1) сообщение учащимся готовых алгоритмов;
- 2) самостоятельное открытие учащимся необходимых алгоритмов.

Формирование алгоритмической культуры учащихся – одна из важнейших задач на уроках математики. Это обусловлено тем, что за все годы изучения данного предмета ученики изучают очень большой объем информации. И если теоретический материал будет преподаваться ребятам, не имея строгого алгоритма, последовательности, то не все ученики смогут применить его на практике. А ведь весь курс математики пронизан решением задач [37]. Также формирование алгоритмической культуры учащихся предусматривается и в Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) в предметных результатах обучения.

В.С. Абловой в диссертационном исследовании была разработана методика обучения математике, которая ориентирована на целенаправленное формирование алгоритмической культуры ребенка [1]. Автор указывает, что только в ситуациях, когда широко раскрываются алгоритмические особенности теоретического курса обучения математике на этапе школьного образования возможно достигнуть высокого уровня эффективности обучения по всем математическим дисциплинам.

В качестве одной из самых важных задач, которые на сегодняшний день стоят перед преподавателем по математике, выступает стремление к тому, чтобы развивать у обучающихся самостоятельную логику мышления, которая позволила бы детям более эффективно строить собственные умозаключения, осуществлять более эффективный поиск доказательств, формулировать высказывания, которые между собой имеют четкую логическую связь, разрабатывать собственные алгоритмы и обосновывать особенности их применения. Для этого в курсе математики основной школы должно быть организовано активное использование задач на тождественные

преобразования тригонометрических выражений, в которых необходимо построить алгоритмы решения [42].

В случае, когда у ребенка происходит эффективное усвоение алгоритмических знаний и умений, у него также наблюдается эффективное формирование алгоритмической культуры. Под алгоритмической культурой понимают сформированное умение к тому, чтобы решать задачи, которые имеют различное происхождение, на основании составления подробного поэтапного плана действий, который в дальнейшем позволит достигнуть желаемого результата [43].

В процессе использования задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений у обучающихся происходит активное формирование умений осуществлять планирование собственной деятельности, у них повышаются навыки контрольно-оценочной деятельности, они учатся планировать процесс решения задачи. Если обучающийся при этом может проанализировать собственную деятельность на основании сформированной алгоритмической культуры, он может в дальнейшем научиться разрабатывать алгоритмы для абсолютно любого вида деятельности, что и придает данной работе особую значимость [42].

Исследователями выделяется несколько способов обучения составления алгоритмов при решении задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированных на развитие алгоритмической культуры [29, С. 149]:

- 1) осуществление ознакомления обучающихся с уже готовыми алгоритмами;
- 2) осуществление процесса создания проблемной ситуации, которая позволит подвести обучающихся к тому, чтобы они могли самостоятельно открыть необходимый для решения проблемной ситуации алгоритм.

Как правило, использование данных способов не противоречит друг другу. Они могут использоваться вместе для того, чтобы формировать алгоритмическую культуру обучающегося в процессе решения задач на

тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированных на развитие алгоритмической культуры наиболее эффективно [29, с. 149].

В общем случае считается, что условия, в которых происходит осуществление процесса создания проблемной ситуации, которая позволит подвести обучающихся к тому, чтобы они могли самостоятельно открыть необходимый для решения проблемы алгоритм, являются наиболее эффективны, т.к. формируют более выраженные навыки к построению алгоритмов у обучающихся [29, с.142]. В данном случае формирование алгоритма осуществляется в процессе следующих этапов [53]:

1. Составление алгоритма, в процессе которого проводится актуализация знаний у обучающихся, необходимых для того, чтобы они могли обосновать алгоритм. Обучающиеся разрабатывают алгоритм при помощи педагога, формулируют его, а затем составляют блок-схему.

2. Осуществление непосредственного усвоения алгоритма в процессе отработки отдельных операций, которые предусмотрены открытым алгоритмом.

3. Работа по отработке применения алгоритма в условиях выполнения знакомых заданий, а затем с применением нестандартных задач.

Г.И. Саранцев проанализировал процесс формирования алгоритмической культуры и выделил требования к задачам на использование тождественных преобразований тригонометрических функций. Согласно мнению автора, они должны [56]:

1. Способствовать мотивации введения понятий, необходимых для формирования алгоритмической культуры, усвоению существенных свойств, их синтезированию, усвоению терминологии, символики, пониманию значения каждого слова в определении, запоминанию определения, овладению объемом понятия.

2. Выявлять существенные свойства понятий.

3. Раскрывать взаимосвязь понятия алгоритмической культуры с другими понятиями.

4. Обучать применению понятия алгоритмической культуры.

В организации формирования алгоритмической культуры задачи должны [56]:

1) способствовать пониманию значения каждого слова в процессе разработки алгоритмов, запоминанию методов разработки алгоритмов;

2) выявлять закономерность, отраженную в процессе составления алгоритмов;

3) обеспечивать восприятие идеи доказательства алгоритмов;

4) раскрывать приемы доказательства алгоритмов;

5) обучать применению алгоритмов для решения различных задач;

6) устанавливать взаимосвязь разработанного алгоритма с другими алгоритмами.

Каждое требование реализуется с помощью специальных задач.

В результате анализа требований различных авторов и методистов мы остановились на следующих требованиях к системе задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры:

1) в процессе реализации системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры у обучающихся необходимо проводить своевременное формирование понятия «алгоритм» и в процессе изучения каждой темы должна проводиться работа по формированию навыков поиска алгоритмов и их построения с последующим контролем педагога выполняемой работы и своевременной корректировкой;

2) реализация системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры должно проводиться таким образом, чтобы обучающиеся на протяжении всего образовательного процесса осознавали

алгоритмический характер методов тождественных преобразований тригонометрических выражений. Для этого предполагается последовательная разработка алгоритмов в процессе решения каждого нового типа задач и дальнейшее применение разработанных алгоритмов при решении подобных задач. Т.е. в процессе всего обучения акцент учащихся делается именно на использование алгоритма при решении задач [12];

3) методика реализации системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры должна включать в себя использование разнообразных элементов алгоритмизации, которые необходимо сопровождать наглядной демонстрацией для более эффективного обоснования каждого этапа;

4) при реализации системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры задачи необходимо подбирать в соответствии с уровнем сформированности у обучающихся алгоритмической культуры;

5) при организации реализации системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры необходимо также подбирать усложненные задачи, которые основаны на ситуациях из реальной жизни для того, чтобы воспитывать алгоритмическую культуру таким образом, чтобы обучающиеся в дальнейшем могли самостоятельно разрабатывать алгоритмы в жизненных ситуациях и условиях.

Таким образом, при изучении математических дисциплин для формирования алгоритмической культуры подразумевается использование особой организации содержательного и методического компонентов обучения. Для того, чтобы система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений была ориентирована на развитие алгоритмической культуры, задачи должны отвечать ряду требований,

которые выделены нами в результате проведения теоретического анализа литературы по проблеме исследования.

Выводы по первой главе

В результате проведения теоретического анализа литературы по проблеме исследования нами сделаны следующие выводы:

1) в качестве сути метода тождественных преобразований следует понимать процесс, при котором организуется использование преобразования различных алгебраических выражений при помощи осуществления замены выражения или одного из его структурных компонентом на тождественно равное ему выражение для достижения целевых требований, выдвигаемых в рамках решения задачи. В качестве главной цели, преследуемой в процессе изучения на уроках алгебры темы «Тождественные преобразования» выступает стремление показать обучающимся, какие пути преобразования тождеств являются наиболее эффективными. При этом выяснено, что школьники допускают ошибки и в случае применения верных приемов решения, причем не только на уроках и в процессе контрольно-оценочной деятельности, но и при выполнении заданий ОГЭ и ЕГЭ;

2) под преобразованием тригонометрических выражений понимают упрощение, выполняемое с помощью основных тригонометрических тождеств, формулам приведения и других формул. В тождественных преобразованиях тригонометрических выражений активно используются следующие алгебраические приемы: осуществление добавления и вычитание одинаковых слагаемых; вынесение общего множителя за скобки; умножение и деление структурных элементов выражения на одну и ту же величину; использование изученных формул на сокращенное умножение; выделение полного квадрата; разложение квадратного трехчлена на несколько множителей; добавление новых переменных для того, чтобы упростить преобразование;

3) методическая схема обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений должна подразумевать следующее: углубленное изучение синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов; углубленное изучение свойств синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов; изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов; изучение тангенса суммы и разности аргументов и соответствующие им формулы; формулы приведения; изучение формул двойного аргумента; понятие преобразования сумм тригонометрических выражений в произведения; обучение преобразованию произведений тригонометрических выражений в суммы; обучение основным методам преобразования тригонометрических выражений;

4) при изучении математических дисциплин для формирования алгоритмической культуры применяется особая организация содержательного и методического компонентов обучения. Для того, чтобы система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений были ориентированы на развитие алгоритмической культуры, они должны отвечать ряду требований, которые выявлены нами в результате проведения теоретического анализа литературы по проблеме исследования.

ГЛАВА II. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§5. Основные формы и методы обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений

В процессе организации обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений мы использовали следующие формы работы:

- групповая работа;
- коллективная работа;
- индивидуальная работа;
- парная работа.

В рамках одного урока нами использовались сразу несколько форм работы учащихся. В таблице 5 представлен фрагмент занятия, на котором проводилось повторение формул, изучаемых в рамках реализации элективного курса. На данном занятии одновременно применялись индивидуальная, коллективная и парная формы работы.

В рамках коллективной деятельности мы практиковали составление алгоритмов по цепочке или с применением метода коллективной дискуссии. В таблице 6 представлен фрагмент занятия, на котором мы использовали составление алгоритма по цепочке.

Таблица 5 - Фрагмент занятия «Повторение основных методов преобразования тригонометрических выражений» (этап повторения ранее изученного материала)

Деятельность	
1. «Восстанови формулы». Один учащийся у интерактивной доски дописывает формулы:	
1.	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
2.	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
3.	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
4.	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
5.	$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
6.	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
7.	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
8.	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
9.	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
10.	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
А теперь давайте все вместе проверим правильность выполнения, и, если есть ошибки, исправим их. Используется парная работа. Дети меняются тетрадями, проверяют работы друг друга. Затем педагог открывает доску с правильным решением уравнений, и дети выполняют самопроверку.	
2. Решение заданий у доски	
1)	$2\sin^2 2\alpha + \cos 4\alpha$
2)	$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
3)	$\frac{2\sin^2 \alpha}{1 - \cos 2\alpha}$
4)	$\frac{1 - \cos(2\pi - 2\alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}$
5)	$\frac{\cos 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$
Один учащийся у меловой доски решает устно несколько заданий, записывая только ответы и формулы, которые применял. Остальные учащиеся работают в парах следующим образом: выполняют задание в обсуждении, определяя, какой метод решения наиболее подходящий. Проверка правильности выполнения задания проводится в коллективном обсуждении. Дети по желанию высказываются о тех ошибках, которые обнаружили и в коллективной дискуссии определяют, как можно было решить задание более эффективно.	
3. Составление алгоритмов решенных заданий	
После решения заданий из п.1 дети снова работают индивидуально, выбирая любое из выше решенных заданий и составляя алгоритм решения этого уравнения	

Таблица 6 - Фрагмент занятия «Формулы преобразования произведений тригонометрических выражений в сумму» (этап получения новых знаний)

Деятельность	
На уроке доказываются формулы преобразования произведений трех видов: синуса на синус, косинуса на косинус и синуса на косинус. Решается несколько примеров на использование этих формул. Доказать: $\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$ $\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$ $\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$ Доказательство: 1) Формулы синуса разности и суммы: $\begin{cases} \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \end{cases}$ Складывая, получаем: $\sin(x - y) + \sin(x + y) = 2 \sin x \cos y \text{ отсюда,}$ $\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$ 2) Формулы косинуса разности и суммы: $\begin{cases} \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{cases}$ Складывая, получаем: $\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2 \cos x \cos y$ Что можно записать: $\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$ 3) Вычитая косинус суммы из косинуса разности, получим: $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y$ что преобразуется в формулу: $\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$	
Закрепление полученных знаний	Дети по цепочке составляют алгоритм преобразования произведений тригонометрических выражений в сумму

При организации групповой работы мы делили класс на несколько групп и просили их самостоятельно разработать алгоритм тождественного преобразования тригонометрических выражений в сумму. Затем представитель от каждой группы демонстрировал свой алгоритм на доске,

дети сравнивали свои алгоритмы и на основании полученных результатов разрабатывали один общий алгоритм.

В рамках организации обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений нами были использованы следующие методы работы: лекция; дискуссия; наглядный метод; практический метод; метод работы с интерактивной доской.

При помощи лекции проводилось описание нового материала исследования, объяснение того, как в рамках новой темы можно использовать алгоритмы. В таблице 7 представлен фрагмент занятия «Формулы преобразования произведений тригонометрических выражений в сумму» с использованием метода лекции.

При коллективной дискуссии дети выполняли построение алгоритмов на основании обсуждения того, какой шаг должен применяться следующим, что именно необходимо сделать и почему. К примеру, был организован следующий диалог в рамках проведения занятия «Формулы преобразования произведений тригонометрических выражений в сумму»:

- Итак, дети, сейчас мы с вами составим алгоритм осуществления преобразования произведений тригонометрических выражений в сумму. Какой шаг вам необходимо сделать в первую очередь для достижения результата?

В ходе обсуждения дети приходят к выводу, что в первую очередь нужно определить, какой именно формулой необходимо пользоваться их трех изученных на данном занятии.

Таблица 7 - Фрагмент занятия «Формулы преобразования произведений тригонометрических выражений в сумму» с использованием метода лекции (этап получения новых знаний)

Деятельность

На уроке доказываются формулы **преобразования произведений** трех видов: синуса на синус, косинуса на косинус и синуса на косинус, решается несколько примеров на использование этих формул.

Доказать:

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

Доказательство:

1) Формулы синуса разности и суммы:

$$\begin{cases} \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \end{cases}$$

Складывая, получаем:

$$\sin(x - y) + \sin(x + y) = 2 \sin x \cos y$$

отсюда,

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2}$$

2) Формулы косинуса разности и суммы:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{cases}$$

Складывая, получаем:

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2 \cos x \cos y$$

Что можно записать:

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

3) Вычитая косинус суммы из косинуса разности, получим:

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y$$

что преобразуется в формулу:

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

Итак, дети, как мы видим, при доказательстве данных выражений мы использовали определенные алгоритмы, которые могут применяться в рамках решения задач, подобных этим. Использование одного единого алгоритма позволит упростить процесс решения задачи, что, в свою очередь, повысит эффективность проводимых вами преобразований и вычислений

- Хорошо, теперь давайте подумаем, что необходимо делать дальше.

Дети обсуждают и приходят к выводу, что необходимо подставить имеющуюся формулу в уравнение, которое необходимо решить и в соответствии с тем, как именно происходит преобразование в образце, привести свой пример к необходимому.

- Все верно. И какой будет наш следующий шаг?
- Сможем найти значение полученного в ходе преобразования выражения.

Наглядный метод использовался при демонстрации детям основ построения алгоритмов по определенным формулам тождественных преобразований тригонометрических выражений. Задачей учащихся было на основании данного алгоритма составить такие же, но с другими формулами тождественных преобразований тригонометрических выражений.

В рамках практического метода предлагалось решение задач по формулам тождественных преобразований тригонометрических выражений в соответствии с разработанными ранее алгоритмами.

Метод работы с интерактивной доской применялся совместно со всеми вышерассмотренными методами работы в качестве средства наглядности, а также для облегчения проводимой работы.

§6. Система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня

При подборе системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня мы подбирали их таким образом, чтобы в процессе решения любой их них обучающиеся использовали алгоритмы. При этом все задачи подбирались нами из профильного курса по математике и тригонометрии для 10-11 классов, т.к. применение элективного курса подразумевало использование задач именно данного уровня. В качестве новизны разработки системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня в комплекс также были включены олимпиадные задачи.

Задачи подбирались по каждой теме, которая предлагалась к изучению при реализации элективного курса «Тождественные преобразования тригонометрических выражений». При этом в рамках решения всего

комплекса задач дети должны были использовать алгоритмы, разработанные ими ранее, для оптимизации процесса решения. Использование алгоритмов было основано на формировании различных критериев алгоритмической культуры обучающихся: эмоционального, мотивационного и когнитивного. Формирование каждого из критериев проводилось следующим образом:

Формирование мотивационного компонента алгоритмической культуры проводилось в начале изучения каждого нового раздела. Обучающимся перед изучением нового раздела предлагались к решению задачи из общего списка. Затем, после того как обучающиеся решали эти задачи в течение продолжительного времени, педагог говорил, что решение может быть более простым, но не объяснял подробные шаги. Данный вид работы позволял мотивировать детей на поиск алгоритма для упрощения путей осуществления незнакомых для них тождественных преобразований тригонометрических выражений.

Формирование когнитивного компонента алгоритмической культуры проводилось непосредственно в процессе осуществления разработки алгоритмов детьми при выполнении задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений из списков.

Эмоциональный компонент алгоритмической культуры развивался в процессе использования итоговых олимпиадных задач, которые были на уровень сложнее основных задач в рамках проведения курса. За счет того, что дети, используя алгоритмы, могли осуществить тождественные преобразования тригонометрических выражений, на которые ранее были не способны, происходило развитие эмоционального компонента алгоритмической культуры, а также дополнительное развитие мотивационного компонента алгоритмической культуры.

Система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня предоставлен в приложении 1. Рассмотрим примеры проведенной работы.

В рамках решения задач по теме «Изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов» нами использовались следующие задания, для решения которых использовались разработанные детьми алгоритмы, включающие несколько последовательных шагов:

Задача 1. Выведите все формулы, приведенные ниже, из определений и формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha},$$

$$1 + ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Задача 2. Заполните пустые места в подписях к чертежам (рис. 3).

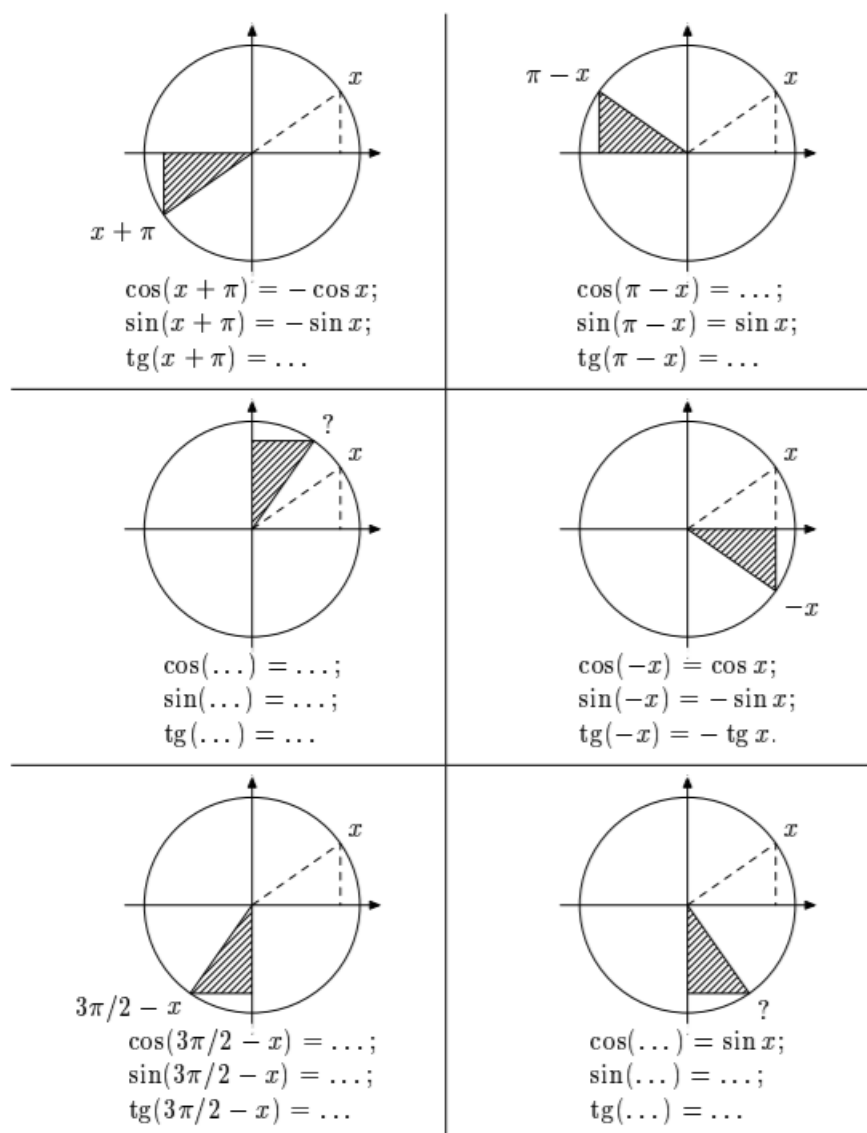


Рисунок 3 - Чертеж к задаче

В рамках изучения темы «Формулы приведения» использовались следующие задачи, для решения которых использовались разработанные детьми алгоритмы, включающие несколько последовательных шагов:

Задача 1. Упростите выражения, используя алгоритм:

- а) $\sin(x - \pi/2)$;
- б) $\sin(x - 1998\pi)$;
- в) $\sin(x - 1991\pi/2)$;
- г) $\sin(x - 3\pi/2)$;
- д) $\sin(2\pi - x)$; е) $\operatorname{tg}(x - \pi/2)$;

ж) $\sin(x - 111\pi)$;

з) $\cos(x + 7\pi/2)$;

и) $\operatorname{tg}(-x - 3\pi/2)$.

Задача 2. Вычислите, используя алгоритм:

а) $\cos(13\pi/6)$;

б) $\sin(44\pi/3)$;

в) $\cos(-21\pi/2)$;

г) $\operatorname{tg}(77\pi/4)$;

д) $\sin(123\pi/2)$;

е) $\sin(-19\pi/3)$;

ж) $\sin 3540^\circ$;

з) $\operatorname{tg}(-1050^\circ)$;

и) $\cos 1575^\circ$;

к) $\sin(-1200^\circ)$.

Задача 3. Выразите через тригонометрическую функцию числа, лежащего на отрезке $[0; \pi/2]$, используя алгоритм:

а) $\operatorname{tg} 19, 3\pi$;

б) $\operatorname{tg} 10$;

в) $\sin 46\pi/9$;

г) $\cos 114$;

д) $\sin(-9)$;

е) $\sin 22\pi/7$.

Задача 4. Определите знаки следующих выражений, используя алгоритм:

а) $\sin(127\pi/5)$;

б) $\cos(-26, 17\pi)$;

в) $\operatorname{tg} 83, 1\pi$;

г) $\cos 17$;

д) $\sin(-46)$.

В таблице 8 представлен фрагмент занятия с использованием одного из примеров задач, для решения которой использовались разработанные детьми алгоритмы, включающие несколько последовательных шагов.

Таблица 8 - Фрагмент занятия с использованием указанного выше примера задачи, для решения которой использовались разработанные детьми алгоритмы, включающие несколько последовательных шагов (этап закрепления полученных знаний)

Деятельность
Вычислите: а) $\cos(13\pi/6)$ Педагог: Какой будет наш первый шаг? Обучающиеся: подобрать формулу приведения. П: что нам нужно сделать, чтобы определить, какой формулой мы можем воспользоваться? О: привести выражение к соответствующей формуле. $13\pi/6$ можно представить в виде $12\pi/6 + \pi/6$, что можно привести к выражению $2\pi + \pi/6$, и, следовательно, можно использовать формулу: $\cos(2\pi + \pi/6) = \cos\pi/6$ П: и следующий шаг? О: вычислить выражение. Ответ $\sqrt{3}/2$

Задача 5. Пусть на плоскости задана система координат и точка М с координатами (а; b). Запишите координаты точки, в которую М переходит при следующих преобразованиях:

- а) симметрии относительно оси абсцисс;
- б) симметрии относительно оси ординат;
- в) симметрии относительно начала координат;
- г) повороте относительно начала координат на 90° в положительном направлении;
- д) симметрии относительно прямой с уравнением $y = x$

В следующем параграфе исследования описан элективный курс, который был реализован на основе подобранных задач.

§7. Элективный курс «Тожественные преобразования тригонометрических выражений»

Элективный курс «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» является предметно-ориентированным на обучающихся 10-11 классов общеобразовательной школы в рамках формирования и развития у них алгоритмической культуры. При разработке программы элективного курса «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» учитывалось, что в качестве компонента образования элективный курс направлен на то, чтобы удовлетворить познавательные потребности и интересы обучающихся, сформировать у них новые виды практической и познавательной деятельности, которые не формируются в процессе реализации традиционных учебных курсов. Данный курс предназначен для обучающихся 10-11 классов и рассчитан на 68 академических часов. Разработанная программа составлена в соответствии с требованиями стандарта математического образования.

Программа элективного курса «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» направлена на формирование и развитие у обучающихся алгоритмической культуры и решение следующих задач:

- сформировать у обучающихся понятие «алгоритм»;
- сформировать у обучающихся навыки построения алгоритмов в рамках тождественных преобразований тригонометрических выражений;
- сформировать у обучающихся навыки использования алгоритмов в рамках тождественных преобразований тригонометрических выражений при решении нестандартных задач;
- активизировать познавательную деятельность обучающихся;
- сформировать общие умения и навыки по решению задач: анализ содержания, поиск способа решения, составление и осуществление плана, проверка и анализ решения, исследование;

- сформировать информационную компетентность и коммуникативные навыки у обучающихся.

Структура элективного курса «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» включает в себя 9 логически законченных и содержательно-взаимосвязанных тем. Изучение данных тем обеспечит системность и практическую направленность знаний и умений учеников. Разнообразный дидактический материал дает возможность отбирать дополнительные задания для учащихся различной степени подготовленности. Основной тип занятий – решение задач. Для наиболее успешного усвоения материала планируются различные формы работы с учащимися: *коллективные, групповые, парные и индивидуальные формы работы.*

Формы и методы контроля: тестирование по каждой теме.

Количество заданий в тестах по каждой теме не одинаково. Тесты носят комплексный характер, и большая часть их призвана выявить уровень развития математического мышления тестируемого. К примеру, для контроля усвоенных знаний по теме «Изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов» использовался следующий тест:

1. Упростить: $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ$. Примечание: при затруднении в выполнении теста воспользуйтесь подсказками ниже.

A) $\sin 10^\circ$; B) $\cos 10^\circ$; C) $\cos 20^\circ$; D) $\sin 20^\circ$.

2. Преобразовать в произведение: $\cos 47^\circ + \cos 73^\circ$.

A) $\cos 46^\circ$; B) $\sin 46^\circ$; C) $\sin 13^\circ$; D) $\cos 13^\circ$.

3. Вычислить: $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) 1; C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$;

4. Разложить на множители: $\sin 40^\circ + \sin 50^\circ$.

A) $\cos 10^\circ$; D) $\sqrt{2} \cos 5^\circ$; C) $\cos 40^\circ$; D) $\sqrt{2} \sin 5^\circ$;

5. Представить в виде произведения: $\sin 15^\circ + \cos 65^\circ$.

A) $\sin 40^\circ \cos 25^\circ$; B) $\sin 25^\circ \cos 40^\circ$;

C) $2\sin 25^\circ \cos 40^\circ$; D) $2\sin 20^\circ \cos 5^\circ$.

6. Представить в виде произведения: $\cos 40^\circ - \sin 16^\circ$.

A) $2\sin 17^\circ \cos 33^\circ$; B) $2\cos 17^\circ \sin 33^\circ$;

C) $2\sin 17^\circ \sin 33^\circ$; D) $2\cos 17^\circ \cos 33^\circ$.

7. Вычислить: $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ$.

A) 0; B) 1; C) $\cos 40^\circ$; D) $\sin 40^\circ$.

8. Упростить выражение: $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha}$

A) $\operatorname{ctg} 3\alpha$; B) $\operatorname{tg} 3\alpha$; C) $\operatorname{tg} 6\alpha$; D) $\operatorname{ctg} 6\alpha$.

9. Найти значение выражения: $\frac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$

A) 1; B) 0; C) $\cos 80^\circ$; D) -1.

10. Упростить: $\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha}$

A) $\operatorname{tg} 2\alpha$; B) $\operatorname{tg} 4\alpha$; C) $\operatorname{ctg} 4\alpha$; D) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

11. Найти значение выражения: $\frac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$

A) $\sqrt{3}$; B) 0; C) -1; D) $-\sqrt{3}$.

В результате изучения курса учащиеся должны уметь:

1) точно и грамотно формулировать теоретические положения и излагать собственные рассуждения в ходе решения заданий;

2) уверенно решать задачи на тождественные преобразования тригонометрических выражений;

3) применять алгоритмы осуществления тождественных преобразований тригонометрических выражений при решении нестандартных задач.

Курсу отводится час в неделю. Всего 34 часа.

Особенности курса:

1) интеграция разных тем;

2) практическая значимость для учащихся;

3) использование профильных задач, разработанных для подготовки обучающихся к ЕГЭ, с целью формирования более глубоких знаний по теме;

4) использование широкого спектра методов обучения, поддерживающих мотивацию обучающихся к изучению темы, а также стимулирующих познавательную активность.

Содержание курса:

Углубленное изучение синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов, 7 часов: понятие синуса и косинуса, решение задач с синусами и косинусами, решение задач с тангенсами и котангенсами.

Углубленное изучение свойств синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов, 7 часов: свойства синусов и косинусов, решение задач на свойство синусов и косинусов, свойства тангенсов и котангенсов, решение задач на тангенсы и котангенсы.

Изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов, 7 часов: изучение формулы $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, разработка алгоритма решения задач на формулу $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, решение задач изучение формулы $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, разработка алгоритма на формулу $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, решение задач.

Изучение тангенса суммы и разности аргументов и соответствующие им формулы, 7 часов: изучение формулы $tg(x + y) = \frac{tg x + tg y}{1 - tg x tg y}$, разработка алгоритма, решение задач на формулу $tg(x + y) = \frac{tg x + tg y}{1 - tg x tg y}$, изучение формулы $tg(x - y) = \frac{tg x - tg y}{1 + tg x tg y}$, разработка алгоритма, решение задач на формулу $tg(x - y) = \frac{tg x - tg y}{1 + tg x tg y}$.

Формулы приведения, 7 часов: изучение формул приведения, решение задач на формулы приведения.

Изучение формул двойного аргумента, 6 часов: изучение формул двойного аргумента: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, решение задач на формулы двойного аргумента:

Понятие преобразования сумм тригонометрических выражений в произведения, 13 часов: изучение формулы: $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, решение задач на формулу $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, изучение формулы $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, решение задач на формулу $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, изучение формулы $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, решение задач на формулу $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, изучение формулы $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$, решение задач на формулу $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Обучение преобразованию произведений тригонометрических выражений в суммы, 9 часов, Изучение формул преобразования: $\sin s \cos t = \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2}$ $\cos s \cos t = \frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2}$ $\sin s \sin t = \frac{\cos(s-t) - \cos(s+t)}{2}$, решение задач, обучение преобразованию выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin(x + t)$, решение задач.

Обучение основным методам преобразования тригонометрических выражений, 5 часов: повторение основных методов преобразования тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений.

В таблице 9 представлено календарно-тематическое планирование элективного курса «Тожественные преобразования тригонометрических выражений».

Таблица 9 - Календарно-тематическое планирование элективного курса «Тожественные преобразования тригонометрических выражений»

№/п	Тема урока	Количество часов	Форма контроля
		10-11 класс	
Углубленное изучение синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов, 4 часа			

1	Понятия синуса и косинуса	0,5	
2	Решение задач с синусами и косинусами	1	
3	Понятие тангенсов и котангенсов	0,5	
4	Решение задач с тангенсами и котангенсами	1	
5	Закрепление материала	1	итоговый тест
Углубленное изучение свойств синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов, 4 часа			
1	Свойства синусов и косинусов	0,5	
2	Решение задач на свойство синусов и косинусов.	1	
3	Свойства тангенсов и котангенсов	0,5	
4	Решение задач на тангенсы и котангенсы	1	
5	Закрепление материала	1	итоговый тест
Изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов, 4 часов			
1	Изучение формулы $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, разработка алгоритма	0,5	
2	Решение задач на формулу $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	1	

Продолжение таблицы 9

3	Изучение формулы $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, разработка алгоритма	0,5	
4	Решение задач на формулу $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	1	
5	Закрепление материала	1	итоговый тест
Изучение тангенса суммы и разности аргументов и соответствующие им формулы, 4 часов			
5	Изучение формулы $tg(x + y) = \frac{tg x + tg y}{1 - tg x tg y}$, разработка алгоритма	0,5	
6	Решение задач на формулу $tg(x + y) = \frac{tg x + tg y}{1 - tg x tg y}$	1	
7	Изучение формулы $tg(x - y) = \frac{tg x - tg y}{1 + tg x tg y}$, разработка алгоритма	0,5	
8	Решение задач на формулу $tg(x - y) = \frac{tg x - tg y}{1 + tg x tg y}$	1	
5	Закрепление материала	1	итоговый тест
Формулы приведения, 3 часов			
1	Изучение формул приведения	1	
2	Решение задач на формулы приведения	1	
3	Закрепление материала	1	итоговый тест
Изучение формул двойного аргумента, 3 часов			
1	Изучение формул двойного аргумента: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	1	

	$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ Разработка алгоритмов		
2	Решение задач на формулы двойного аргумента: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$	1	
3	Закрепление материала	1	итоговый тест
Понятие преобразования сумм тригонометрических выражений в произведения, 6 часов			
1	Изучение формулы: $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ Разработка алгоритмов	0,5	
2	Решение задач на формулу $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$	0,5	

Продолжение таблицы 9

3	Изучение формулы: $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ Разработка алгоритмов	0,5	
4	Решение задач на формулу $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$	0,5	
5	Изучение формулы: $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ Разработка алгоритмов	0,5	
6	Решение задач на формулу $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$	1	
7	Изучение формулы: $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ Разработка алгоритмов	0,5	
8	Решение задач на формулу $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$	1	
9	Закрепление материала	1	итоговый тест
Обучение преобразованию произведений тригонометрических выражений в суммы, 4 часа			
1	Изучение формул преобразования: $\sin s \cos t = \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2}$ $\cos s \cos t = \frac{\cos(s+t) + \cos(s-t)}{2}$	0,5	

	$\sin s \sin t = \frac{\cos(s - t) - \cos(s + t)}{2}$		
2	Решение задач на формулы преобразования: $\sin s \cos t = \frac{\sin(s + t) + \sin(s - t)}{2}$ $\cos s \cos t = \frac{\cos(s + t) + \cos(s - t)}{2}$ $\sin s \sin t = \frac{\cos(s - t) - \cos(s + t)}{2}$	1	
3	Обучение преобразованию выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin(x + t)$.	0,5	
4	Решение задач на преобразование выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin(x + t)$.	1	
5	Закрепление материала	1	итоговый тест
Обучение основным методам преобразования тригонометрических выражений, 2 часа			

Продолжение таблицы 9

1	Повторение основных методов преобразования тригонометрических выражений	0,5	
2	Решение тригонометрических уравнений	1	
3	Закрепление материала	0,5	итоговый тест
	ИТОГО	34	

§8. Результаты педагогического эксперимента

В педагогическом эксперименте приняли участие два десятых класса ГБОУ СО с.Пискалы, общее количество респондентов составило 50 человек: 25 человек приняли участие в апробации разработанной методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений и стали представителями экспериментальной группы, остальные 25 человек стали представителями контрольной группы и приняли участие исключительно в диагностических этапах исследования.

Для оценки эффективности разработанной методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений нами были разработаны критерии сформированности алгоритмической культуры, которые предоставлены нами в таблице 10.

Таблица 10 - Критерии диагностики эффективности разработанной методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений

Критерии	Показатели	Метод диагностики
Когнитивный	Уровень сформированности знаний и представлений о способах применения алгоритмов, умение решать тригонометрические задачи с применением алгоритмов	Анализ продуктов деятельности обучающихся
Эмоциональный	Осознание необходимости формирования алгоритмической культуры	Экспертный опрос преподавателя по алгебре
Мотивационный	Мотивы к изучению алгоритмической культуры	Анкетирование обучающихся

В рамках диагностики когнитивного компонента сформированности алгоритмической культуры мы подбирали несколько задач на использование тождественных преобразования тригонометрических выражений, и просили детей решить их при помощи использования алгоритмов. Перечень задач можно увидеть в приложении 2. Оценка когнитивного компонента алгоритмической культуры проводилась по 3-х балльной системе следующим образом:

3 балла (высокий уровень) – все задачи решено правильно, алгоритмы составлены правильно;

2 балла (средний уровень) – 80% и более задач решено правильно, отмечены ошибки в составлении алгоритмов;

1 балл (низкий уровень) – 50-80% задач решено правильно, алгоритмы в большей степени составлены не верно;

0 баллов (очень низкий уровень) – менее 50% задач решено правильно, алгоритмы составлены с серьезными ошибками.

При проведении диагностики эмоционального компонента сформированности алгоритмической культуры мы проводили экспертный

опрос педагогов. В рамках проводимого опроса мы просили оценить каждого обучающегося по следующим критериям:

- отношение к изучению математики как базового предмета образования;
- наличие интереса к изучению использования алгоритмов в рамках обучения математики;
- отсутствие трудностей в процессе изучения использования алгоритмов в рамках обучения математики.

Оценка развития эмоционального компонента сформированности алгоритмической культуры проводилась следующим образом:

3 балла (высокий уровень) – отношение к изучению математики как базового предмета образования положительное, высокий уровень интереса к использованию алгоритмов, отсутствие трудностей в процессе изучения использования алгоритмов в рамках обучения математики;

2 балла (средний уровень) – отношение к изучению математики как базового предмета образования нейтральное, нейтральное отношение к использованию алгоритмов в рамках обучения математики, наличие небольших трудностей в процессе применения алгоритмов;

1 балл (низкий уровень) – отношение к изучению математики как базового предмета образования негативное, отсутствие интереса к использованию алгоритмов в рамках обучения математики, наличие серьезных трудностей в процессе изучения алгоритмов в рамках обучения математики.

Для диагностики мотивационного компонента сформированности алгоритмической культуры нами проводилось анкетирование среди обучающихся экспериментальной и контрольной групп (приложение 2). Оценка проводилась следующим образом:

3 балла (высокий уровень) – наличие желания изучать алгоритмы в процессе решения задач по математике, высокий уровень притязаний, творческих подход в процессе изучения основ использования алгоритмов;

2 балла (средний уровень) –наличие небольшого желания изучать алгоритмы в процессе решения задач по математике, средний уровень притязаний, творческих подход в процессе изучения основ использования алгоритмов в некоторых случаях;

1 балл (низкий уровень) –отсутствие желания изучать алгоритмы в процессе решения задач по математике, низкий уровень притязаний, не использование творческих подход в процессе изучения основ использования алгоритмов.

На основании полученных результатов проводилась оценка общего уровня сформированности алгоритмической культуры следующим образом:

Высокий уровень сформированности алгоритмической культуры (8-9 баллов) свидетельствует о: сформированности навыков использования алгоритмов при решении задач, положительном отношении к изучению математики как базового предмета образования, высоком уровне интереса к изучению использования алгоритмов в рамках обучения математики, отсутствии трудностей в процессе изучения использования алгоритмов в рамках обучения математики, наличии желания изучать алгоритмы в процессе решения задач по математике, высоком уровне притязаний, творческом подходе к процессу изучения основ использования алгоритмов;

Средний уровень сформированности алгоритмической культуры (5-7 баллов) свидетельствует о: недостаточно сформированных навыках использования алгоритмов при решении задач, нейтральном отношении к изучению математики как базового предмета образования, нейтральном отношении к изучению использования алгоритмов в рамках обучения математики, наличии небольших трудностей в процессе изучения использования алгоритмов в рамках обучения математики, наличии небольшого желания изучать алгоритмы в процессе решения задач по математике, среднем уровне притязаний, творческом подходе в процессе изучения основ использования алгоритмов в некоторых случаях.

Низкий уровень сформированности алгоритмической культуры (2-7 баллов) свидетельствует о: не сформированных навыках использования алгоритмов при решении задач, негативном отношении к изучению математики как базового предмета образования, отсутствии интереса к изучению использования алгоритмов в рамках обучения математики, наличии серьезных трудностей в процессе изучения использования алгоритмов в рамках обучения математики, отсутствии желания изучать алгоритмы в процессе решения задач по математике, низком уровне притязаний, отсутствии творческого подхода в процессе изучения основ использования алгоритмов.

Проанализируем результаты, полученные нами в ходе констатирующего этапа исследования, которые предоставлены в приложении 3.

В результате проведения оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе высокий уровень показали 5 обучающихся, средний уровень - 13 обучающихся, низкий уровень - 6 обучающихся, очень низкий уровень - 1 обучающийся (рис. 4).

В результате проведения оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в контрольной группе высокий уровень показали 6 обучающихся, средний уровень - 14 обучающихся, низкий уровень - 3 обучающихся, очень низкий уровень - 2 обучающихся (рис. 5).

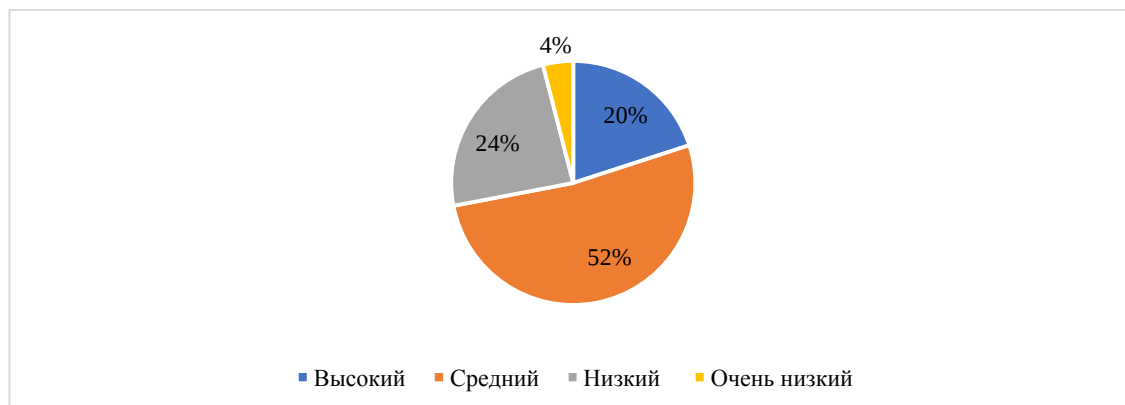


Рисунок 4 - Результаты оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе на констатирующем этапе исследования

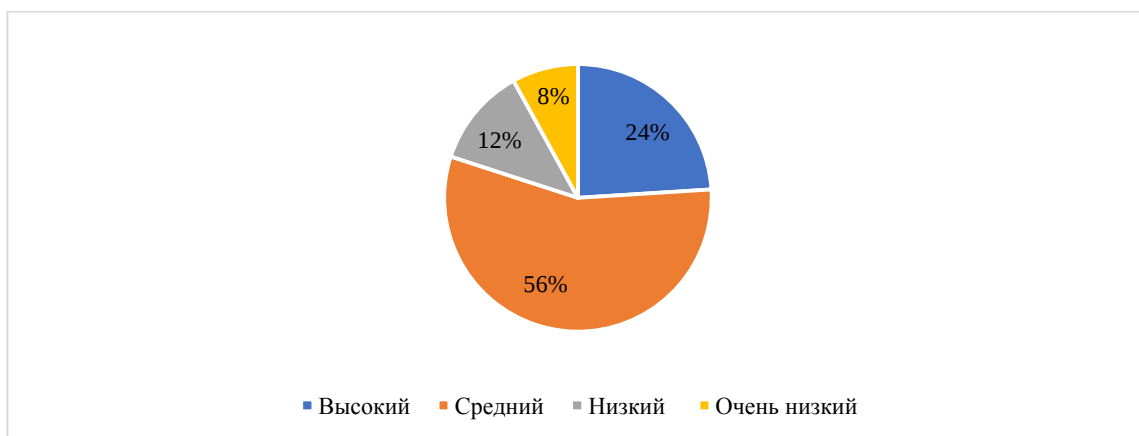


Рисунок 5 - Результаты оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в контрольной группе на констатирующем этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе высокий уровень показали 4 обучающихся, средний уровень - 14 обучающихся, низкий уровень - 7 обучающихся (рис. 6).

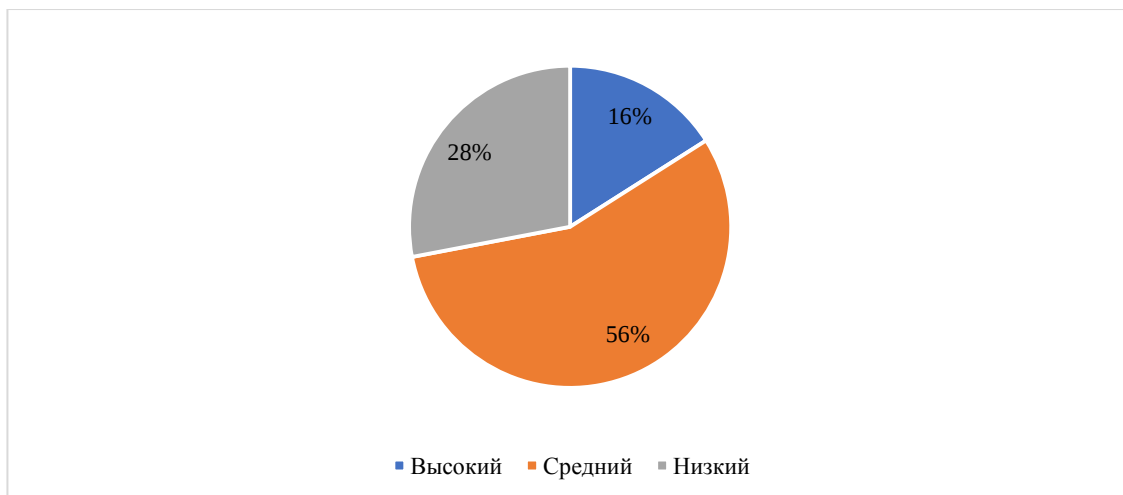


Рисунок 6 - Результаты оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе на констатирующем этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры в контрольной группе высокий

уровень показали 5 обучающихся, средний уровень - 15 обучающихся, низкий уровень - 5 обучающихся (рис. 7).

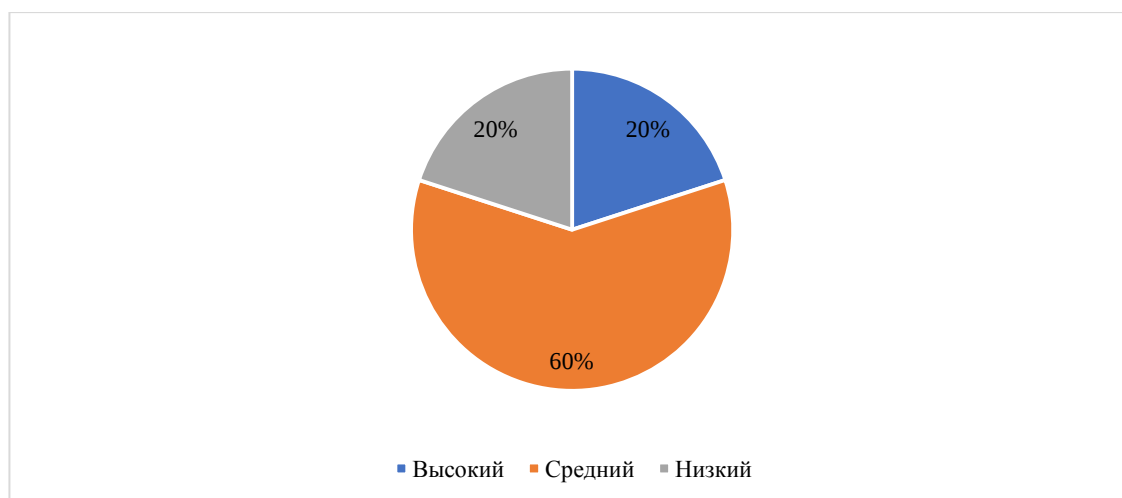


Рисунок 7 - Результаты оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры в контрольной группе на констатирующем этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе высокий уровень показали 5 обучающихся, средний уровень - 16 обучающихся, низкий уровень - 4 обучающихся (рис. 8).

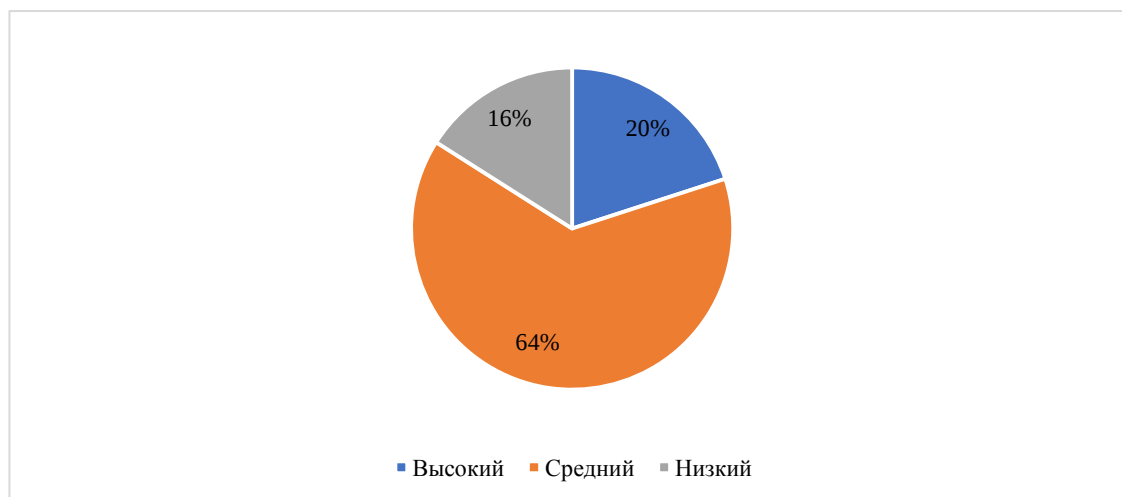


Рисунок 8 - Результаты оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе на констатирующем этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры в контрольной группе высокий

уровень показали 7 обучающихся, средний уровень - 15 обучающихся, низкий уровень - 3 обучающихся (рис. 9).

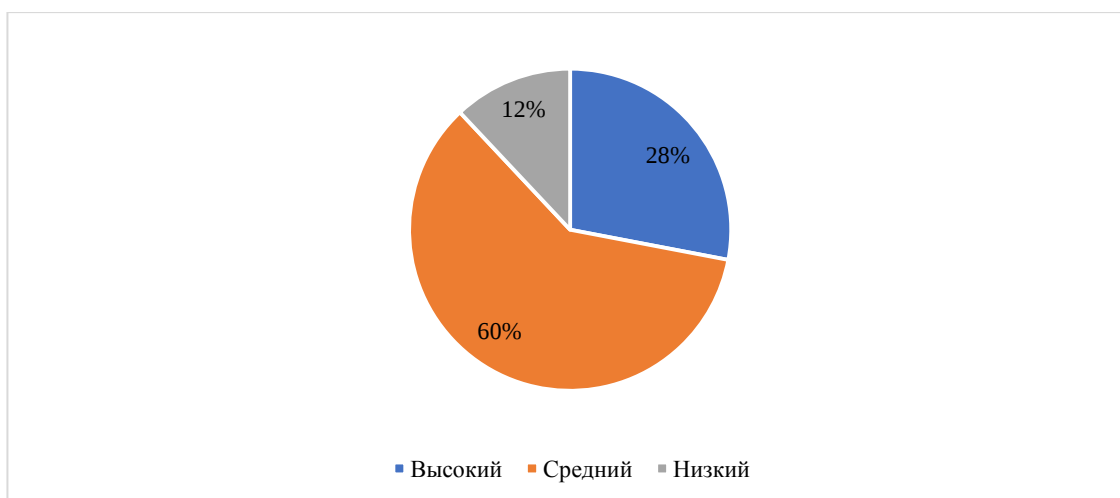


Рисунок 9 - Результаты оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры в контрольной группе на констатирующем этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности алгоритмической культуры в экспериментальной группе высокий уровень показали 5 обучающихся, средний уровень - 13 обучающихся, низкий уровень - 7 обучающихся (рис. 10).

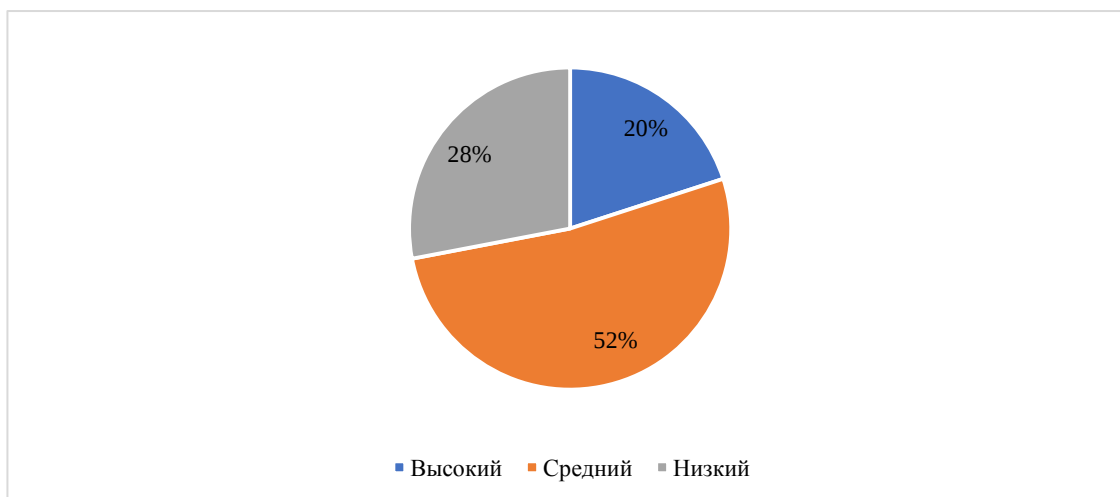


Рисунок 10 - Результаты оценки сформированности алгоритмической культуры в экспериментальной группе на констатирующем этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности алгоритмической культуры в контрольной группе высокий уровень показали 6 обучающихся,

средний уровень - 14 обучающихся, низкий уровень - 5 обучающихся (рис. 11).

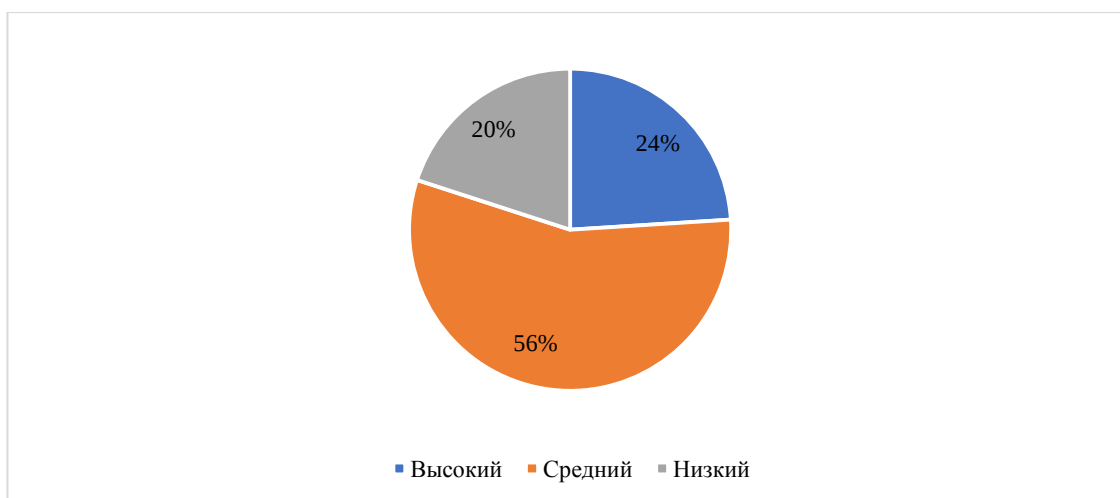


Рисунок 11 - Результаты оценки сформированности алгоритмической культуры в контрольной группе на констатирующем этапе исследования

Таким образом, на констатирующем этапе нами были получены следующие результаты: в обеих группах отмечается преимущественно средний уровень сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры, средний уровень сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры, средний уровень сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры, средний уровень сформированности алгоритмической культуры в целом. Далее нами было проведено повторное исследование после реализации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений. Результаты контрольного этапа представлены в приложении 4.

В результате проведения оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе высокий уровень показали 13 обучающихся против 5 на констатирующем этапе исследования, средний уровень - 9 обучающихся против 13 на констатирующем этапе исследования, низкий уровень - 3 обучающихся против 6 на констатирующем этапе исследования, очень низкий уровень сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры не

показал никто из обучающихся против 1 на констатирующем этапе исследования (рис. 12).

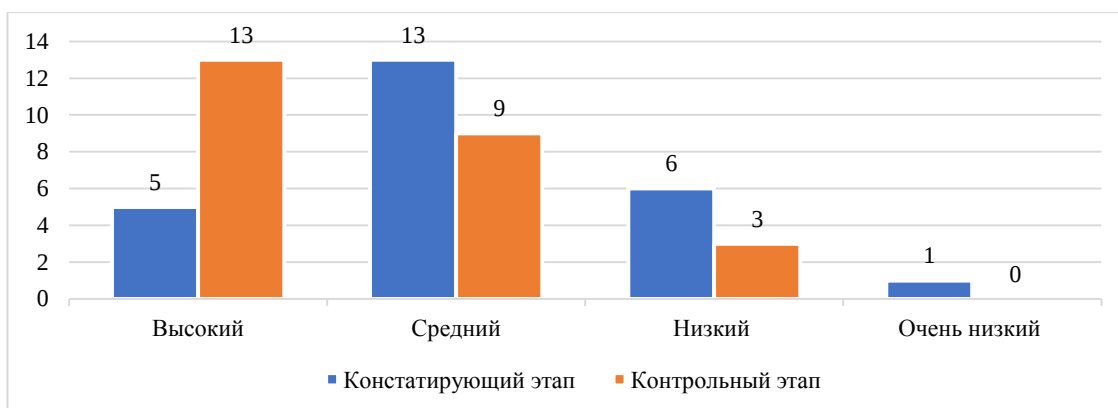


Рисунок 12 - Результаты оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе на контрольном этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в контрольной группе высокий уровень показали 8 обучающихся против 6 на констатирующем этапе исследования, средний уровень – также 14 обучающихся, низкий уровень - 2 обучающихся против 3 на констатирующем этапе исследования, очень низкий уровень показал 1 обучающийся против 0 на констатирующем этапе исследования (рис. 13).

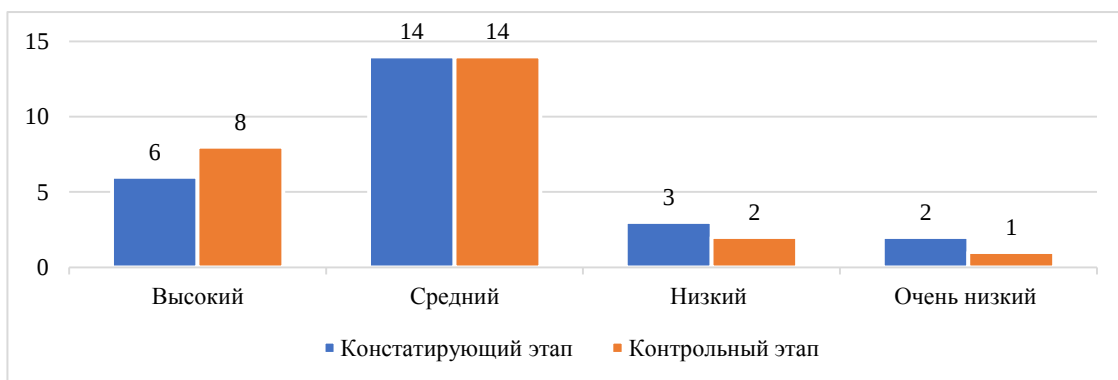


Рисунок 13 - Результаты оценки сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры в контрольной группе на контрольном этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе на

контрольном этапе исследования высокий уровень показали 13 обучающихся против 4 на констатирующем этапе исследования, средний уровень - 9 обучающихся против 14 на констатирующем этапе исследования, низкий уровень - 3 обучающихся против 7 на констатирующем этапе исследования (рис. 14).

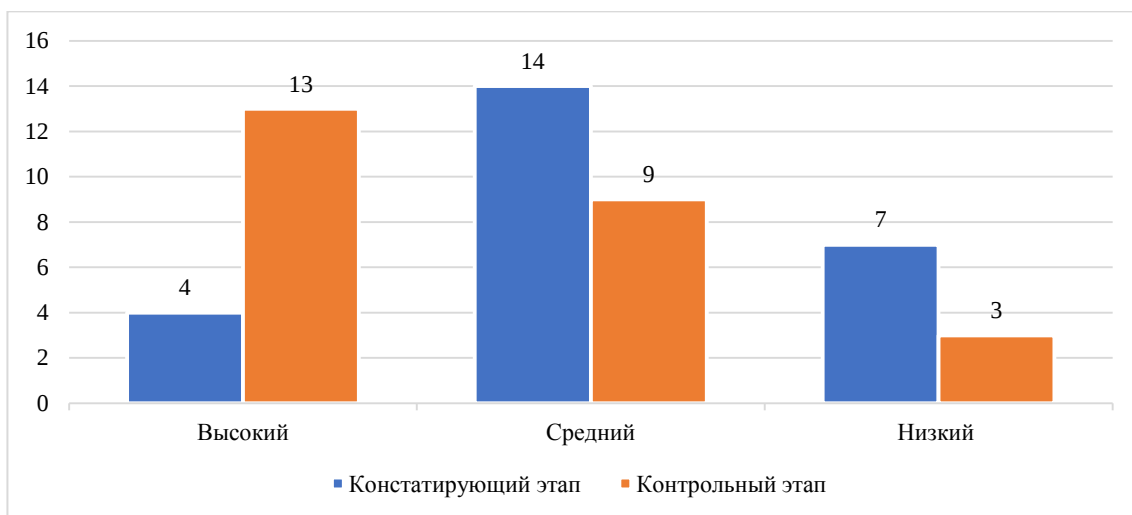


Рисунок 14 - Результаты оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе на контрольном этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры на контрольном этапе исследования в контрольной группе высокий уровень показали 6 обучающихся против 5 на констатирующем этапе исследования, средний уровень - 14 обучающихся против 15 на констатирующем этапе исследования, низкий уровень - также 5 обучающихся (рис. 15).



Рисунок 15 - Результаты оценки сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры в контрольной группе на контрольном этапе исследования

В результате проведения оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры на контрольном этапе исследования в экспериментальной группе высокий уровень показали 12 обучающихся против 5 на констатирующем этапе исследования, средний уровень - 11 обучающихся против 16 на констатирующем этапе исследования, низкий уровень - 2 обучающихся против 4 на констатирующем этапе исследования (рис. 16).

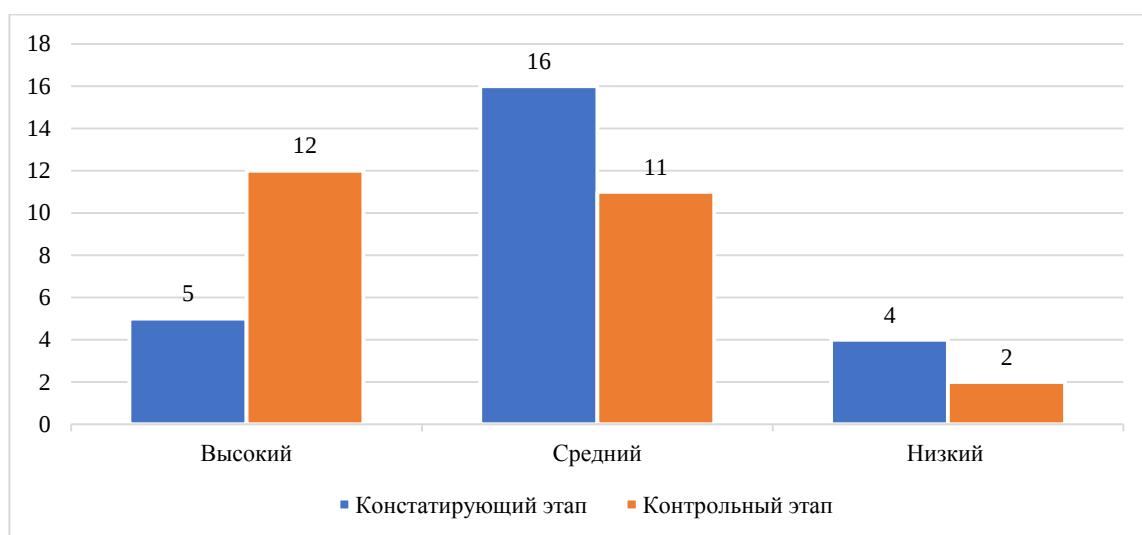


Рисунок 16 - Результаты оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры в экспериментальной группе на контрольном этапе

В результате проведения оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры на контрольном этапе исследования в контрольной группе высокий уровень показали 9 обучающихся против 7 на констатирующем этапе исследования, средний уровень - 14 обучающихся против 15 на констатирующем этапе исследования, низкий уровень - 2 обучающихся против 3 на констатирующем этапе исследования (рис. 17).

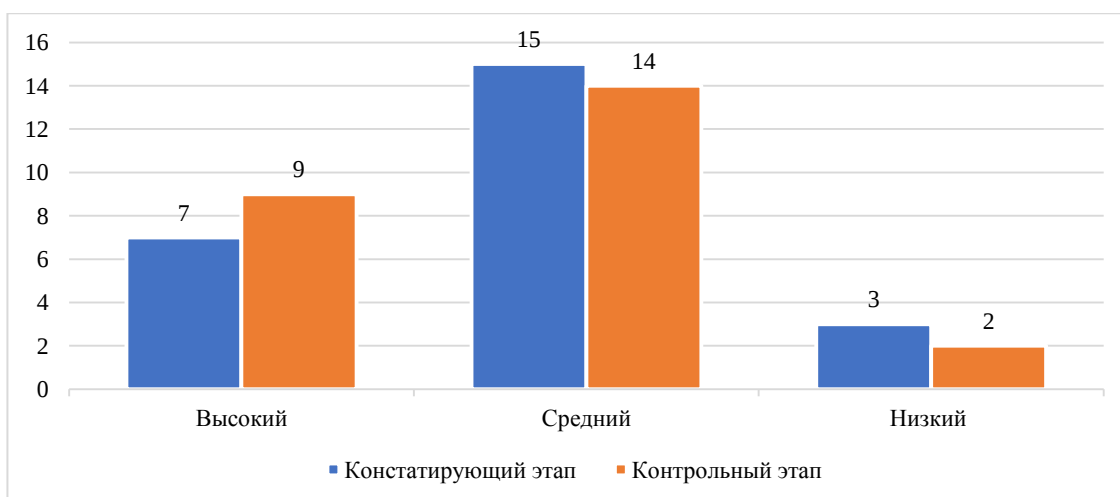


Рисунок 17 - Результаты оценки сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры в контрольной группе на контрольном этапе

В результате проведения оценки сформированности алгоритмической культуры в экспериментальной группе на контрольном этапе высокий уровень показали 12 обучающихся против 5 на констатирующем этапе исследования, средний уровень - 12 обучающихся против 13 на констатирующем этапе исследования, низкий уровень - 1 обучающийся против 7 на констатирующем этапе исследования (рис. 18).

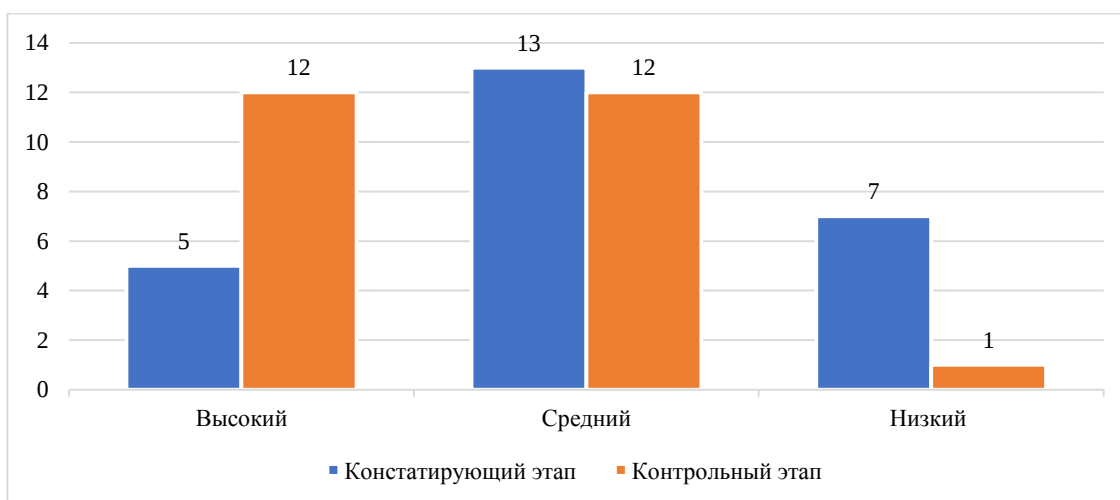


Рисунок 18 - Результаты оценки сформированности алгоритмической культуры в экспериментальной группе на контрольном этапе

В результате проведения оценки сформированности алгоритмической культуры в контрольной группе на контрольном этапе высокий уровень

показали 7 обучающихся против 6 на констатирующем этапе исследования, средний уровень - 15 обучающихся против 14 на констатирующем этапе исследования, низкий уровень - 3 обучающихся против 5 на констатирующем этапе исследования (рис. 19).

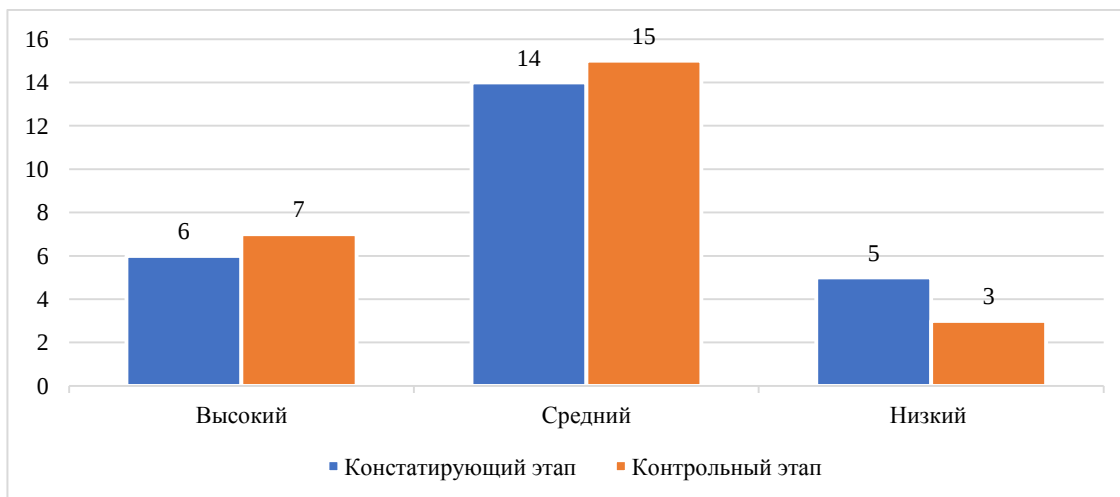


Рисунок 19 - Результаты оценки сформированности алгоритмической культуры в контрольной группе на контрольном этапе

Таким образом, в результате проведения контрольного этапа нами были получены следующие результаты: после апробации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений в экспериментальной группе отмечается повышение уровня сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры, повышение уровня сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры, повышение уровня сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры, повышение уровня сформированности алгоритмической культуры в целом, при этом в контрольной группе замечены менее значимые изменения. Следовательно, можно говорить об эффективности апробации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Выводы по второй главе

В результате проведения опытно-экспериментальной работы по разработке и апробации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений сделаны следующие выводы:

– в процессе организации обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений мы пришли к выводу, что наиболее эффективными являются следующие формы работы: групповая; коллективная; индивидуальная; парная. В рамках организации обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений наиболее целесообразными оказались следующие методы работы: лекция; дискуссия; наглядный метод; практический метод; метод работы с интерактивной доской;

– при подборе системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня мы сделали вывод, что подбирать задачи необходимо таким образом, чтобы в процессе решения каждой задачи обучающиеся использовали алгоритмы. При этом все задачи следует подбирать из профильного курса по математике и тригонометрии для 10-11 классов, т.к. применение элективного курса подразумевало использование задач именно данного уровня. В рамках решения всего комплекса задач дети должны использовать алгоритмы, которые до этого разрабатывались на уроках, для оптимального решения задач;

– элективный курс «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» должен быть предметно-ориентированным на обучающихся 10-11 классов общеобразовательной школы в рамках формирования и развития у обучающихся алгоритмической культуры. При разработке программы элективного курса «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» был сделан вывод, что необходимо учитывать, что в качестве компонента образования элективный курс

направлен на то, чтобы удовлетворить познавательные потребности и интересы обучающихся, сформировать у них новые виды практической и познавательной деятельности, которые не формируются в процессе реализации традиционных учебных курсов. Данный курс предназначен для обучающихся 10-11 классов и рассчитан на 68 академических часов. Разработанная программа составлена в соответствии с требованиями стандарта математического образования;

– на контрольном этапе исследования получены следующие результаты: после апробации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений в экспериментальной группе отмечается повышение уровня сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры, повышение уровня сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры, повышение уровня сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры, повышения уровня сформированности алгоритмической культуры в целом, при этом в контрольной группе замечены менее значимые изменения. Следовательно, можно говорить об эффективности апробации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках написания магистерской диссертации мы преследовали цель, которая заключалась в разработке методики использования задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений как средство развития алгоритмической культуры обучающихся. Для достижения данной цели мы решали следующие задачи исследования:

1. Проанализировали основные цели и задачи обучения тождественным преобразованиям в школьном курсе математики. В результате проведения теоретического анализа литературы по проблеме исследования нами выяснено, что в качестве сути метода тождественных преобразований следует понимать процесс, при котором организуется использование преобразования различных алгебраических выражений при помощи осуществления замены выражения или одного из его структурных компонентом на тождественно равное ему выражение для достижения целевых требований, выдвигаемых в рамках решения задачи. В качестве главной цели, преследуемой в процессе изучения на уроках алгебры темы «Тождественные преобразования» выступает стремление показать обучающимся, какие пути преобразования тождеств являются наиболее эффективными. При этом выяснено, что школьники допускают ошибки и в случае применения верных приемов решения, причем не только на уроках и в процессе контрольно-оценочной деятельности, но и при выполнении заданий ОГЭ и ЕГЭ.

2. Исследовали основные понятия и типы тождественных преобразований тригонометрических выражений. Под преобразованием тригонометрических выражений понимают упрощение, выполняемое с помощью основных тригонометрических тождеств, формул приведения и других формул. В тождественных преобразованиях тригонометрических выражений активно используются следующие алгебраические приемы: осуществление добавления и вычитание одинаковых слагаемых; вынесение

общего множителя за скобки; умножение и деление структурных элементов выражения на одну и ту же величину; использование изученных формул на сокращенное умножение; выделение полного квадрата; разложение квадратного трехчлена на несколько множителей; добавление новых переменных для того, чтобы упростить выражение.

3. Изучили методическую схему обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений. Методическая схема обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений должна подразумевать следующее: углубленное изучение синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов; углубленное изучение свойств синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов; изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов; изучение тангенса суммы и разности аргументов и соответствующие им формулы; формулы приведения; изучение формул двойного аргумента; понятие преобразования сумм тригонометрических выражений в произведения; обучение преобразованию произведений тригонометрических выражений в суммы; обучение основным методам преобразования тригонометрических выражений.

4. Проанализировали требования к системе задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений, ориентированной на развитие алгоритмической культуры. Было выяснено, что под формированием алгоритмической культуры понимается особая организация содержательного и методического компонентов обучения. Для того, чтобы система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений была ориентирована на развитие алгоритмической культуры, задачи должны отвечать ряду требований:

- должна проводиться работа по формированию навыков поиска алгоритмов и их построения с последующим контролем педагога выполняемой работы и своевременной корректировкой;

– предполагается последовательная разработка алгоритмов в процессе решения каждого нового типа задач и дальнейшее применение разработанных алгоритмов при решении подобных задач;

– методика должна включать в себя использование разнообразных элементов алгоритмизации, которые необходимо сопровождать наглядной демонстрацией для более эффективного обоснования каждого этапа;

– необходимо подбирать задания в соответствии с уровнем сформированности у обучающихся алгоритмической культуры;

– необходимо также подбирать усложненные задачи, которые основаны на ситуациях из реальной жизни для того, чтобы воспитывать алгоритмическую культуру таким образом, чтобы обучающиеся в дальнейшем могли самостоятельно разрабатывать алгоритмы в жизненных ситуациях и условиях.

– определили основные формы и методы обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений. В процессе организации обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений мы использовали следующие формы работы: групповую; коллективную; индивидуальную; парную. В рамках организации обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений нами были использованы следующие методы работы: лекция; дискуссия; наглядный метод; практический метод; метод работы с интерактивной доской.

1. Разработали систему задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня. При подборе системы задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений для углубленного уровня мы подбирали задачи таким образом, чтобы в процессе решения каждой задачи обучающиеся использовали алгоритмы.

При этом все задачи подбирались нами из профильного курса по математике и тригонометрии для 10-11 классов, т.к. применение элективного курса подразумевало использование задач именно данного уровня. При этом

в рамках решения всего комплекса задач дети должны были использовать алгоритмы, которые до этого разрабатывались на уроках, для оптимального решения задач.

7. Разработан элективный курс «Тожественные преобразования тригонометрических выражений». Элективный курс «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» является предметно-ориентированным на обучающихся 10-11 классов общеобразовательной школы в рамках формирования и развития у них алгоритмической культуры. При разработке программы элективного курса «Тожественные преобразования тригонометрических выражений» учитывалось, что в качестве компонента образования элективный курс направлен на то, чтобы удовлетворить познавательные потребности и интересы обучающихся, сформировать у них новые виды практической и познавательной деятельности, которые не формируются в процессе реализации традиционных учебных курсов. Данный курс предназначен для обучающихся 10-11 классов и рассчитан на 68 академических часов. Разработанная программа составлена в соответствии с требованиями стандарта математического образования

8. Проанализировали результаты педагогического эксперимента. В результате проведения контрольного этапа нами были получены следующие результаты: после апробации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений в экспериментальной группе отмечается повышение уровня сформированности когнитивного компонента алгоритмической культуры, повышение уровня сформированности эмоционального компонента алгоритмической культуры, повышение уровня сформированности мотивационного компонента алгоритмической культуры, повышения уровня сформированности алгоритмической культуры в целом, при этом в контрольной группе замечены менее значимые изменения. Следовательно, можно говорить об

эффективности апробации методики обучения решению задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Таким образом, в результате проведения исследования в рамках написания магистерской диссертации мы доказали, что алгоритмическая культура обучающихся будет сформирована, если будет разработана и адаптирована методика обучения тождественным преобразованиям тригонометрических выражений с применением предложенных нами систем задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений. Следовательно, цель исследования достигнута, задачи решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аблова, В.С. Формирование элементов логико-алгоритмической культуры учащихся в процессе обучения математике в начальной школе: автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / В.С. Аблова ; Орлов. гос. пед. ун-т. Орел, 1995. – 18 с.
2. Абылкасымова А.Е. Математические основы обучения решению задач в средней школе / А.Е. Абылкасымова, А.А. Папышев. – Алматы, 2004. – 124 с.
3. Азаров, А.И. Задачи-ловушки на централизованном тестировании и экзамене / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Романчик. – Минск: Аверсэв, 2006. – 120 с.
4. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.] – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 255 с.
5. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович [и др.]. – 2-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2001. – 315 с.
6. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницин и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
7. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы: учеб. пособие для учителей общеобразоват. организаций: базовый и углубл. Уровни / сост. Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2016. – 128 с.
8. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2008.
9. Алферьева, Т.И. Формирование алгоритмической культуры при изучении математических дисциплин / Т.И. Алферьева // Теория и практика

профессионального образования: педагогический поиск : педагогический поиск : сб. науч. трудов / под ред. Г. Д. Бухаровой. – Екатеринбург : Издательство РГППУ, 2002. – С . 12-15.

10. Аммосова Н.В. Тождественные преобразования, уравнения и неравенства в 5 классе / Н.В. Аммосова // Математика в школе. – 1996. – №3. – С. 54-58

11. Артемов А.К. Теоретические основы методики обучения математике в начальных классах / А.К. Артемов, Н.Б. Истомина. –М. : Воронеж, 2008. – 324 с.

12. Балаян, Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9-11 классы/ Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 317 с.

13. Баум, И.В. Тождественные преобразования выражений/ И.В. Баум, Ю.Н. Макарычев // Преподавание алгебры в 6-8 классах / Сост. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 1980. – С. 77-90

14. Блох, А.Я. О тождественных преобразованиях в курсе алгебры VI-VIII кл. // Метод. рекомендации и указания по методике преподавания математики в средней школе: Сб. статей / А.Я. Блох. - М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1973

15. Боженкова, Л.И. Алгебра: типовые задания для формирования УУД: учеб.-метод. пособие / Л.И. Боженкова. – М.; Калуга: ФГБОУ ВПО МПГУ, КГУ им. К.Э. Циолковского, 2014. – 76 с.

16. Боженкова, Л.И. Изучение тождественных преобразований выражений в условиях реализации ФГОС / Л.И. Боженкова // Конференциум АСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. – 2016. – №1. – С. 124-138

17. Боженкова Л.И. Алгоритмический подход к задачам на построение методом подобия / Л.И. Боженкова // Математика в школе. – 1991. – № 2. – С. 23-25.

18. Бондаренко, Т.Е. Тождественные преобразования как средство рационализации вычислений: методические аспекты обучения / Т.Е. Бондаренко // Известия Воронежского государственного педагогического университета. – 2015. – №2 (267). – С. 36-40
19. Васильева, Г.Н. Современные технологии обучения математике. Ч. 1 : учебное пособие / Г.Н. Васильева, В.Л. Пестерева. – Пермь: Пермский гос. гуманитарно-пед. ун-т, 2013. – 114 с
20. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе/ Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: «Феникс», 2005.
21. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В.А. Гусев. – М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия», 2003. – 432 с.
22. Далингер, В.А. Наглядные образы как средство решения математических задач / В.А. Далингер // Математика в школе. – 2007. – №7. – С. 26-31.
23. Ергалиев, Е.К. Методика формирования умений решать тригонометрические уравнения и неравенства в курсе алгебры и начал анализа / Е.К. Ергалиев, М.А. Дуйсенбаева, К. Нурбакыт // Актуальные научные исследования в современном мире. – 2018. – №1-6 (33). – С. 137-142
24. Захарова, О.В. Методические особенности обучения тригонометрии учащихся профильных классов: автореф. дис. канд. пед. наук / О.В. Захарова. – Астрахань, 2010. – 20 с.
25. Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева; под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.
26. Калинин А.К. О решении тригонометрических неравенств / А.К. Калинин // Математика в школе. – 1991. – № 6. – С. 17-18

27. Капкаева, Л.С. Теория и методика обучения математике: частная методика. В 2 ч. Часть 1 : учеб.пособие для вузов / Л.С. Капкаева. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 264 с.
28. Капкаева, Л.С. Лекции по теории и методике обучения математике: Частная методика: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов. В 2 ч. 4.1 / Л.С. Капкаева / Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2009. – 262 с.
29. Каратаева, Н.Г. Формирование основ алгоритмической культуры обучающихся в процессе выполнения нестандартных учебных заданий: монография / Н.Г. Каратаева, О.Д. Федотова. – Ростов-на-Дону: Издательство Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2014. – 195 с.
30. Кондаков, Н.И. Логический словарь-справочник / Н.И. Кондаков. – М.: Изд-во «Наука», 1975.
31. Ланда, Л.Н. О формировании у учащихся общего метода мыслительной деятельности при решении задач / Л.Н. Ланда // Вопросы психологии. – 2003. – № 3. – С. 14-27
32. Ланда, Л.Н. Алгоритмизация в обучении / под общ. ред.: Б. В. Гнеденко, Б. В. Бирюкова. – М.: Просвещение, 1966. – 523 с.
33. Лапчик, М.П. Вычисления. Алгоритмизация. Программирование: пособие для учителя / М.П. Лапчик. – М.: Изд-во «Просвещение», 1988.
34. Литвиненко, В.Н. Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия: Для поступающих в вузы / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2005. – 464 с.
35. Макарычев, Ю.Н. Преподавание алгебры в 6-8 классах: Сб. статей / Ю.Н. Макарычев, И.В. Баум. – М.: Просвещение, 1980. – 270 с.
36. Марасанов, А.Н. Об особенностях предвузовской подготовки школьников к экзамену по математике по разделу «Тригонометрия» / А.Н.

Марасанов // Математика. Образование: Материалы XV междунар. конф. 28 мая - 2 июня 2007 г. – Чебоксары, 2007. – С. 153.

37. Марасанов, А.Н. О методических аспектах проведения занятий по школьному спецкурсу «Математика» в профильных классах / А.Н. Марасанов // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы II междунар. науч. конф. 11 -16 декабря 2007 г. – Воронеж, 2007. – С. 128-129.

38. Масленкова, В.А. Формирование метапредметных умений при обучении тождественным преобразованиям иррациональных выражений / В.А. Масленкова, А.И. Молдыбаева, М.Е. Ширшикова // Молодой ученый. – 2016. – № 20 (124). – С. 708-710.

39. Мамхегов А.Б. Углубленное изучение тригонометрических выражений / А.Б. Мамхегов. – 1994. – № 3. – С. 26-31.

40. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / Под общ. ред. С.Е. Ляпина. – М.: Просвещение, 1965. – 745 с.

41. Методика и технология обучения математике. Курс лекций / под ред. Н.Л. Стефановой и Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.

42. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А., В.А. Панчищина и др./под ред. В.А. Гусева. – М.: Академия, 2004

43. Миндюк, Н.Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений классов / Н.Г. Миндюк // Математика в школе. – 1985. – №5.

44. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 кл.: в 2 ч. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2013. – 240 с.

45. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.Учебник (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Издательство: Мнемозина, 2009. – 424 с.

46. Остапенко, С.И. Формирование алгоритмической культуры учащихся на уроках математики / С.И. Остапенко // Актуальные вопросы образования и науки. Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. – 2018. – С. 117-119
47. Остапенко, С.И. Формирование алгоритмической культуры будущих учителей в процессе дистанционного обучения: дис. канд. пед. наук: 13.00.08; – Белгород, 2013. – 175 с.
48. Попов, Н.И. Методика обучения тригонометрии на основе когнитивно-визуального подхода / Н.И. Попов // Сибирский педагогический журнал. – 2008. – № 11. – С.34-42.
49. Попов, Н.И. О методологическом подходе в обучении тригонометрии / Н.И. Попов, А.Н. Марасанов // Знание. Понимание. Умение. – 2008. – №4. – С.139-141.
50. Попов, Н.И. Тригонометрия: Учебное пособие / Н.И. Попов, А.Н. Марасанов. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т., 2000. – 95 с.
51. Попов, Н.И. О выявлении внутрипредметных связей при изучении тригонометрии / Н.И. Попов, А.Н. Марасанов // Наука и школа. – 2009. – № 5. – С. 37-39.
52. Попов, Н.И. Тригонометрия: Учебное пособие, 2-е изд., испр. и доп. / Н.И. Попов, А.Н. Марасанов. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т., 2009. – 114 с.
53. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]. – URL : <http://fgosreestr.ru/> (Дата обращения 12.04.2020)
54. Рубинштейн, С.Л. Проблемы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – М.: Изд-во «Педагогика», 1976
55. Рыжик В.И. Упростить? Нет ничего проще?! / В.И. Рыжик // Математика в школе. – 2012. – №1. – С. 31-37

56. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе : Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
57. Севрюков П.Ф. Такие разные задачи с модулями / П.Ф. Севрюков // Математика в школе. – 2014. – №1. – С. 18-23
58. Старокожева Е.И. Курс лекций. Методика преподавания математики в основной школе [Электронный ресурс]. Лекция 8. Формирование алгоритмической культуры учащихся. 2008. // URL: <http://refdb.ru/look/1393028-pall.html> (Дата обращения 13.04.2020)
59. Тригонометрия. 10 класс: учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова / под ред. С. А. Теляковского. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 61 с.
60. Фирстова, Н.И. Методика формирования познавательных универсальных учебных действий при обучении методу тождественных преобразований на материале иррациональных выражений / Н.И. Фирстова // Конференциум АСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. – 2015. – №1. – С. 3109-3120
61. Храмов А.В. О периодичности тригонометрических выражений / А.В. Храмов // Математика в школе. – 2004. – № 1. – С. 9-10.
62. Чамокова Н.М. Необходимо формирование алгоритмической культуры / Н.М. Чамокова // Математика в школе. – 1994. – № 4. – С. 8.
63. Шмигирилова, И.Б. Теория и методика обучения математике в понятиях, схемах и таблицах: учебно-методическое пособие / И.Б. Шмигирилова. Петропавловск, 2007. – 161 с.
64. Шувалова, И.Н. Методические аспекты изучения тождественных преобразований в средней школе / И.Н. Шувалова, Т.К. Смыковская // Наука и образование: проблемы, идеи, инновации. – 2019. – №6 (18). – С. 22-24
65. Coad J., Keith J. Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school // University of Southampton Centre for Research in Mathematics Education Working Paper, 1999. p.1-7.

66. Ismail S.F.Z.H., Shahrill M., Mundia L. Factors Contributing to Effective Mathematics Teaching in Secondary Mathematics School in Brunei Darussalam // Procedia - Social and Behavioral Sciences. 2015. p. 474-481
67. Johnstone – Wilder P., Pimm D. Learning to teach Mathematics in the Secondary School a Companion to School Experience. London: Routledge, 1999. p. 297
68. Lyndon R.C. Identities in two-valued calculi // Trans. Amer. Math. Soc. 71. N 3 (1951). P. 457-465.
69. Seefeldt C., Galper A. Continuity of learning [Электронный ресурс] // Excerpt from Active Experiences for Active Children: Social Studies, 2006. p. 11-12.

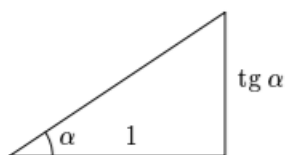
Приложение А

Система задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений

Углубленное изучение синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов, свойств синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов

Задача 1. Докажите, что тангенс угла не зависит от размеров прямоугольного треугольника, содержащего этот угол.

Задача 2. Для данного острого угла α что больше: $\sin \alpha$ или $\operatorname{tg} \alpha$?



$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Задача 3. Пусть α — острый угол; выведите формулу, выражающую $\operatorname{tg} \alpha$ через $\sin \alpha$.

Задача 4. Для каждого из углов 10° , 30° , 60° найдите приближенные значения их тангенса. Что больше: тангенс или радианная мера? И на сколько процентов больше?

Задача 5.

Докажите следующие формулы:

а) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; б) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$.

Задача 6. Найдите значение выражения:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot 1 + 1 + 2 \cos\frac{\pi}{6} = -1 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\sin 405^\circ + \operatorname{ctg} 570^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) + \operatorname{ctg}(540^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}$$

Задача 7. Определите знак выражения:

1. $\cos 155^\circ \cdot \sin 255^\circ > 0$, т.к. 155° - угол II четверти, то $\cos 155^\circ < 0$; 255° - угол III четверти, то $\sin 255^\circ < 0$.

Продолжение Приложения А

2. $\operatorname{tg} 127^\circ \cdot \operatorname{ctg} 201^\circ < 0$, т.к. 127° - угол II четверти, то $\operatorname{tg} 127^\circ < 0$; 201° - угол III четверти, то $\operatorname{ctg} 201^\circ > 0$.

Задача 8. Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

1. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{2}$?

2. Найдите значения тригонометрических функций числа α , зная, что $\sin \alpha = 0,6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Задача 9. Упростите: $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Задача 10. Вычислите значения тригонометрических функций, если $\operatorname{ctg} \alpha = -3$, α - угол IV четверти.

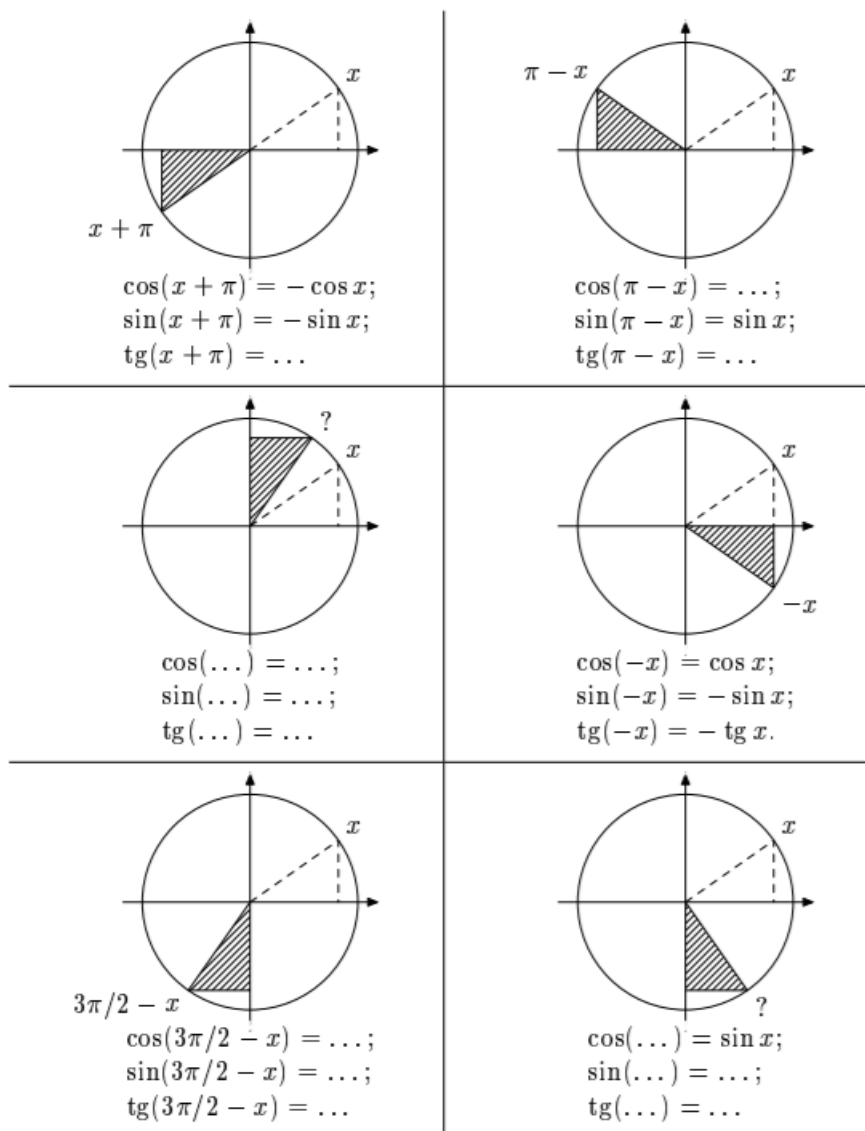
Изучение основных формул тригонометрии: формулы синуса и косинуса суммы аргументов

Задача 1. Выведите все формулы, приведенные ниже, из определений и формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; & \sin^2 \alpha &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}; & \cos^2 \alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Задача 2. Заполните пустые места в подписях к чертежам.

Продолжение Приложения А



Задача 3. Вычислить: $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = 3/5$; $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\cos \beta = -5/13$; $\pi < \beta < 3\pi/2$.

Задача 4. Вычислите: $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$.

Задача 5. Вычислите синус углов: 165° ; 105° .

Задача 6. Упростите выражение: $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ$.

Изучение формул двойного аргумента

Задача 1. Дано: $\cos x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Продолжение Приложения А

Найти: а) $\cos 2x$, б) $\sin 2x$.

Задача 2. Упростить:

а) $\frac{\sin t}{2\cos^2 \frac{t}{2}}$, б) $\frac{\sin 4t}{\cos 2t}$.

Задача 3. Решить уравнение:

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

Задание 4. Вычислите:

1) $9 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

2) $\sqrt{32} \cos^2 \frac{5\pi}{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{5\pi}{8}$

3) $\frac{44 \sin 53^\circ \cos 53^\circ}{\sin 106^\circ}$

4) $2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{7\pi}{8}$

Задание 5. Найдите: $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ если

$$\sin \alpha = 0,6 \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Задание 6. Упростите выражения:

1) $0,5 \sin 2\beta \operatorname{ctg} \beta$

2) $4 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi$

Задача 7. Решите уравнение:

$$\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

Изучение основных формул приведения

Задача 1. Упростите выражения:

а) $\sin(x - \pi/2)$;

б) $\sin(x - 1998\pi)$;

в) $\sin(x - 1991\pi/2)$;

г) $\sin(x - 3\pi/2)$;

д) $\sin(2\pi - x)$; е) $\operatorname{tg}(x - \pi/2)$;

Продолжение Приложения А

ж) $\sin(x - 111\pi)$;

з) $\cos(x + 7\pi/2)$;

и) $\operatorname{tg}(-x - 3\pi/2)$.

Задача 2. Вычислите:

а) $\cos(13\pi/6)$;

б) $\sin(44\pi/3)$;

в) $\cos(-21\pi/2)$;

г) $\operatorname{tg}(77\pi/4)$;

д) $\sin(123\pi/2)$;

е) $\sin(-19\pi/3)$;

ж) $\sin 3540^\circ$;

з) $\operatorname{tg}(-1050^\circ)$;

и) $\cos 1575^\circ$;

к) $\sin(-1200^\circ)$.

Задача 3. Выразите через тригонометрическую функцию числа, лежащего на отрезке $[0; \pi/2]$:

а) $\operatorname{tg} 19, 3\pi$;

б) $\operatorname{tg} 10$;

в) $\sin 46\pi/9$;

г) $\cos 114$;

д) $\sin(-9)$;

е) $\sin 22\pi/7$.

Задача 4. Определите знаки следующих выражений:

а) $\sin(127\pi/5)$;

б) $\cos(-26, 17\pi)$;

в) $\operatorname{tg} 83, 1\pi$;

г) $\cos 17$;

д) $\sin(-46)$.

Продолжение Приложения А

Задача 5. Пусть на плоскости задана система координат и точка М с координатами (а; b). Запишите координаты точки, в которую М переходит при следующих преобразованиях:

- а) симметрии относительно оси абсцисс;
- б) симметрии относительно оси ординат;
- в) симметрии относительно начала координат;
- г) повороте относительно начала координат на 90° в положительном направлении;
- д) симметрии относительно прямой с уравнением $y = x$.

Изучение формул тангенса суммы и разности аргументов и соответствующие им формулы

Задача 1. Упростить выражения и найти их значения:

а) $\sin \alpha \cdot \sin (2 \alpha + 3 \beta) + \cos (2 \alpha + 3 \beta) \cdot \cos \alpha$

б) $\cos 2 \alpha \cdot \sin (\alpha - \beta) - \cos (\beta - \alpha) \cdot \sin 2 \alpha$

в) $\sin 81^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 81^\circ \cdot \sin 21^\circ$

г) $\cos \frac{5\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{5\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$

д) $\sin \frac{5\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$

е) $\cos 78^\circ \cdot \cos 18^\circ + \sin 78^\circ \cdot \sin 18^\circ$

ж) $\frac{\operatorname{tg} 85^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg} 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}$

з) $\frac{\operatorname{tg} 4^\circ + \operatorname{tg} 26^\circ}{1 - \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 26^\circ}$

и) $\frac{1 - \operatorname{tg} 16^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ}{\operatorname{tg} 16^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ}$

Продолжение Приложения А

$$\kappa) \frac{\operatorname{tg} 67^{\circ} - \operatorname{tg} 97^{\circ}}{1 + \operatorname{tg} 67^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 97^{\circ}}$$

Задача 2. Решите уравнения:

$$\text{a)} \cos 4x \cdot \cos x - \sin 4x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б)} \sin 5x \cdot \cos x + \cos 5x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{в)} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \tilde{\alpha}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \tilde{\alpha}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Задача 3. Выберите из предложенных уравнений то, в котором будет применяться при решении формула косинус суммы или разности аргументов. Решите самостоятельно.

$$\text{a)} \cos 4x \cdot \cos x - \sin 4x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Задача 4. Выберите из предложенных уравнений то, в котором будет применяться при решении формула тангенса суммы или разности аргументов. Решите самостоятельно.

Решение заданий для самостоятельного выбора:

$$в) \frac{tg \frac{\pi}{6} + tg \tilde{\alpha}}{1 - tg \frac{\pi}{6} \cdot tg \tilde{\alpha}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg(\frac{\pi}{6} + x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} + x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

Задача 5. Вычислите:

$$а) \frac{\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} - \sin \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15}}{\cos 0,3\pi \sin 0,2\pi + \sin 0,3\pi \cos 0,2\pi}$$

$$б) \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}}$$

Понятие преобразования сумм тригонометрических функций в произведения

Задача 1. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 48^\circ + \sin 32^\circ$;

б) $\sin 71^\circ - \sin 13^\circ$;

в) $\cos \pi 5 + \cos 2\pi 5$;

г) $\cos 3\pi 7 - \cos 9\pi 7$.

Задача 2. Упростите выражение:

а) $\sin 83^\circ - \sin 23^\circ$;

б) $\cos 35^\circ + \cos 25^\circ$;

в) $\sin \pi 8 + \sin 3\pi 8$;

г) $\cos 4\pi 15 - \cos 2\pi 5$.

Продолжение Приложения А

Задача 3. Докажите тождество:

а) $\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4 \sin 3\alpha \cos 2\alpha$;

б) $\sin 2 5\alpha - \sin 2 3\alpha = \sin 8\alpha \sin 2$

Задача 4. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

б) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

в) $\frac{\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

г) $\frac{\sin 4\alpha + 2 \cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2 \sin 3\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha$;

д) $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;

е) $\frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

Обучение преобразованию произведений тригонометрических функций в суммы

Задача 1. Вычислите $\frac{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 10^\circ}$.

Задача 2. Решите уравнение:

а) $\sin 5x = \sin 6x$;

б) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 2x - \sin x = 0$.

Задача 3. Решите уравнение.

а) $\cos 5x = \cos 7x$;

б) $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3} \sin 2x$.

Задача 4. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

б) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$;

в) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha} = -\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

г) $\frac{\cos 3\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha$.

Обучение основным методам решения тригонометрических уравнений

Задача 1. Решите уравнение:

1. $2 \sin 2x + \sin x - 1 = 0$;

Продолжение Приложения А

2. $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$;
3. $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$;
4. $6\cos^2 x + \cos 3x = \cos x$;
5. $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$;

Задача 2. Найдите наименьшее решение x уравнения $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$, если $x \in (0^\circ; 180^\circ)$.

Задача 3. Найдите наименьшее решение x в градусах, удовлетворяющее заданному условию $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$, $x \in (-90^\circ; 270^\circ)$.

Задача 4. Решите данное уравнение семью разными способами: $\sin x - \cos x = 1$.

Олимпиадные задачи

1. Сумма трёх положительных углов равна 90° . Может ли сумма косинусов двух из них быть равна косинусу третьего?

2. Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_5$, все члены которой принадлежат отрезку $[0; 3\pi/2]$, если числа $\cos a_1, \cos a_2, \cos a_3$, а также числа $\sin a_3, \sin a_4$ и $\sin a_5$ в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии.

3. Известно число $\sin \alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin \frac{\alpha}{2}$, б) $\sin \frac{\alpha}{3}$.

4. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

5. Доказать, что $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

6. Сколько корней имеет уравнение

7. $\sin x = \frac{x}{100}$?

**Система задач для оценки когнитивного критерия алгоритмической
культуры школьников**

Констатирующий этап

1. Вычислить выражения, используя при этом построение алгоритма:

а) $2 \sin \frac{2\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$;

б) $\sin 56^\circ \cos 34^\circ + \cos 56^\circ \sin 34^\circ$.

2. Известно, что $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Найти $\sin 2\alpha$ при помощи построения алгоритма

3. Упростить выражение, используя при этом построение алгоритма

а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

б) $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} + 2 \sin^2 \alpha$.

4. Доказать тождество, используя при этом построение алгоритма

1. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

5. Известно, что

$$\sin \alpha = 0,8 \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Найти три других тригонометрических функции, используя при этом построение алгоритма.

Контрольный этап

Вычислить, используя при этом построение алгоритма:

а) $2 \cos \frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

б) $\cos 111^\circ \cos 69^\circ - \sin 111^\circ \sin 69^\circ$.

2. Известно, что $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Найти $\cos 2\alpha$, используя при этом построение алгоритма.

3. Упростить выражение, используя при этом построение алгоритма.

а) $\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;

б) $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{2 \cos 3\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1$.

Продолжение Приложения Б

4. Доказать тождество, используя при этом построение алгоритма

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

5. Известно, что

$$\cos \alpha = 0,6 \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Найти три других тригонометрических функции, используя при этом построение алгоритма.

Анкета

1. Назовите, пожалуйста, наиболее важные, с вашей точки зрения, цели изучения алгоритмов при решении математических задач.

Возможно несколько вариантов ответов:

- систематизация, обобщение и углубление знаний;
- показание важности знаний для решения учебных задач;
- формирование положительной мотивации к изучению математики;
- развитие информативного мышления и формирование умений и навыков творческого использования знаний;
- повышение готовности к самостоятельному решению проблем;
- овладение математическим аппаратом;
- формальность, стандарт обучения.

2. Какие из представленных ниже трудностей оказывали влияние на вас?

- Слабо развитые навыки моделирования учебных ситуаций.
- Отсутствие интереса к современным информативным методам решения задач.
- Отсутствие навыков самостоятельной работы над новым теоретическим материалом.
- Недостаток информативных знаний.
- Отсутствие междисциплинарных связей.

Продолжение Приложения Б

- Недостаток информативной литературы.

- Не было трудностей.

3. Отметьте, пожалуйста, наиболее подходящие к вам высказывания.

- У меня отсутствует стремление изучать алгоритмы при решении математических задач.

- У меня отрицательное или безразличное отношение к алгоритмам при решении математических задач.

- Я не удовлетворен морально-психологическим климатом в классе во время занятий.

- Я вижу перспективу изучения алгоритмов при решении математических задач для профессиональной деятельности.

- У меня не сложилось четкого отношения к изучению алгоритмов при решении математических задач.

- Возникающие трудности мешают мне при изучении алгоритмов при решении математических задач.

- У меня есть желание изучать дисциплины, но не нравится система обучения.

- У меня позитивное отношение к учебе.

- У меня сложившееся представление о будущей профессиональной деятельности.

4. Выделите, пожалуйста, среди данных высказываний наиболее к вам подходящие. Для Вас характерно:

- отсутствие или неопределенность желания учиться;

- безразличие к достижению успехов в учебной деятельности;

- отсутствие стремления к самообразованию;

- умеренный уровень притязаний;

- желание изучать дисциплины, но недостаточная готовность поступаться своим временем и интересами ради достижения успехов;

- умеренное стремление к самообразованию;

Продолжение Приложения Б

- творческий подход в процессе изучения дисциплины;
- высокий уровень притязаний;
- побуждение к позитивной динамике роста;
- желание достижения высоких уровней результатов своего труда;
- стремление к самообразованию.

Приложение В

Таблица 11 - Результаты констатирующего этапа исследования

№	Критерии			Общий балл	Уровень сформированности алгоритмической культуры
	Когнитивный	Эмоциональный	Поведенческий		
Экспериментальная группа					
1	3	3	3	9	В
2	2	2	2	6	С
3	1	1	2	4	Н
4	3	3	3	9	В
5	2	2	2	6	С
6	1	1	1	3	Н
7	2	2	2	6	С
8	3	2	3	8	В
9	2	2	2	6	С
10	2	2	2	6	С
11	1	1	1	3	Н
12	2	2	2	6	С
13	3	3	3	9	В
14	2	2	2	6	С
15	1	1	2	4	Н
16	3	3	3	9	В
17	2	2	2	6	С
18	2	2	2	6	С
19	1	1	2	4	Н
20	0	1	1	2	Н
21	2	2	2	6	С
22	2	2	2	6	С
23	1	1	1	3	Н

Продолжение Приложения В

Продолжение таблицы 11

24	2	2	2	6	С
25	2	2	2	6	С
Контрольная группа					
1	3	3	3	9	В
2	2	2	2	6	С
3	3	3	3	9	В
4	2	2	2	6	С
5	1	1	2	4	Н
6	0	1	1	2	Н
7	2	2	2	6	С
8	3	3	3	9	В
9	1	1	2	4	Н
10	2	2	2	6	С
11	2	2	2	6	С
12	2	2	2	6	С
13	3	3	3	9	В
14	2	2	2	6	С
15	2	2	2	6	С
16	3	3	3	9	В
17	2	2	2	6	С
18	2	2	2	6	С
19	3	2	3	8	В
20	2	2	2	6	С
21	2	2	2	6	С
22	0	1	1	2	Н
23	2	2	3	7	С
24	1	1	1	3	Н
25	2	2	2	6	С

Приложение Г

Таблица 12 - Результаты контрольного этапа исследования

№	Критерии			Общий балл	Уровень сформированности алгоритмической культуры
	Когнитивный	Эмоциональный	Поведенческий		
Экспериментальная группа					
1	3	3	3	9	В
2	3	3	3	9	В
3	1	2	2	5	С
4	3	3	3	9	В
5	3	3	3	9	В
6	2	2	1	5	С
7	3	2	2	7	С
8	3	3	3	9	В
9	2	2	3	7	С
10	3	3	3	9	В
11	2	2	1	5	С
12	2	2	2	6	С
13	3	3	3	9	В
14	3	3	2	8	В
15	2	1	2	5	С
16	3	3	3	9	В
17	2	3	2	7	С
18	3	3	3	9	В
19	2	1	2	5	С
20	1	2	2	5	С
21	2	2	2	6	С
22	3	3	3	9	В
23	1	1	2	4	Н

Продолжение Приложения Г

Продолжение таблицы 12

24	3	2	2	7	С
25	2	3	3	8	В
Контрольная группа					
1	3	3	3	9	В
2	3	3	3	9	В
3	3	3	3	9	В
4	2	2	2	6	С
5	2	1	2	5	С
6	1	1	2	4	Н
7	2	2	3	7	С
8	3	3	3	9	В
9	2	1	2	5	С
10	2	2	2	6	С
11	2	2	2	6	С
12	3	2	2	7	С
13	3	3	3	9	В
14	2	2	2	6	С
15	2	2	2	6	С
16	3	3	3	9	В
17	2	2	2	6	С
18	2	2	2	6	С
19	3	2	3	8	В
20	2	2	2	6	С
21	2	2	2	6	С
22	0	1	1	2	Н
23	2	2	3	7	С
24	1	1	1	3	Н
25	2	2	2	6	С