

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование)

01.04.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки)

Математическое моделирование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Исследование методов решения задач оптимального управления для
дифференциальных уравнений в частных производных»

Студент

Н.С. Селиваткин

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

К.м.н., доцент, О.В. Лелонд

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1 Задачи оптимального управления для дифференциальных уравнений в частных производных	6
1.1 Различные типы задач оптимального управления.....	6
1.2 Вариационная формулировка	14
Глава 2 Методы решения задач оптимального управления	19
2.1 Метод Лагранжа	19
2.2 Приведенный функционал	25
2.3 Сравнение систем оптимальности.....	28
Глава 3 Результаты решения системы оптимальности методом конечных элементов	39
3.1 Точное решение.....	39
3.2 Дискретизация	41
3.3 Численные результаты	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	66
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	67
Приложение А Код на языке Python для программного обеспечения FEniCS	74

ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория оптимального управления в последние несколько десятилетий быстро превратилась в важный самостоятельный раздел прикладной математики. Одной из областей применения этой теории является авиационная и космическая техника: аспекты оптимизации проявляются всякий раз, когда движение воздушного судна или космического корабля (которое может моделироваться дифференциальным уравнением) должно осуществляться по оптимальной в данном случае траектории.

Рассмотрим самолет, пытающийся избежать столкновения с объектом, который внезапно приземляется на взлётной полосе. Пилот обладает определенной способностью управлять самолетом, маневрируя и изменяя траекторию. Очевидно, что пилот сталкивается с проблемой поиска оптимального способа маневрирования самолетом таким образом, чтобы избежать столкновения (избегая препятствия и минимизируя конечную скорость). Это пример задачи оптимального управления, которая состоит из системы дифференциальных уравнений, описывающих движение самолёта, и целевого функционала, который должен быть оптимизирован (максимизирован или минимизирован).

Широко распространенные приложения задач оптимального управления можно найти во многих областях, таких как механика, химия, динамика транспортных средств, авиация и других. Этим обосновывается актуальность темы исследования.

Объектом исследования в данной работе являются задачи оптимального управления для дифференциальных уравнений в частных производных.

Предмет исследования – методы решения задач оптимального управления с эллиптическими уравнениями в частных производных.

Целью работы является сравнительный анализ методов решения задач оптимального управления с эллиптическими уравнениями в частных производных.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

- провести обзор различных модельных задач оптимального управления с эллиптическими уравнениями в частных производных;
- получить системы оптимальности для задач граничного и распределенного управления с помощью методов Лагранжа и приведенного градиента;
- исследовать метод конечных элементов решения систем оптимальности;
- реализовать два способа решения системы оптимальности посредством программного обеспечения FEniCS;
- сравнить результаты, полученные при различных подходах, проанализировать ошибки, оценить скорости сходимости.

В первой главе магистерской диссертации рассматриваются различные модельные задачи оптимального управления с эллиптическими уравнениями в частных производных с разными типами граничных условий, приводятся их вариационные формулировки, описывается метод конечных элементов.

Во второй главе выпускной квалификационной работы представлены два подхода к решению задач оптимального управления – косвенный и прямой. Косвенный подход реализуется посредством метода Лагранжа, прямой – с помощью метода приведенного градиента. В первом случае вычисляются стационарные точки функционала Лагранжа, среди которых можно найти возможные локальные минимумы. Во втором случае для минимизации функции стоимости, или целевой функции, работа ведется только с набором допустимых функций, т. е. пар (y, u) , удовлетворяющих уравнению состояния, где y – переменная состояния, а u – управляющая переменная. Рассматриваются модельные задачи оптимального граничного

управления и оптимального распределенного управления. Для задач обоих типов находятся системы оптимальности в сильной и слабой форме с применением двух вышеуказанных методов. Затем проводится сравнение полученных систем оптимальности.

В третьей главе представлены результаты решения задачи оптимального управления с эллиптическим дифференциальным уравнением в частных производных и функционалом стоимости, определенным на двух различных границах, посредством программного обеспечения FEniCS. Система оптимальности, полученная с помощью различных алгоритмов, реализована двумя путями: как система оптимальности двух уравнений и как система оптимальности трех уравнений. Предварительно аналитическим путем было найдено точное решение системы в сильной форме, которое в дальнейшем позволило сравнить приближенные и точные решения, проанализировать ошибки и оценить скорости сходимости.

В заключении подводятся итоги проведенного исследования, выделяются основные результаты.

Глава 1 Задачи оптимального управления для дифференциальных уравнений в частных производных

В этой главе мы кратко представим суть и теорию задач оптимального управления (ОСР), вариационную формулировку (VF) и соответствующий метод конечных элементов (FEM) для VF.

Мы упомянули здесь метод конечных элементов для вариационной формулировки, потому что некоторые вычислительные / имитационные программы имеют возможность генерировать автоматические решения, получаемые методом конечных элементов, из вариационной формулировки. В этой работе мы используем программное обеспечение FEniCS в качестве инструмента для моделирования численных результатов. Позже будут представлены результаты, полученные с помощью программного обеспечения FEniCS, которое распознает кодирование вариационной формулировки на языке Python.

В этой главе мы представим вариационные формулировки некоторых модельных задач для дифференциальных уравнениях в частных производных, в дальнейшем некоторые из этих уравнений будут использоваться в качестве дифференциальных уравнений-ограничений или в качестве уравнения состояния в модельных задачах оптимального управления.

1.1 Различные типы задач оптимального управления

Задачи оптимального управления связаны с поиском функций управления, которые оптимизируют функции затрат для систем, описываемых дифференциальными уравнениями (обыкновенные дифференциальные уравнения или уравнения в частных производных).

Разнообразные приложения в различных областях свидетельствуют об успешном применении задач оптимального управления. Кроме того,

численные методы сыграли важную роль в решении прикладных задач из разных дисциплин.

В этой работе мы сосредоточили внимание на минимизации функций затрат, связанных только с ограничениями в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Позже эти задачи оптимального управления будут решаться с помощью программного обеспечения FEniCs.

В этой работе функционал стоимости будет обозначаться как J . Функция состояния, которой управляют дифференциальные уравнения в частных производных, будет обозначаться как y , а функция управления будет обозначаться как u .

Функция состояния y - это величина, определяемая как решение уравнений в частных производных, где в качестве управления может быть функция ввода, заданная на границе Γ , называемая граничным управлением, или функция ввода, заданная в объемной области Ω , называемая распределенным управлением. Однако, если и распределенное управление, и граничное управление встречаются в одной и той же задаче, то u будет обозначать граничное управление, а v будет обозначать распределенное управление. В общем случае J будет квадратичной функцией и будет зависеть как от состояния, так и от управления. Однако, если существует уникальное состояние для каждого элемента управления (т. е. отображение $S: u \rightarrow y = S(u)$), то J можно рассматривать как функцию одного только элемента управления u . Существует два типа оптимального управления, каждый из которых мы определим ниже с помощью модельных задач и рисунков.

1.1.1 Распределенное управление / Оптимальный источник тепла

Рассмотрим модельную задачу оптимального управления с ограничениями в виде уравнений в частных производных, когда тело, занимающее пространственную область $\Omega \subset R^3$, нагревается или охлаждается. Оптимальное распределение температуры $y_\Omega: \Omega \rightarrow R^+$

известно, и нагревательные элементы могут контролировать температуру u в каждой точке всей области. Управление распределяется по Ω и действует как источник тепла в области. Задачи такого типа возникают, когда тело нагревается электромагнитной индукцией или микроволнами. Полностью задача оптимального управления может быть записана следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму} \\ \text{С учетом ограничений ДУЧП} \\ \text{Ограничения управления} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x) - y_{\Omega}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u(x)^2 dx \\ -\Delta y + y = u \quad \text{в } \Omega \\ n \cdot \nabla y = 0 \quad \text{на } \Gamma \\ u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{на } \Omega \end{array} \quad (1)$$

Из модельной задачи мы видим, что функционал стоимости состоит из функционала состояния и функционала управления, где y – это состояние, а u – функции управления, которые определены в области Ω . Их соответствующее интегрирование может выполняться во всей области, поскольку управление определено в Ω [3].

В вышеприведенной задаче $\lambda \geq 0$ является постоянной величиной (будет играть одинаковую роль во всех модельных задачах), которую можно рассматривать как меру затрат энергии, необходимых для реализации управления u [16]. С математической точки зрения λ является параметром регуляризации, этот термин означает, что возможное оптимальное управление демонстрирует улучшенные свойства регулярности.

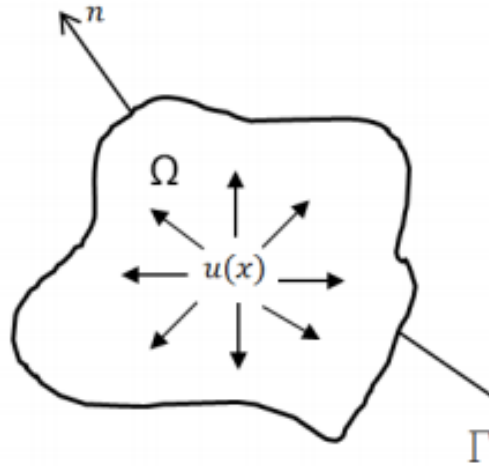


Рисунок 1 – Распределенное управление

Из-за физических и технических ограничений нагревательного или охлаждающего устройства необходимо наложить некоторые ограничения на управление, поскольку любое устройство будет выведено из строя, если его температура станет слишком низкой или слишком высокой, поэтому (поточечные) ограничения управления вполне естественны [20].

Рассмотрим другую, более реалистичную модель, которая может быть не в состоянии контролировать температуру во всей области Ω или может не иметь ресурсов для нагрева всей области, тогда управление может быть наложено на некоторую определённую часть области, т. е. Ω_c , где Ω_c является подмножеством Ω . Тогда мы получим следующую модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x) - y_{\Omega}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_c} u(x)^2 dx \\ \text{С учетом ограничений ДУЧП} \quad \begin{array}{l} -\Delta y + y = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \Omega_c \\ -\Delta y + y = u \quad \text{в } \Omega_c \\ n \cdot \nabla y = 0 \quad \text{на } \Gamma \end{array} \\ \text{Ограничения управления} \quad u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{на } \Omega_c \end{array} \right. \quad (2)$$

Теперь управление u существует в Ω_c , а не в Ω , и здесь Ω_c – нагревательный элемент.

Наша цель заключается в том, чтобы обеспечить управление u (которое действует в области) таким образом, что соответствующее распределение температуры $y = y(x)$ в Ω будет наилучшим возможным приближением к желательному стационарному распределению температуры $y_\Omega = y_\Omega(x)$ в Ω , поэтому функционал стоимости будет минимизирован. Из модельных задач (1) и (2) мы видим, что функционал стоимости является квадратичным, уравнение состояния управляется билинейными эллиптическими уравнениями в частных производных и управление действует во всей области (Ω) или в подмножестве всей области (Ω_c) [20]. Именно поэтому такие задачи называются билинейно-квадратичными эллиптическими задачами распределенного управления.

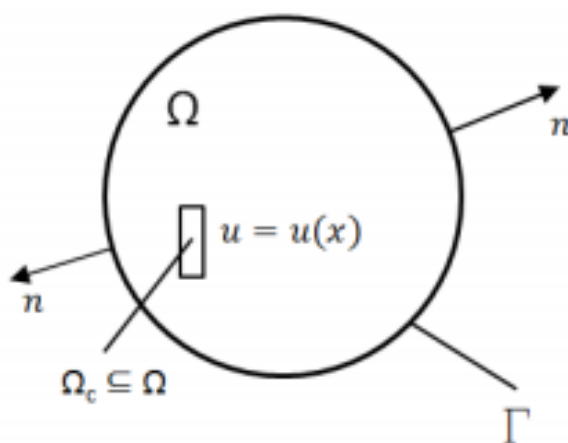


Рисунок 2 – Распределенное управление, существующее в подобласти

Теперь рассмотрим тело $\Omega \subset R^3$, которое должно быть нагрето или охлаждено.

1.1.2 Граничное управление / Оптимальный граничный нагрев

В этом разделе мы представим модельные задачи, где управление задано не во всей области Ω , а только на границе Γ [24].

Рассмотрим тело $\Omega \subset R^3$, которое нагревается или охлаждается.

Мы применяем управление u на границе Γ в качестве источника тепла, который зависит от положения x на границе, то есть $u = u(x)$, функция не

контролировать температуру на некоторой части границы Γ_c , где $\Gamma_c \subset \Gamma$ [68], или же нет ресурсов для контроля температуры всей границы Γ .

Такой тип задач оптимального управления можно моделировать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x) - y_{\Omega}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_c} u(x)^2 ds \\ \text{С учетом ограничений ДУЧП} \quad \begin{array}{l} -\Delta y + y = 0 \quad \text{в } \Omega \\ -\Delta y + y = u \quad \text{на } \Gamma_c \\ n \cdot \nabla y = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \Gamma_c \end{array} \\ \text{Ограничения управления} \quad u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{на } \Gamma_c \end{array} \right. \quad (4)$$

Управляющая температура u действует только на некоторой части границы Γ_c , а не на всей границе Γ [69]. Теперь наша цель в моделях задач граничного управления заключается в том, чтобы найти управление u , которое действует на границе или на некоторой части границы таким образом, что фактический y приближается к y_{Ω} , а соответствующий функционал стоимости минимизируется.

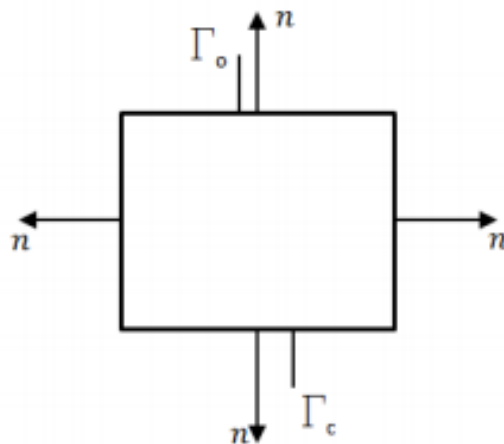


Рисунок 4 - Управление существует на части границы

Модели (3) и (4) называются линейно-квадратичными эллиптическими задачами граничного управления, потому что уравнения состояния, задаваемые эллиптическими дифференциальными уравнениями в частных производных, являются линейными, функционал затрат является квадратичным, а управление действует на границе области или на некоторой части границы области.

1.1.3 Оптимальное граничное управление, зависящее от времени

Все рассмотренные выше модели задач управления не зависят от времени. Теперь мы рассмотрим задачу, в которой управление зависит от времени. Предположим, что область теперь $\Omega \subset R^3$ представляет картофель, который должен обжариваться на огне за время $T > 0$. Температура обозначается как $y = y(x, t)$, где $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$. Картофель имеет начальную температуру $y_0 = y_0(x) = y(x, 0)$ и конечную температуру y_Ω в последний момент времени [38]. Задача оптимального управления может быть сформулирована следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(x, T) - y_{\Omega}(x))^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (u(x, t))^2 ds(x) dt \\ \text{С учетом ограничений ДУЧП} \quad \begin{array}{l} y_t - \Delta y + y = 0 \quad \text{в } \Lambda \\ n \cdot \nabla y = 0 \quad \text{на } \Upsilon \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{в } \Omega \end{array} \\ \text{Ограничения управления} \quad u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) \quad \text{на } \Upsilon \end{array} \right. \quad (5)$$

где $\Lambda := \Omega \times (0, T)$ и $\Upsilon := \Gamma \times (0, T)$.

Задачи такого типа называются линейно-квадратичными параболическими задачами граничного управления [41], поскольку теперь уравнение состояния задается линейным параболическим уравнением в частных производных.

1.1.4 Оптимальное управление вибрациями, зависящее от времени

Пусть теперь область $\Omega \subset R^2$ представляет собой мостик и, предположим, что группа пешеходов пересекает мост, пытаясь возбудить в нем колебания [5]. Причем, его поперечное смещение обозначается как $y = y(x, t)$, $u = u(x, t)$ плотность силы, действующей в вертикальном направлении, а $y_e = y_e(x, t)$ – желаемая эволюция поперечных колебаний. Тогда модель оптимального управления имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (y(x, t) - y_{\Omega}(x))^2 dxdt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (u(x, t))^2 dxdt \\ \text{С учетом ограничений ДУЧП} \quad \begin{array}{ll} y_{tt} - \Delta y = 0 & \text{в } \Lambda \\ y(0) = y_0 & \text{в } \Upsilon \\ y_t(0) = y_1 & \text{в } \Omega \\ y = u & \text{на } \Upsilon \end{array} \\ \text{Ограничения управления} \quad u_a(x, t) \leq u(x, t) \leq u_b(x, t) & \text{на } \Upsilon \end{array} \right. \quad (6)$$

Это линейно-квадратичная гиперболическая задача граничного управления, потому что теперь уравнение состояния задается линейным гиперболическим уравнением в частных производных с неоднородным граничным условием Дирихле [13].

1.2 Вариационная формулировка

Рассмотрим эллиптическое уравнение в частных производных с граничными условиями Неймана

$$\begin{array}{ll} -\Delta y + y = f & \text{в } \Omega \\ \partial_n y = u & \text{на } \Gamma_c, \quad \partial_n y = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c \end{array} \quad (7)$$

где $f \in L^2(\Omega)$ - заданная функция, а $u \in L^2(\Gamma)$, здесь $\partial_n y$ обозначает производную от y по направлению внешней единичной нормали n к Γ ,

обычно предполагается, что область Ω ограничена и Γ – граница области [19].

Для вариационной формулировки мы умножаем $\psi \in C^1$ на дифференциальное уравнение задачи (7), удовлетворять граничные условия нет необходимости, и затем интегрируем по области Ω , в результате имеем

$$-\int_{\Omega} \Delta u \psi dx + \int_{\Omega} u \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx$$

Используя формулу Грина или интегрирование по частям, получаем

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi dx - \int_{\Gamma} \partial_n u \psi ds + \int_{\Omega} u \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx$$

подставляя граничные условия, то есть $\partial_n u = u$ на Γ_c , $\partial_n u = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma_c$, имеем

$$\int_{\Omega} \nabla u * \nabla \psi dx - \int_{\Gamma_c} u \psi dx + \int_{\Omega} u \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx, \quad \forall \psi \in C^1 \quad (8)$$

И наоборот, если $u \in C^2$ удовлетворяет (8), то применяя формулу Грина, получаем

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) \psi dx + \int_{\Gamma_c} u \psi dx = 0, \quad \forall \psi \in C^1(\Omega)$$

Вспоминая, что $C^1(\Omega)$ плотно в $H^1(\Omega)$ и для фиксированного u все выражения в уравнении непрерывно зависят от $\psi \in H^1(\Omega)$, мы заключаем, что уравнение справедливо при $\forall \psi \in H^1(\Omega)$ [22].

Итак, вариационная формулировка звучит следующим образом: найти $u \in H^1(\Omega)$ такой, что

$$\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega} y \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx + \int_{\Gamma_c} f \psi dx + \int_{\Gamma_c} u \psi ds, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad (9)$$

Вышеприведенное уравнение также называется слабым решением или слабой формой [66]. Примечательно, что вариационная формулировка (слабая) или производные первого порядка необходимы для уравнения второго порядка.

В более общем смысле слабую формулировку можно представить в следующей абстрактной форме: найти $y \in H^1(\Omega)$ такой, что

$$\alpha(y, \psi) = L(\psi), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

где

$$\alpha(y, \psi) = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega} y \psi dx, \quad L(\psi) = \int_{\Omega} f \psi dx + \int_{\Gamma_c} u \psi ds \quad (10)$$

Билинейная форма определяется как $\alpha(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, линейный и непрерывный функционал определяется как $L(\cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$. Наконец, абстрактная форма слабой формулировки для общего PDE определяется так [67]:

$$\alpha(y, \psi) = L(\psi), \quad \forall \psi \in V \quad (11)$$

Обратим внимание, что уравнение (9) также можно прочитать следующим образом: найти $y \in H^1(\Omega)$ такой, что

$$(\nabla y, \nabla \psi)_{\Omega} + (y, \psi)_{\Omega} = (f, \psi)_{\Omega} + (u, \psi)_{\Gamma_c}, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad (12)$$

Теперь поговорим о приближенном решении. Разделим многоугольную область Ω на конечное число треугольников так, что пересечение любых двух треугольников является либо узлом, либо общим ребром, либо пустым. Теперь обозначим через $\bar{\Omega}$ область, разбитую на треугольники.

Конечным элементом или приближенным решением уравнения (11) является такой $y_h \in S_h$, что

$$(\nabla y_h, \nabla \phi)_\Omega + (\nabla y_h, \phi)_\Omega = (f, \phi)_\Omega + (u, \phi)_{\Gamma_c}, \quad \forall \phi \in S_h \quad (13)$$

Отметим, что $S_h = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}): \varphi \text{ линейна в } T \text{ для каждого } T \in \mathcal{E}_h\}$, а также $S_h \subset H^1$, где $\mathcal{E}_h = \{T\}$ - подмножество замкнутых треугольников T .

Пусть $\{Ni\}_{i=1}^{Mh}$ - множество внутренних узлов, то есть тех, которые не лежат на границе Γ [25]. Тогда функция из S_h однозначно определяется своими значениями в K_j и набор пирамидальных функций $\{\Phi_i\}_{i=1}^{Mh} \subset S_h$, определяемых как

$$\Phi_i(K_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

служит базисом для S_h . Если $\varphi \in S_h$, то мы имеем $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{Mh} \varphi_i \Phi_i(x)$, где $\varphi_i = \varphi(K_i)$ - узловые значения φ . Поэтому S_h - конечномерное подпространство гильбертова пространства H^1 .

Положим $y_h(x) = \sum_{i=1}^{Mh} U_i \Phi_i(x)$ и $\varphi = \Phi_j(x)$ в уравнении (13), тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{Mk} (\nabla \Phi_i, \nabla \Phi_j) U_i + \sum_{i=1}^{Mk} (\Phi_i, \Phi_j) U_j = (f, \Phi_j) + (u, \Phi_j)$$

что дает линейную систему уравнений $AU + BU = b$ для определения U_j , где $U_i = U(x_i)$ – узловые значения U [2, 5]. $A = \sum_{i=1}^{Mh} (\nabla\Phi_i, \nabla\Phi_j) U_j$ – матрица жесткости, $B = \sum_{i=1}^{Mh} (\Phi_i, \Phi_j) U_j$ – матрица масс, а правая часть $b = (f, \Phi_j) + (u, \Phi_j)$ – вектор нагрузки.

Матрицы A и B являются симметричными, положительно определенными и имеют единственное решение в S_h . Более того, матрицы, которые мы получаем из приведенного выше уравнения, являются большими и разреженными, если сетка мелкая. Другими словами большая часть их элементов равна нулю, поскольку Φ_j обращается в ноль всюду за исключением общего узла треугольников N_j , так что $a_{ij} = 0$, если только N_i и N_j являются соседними [31].

Отметим, что (13) также называется приближением Галеркина. На рисунках ниже показаны области, разделенные на треугольники.

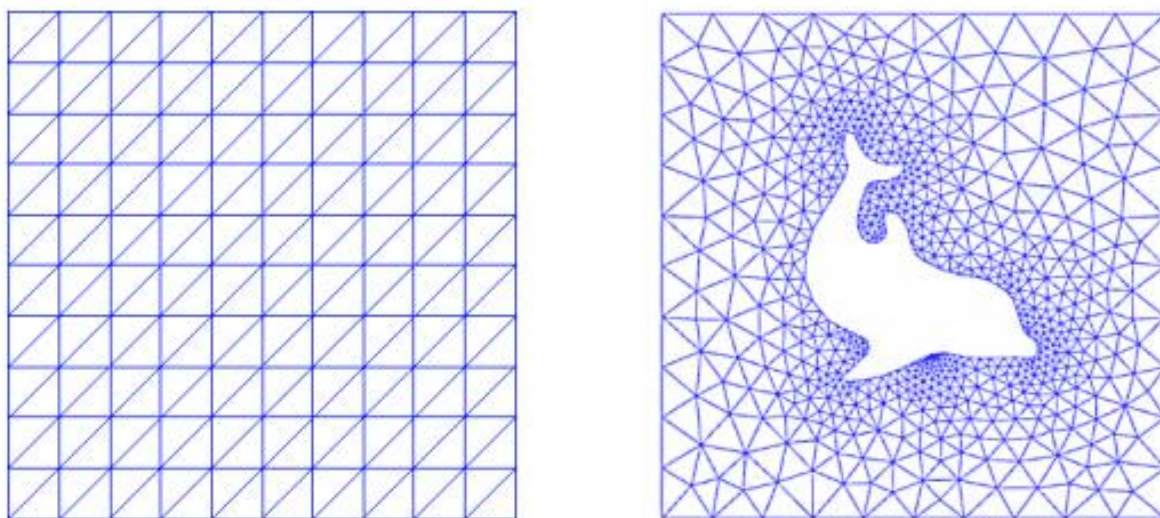


Рисунок 5 - Различные сетки областей

Выводы по главе. В данной главе представлены различные модельные задачи оптимального граничного и распределенного управления, кратко охарактеризован метод конечных элементов.

Глава 2 Методы решения задач оптимального управления

В данной главе выпускной квалификационной работы для нахождения решения задач оптимального управления будет представлена информация о двух различных подходах, а именно, косвенном и прямом. В обоих подходах используются различные методы решения. Здесь будет описан метод Лагранжа, который является типом косвенного подхода, и градиентный метод, являющийся в свою очередь одним из типов прямого подхода.

2.1 Метод Лагранжа

Рассмотрим задачу оптимального граничного управления

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму} \quad J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (y - y_0)^2 ds + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_0} u(x)^2 ds \quad (14a) \\ \text{с учетом ограничений ДУЧП} \quad -\Delta y + y = f \quad \text{в } \Omega \quad (14b) \\ \quad \quad \quad \partial_n y = u \quad \text{на } \Gamma_c \quad (14c) \\ \quad \quad \quad \partial_n y = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c \quad (14d) \\ \text{и ограничения управления } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{на } \Gamma_c \quad (14e) \end{array} \right.$$

Для того чтобы найти оптимальное решение данной задачи, необходимо соблюсти четыре ограничения, а именно, три сложных, из краевой задачи, т.е. ограничения дифференциальных уравнений в частных производных, и одно необременительное поточечное ограничение.

При применении метода Лагранжа необходимость соблюдать эти ограничения отпадает, но нужно будет ввести еще одну переменную. В выше описанной задаче пространство обобщенных решений для переменной состояния y обозначается через $V := H^1(\Omega)$, а для управляющей переменной u через $Q := L^2(\Gamma^c)$. Далее применяется функционал Лагранжа

$$\mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - A(y)(p) - B(u, p) \quad (15)$$

для исключения только уравнений ограничений с помощью множителя Лагранжа p [39].

Множитель Лагранжа (дополнительная переменная) p определен в Ω , поэтому $p \in V$, основная переменная $y \in V$ и управляющая переменная $u \in Q$. Здесь $A(\cdot)(\cdot)$ и $B(\cdot, \cdot)$ – вариационная формулировка дифференциального уравнения в частных производных с контрольной формой $B(\cdot, \cdot)$.

Данная формулировка была определена в предыдущей главе.

Далее находятся стационарные точки $x := \{y, u, p\} \in X := V \times Q \times V$ функционала $\mathcal{L}(y, u, p)$, которые определяются дифференцированием (15) по y, u и p соответственно. Получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_y(y, u, p) = J'_y(y, u)(\phi) - A'(y)(\phi, p) = 0 & \forall \phi \in V & (16a) \\ \mathcal{L}'_u(y, u, p) = J'_u(y, u)(\chi) - B(\chi, p) = 0 & \forall \chi \in Q & (16b) \\ \mathcal{L}'_p(y, u, p) = -A(u)(\psi) - B(u, \psi) = 0 & \forall \psi \in V & (16c) \end{cases}$$

Данная система называется системой оптимальности или системой Эйлера-Лагранжа [70].

Заметим, что последнее уравнение – это просто уравнение состояния, которому должна удовлетворять любая допустимая пара $\{y, u\}$. Приближение Галеркина определяет $x_h := \{y_h, u_h, p_h\} \in X_h := V_h \times Q_h \times V_h$ соответствующей системой дискретных уравнений

$$\begin{cases} J'_y(y_h, u_h)(\phi_h) - A'(y_h)(\phi_h, p_h) = 0 & \forall \phi_h \in V_h & (17a) \\ J'_u(y_h, u_h)(\chi_h) - B(\chi_h, p_h) = 0 & \forall \chi_h \in Q_h & (17b) \\ -A(u_h)(\psi_h) - B(u_h, \psi_h) = 0 & \forall \psi_h \in V_h & (17c) \end{cases}$$

Предполагается, что обе системы (16) и (17) имеют единственное решение. Но, к счастью, программное обеспечение FEniCS автоматически

генерирует приближенное решение, и нет необходимости записывать кодирование дискретных уравнений, т. е систему (17).

FEniCS просто распознает кодирование системы оптимальности (16), которая будет представлена в следующей главе и которая является нашей главной целью.

Следует также отметить, что можно исключить ограничения поточечного управления, включив их в функционал Лагранжа с помощью дополнительных множителей μ_a и μ_b , т. е. считать, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y, u, p, \mu_a, \mu_b)$.

Данное действие легко осуществить, если построить систему Каруша-Куна-Такера.

2.1.1 Функционал Лагранжа для задачи граничного управления

Суть подхода Лагранжа заключается в следующем. Обратимся к уравнению (12), которое также является вариационной формулировкой ограничений в виде дифференциальных уравнений в частных производных, т. е. соотношений (14b) - (14d) задачи (14), где

$$A(y)(\psi) = (\nabla y, \nabla \psi) + (y, \psi) - (f, \psi) \text{ и } B(u, \psi) = -(u, \psi)$$

подставляя эти выражения в формулу Лагранжа

$$\mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - A(y)(p) - B(u, p),$$

получаем

$$\mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - (\nabla y, \nabla p) - (y, p) + (f, p) + (u, p) \quad (18)$$

Теперь продифференцируем (18) по переменным y, u, p . Функция $J(y, u)$ была определена в уравнении (14a), то есть $J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_0\|_{\Gamma_0}^2 + \frac{1}{2} \lambda \|u\|$.

В результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_y (y, u, p)(\varphi) &= (y - y_0, \varphi)_{\Gamma_0} - (\nabla p, \nabla \varphi)_{\Omega} - (y, p)_{\Omega} - \\ &- (\varphi, p)_{\Omega} \quad \forall \varphi \in V \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\mathcal{L}'_u (y, u, p)(\chi) = \lambda(u, \chi)_{\Gamma_c} + (p, \chi)_{\Gamma_c} \quad \forall \chi \in Q \quad (19b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_p (y, u, p)(\psi) &= -(\nabla y, \nabla \psi)_{\Omega} - (y, \psi)_{\Omega} + (f, \psi)_{\Omega} + \\ &+ (u, \psi)_{\Gamma_c} \quad \forall \psi \in V \end{aligned} \quad (19c)$$

Для нахождения стационарных точек, в которых записанные выше производные обращаются в нуль, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (y - y_0, \varphi)_{\Gamma_0} - (\nabla p, \nabla \varphi)_{\Omega} - (\varphi, p)_{\Omega} = 0 \quad \forall \varphi \in V & (20a) \\ \lambda(u, \chi)_{\Gamma_c} + (p, \chi)_{\Gamma_c} = 0 \quad \forall \chi \in Q & (20b) \\ -(\nabla y, \nabla \psi)_{\Omega} - (y, \psi)_{\Omega} + (f, \psi)_{\Omega} + (u, \psi)_{\Gamma_c} = 0 \quad \forall \psi \in V & (20c) \end{cases}$$

Данная система (20) называется системой Эйлера-Лагранжа или системой оптимальности.

2.1.2 Сильная форма граничного управления

Теперь нас будет интересовать сильная форма системы (20), приведенной выше. Посредством сильной формы в следующей главе будет найдено точное решение. Оно поможет нам сравнить точное и приближенное решения. По точному и приближенному решениям будет произведен анализ ошибок и определена скорость сходимости.

Применяя формулу Грина к (20a) и к (20c), видим, что $\partial_n p = (y - y_0)$ на Γ_0 и $\partial_n p = 0$ на границе покоя, то есть $\partial_n p = 0$ на $\Omega \setminus \Gamma_0$ в (20a), и, аналогично, $\partial_n u = u$ на Γ_c и $\partial_n u = 0$ на границе покоя в (20c).

Поэтому, когда формула Грина будет применена ко всем уравнениям системы (20), получим

$$\begin{cases} -\Delta p + p = 0 \text{ в } \Omega, \partial_n p = y - y_0 \text{ на } \Gamma_o, \partial_n p = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_o & (21a) \\ p = -\lambda u \text{ на } \Gamma_c & (22b) \\ -\Delta y + y = f \text{ в } \Omega, \partial_n y = u \text{ на } \Gamma_c, \partial_n y = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c & (22c) \end{cases}$$

2.1.3 Функционал Лагранжа для оптимального распределенного управления

Рассмотрим следующую задачу оптимального распределенного управления:

$$\begin{cases} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_o} (y - y_0)^2 ds + \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_o} u(x)^2 ds & (22a) \\ \text{с учетом ограничений ДУЧП } -\Delta y + y = u \text{ в } \Omega & (22b) \\ n \cdot \nabla y = 0 \text{ на } \Gamma & (22c) \end{cases}$$

Сначала мы найдем вариационную форму ДУЧП. Умножая тестовую функцию ϕ на (22b) и интегрируется по Ω , получаем

$$-\int_{\Omega} \Delta y \phi dx + \int_{\Omega} y \phi dx = \int_{\Omega} u \phi dx \quad (23)$$

Применяя формулу Грина и используя граничное условие, получаем формулировку: найти такой $y \in H_0^1(\Omega)$, что

$$(\nabla y, \nabla \phi)_{\Omega} + (y, \phi)_{\Omega} - (u, \phi)_{\Omega} = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad (24)$$

теперь пространства решений есть $Q, V: = H_0^1(\Omega)$.

Здесь

$$A(y)(\phi) = (\nabla y, \nabla \phi)_{\Omega} + (y, \phi)_{\Omega} \text{ и } B(u, \phi) = -(u, \phi)_{\Omega}$$

тогда функционал Лагранжа равен

$$\mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - A(u, p) - B(u, p) \quad (25)$$

подставляя значения $J(y, u)$, $A(\cdot)(\cdot)$ и $B(\cdot, \cdot)$ в (25), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, p) = & \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\nabla y, \nabla p)_\Omega - \\ & -(y, p)_\Omega + (u, p)_\Omega \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь для получения системы оптимальности продифференцируем (26) по переменным y, u, p и приравняем производные нулю. В результате получим

$$\begin{cases} (y - y_\Omega, \varphi)_\Omega - (\nabla p, \nabla \varphi)_\Omega - (p, \varphi)_\Omega = 0 & \forall \varphi \in V & (27a) \\ \lambda(u, \chi)_\Omega + (p, \chi)_\Omega = 0 & \forall \chi \in Q & (27b) \\ -(\nabla y, \nabla \psi)_\Omega - (y, \psi)_\Omega + (u, \psi)_\Omega = 0 & \forall \psi \in V & (27c) \end{cases}$$

2.1.4 Сильная форма распределенного управления

Можно видеть, что на границе системы (27) ничего не определено. Следовательно, мы можем считать, что $\partial_n p = 0$, а также $\partial_n y = 0$ на Γ соответственно. Для наглядности для точного решения указана сильная форма (27) в виде

$$\begin{cases} -\Delta p + p = y - y_\Omega & \text{в } \Omega, & \partial_n p = 0 & \text{на } \Gamma & (28a) \\ p = -\lambda u & \text{в } \Omega & & & (28b) \\ -\Delta y + y = u & \text{в } \Omega, & \partial_n y = 0 & \text{на } \Gamma & (28c) \end{cases}$$

2.2 Приведенный функционал

2.2.1. Приведенный функционал задачи оптимального граничного управления

Вернемся к модельной задаче, где управление u действует на границе Γ_c :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_0\|_{L^2(\Gamma_o)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \quad (29a) \\ \text{с учетом ограничений ДУЧП } -\Delta y + y = f \quad \text{в } \Omega \quad (29b) \\ \partial_n y = u \quad \text{на } \Gamma_c \quad (29c) \\ \partial_n y = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c \quad (29d) \\ \text{и ограничений управления } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{на } \Gamma_c \quad (29e) \end{array} \right.$$

Определим множество допустимых управлений с помощью $Q_{ad} = \{u \in L^2(\Gamma_c) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ для почти всех } x \in \Omega\}$, где Q_{ad} – непустое замкнутое выпуклое подмножество множества $L^2(\Gamma_c)$.

Наша цель – реализовать задачу оптимального управления в FEniCS, когда $\lambda > 0$, тогда управление определяется как $Q^* = \{u \in L^2(\Gamma_c)\}$, это означает, что когда $u \in Q^*$, то поточечные ограничения исключаются, т. е. исключается условие (29e). Так что теперь и далее будут рассматриваться только задачи оптимального управления без рамочных ограничений.

Перепишем задачу (29) без уравнения (29e):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_0\|_{L^2(\Gamma_o)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \quad (30a) \\ \text{с учетом ограничений ДУЧП } -\Delta y + y = f \quad \text{в } \Omega \quad (30b) \\ \partial_n y = u \quad \text{на } \Gamma_c \quad (30c) \\ \partial_n y = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c \quad (30d) \end{array} \right.$$

Теперь множество управления определим как $Q^* = \{u \in L^2(\Gamma_c)\}$, каждому $u \in Q^*$ соответствует единственное слабое решение $y \in H^1(\Omega)$ краевой задачи (30), называемое состоянием, ассоциированным с u ;

пространство состояний есть $Y := H^1(\Omega)$. Если y зависит от u , то его обозначают $y = y(u)$.

Определение. Управление $\bar{u} \in Q^*$ и состояние \bar{y} оптимальны, если $J(\bar{y}, \bar{u}) \leq J(y(u), u) \quad \forall u \in Q^*$.

Для рассмотрения вопроса о существовании перепишем задачу оптимального управления в виде задачи оптимизации, зависящей от u .

Отображение $G: L^2(\Gamma_c) \rightarrow H^1(\Omega), u \rightarrow y(u)$, определенное в (30b) - (30d), имеет единственное решение $y \in H^1(\Omega)$ и называется управлением оператором состояния. Вместо G рассматривается оператор $E_2 G$, где $E_2: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ обозначает оператор вложения, который сопоставляет каждой функции $y \in Y = H^1(\Omega)$ ту же самую функцию в $L^2(\Omega)$.

Таким образом, в задаче (30) имеем

$$S: L^2(\Gamma_c) \rightarrow L^2(\Omega), \quad u \rightarrow y(u) \quad (31)$$

Определение. Пусть заданы вещественные гильбертовы пространства $X, (\cdot, \cdot)_X$ и $Y, (\cdot, \cdot)_Y$, а также оператор $S \in (U, V)$ [46]. Оператор S^* называется сопряженным к S , если

$$(Sx, y)_Y = (x, S^*y)_X \quad \forall x \in X, \quad y \in Y \quad (32)$$

Кроме того, положим $y = Su$ в функционале стоимости, т. е. в задаче (30a), которая сводится к следующей задаче квадратичной оптимизации в гильбертовом пространстве $L^2(\Gamma)$:

$$\min_{u \in Q^*} f(u) = \frac{1}{2} \|Su - y_0\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \quad (33)$$

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (36)$$

Здесь элемент \bar{u} называется оптимальным, следует обратить внимание, что рамочные ограничения не включены, если нужно включить рамочные ограничения, то следует использовать вариационное неравенство, а не вариационное равенство, и вместо Q^* будет использоваться Q_{ad} , т.е. $f'(u)(u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in Q_{ad}$.

Точно так же приведенный функционал стоимости для

$$\begin{aligned} \min J(y, u, v) = & \frac{\lambda_\Omega}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y - y_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \\ & + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \min J(y, u, v) = f(u, v) = & \frac{\lambda_\Omega}{2} \|S(u, v) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S(u, v) - y_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \\ & + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

где $y = S(u, v)$.

Более подробное изложение приведенных здесь теоретических сведений можно найти в [1, 7, 8, 9, 10, 15].

2.3 Сравнение систем оптимальности

В данном разделе также будут рассмотрены модельные задачи оптимального граничного управления и задачи оптимального распределенного управления. Поскольку системы оптимальности обоих типов задач методом Лагранжа в слабой форме и в сильной форме уже найдены, теперь мы найдем системы оптимальности посредством

приведенного градиента. Затем мы проведем сравнение систем оптимальности. Прежде чем приступить к моделированию задач, приведем теорему и ее доказательство, которые помогут определить сопряженное уравнение.

Теорема. Предположим, что заданы функции $\xi, \kappa \in L^2(\Omega), \sigma, \nu \in L^2(\Gamma), d_0, \gamma_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ и $\alpha, \delta_\Gamma \in L^\infty(\Gamma)$, где $\alpha \geq 0$ и $d_0 \geq 0$ почти всюду. Если мы имеем два следующих эллиптических ДУЧП [53]:

$$\begin{cases} -\Delta y + d_0 y = \gamma_\Omega \kappa & \text{в } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = \delta_\Gamma \nu & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta p + d_0 p = \xi & \text{в } \Omega \\ \partial_n p + \alpha p = \sigma & \text{на } \Gamma \end{cases}, \quad (37)$$

то

$$\int_\Omega \gamma_\Omega p \kappa dx + \int_\Gamma \delta_\Gamma p \nu ds = \int_\Omega \xi y dx + \int_\Gamma \sigma y ds \quad (38)$$

Доказательство. Эта теорема может быть доказана с помощью вариационной формулировки. Умножая на $p \in H^1(\Omega)$ уравнения в левой части (37), применяя формулу Грина и используя граничное условие, получаем задачу о нахождении такого $y \in H^1(\Omega)$, что

$$\int_\Omega \nabla y * \nabla p dx + \int_\Omega d_0 y p dx + \int_\Gamma \alpha y p ds = \int_\Omega \gamma_\Omega p \kappa dx + \int_\Gamma \delta_\Gamma p \nu ds \quad (39)$$

Аналогично поступаем с уравнениями в правой части (37). Умножая на y , применяя формулу Грина и используя граничное условие, получаем задачу о нахождении такого $y \in H^1(\Omega)$, что

$$\int_\Omega \nabla y * \nabla p dx + \int_\Omega d_0 y p dx + \int_\Gamma \alpha y p ds = \int_\Omega \xi y dx + \int_\Gamma \sigma y ds \quad (40)$$

неопределенным для некоторого $h \in L^2(\Omega)$ [11] даже при малых $t > 0$, однако он дифференцируем по направлению вектора $u - \bar{u}$, поскольку $u + t(u - \bar{u}) \in Q^*$. Оптимальность \bar{u} дает

$$\frac{f(\bar{u} + t(u - \bar{u})) - f(\bar{u})}{t} = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (43)$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ в уравнении (43) получаем для производной по направлению соотношение

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (44)$$

С учетом определения приведенного функционала стоимости или уравнения (35) получаем, что (44) эквивалентно соотношению

$$(S^*(S\bar{u} - y_\Omega, u - \bar{u}))_{L^2(\Omega)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (45)$$

Градиент определяется равенством

$$f'(\bar{u}) = (S^*(S\bar{u} - y_\Omega)) + \lambda\bar{u} \quad (46)$$

Следует обратить внимание на различие между производной и градиентом. Производная по направлению определяется соотношением

$$f'(u)(u - \bar{u}) = (S^*(S\bar{u} - y_\Omega, u - \bar{u}))_{L^2(\Omega)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)},$$

а градиент задается равенством (46).

Поскольку $S^*, S: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, для исключения S^* из (45) мы можем записать это равенство в виде

$$(S\bar{u} - y_\Omega, Su - S\bar{u})_{L^2(\Omega)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (47)$$

Теперь положим в (45) $p = S^*(S\bar{u} - y_\Omega) = S^*(\bar{y} - y_\Omega)$, тогда (45) примет вид

$$(p, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (48)$$

где дополнительная переменная p является решением следующей краевой задачи:

$$-\Delta p + p = \bar{y} - y_\Omega \quad \text{в } \Omega, \quad \partial_n p = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (49)$$

Теперь обратимся к уравнению состояния

$$-\Delta y + y = u \quad \text{в } \Omega, \quad \partial_n y = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (50)$$

Умножая $y \in H^1(\Omega)$ на уравнение (49) и, аналогично, умножая $p \in H^1(\Omega)$ на уравнение (50), используя формулу Грина и граничные условия, или применяя теорему к обоим уравнениям, т. е. (49) и (50), мы получаем

$$\int_{\Omega} p u dx = \int_{\Omega} (\bar{y} - y_\Omega) y dx \quad (51)$$

Оптимальное состояние $S\bar{u} = \bar{y}$ является слабым решением уравнения состояния, ассоциированным с \bar{u} , тогда как $y = Su$. Следовательно, в силу линейности состояния имеем $S(u - \bar{u}) = y - \bar{y}$.

Теперь положим $y = y - \bar{y}$ и $u = u - \bar{u}$ в (51), получим:

$$\int_{\Omega} p(u - \bar{u})dx = \int_{\Omega} (\bar{y} - y_{\Omega})(y - \bar{y})dx \quad \forall u \in Q^* \quad (52)$$

Уравнение (52) совпадает с уравнением (48), которое также подтверждает значение p . Поэтому уравнение (45) принимает вид

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_{\Omega} (p + \lambda \bar{u})(u - \bar{u})dx \quad \forall u \in Q^* \quad (53)$$

Следовательно, в качестве побочного результата мы получаем, что приведенный градиент $f'(u)$ при произвольном u имеет вид

$$f'(u) = p|\Omega + \lambda u \quad \text{или} \quad p + \lambda u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (54)$$

где p является решением ассоциированного двойственного уравнения

$$-\Delta p + p = \bar{y} - y_{\Omega} \quad \text{в } \Omega, \quad \partial_n p = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (55)$$

Комбинируя (55), (54) и (50), соответственно получаем

$$\begin{cases} -\Delta p + p = \bar{y} - y_{\Omega} & \text{в } \Omega, \quad \partial_n p = 0 & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (56a)$$

$$\begin{cases} p = -\lambda u \quad \text{или} \quad u = -\frac{1}{\lambda} p & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (56b)$$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = u & \text{в } \Omega, \quad \partial_n u = 0 & \text{на } \Gamma \end{cases} \quad (56c)$$

Система (56) – это та же система, которую мы получили в сильной форме с помощью метода Лагранжа, т.е. (28), ее слабая формулировка будет иметь вид

$$\begin{cases} (y - y_\Omega, \varphi)_\Omega - (\nabla p, \nabla \varphi)_\Omega - (p, \varphi)_\Omega = 0 & \forall \varphi \in V & (57a) \\ \lambda(u, \chi)_\Omega = 0 & \forall \chi \in Q & (57b) \\ -(\nabla y, \nabla \psi)_\Omega - (y, \psi)_\Omega + (u, \psi)_\Omega = 0 & \forall \psi \in V & (57c) \end{cases}$$

Наконец, система (57) также является той же системой оптимальности, что и система, которую мы получили методом Лагранжа, т.е. (27). Следовательно, мы получили одни и те же системы оптимальности с помощью приведенного градиента и посредством метода Лагранжа, и наша цель достигнута.

2.3.2 Оптимальная стационарная граничная температура

Вернемся теперь к задаче граничного управления (30) с $f = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Сводится к минимуму } J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_0\|_{L^2(\Gamma_o)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 & (58a) \\ \text{с учетом ограничений ДУЧП } -\Delta y + y = 0 & \text{ в } \Omega & (58b) \\ \partial_n y = u & \text{ на } \Gamma_c & (58c) \\ \partial_n y = 0 & \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c & (58d) \end{array} \right.$$

Здесь управление u действует на Γ_c , поэтому в первую очередь мы определяем Q^* а равенством $Q^* = \{u \in L^2(\Gamma_c)\}$. Теперь оператор управления состоянием $G: u \rightarrow y(u)$ является непрерывным линейным отображением из $L^2(\Gamma_c)$ в $H^1(\Omega)$. Однако мы рассматриваем G как оператор со значениями в $L^2(\Gamma_o)$, то есть полагаем $S = E_2 G: L^2(\Gamma_c) \rightarrow L^2(\Gamma_o)$ с оператором вложения $E_2: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_o)$. Вместо $E_2 G$ будем использовать просто S . Для задачи стационарного граничного управления, т. е. (58), таким образом, имеем [58]:

$$S: L^2(\Gamma_c) \rightarrow L^2(\Gamma_o), u \rightarrow y(u)$$

Положим $y = Su$, тогда приведенный функционал стоимости принимает вид

$$\min_{u \in Q^*} f(u) = J(y, u) = \frac{1}{2} \|Su - y_0\|_{L^2(\Gamma_o)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \quad (59)$$

Пусть $\bar{u} \in Q^*$ обозначает оптимальное управление, а $\bar{y} = S\bar{u}$, где $S\bar{u}$ – ассоциированное оптимальное состояние. Вариационное равенство (44) в силу (59) эквивалентно равенству:

$$\begin{aligned} f'(\bar{u})(u - \bar{u}) &= (S^*(S\bar{u} - y_0, u - \bar{u}))_{L^2(\Gamma_o)} + (\lambda\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma_c)} = \\ &= 0 \quad \forall u \in Q^* \end{aligned} \quad (60)$$

где S^* – сопряженный оператор, $S^*: L^2(\Gamma_o) \rightarrow L^2(\Gamma_c), u \rightarrow y(u)$. Тогда уравнение (60) принимает вид

$$(S\bar{u} - y_0, Su - S\bar{u})_{L^2(\Gamma_o)} + \lambda(\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma_c)} = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (61)$$

или

$$(\bar{y} - y_0, y - \bar{y})_{L^2(\Gamma_o)} + \lambda(\bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma_c)} = 0 \quad \forall u \in Q^* \quad (62)$$

Теперь предположим, что

$$(\bar{y} - y_0, y - \bar{y})_{L^2(\Gamma_o)} = (p, u - \bar{u})_{L^2(\Gamma_o)} \quad (63)$$

Для нахождения S^* и обоснования (63) с учетом вышеизложенных соображений мы должны определить p как решение двойственного уравнения [58]:

$$\begin{cases} -\Delta p + p = 0 & \text{в } \Omega \\ \partial_n p = \bar{y} - y_0 & \text{на } \Gamma_o \\ \partial_n p = 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_o \end{cases} \quad (64)$$

Выражение в правой части принадлежит $L^2(\Gamma_o)$, так как по предположению $y_0 \in L^2(\Gamma_o)$ и $\bar{y} \in Y = H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma_o)$, поэтому (64) допускает единственное слабое решение $p \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющее условию

$$(\nabla p, \nabla y)_\Omega + (p, y)_\Omega = (\bar{y} - y_0, y)_{\Gamma_o} \quad \forall y \in H^1(\Omega) \quad (65)$$

Аналогично, умножая $p \in H^1(\Omega)$ на (58b), получаем, что (58b) - (58d) допускает единственное слабое решение $y \in H^1(\Omega)$, которое удовлетворяет условию

$$(\nabla y, \nabla p)_\Omega + (y, p)_\Omega = (p, u)_{\Gamma_c} \quad \forall p \in H^1(\Omega) \quad (66)$$

Теперь мы видим, что левые части уравнений (65) и (66) одинаковы, а значит, и правые части должны совпадать, или, применяя теорему, получаем следующий результат:

$$\int_{\Gamma_c} p u ds = \int_{\Gamma_o} (\bar{y} - y_0) y ds \quad (67)$$

Полагая $u = u - \bar{u}$ и $y = y - \bar{y}$ в вышеприведенном уравнении, получаем

$$\int_{\Gamma_c} p(u - \bar{u}) ds = \int_{\Gamma_o} (\bar{y} - y_0)(y - \bar{y}) ds \quad (68)$$

Следовательно, (63) доказано. Подставим теперь (68) в (62), обновленное вариационное равенство будет выглядеть так [59]:

$$f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \int_{\Gamma_c} (p, u - \bar{u}) ds + \int_{\Gamma_c} \lambda(\bar{u}, u - \bar{u}) ds \quad \forall u \in Q^* \quad (69)$$

Тогда приведенный градиент $f'(u)$ при любом произвольном u имеет вид

$$f'(u) = p|_{\Gamma_c} + \lambda u \quad \text{или} \quad p + \lambda u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c \quad (70)$$

где p – решение следующего двойственного уравнения

$$\begin{cases} -\Delta p + p = 0 & \text{в } \Omega \\ \partial_n p = y(u) - y_0 & \text{на } \Gamma_o \\ \partial_n p = 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_o \end{cases} \quad (71)$$

Собирая вместе двойственное уравнение, уравнение для приведенного градиента и уравнения состояния, т.е. (71), (70), (58b)-(58d), соответственно получаем [61]:

$$\begin{cases} -\Delta p + p = 0 & \text{в } \Omega, \quad \partial_n p = y(u) - y_0 & \text{на } \Gamma_o, \quad \partial_n p = 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_o & (72a) \\ u = -\frac{1}{\lambda} p & \text{на } \Gamma_c & (72b) \\ -\Delta y + y = 0 & \text{в } \Omega, \quad \partial_n y = u & \text{на } \Gamma_c, \quad \partial_n y = 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c & (72c) \end{cases}$$

Соответствующие слабые формы для (72) следующие:

$$\begin{cases} (y - y_0, v)_{\Gamma_o} - (\nabla p, \nabla v)_{\Omega} + (p, v)_{\Omega} = 0 & \forall v \in V & (73a) \\ \lambda(u, \chi)_{\Gamma_c} + (p, \chi)_{\Gamma_c} = 0 & \forall \chi \in Q & (73b) \\ -(\nabla y, \nabla \omega)_{\Omega} - (y, \omega)_{\Omega} + (y, \omega)_{\Gamma_c} = 0 & \forall \omega \in V & (73c) \end{cases}$$

где пространства обобщенных решений есть $V := H^1(\Omega)$ для дополнительной переменной p и переменной состояния u и $Q := L^2(\Gamma_C)$ для управляющей переменной u .

Таким образом, система оптимальности (73) и система в сильной форме (72) задачи граничного управления (58), получаемые посредством приведенного градиента, соответственно совпадают с системой оптимальности (20) и системой в сильной форме (21), получаемыми с помощью метода Лагранжа [52].

Выводы по главе. Реализованы два различных подхода к построению систем оптимальности задач граничного и распределенного управления. Первый основан на использовании функции Лагранжа, второй – на применении градиентного метода. Системы, полученные указанными способами, оказались идентичными.

Глава 3 Результаты решения системы оптимальности методом конечных элементов

Как отмечалось ранее, в этой главе система оптимальности, полученная с помощью двух различных алгоритмов, будет реализована двумя способами (как система оптимальности с двумя переменными и как система оптимальности из трех уравнений). Прежде чем представлять результаты реализации этих методов, мы решим систему в сильной форме, т. е. (21), которая даст нам точное решение, это точное решение поможет нам сравнить приближенные и точные решения, проанализировать ошибки и оценить скорости сходимости.

3.1 Точное решение

Напомним сильную форму оптимального граничного управления, т. е. (21):

$$\begin{cases} -\Delta p + p = 0 \text{ в } \Omega, \partial_n p = y - y_0 \text{ на } \Gamma_o, \partial_n p = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_o & (74a) \\ p = -\lambda u \text{ на } \Gamma_c & (74b) \\ -\Delta u + u = f \text{ в } \Omega, \partial u_n \text{ на } \Gamma_c, \partial_n u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c. & (74c) \end{cases}$$

Исходя из этой системы мы должны найти значения (p, u, y) , которые удовлетворяют всем уравнениям (ДУЧП) и граничным условиям. Прежде чем приступить к решению, мы должны определить пространство Ω , границу $\partial\Omega$, границу наблюдения Γ_o , контрольную границу Γ_c и некоторые части границы $\partial\Omega \setminus \Gamma_o$ или $\partial\Omega \setminus \Gamma_c$:

$$\Omega := \{(x, y) \in (0,1) \times (0,1)\} \quad (75a)$$

$$\partial\Omega := \{(x, y): (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\} \quad (75b)$$

$$\Gamma_c := \{(x, y): x \in [0,1] \text{ и } y = 0\} \quad (75c)$$

$$\Gamma_o := \{(x, y): x \in [0,1] \text{ и } y = 1\} \quad (75d)$$

Теперь для простоты положим $y - y_0 = A$ в (74а), тогда оно примет вид

$$-\Delta p + p = 0 \text{ в } \Omega, \quad \partial_n p = A \text{ на } \Gamma_o, \quad \partial_n p = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_o \quad (76)$$

Принимая во внимание граничные условия ($\partial_n p|_{\Gamma_o} = A$ и $\partial_n p|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_o} = 0$) и решая (76), получим значение p :

$$p = A \frac{\cosh(y)}{\sinh(1)} \quad (77)$$

Теперь подставим значение (77) в уравнение (74б) и используем условие $y = 0$ на Γ_c , в результате получим

$$-\lambda u = \frac{A \cosh(0)}{\sinh(1)}$$

что эквивалентно

$$u = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{A}{\sinh(1)} \right) \quad (78)$$

Аналогичным образом, учитывая граничные условия

$$(\partial_n y|_{\Gamma_c} = u \text{ и } \partial_n p|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_c} = 0)$$

и значение (78), после решения уравнения (74с) получим

$$y = \left(\frac{1}{\lambda} \frac{A}{\sinh(1)} - 1 \right) \frac{\cosh(y-1)}{\sinh(1)} + \frac{y^2}{2} - y + 1 \quad (79)$$

Заметим, что ранее мы предполагали, что $A = y - y_0$ в (76), поэтому теперь находим значение A на Γ_0 :

$$y(x, 1) - y_0 = A \quad (80)$$

уравнение (80) дает значение A при наличии y_0

$$A = \frac{\lambda \sinh^2(1)}{1 - \lambda \sinh^2(1)} \left(y_0 + \frac{1}{\sinh(1)} - \frac{1}{2} \right) \quad (81)$$

Теперь подставим значение A в уравнения (77), (78) и (79), это даст нам значения (p, u, y) соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\lambda \sinh(1) \cosh(y)}{1 - \lambda \sinh^2(1)} \left(y_0 + \frac{1}{\sinh(1)} - \frac{1}{2} \right) \quad (81a) \\ u = \frac{-\sinh(1)}{1 - \lambda \sinh^2(1)} \left(y_0 + \frac{1}{\sinh(1)} - \frac{1}{2} \right) \quad (81b) \\ y = \frac{\cosh(y-1)}{1 - \lambda \sinh^2(1)} \left(y_0 + \frac{1}{\sinh(1)} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\cosh(y-1)}{\sinh(1)} + \frac{y^2}{2} - y + 1 \quad (81c) \end{array} \right.$$

Система (81) удовлетворяет всем дифференциальным уравнениям и граничным условиям из (74).

3.2 Дискретизация

Перепишем систему оптимальности (20):

$$\left\{ \begin{array}{l} (y - y_0, \varphi)_{\Gamma_0} - (\nabla p, \nabla \varphi)_{\Omega} - (\varphi, p)_{\Omega} = 0 \quad \forall \varphi \in V \quad (81a) \\ \lambda(u, \chi)_{\Gamma_c} + (p, \chi)_{\Gamma_c}, \quad \forall \chi \in Q \quad (81b) \\ -(\nabla y, \nabla \psi)_{\Omega} - (y, \psi)_{\Omega} + (f, \psi)_{\Omega} + (u, \psi)_{\Gamma_c} = 0, \quad \forall \psi \in V \quad (81c) \end{array} \right.$$

Для построения приближения Галеркина рассмотренной выше системы оптимальности рассмотрим стандартное конечномерное (билинейные конечные элементы) подпространство V_h в V на триангуляционных сетках $T_h(\Omega)$ для переменных состояния и дополнительных переменных y_h и p_h соответственно. Для аппроксимации управляющей переменной u_h используется пространство следов нормальных производных функций из V_h на Γ_c , т.е. кусочно-линейных функций [62].

В соответствии с (17) приближенная система оптимальности для (82) имеет вид

$$\begin{cases} -(\nabla y_h, \nabla \psi_h)_\Omega - (y_h, \psi_h)_\Omega + (f, \psi_h)_\Omega + (u_h, \psi_h)_{\Gamma_c} = 0 & \forall \psi_h \in V_h & (83a) \\ \lambda(u_h, \chi_h)_{\Gamma_c} + (p_h, \chi_h)_{\Gamma_c} & \forall \chi_h \in Q_h & (83b) \\ -(\nabla p_h, \nabla \varphi_h)_\Omega - (p_h, \varphi_h)_\Omega + (y_h - y_0, \varphi_h)_{\Gamma_o} & \forall \varphi_h \in V_h & (84c) \end{cases}$$

Пусть N – размерность $V_h(T_h)$, а $\{\xi_n(x)\}, n = 1, \dots, N$, – базис в V_h , тогда все тестовые функции $\xi_n(x) \in V_h(T_h), n = \{1, \dots, N\}$. Тестовые функции, определяемые равенством

$$\xi_n(x_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m \end{cases} \quad (84)$$

образуют базис V_h для дискретизации (83), раскладывая y, u и p по одному и тому же базису $\{\xi_n\}_{n=1}^N$, получаем

$$\begin{aligned} y_h(x) &= \sum_{n=1}^N y_n \xi_n(x), & u_h(x) &= \sum_{n=1}^N u_n \xi_n(x), \\ p_h(x) &= \sum_{n=1}^N p_n \xi_n(x) \end{aligned} \quad (85)$$

Кроме того, определим матрицы равенствами

$$K_{mn} = \int_{\Omega} \nabla \xi_m(x) \nabla \xi_n(x) dx \quad (86a)$$

$$M_{mn} = \int_{\Omega} \xi_m(x) \xi_n(x) dx \quad (86b)$$

$$N_{mn} = \int_{\Gamma_c} \xi_m(x) \xi_n(x) ds \quad (86c)$$

$$L_{mn} = \int_{\Gamma_o} \xi_m(x) \xi_n(x) ds \quad (86d)$$

$$b_n = \int_{\Gamma_o} u_0 \xi_n(x) dx \quad (86e)$$

$$b'_n = \int_{\Omega} f_n \xi_n(x), \quad (86f)$$

где K – матрица жесткости,

M, N, L – матрица масс,

b, b' - векторы нагрузки.

Учитывая (84), подставляя (85) в (83а-83с), получаем вместе с (86)

$$\begin{aligned} (K + M)y - Nu &= b'_n f \\ \lambda Nu + Np &= 0 \\ -Ly + (K + M)p &= -by_0 \end{aligned} \quad (87)$$

Запишем (87) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} K + M & -N & 0 \\ 0 & \lambda N & N \\ -L & 0 & K + M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' f \\ 0 \\ -by_0 \end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов является симметричной. Для простоты поменяем местами первую и третью строки и умножим вторую строку на минус единицу:

$$\begin{pmatrix} -L & 0 & K + M \\ 0 & -\lambda N & -N \\ K + M & -N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -by_0 \\ 0 \\ b'f \end{pmatrix} \quad (88)$$

Для формирования блоков положим

$$A = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & -\lambda N \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} K + M \\ -N \end{pmatrix} \quad B^T = (K + M \quad -N)$$

Подставляя A, B и B^T в (88), получим матрицу коэффициентов

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь мы легко можем найти собственные значения записанной выше матрицы размера 2×2 , используя характеристическое уравнение $|\bar{A} - \mu I| = 0$, которое дает

$$\begin{vmatrix} A - \mu & B \\ B^T & 0 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

Из последнего уравнения получаем значения $\frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4BB^T}}{2}$, и так как $A < \sqrt{A^2 + 4BB^T}$, то одно собственное значение положительно, а другое отрицательно.

Другой способ дискретизации. Согласно (74b) или (82b) $u = -\frac{1}{\lambda}p$ на Γ_c , подставляя значение u в (82с), получим

$$\begin{cases} -(\nabla y, \nabla \psi)_{\Omega} - (y, \psi)_{\Omega} + (f, \psi)_{\Omega} - \frac{1}{\lambda} (p, \psi)_{\Gamma_c} = 0 \quad \forall \psi \in V & (89a) \\ (y - y_0, \varphi)_{\Gamma_0} - (\nabla p, \nabla \varphi)_{\Omega} - (p, \varphi)_{\Omega} \quad \forall \varphi \in V & (89b) \end{cases}$$

Теперь подставим (85) в (89) и воспользуемся равенствами (86), тогда полученная выше система оптимальности дает

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} Np + (K + M)y = b'f \\ (K + M)p - Ly = -by_0 \end{cases} \quad (90)$$

Матрица коэффициентов является симметричной, вновь для проверки знаков собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} N - \mu & K + M \\ K + M & -L - \mu \end{vmatrix} = 0$$

Как мы уже упоминали, λ является параметром регуляризации и мы всегда считаем $\lambda > 0$. Далее получаем уравнение

$$(N - \mu)(-L - \mu) - (K + M)^2 = 0$$

и значения

$$\frac{-(L - N) \pm \sqrt{(L - N)^2 + 4(NL + (K + M)^2)}}{2}$$

Мы видим, что одно собственное значение положительно, а другое – отрицательно. Следовательно, в обоих случаях матрица коэффициентов симметрична, но не является положительно определенной.

3.3 Численные результаты

Теперь мы представим численные результаты. Нам предстоит написать код на языке Python и воспользоваться программным обеспечением FEniCS [73, 74], которое является специальным инструментом для автоматического решения дифференциальных уравнений методом конечных элементов (FEM). Мы уже оценили точное решение (74), теперь мы будем оценивать численное решение и проведем анализ (74) двумя способами.

3.3.1 Система оптимальности двух уравнений

Напомним систему оптимальности от двух переменных, в которую мы подставили значение $u = -\frac{1}{\lambda}p$ на Γ_c , т.е. (89):

$$\begin{cases} -(\nabla y, \nabla \psi)_\Omega - (y, \psi)_\Omega + (f, \psi)_\Omega - \frac{1}{\lambda}(p, \psi)_{\Gamma_c} = 0 & \forall \psi \in V & (91a) \\ (y - y_0, \varphi)_{\Gamma_o} - (\nabla p, \nabla \varphi)_\Omega - (p, \varphi)_\Omega & \forall \varphi \in V & (91b) \end{cases}$$

Складывая (91a) и (91b), мы получаем:

$$\begin{aligned} (\nabla y, \nabla \psi)_\Omega + (y, \psi)_\Omega + \frac{1}{\lambda}(p, \psi)_{\Gamma_c} + (\nabla p, \nabla \varphi)_\Omega - (y, \varphi)_{\Gamma_o} + \\ + (p, \varphi)_\Omega = (f, \psi)_\Omega - (y_0, \varphi)_{\Gamma_o} \quad \forall \psi, \varphi \in V \end{aligned} \quad (92)$$

Теперь, используя (92), выбираем различные значения параметра регуляризации $\lambda > 0$ и подставляем данные $y_0 = 1$, $f = y^2 / 2 - y$ и точные решения в окне кодирования Python. Для анализа ошибок мы интерполируем значения точного решения с пятой степенью, затем проводим анализ ошибок. Для оценки скорости сходимости мы сначала проводим эксперименты с $h_1 > h_2 > h_3 \dots$ и вычисляем ошибки $E1, E2, E3$ и так далее. Для двух последовательных экспериментов из соотношений $E_i = Ch_i^r$ и $E_{i-1} = Ch_{i-1}^r$ для неизвестных постоянных C и r находим r :

$$r = \frac{\ln\left(\frac{E_i}{E_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)}$$

Анализ переменной y . Сначала мы оценим и проанализируем переменную y при различных размерах элементов и значениях λ .

Таблицы 1, 2, 3, 4 показывают ошибки и скорость сходимости $\|y_h - y\|_{l^2}$ при $\lambda = 1$. Из таблиц 1, 2, 3 и 4 видно, что мы приближаемся к ожидаемой сходимости второго порядка линейных элементов Лагранжа по мере того, как сетки становятся достаточно мелкими. Анализируя таблицы 1, 2, 3 и 4, мы замечаем, что ошибка уменьшается в 4 раза, когда размер ячеек уменьшается в 2 раза.

Таблица 1 – Норма ошибки ($y_h - y$) при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 4.95E-02$	$r = 1.94$
$h = 6.25E-02$	$E = 1.25E-02$	$r = 1.98$
$h = 3.13E-02$	$E = 3.14E-03$	$r = 2.00$
$h = 1.56E-02$	$E = 7.86E-04$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 1.96E-04$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 4.91E-05$	$r = 2.00$

Таблица 2 – Норма ошибки при интерполяции y на одном пространстве с y_h при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 4.95E-02$	$r = 1.94$
$h = 6.25E-02$	$E = 1.25E-02$	$r = 1.98$
$h = 3.13E-02$	$E = 3.14E-03$	$r = 2.00$
$h = 1.56E-02$	$E = 7.86E-04$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 1.96E-04$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 4.91E-05$	$r = 2.00$

Таблица 3 – Норма ошибки при интерполяции y с элементами высшего порядка при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 4.41E-02$	$r = 1.94$
$h = 6.25E-02$	$E = 1.12E-02$	$r = 1.98$
$h = 3.13E-02$	$E = 2.80E-03$	$r = 1.99$
$h = 1.56E-02$	$E = 7.01E-04$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 1.75E-04$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 4.38E-05$	$r = 2.00$

Таблица 4 – Норма ошибки бесконечного порядка (в узловых значениях) при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 7.67E-02$	$r = 1.87$
$h = 6.25E-02$	$E = 2.03E-02$	$r = 1.92$
$h = 3.13E-02$	$E = 5.30E-03$	$r = 1.94$
$h = 1.56E-02$	$E = 1.38E-04$	$r = 1.94$
$h = 7.81E-03$	$E = 3.58E-04$	$r = 1.95$
$h = 3.91E-03$	$E = 9.28E-05$	$r = 1.95$

В таблице 5 приведены максимумы и минимумы точных и приближенных значений при различных размерах элементов.

Таблица 5 – Максимальные и минимальные значения y_h и y при $\lambda = 1$

Размер элемента	$\text{Max}(y_h)$	$\text{Min}(y_h)$	$\text{Max}(y)$	$\text{Min}(y)$
$h = 0.25E-00$	-3.70711509408	-5.5864651043	-3.89572464983	-5.78295758313
$h = 1.25E-01$	-3.84456209163	-5.73501213353	-3.89572464983	-5.78295758313
$h = 6.25E-02$	-3.88228889337	-5.77165821923	-3.89572464983	-5.78295758313
$h = 3.13E-02$	-3.89223236316	-5.78033270515	-3.89572464983	-5.78295758313
$h = 1.56E-02$	-3.89482028553	-5.78235307828	-3.89572464983	-5.78295758313
$h = 7.81E-03$	-3.89549088092	-5.78281946525	-3.89572464983	-5.78295758313
$h = 3.91E-03$	-3.89566429792	-5.78292630535	-3.89572464983	-5.78295758313

В таблице 6 приведены максимумы и минимумы точных и приближенных значений при различных значениях параметра регуляризации.

Из нее видно, что если параметр λ стремится к нулю, то значения y также стремятся к нулю.

Таблица 6 – Максимумы и минимумы значений y_h и y при размере элемента $h = 6.25E - 02$ и различных значениях λ

Значения λ	Max(y_h)	Min(y_h)	Max(y)	Min(y)
1	-3.88228889337	-5.77165821923	-3.89572464983	-5.78295758313
0.1	2.10766646514	1.21528938924	2.10557391269	1.21647189897
0.01	1.80199716388	1.01773682161	1.80073353302	1.01891878814
0.001	1.78090994491	1.00016222738	1.77442330197	1.00186833046
0.0001	1.78252795907	0.999716677066	1.77182825746	1.00018660078
0.00001	1.7805852458	0.999425711698	1.77156910783	1.00001865776
0.000001	1.78009556063	0.999398998038	1.77154319641	1.00000186575

Таблицы 7, 8, 9, 10 показывают ошибки и скорость сходимости $\|y_h - y\|_{l^2}$ при $\lambda = 0.1$. Из таблиц 7, 8, 9 и 10 видно, что мы приближаемся к ожидаемой сходимости второго порядка линейных элементов Лагранжа по мере того, как сетки становятся достаточно мелкими. Анализируя таблицы 7, 8, 9 и 10, мы замечаем, что ошибка уменьшается в 4 раза, когда размер ячеек уменьшается в 2 раза.

Таблица 7 – Норма ошибки ($y_h - y$) при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 1.36E-03$	$r = 1.90$
$h = 6.25E-02$	$E = 3.47E-04$	$r = 1.97$
$h = 3.13E-02$	$E = 8.74E-05$	$r = 1.99$
$h = 1.56E-02$	$E = 2.19E-05$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 5.47E-06$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 1.37E-06$	$r = 2.00$

Таблица 8 – Норма ошибки при интерполяции y на одном пространстве с y_h при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 1.36E-03$	$r = 1.90$

Продолжение таблицы 8

$h = 6.25E-02$	$E = 3.47E-04$	$r = 1.97$
$h = 3.13E-02$	$E = 8.74E-05$	$r = 1.99$
$h = 1.56E-02$	$E = 2.19E-05$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 5.47E-06$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 1.37E-06$	$r = 2.00$

Таблица 9 – Норма ошибки при интерполяции y с элементами высшего порядка при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 3.54E-03$	$r = 1.96$
$h = 6.25E-02$	$E = 8.94E-04$	$r = 1.99$
$h = 3.13E-02$	$E = 2.24E-04$	$r = 2.00$
$h = 1.56E-02$	$E = 5.61E-05$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 1.40E-05$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 3.51E-06$	$r = 2.00$

Таблица 10 – Норма ошибки бесконечного порядка (в узловых значениях) при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 7.07E-03$	$r = 1.68$
$h = 6.25E-02$	$E = 2.09E-03$	$r = 1.76$
$h = 3.13E-02$	$E = 6.01E-04$	$r = 1.80$
$h = 1.56E-02$	$E = 1.70E-04$	$r = 1.83$
$h = 7.81E-03$	$E = 4.72E-05$	$r = 1.85$
$h = 3.91E-03$	$E = 1.30E-05$	$r = 1.86$

Таблицы 11, 12, 13, 14 показывают ошибки и скорость сходимости $\|y_h - y\|_{l^2}$ при $\lambda = 0,001$. Из таблиц 11, 12, 13, 14 видно, что мы приближаемся к ожидаемой сходимости второго порядка линейных элементов Лагранжа по мере того, как сетки становятся достаточно мелкими. Анализируя таблицы 11, 12, 13, 14, мы замечаем, что ошибка уменьшается в 4 раза, когда размер ячеек уменьшается в 2 раза.

Таблица 11 – Норма ошибки ($y_h - y$) при $\lambda = 0,001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 7.47E-03$	$r = 1.86$
$h = 6.25E-02$	$E = 1.91E-03$	$r = 1.96$
$h = 3.13E-02$	$E = 4.82E-04$	$r = 1.99$
$h = 1.56E-02$	$E = 1.21E-04$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 3.02E-05$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 7.54E-06$	$r = 2.00$

Таблица 12 – Норма ошибки при интерполяции y на одном пространстве с y_h при $\lambda = 0,001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 7.47E-03$	$r = 1.86$
$h = 6.25E-02$	$E = 1.91E-03$	$r = 1.96$
$h = 3.13E-02$	$E = 4.82E-04$	$r = 1.99$
$h = 1.56E-02$	$E = 1.21E-04$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 3.02E-05$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 7.54E-06$	$r = 2.00$

Таблица 13 – Норма ошибки при интерполяции y с элементами высшего порядка при $\lambda = 0,001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 7.85E-03$	$r = 1.89$
$h = 6.25E-02$	$E = 2.01E-03$	$r = 1.97$
$h = 3.13E-02$	$E = 5.04E-04$	$r = 1.99$
$h = 1.56E-02$	$E = 1.26E-04$	$r = 2.00$
$h = 7.81E-03$	$E = 3.16E-05$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 7.89E-06$	$r = 2.00$

Таблица 14 – Норма ошибки бесконечного порядка (в узловых значениях) при $\lambda = 0,001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
$h = 1.25E-01$	$E = 2.45E-02$	$r = 1.87$
$h = 6.25E-02$	$E = 6.49E-03$	$r = 1.92$
$h = 3.13E-02$	$E = 1.64E-03$	$r = 1.99$
$h = 1.56E-02$	$E = 4.11E-04$	$r = 1.99$
$h = 7.81E-03$	$E = 1.03E-04$	$r = 2.00$
$h = 3.91E-03$	$E = 2.57E-05$	$r = 2.00$

Таблицы 15, 16, 17, 18 показывают ошибки и скорость сходимости $\|y_h - y\|_{l^2}$ при $\lambda = 0,000001$. Из таблиц 15, 16, 17 и 18 видно, что мы приближаемся к ожидаемой сходимости второго порядка линейных элементов Лагранжа по мере того, как сетки становятся достаточно мелкими. Анализируя таблицы 15, 16, 17 и 18, мы замечаем, что ошибка уменьшается в 4 раза, когда размер ячеек уменьшается в 2 раза.

Таблица 15 – Норма ошибки $(y_h - y)$ при $\lambda = 0,000001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=8.53E-03	r=1.83
h=6.25E-02	E=2.21E-03	r=1.95
h=3.13E-02	E=5.57E-04	r=1.99
h=1.56E-02	E=1.40E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=3.49E-05	r=2.00
h=3.91E-03	E=8.73E-06	r=2.00

Таблица 16 – Норма ошибки при интерполяции y на одном пространстве с y_h при $\lambda = 0,000001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=8.53E-03	r=1.83
h=6.25E-02	E=2.21E-03	r=1.95
h=3.13E-02	E=5.57E-04	r=1.99
h=1.56E-02	E=1.40E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=3.49E-05	r=2.00
h=3.91E-03	E=8.73E-06	r=2.00

Таблица 17 – Норма ошибки при интерполяции y с элементами высшего порядка при $\lambda = 0,000001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=8.83E-03	r=1.83
h=6.25E-02	E=2.29E-03	r=1.95
h=3.13E-02	E=5.76E-04	r=1.99
h=1.56E-02	E=1.44E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=3.61E-05	r=2.00
h=3.91E-03	E=9.03E-06	r=2.00

Таблица 18 – Норма ошибки бесконечного порядка (в узловых значениях) при $\lambda = 0,000001$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=3.16E-02	r=1.71
h=6.25E-02	E=8.55E-03	r=1.89
h=3.13E-02	E=2.23E-03	r=1.94
h=1.56E-02	E=5.74E-04	r=1.96
h=7.81E-03	E=1.48E-04	r=1.96
h=3.91E-03	E=3.79E-05	r=1.96

Анализ переменной p . Теперь мы перейдем к переменной p .

Таблицы 19, 20, 21 и 22 показывают ошибки и скорость сходимости $\|p_h - p\|_{l^2}$ при $\lambda = 1$. Из таблиц 19, 20, 21 и 22 видно, что мы приближаемся к ожидаемой сходимости второго порядка линейных элементов Лагранжа по мере того, как сетки становятся достаточно мелкими. Анализируя таблицы 19, 20, 21 и 22, мы замечаем, что ошибка уменьшается в 4 раза, когда размер ячеек уменьшается в 2 раза.

Таблица 19 – Норма ошибки ($p_h - p$) при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=4.94E-02	r=1.94
h=6.25E-02	E=1.25E-02	r=1.98
h=3.13E-02	E=3.13E-03	r=2.00
h=1.56E-02	E=7.83E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=1.96E-04	r=2.00
h=3.91E-03	E=4.90E-05	r=2.00

Таблица 20 – Норма ошибки при интерполяции p на одном пространстве с p_h при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=4.94E-02	r=1.94
h=6.25E-02	E=1.25E-02	r=1.98
h=3.13E-02	E=3.13E-03	r=2.00
h=1.56E-02	E=7.83E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=1.96E-04	r=2.00
h=3.91E-03	E=4.90E-05	r=2.00

Таблица 21 – Норма ошибки при интерполяции p с элементами высшего порядка при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=4.30E-02	r=1.94
h=6.25E-02	E=1.09E-02	r=1.98
h=3.13E-02	E=2.74E-03	r=1.99
h=1.56E-02	E=6.84E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=1.71E-04	r=2.00
h=3.91E-03	E=4.28E-05	r=2.00

Таблица 22 – Норма ошибки бесконечного порядка (в узловых значениях) при $\lambda = 1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=7.67E-02	r=1.87
h=6.25E-02	E=2.03E-02	r=1.92
h=3.13E-02	E=5.30E-03	r=1.94
h=1.56E-02	E=1.38E-03	r=1.94
h=7.81E-03	E=3.58E-04	r=1.95
h=3.91E-03	E=9.28E-05	r=1.95

В таблице 23 приведены максимумы и минимумы точных и приближенных значений при различных размерах элементов.

Таблица 23 – Максимальные и минимальные значения p_h и p при $\lambda = 1$

Размер элемента	Max(p_h)	Min(p_h)	Max(p)	Min(p)
h=0.25E-00	-3.97221056476	-6.23633923894	-4.16586085541	-6.42825921331
h=1.25E-01	-4.11297003668	-6.38176974782	-4.16586085541	-6.42825921331
h=6.25E-02	-4.15188046905	-6.41740814774	-4.16586085541	-6.42825921331
h=3.13E-02	-4.16220460157	-6.42576847145	-4.16586085541	-6.42825921331
h=1.56E-02	-4.16220460157	-6.42769389322	-4.16586085541	-6.42825921331
h=7.81E-03	-4.16561337759	-6.42813232194	-4.16586085541	-6.42825921331
h=3.91E-03	-4.16579664407	-6.42823110198	-4.16586085541	-6.42825921331

Таблицы 24, 25, 26 и 27 показывают ошибки и скорость сходимости $\|p_h - p\|_{l^2}$ при $\lambda = 0,1$.

Таблица 24 – Норма ошибки ($p_h - p$) при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=4.94E-02	r=1.94
h=6.25E-02	E=1.25E-02	r=1.98
h=3.13E-02	E=3.13E-03	r=2.00
h=1.56E-02	E=7.83E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=1.96E-04	r=2.00
h=3.91E-03	E=4.90E-05	r=2.00

Таблица 25 – Норма ошибки при интерполяции p на одном пространстве с p_h при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=4.94E-02	r=1.94
h=6.25E-02	E=1.25E-02	r=1.98
h=3.13E-02	E=3.13E-03	r=2.00
h=1.56E-02	E=7.83E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=1.96E-04	r=2.00
h=3.91E-03	E=4.90E-05	r=2.00

Таблица 26 – Норма ошибки при интерполяции p с элементами высшего порядка при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=4.30E-02	r=1.94
h=6.25E-02	E=1.09E-02	r=1.98
h=3.13E-02	E=2.74E-03	r=1.99
h=1.56E-02	E=6.84E-04	r=2.00
h=7.81E-03	E=1.71E-04	r=2.00
h=3.91E-03	E=4.28E-05	r=2.00

Таблица 27 – Норма ошибки бесконечного порядка (в узловых значениях) при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=7.67E-02	r=1.87
h=6.25E-02	E=2.03E-02	r=1.92
h=3.13E-02	E=5.30E-03	r=1.94
h=1.56E-02	E=1.38E-03	r=1.94
h=7.81E-03	E=3.58E-04	r=1.95
h=3.91E-03	E=9.28E-05	r=1.95

В таблице 28 приведены максимумы и минимумы точных и приближенных значений при различных значениях параметра регуляризации. Из нее видно, что если параметр λ стремится к нулю, то значения p также стремятся к нулю.

Таблица 28 – Максимумы и минимумы значений p_h и p при размере элемента $h = 6.25E - 02$ и различных значениях λ

Значения λ	Max(p_h)	Min(p_h)	Max(p)	Min(p)
1	-4.15188046905	-6.41740814774	-4.16586085541	-6.42825921331
0.1	0.284765909005	0.184116169	0.284235241667	0.184199863088
0.01	0.0250710825262	0.0160935103468	0.0248410363861	0.0160983397923
0.001	0.00281864848522	0.00156641128559	0.00245318382367	0.00158979626101
0.0001	0.000289598277307	0.000155669005547	0.000245013412427	0.000158781989028

В таблице 29 приведены максимальные значения переменных y и p при $h = 0.25E - 00$ и различных значениях λ .

Таблица 29 – Максимумы значений y и p при различных λ и $h = 0.25E - 00$

λ	Max(y_h)	Max(y)	Max(p_h)	Max(p)
0.1	2.12826627615	2.10557391269	0.290463240571	0.284235241667
0.01	1.81262201735	1.80073353302	0.0275806222045	0.0248410363861

В таблице 30 содержатся максимальные значения переменных y и p при $h = 1.25E - 01$ и различных значениях λ .

Таблица 4.30 – Максимумы значений y и p при различных λ и $h = 1.25E - 01$

λ	Max(y_h)	Max(y)	Max(p_h)	Max(p)
0.1	2.11264603657	2.10557391269	0.286114594077	0.284235241667
0.01	1.80472849737	1.80073353302	0.0256771693082	0.0248410363861

Анализ функции стоимости (переменной J).

Теперь мы представим значения $J(y, u), J(y_h, u_h), J_{error}$ и CR (скорость сходимости), которые соответственно обозначают точные значения функционала стоимости, приближенные значения, ошибки и скорость сходимости. Из таблицы 31 мы видим, что точные значения функционала стоимости одинаковы для каждой сетки и при уменьшении значения h в 2 раза ошибка уменьшается приблизительно в 4 раза.

Таблица 4.31 – Значение функционала стоимости на различных сетках при $\lambda = 1$

Сетка	$J(y, u)$	$J(y_h, u_h)$	J_{error}	CR
(4,4)	20.6612582568	19.2165717538	1.44468650294	1.92
(8,8)	20.6612582568	20.2783732045	0.382885052288	1.98
(16,16)	20.6612582568	20.563913698	0.0973445587886	1.99
(32,32)	20.6612582568	20.6368079035	0.0244503532671	2.00
(64,64)	20.6612582568	20.6551378137	0.00612044310424	2.00
(128,128)	20.6612582568	20.659727611	0.00153064579687	2.00
(256,256)	20.6612582568	20.6608755554	0.000382701383131	2.00

В таблице 32 отражены значения функционала стоимости и его составляющих (здесь $\frac{1}{2} \|y_h - y\|_{\Gamma_0}$ — первая часть, а $\frac{\lambda}{2} \|u_h\|_{\Gamma_c}$ — вторая часть) на различных сетках для случая, когда $\lambda = 0,1$.

Таблица 32 – Значения функционала стоимости и его составляющих на различных сетках при $\lambda = 0,1$

Размер элемента	$\frac{1}{2} \ y_h - y_0\ _{\Gamma_0}$	$\frac{\lambda}{2} \ u_h\ _{\Gamma_c}$	$J(y_h, u_h)$	$J(y, u)$
h=0.25E-00	0.0239078753868	0.170979232203	0.194887107589	0.19307798933
h=1.25E-01	0.0235492016014	0.169993982706	0.193543184307	0.19307798933
h=6.25E-02	0.0234598388997	0.169735624063	0.193195462963	0.19307798933
h=3.13E-02	0.0234374945665	0.169669960761	0.193107455328	0.19307798933
h=1.56E-02	0.0234319052706	0.169653458209	0.19308536348	0.19307798933
h=7.81E-03	0.0234305075077	0.169649325938	0.193079833446	0.19307798933
h=3.91E-03	0.0234301580241	0.169648292385	0.193078450409	0.19307798933

В таблице 33 показаны ошибки, возникающие при J_h – интерполяции функционала J , для случая, когда $\lambda = 0,1$.

Таблица 33 – Норма ошибки при J_h – интерполяции J для $\lambda = 0,1$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=4.65E-04	r=1.96
h=6.25E-02	E=1.17E-04	r=1.99
h=3.13E-02	E=2.95E-05	r=2.00
h=1.56E-02	E=7.37E-06	r=2.00
h=7.81E-03	E=1.84E-06	r=2.00
h=3.91E-03	E=4.61E-07	r=2.00

В таблице 34 отражены значения функционала стоимости и его составляющих на различных сетках для случая, когда $\lambda = 0,01$.

Таблица 34 – Значения функционала стоимости и его составляющих на различных сетках при $\lambda = 0,01$

Размер элемента	$\frac{1}{2} \ y_h - y_0\ _{\Gamma_0}$	$\frac{\lambda}{2} \ u_h\ _{\Gamma_c}$	$J(y_h, u_h)$	$J(y, u)$
h=0.25E-00	0.000200220696535	0.0130155975549	0.0132158182514	0.0131367874757
h=1.25E-01	0.000181115363091	0.0129729890294	0.0131541043925	0.0131367874757
h=6.25E-02	0.000179244542248	0.0129616815577	0.0131409260999	0.0131367874757
h=3.13E-02	0.000179013620562	0.0129587960042	0.0131378096248	0.0131367874757
h=1.56E-02	0.000179013620562	0.0129587960042	0.0131378096248	0.0131367874757
h=7.81E-03	0.000178972445304	0.0129580698058	0.0131370422511	0.0131367874757
h=3.91E-03	0.0001789632411	0.0129578878839	0.013136851125	0.0131367874757

В таблице 35 показаны ошибки, возникающие при J_h – интерполяции функционала J , для случая, когда $\lambda = 0,01$.

Таблица 35 – Норма ошибки при J_h – интерполяции J для $\lambda = 0,01$

Размер элемента	Ошибка	Скорость сходимости
h=1.25E-01	E=1.73E-05	r=2.19
h=6.25E-02	E=4.14E-06	r=2.06
h=3.13E-02	E=1.02E-06	r=2.02

Продолжение таблицы 35

h=1.56E-02	E=2.55E-07	r=2.00
h=7.81E-03	E=6.36E-08	r=2.00
h=3.91E-03	E=1.59E-08	r=2.00

В таблице 36 отражены значения функционала стоимости и его составляющих на различных сетках для случая, когда $\lambda = 0,001$.

Таблица 36 – Значения функционала стоимости и его составляющих на различных сетках при $\lambda = 0,001$

Размер элемента	$\frac{1}{2} \ y_h - y_0\ _{\Gamma_0}$	$\frac{\lambda}{2} \ u_h\ _{\Gamma_c}$	$J(y_h, u_h)$	$J(y, u)$
h=0.25E-00	7.01178991024e-05	0.00130382707828	0.00137394497739	0.00126547140513
h=1.25E-01	6.59636225694e-06	0.00126748819829	0.00127408456054	0.00126547140513
h=6.25E-02	2.06393326165e-06	0.00126423034123	0.00126629427449	0.00126547140513
h=3.13E-02	1.76594036682e-06	0.00126382413882	0.00126559007919	0.00126547140513
h=1.56E-02	1.74671203616e-06	0.00126374883468	0.00126549554671	0.00126547140513
h=7.81E-03	1.74543720885e-06	0.00126373165593	0.00126547709314	0.00126547140513
h=3.91E-03	1.74534139545e-06	0.00126372746401	0.00126547280541	0.00126547140513

В таблице 37 содержатся приближенные и точные значения функционала стоимости при различных λ для случая, когда $h = 6.25E - 02$.

Таблица 4.37 – Приближенные и точные значения функционала стоимости при различных λ для $h = 6.25E - 02$

λ	$\frac{1}{2} \ y_h - y_0\ _{\Gamma_0}$	$\frac{\lambda}{2} \ u_h\ _{\Gamma_c}$	$J(y_h, u_h)$	$J(y, u)$
1	11.9313566801	8.63255701788	20.563913698	20.6612582568
0.1	0.0234598388997	0.169735624063	0.193195462963	0.19307798933
0.01	0.000179244542248	0.0129616815577	0.0131409260999	0.0131367874757
0.001	2.06393326165e-06	0.00126423034123	0.00126629427449	0.00126547140513
0.0001	3.68908838026e-08	0.000126116036747	0.000126152927631	0.000126076010126
0.00001	1.52006253071e-08	1.26077212776e-05	1.26229219029e-05	1.2602900441e-05
0.000001	1.50049393084e-08	1.26073896338e-06	1.27574390269e-06	1.26024304938e-06

Таблица 37 показывает, что если значение параметра регуляризации λ стремится к нулю, то значение функционала стоимости J также стремится к нулю.

Из таблиц 31, 33 и 35 видно, что мы приближаемся к ожидаемой сходимости второго порядка линейных элементов Лагранжа по мере того, как сетки становятся достаточно мелкими. Анализируя таблицы 31, 33 и 35, мы замечаем, что ошибка уменьшается в 4 раза, когда размер ячеек уменьшается в 2 раза.

3.3.2 Система оптимальности из трех уравнений

Обратимся к системе (74):

$$\begin{cases} -\Delta p + p = 0 \text{ в } \Omega, \partial_n p = y - y_0 \text{ на } \Gamma_o, \partial_n p = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_o & (93a) \\ p = -\lambda u \text{ на } \Gamma_c & (93b) \\ -\Delta y + y = f \text{ в } \Omega, \partial y_n \text{ на } \Gamma_c, \partial_n y = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_c. & (93c) \end{cases}$$

Рассматривая ее слабую форму (82) и упрощая последнюю, получаем

$$\begin{aligned} & (\nabla p, \nabla \varphi)_\Omega - (p, \varphi)_\Omega - (y, \varphi)_{\Gamma_o} - \lambda(u, \chi)_{\Gamma_c} - (p, \chi)_{\Gamma_c} + \\ & + (\nabla y, \nabla \psi)_\Omega + (y, \psi)_\Omega - (u, \psi)_{\Gamma_c} = (f, \psi)_\Omega - (y_0, \varphi)_{\Gamma_o} \quad \forall \psi, \varphi \in V \text{ и } \chi \in Q \end{aligned} \quad (94)$$

Мы реализовали приведенное выше уравнение на разных сетках при различных значениях параметра регуляризации λ . Некоторые результаты показаны на представленных ниже рисунках 6, 7, 8, 9.

```

Select FEniCS - Automation of Computational Mathematical Modeling

(y) : [ 2.09354033  2.104593  2.11084348  2.11711748  2.12826628  1.70728208
1.7097311  1.71264287  1.71556091  1.71799455  1.43559592  1.43548803
1.43572911  1.43596667  1.43583189  1.27604847  1.27455911  1.27249668
1.27043819  1.26013497  1.23170516  1.22202599  1.21055219  1.21429326
1.20540370 ]

(p) : [ 0.18365294  0.18457673  0.18491941  0.18526252  0.18619103  0.1904952
0.19069787  0.19075907  0.19081973  0.19101883  0.20909416  0.20899856
0.20864354  0.20828719  0.20818575  0.24135262  0.24075336  0.23970097
0.2306499  0.23004769  0.29046324  0.28015769  0.28508604  0.2836239
0.28134945 ]

(u) : [-1.83652944 -1.84576727 -1.84919408 -1.85262524 -1.86191035      nan
      nan      nan      nan      nan      nan      nan      nan
      nan      nan      nan      nan      nan      nan      nan
      nan ]

(y_hn) : 2.12826627615
(y_en) : 2.10557391269
(y_hn) : 1.2054037797
(y_en) : 1.21647189897

(p_hn) : 0.290463240571
(p_en) : 0.284235241667
(p_hn) : 0.183652944148
(p_en) : 0.184199863088

J_h: 0.194807107509
J: 0.19307798933

```

Рисунок 6 – Окно вывода задачи, реализованной на сетке (4,4) при $\lambda = 0,1$

```

Select FEniCS - Automation of Computational Mathematical Modeling
(y) : [ 1.79221138  1.80037012  1.80240319  1.80443249  1.81262202  1.45150975
1.45303517  1.45402073  1.45500071  1.45652033  1.21140604  1.21112503
1.21061321  1.21009906  1.20971974  1.07102150  1.0600670  1.06667663
1.0644909  1.06232916  1.03110149  1.02300274  1.01903247  1.01499707
1.00704690 ]

(p) : [ 0.01620554  0.01623347  0.01613475  0.01603493  0.0160603  0.01686269
0.0168009  0.01664395  0.01647007  0.01642202  0.01870458  0.01855569
0.01820395  0.01705126  0.01769932  0.0220505  0.0216746  0.02091149
0.02014097  0.01977195  0.02750062  0.026544  0.02493256  0.02332024
0.02231265 ]

(u) : [-1.62055389 -1.62334731 -1.61347536 -1.60349301 -1.60603035          nan
nan          nan          nan          nan          nan          nan          nan
nan          nan          nan          nan          nan          nan          nan
nan          nan          nan          nan          nan          nan          nan]

(y_hn) : 1.81262201735
(y_en) : 1.80073353302
(y_hn) : 1.00704698441
(y_en) : 1.01091070014

(p_hn) : 0.0275006222045
(p_en) : 0.0248410363861
(p_hn) : 0.0160349301267
(p_en) : 0.0160903397923

J_h: 0.0132158182514
J: 0.0131367074757

```

Рисунок 7 – Окно вывода задачи, реализованной на сетке (4,4) при $\lambda = 0,01$

9 показывают, что значения u определены в 9 узлах на сетке (8,8). Более того, для всех рисунков соблюдено условие

$$u = -\frac{1}{\lambda}p \text{ на } \Gamma_c ,$$

которое мы использовали в системе оптимальности из двух уравнений, т.е. (91a).

Рисунки 6, 7, 8 и 9 для системы оптимальности из трех уравнений и таблицы 29, 30, 32 и 34 для системы оптимальности из двух уравнений показывают, что вычисленные точные и приближенные значения функционала стоимости, максимальные и минимальные значения переменных u и p при разных значениях параметра регуляризации и при разных размерах шага сетки – это в точности одинаковые значения. Тогда очевидно, что ошибки и скорости сходимости одни и те же при обоих способах.

Выводы по главе. Система оптимальности, полученная в предыдущей главе, реализована двумя различными путями – как система оптимальности двух уравнений и как система оптимальности трех уравнений – посредством программного обеспечения FEniCS. Сравнительный анализ полученных решений, погрешностей вычислений и скоростей сходимости показал, что результаты применения данных способов совпадают и оба подхода являются эффективными при решении задач оптимального управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система оптимальности, которую мы получили с помощью двух разных алгоритмов, то есть методом Лагранжа и методом приведенного функционала, была успешно реализована в этой работе двумя различными способами. Результаты, достигнутые с помощью системы оптимальности двух уравнений и посредством системы оптимальности трех уравнений, в точности совпадают.

В процессе работы получены результаты в терминах приближенных и точных значений переменной состояния u , множителя Лагранжа p и функционала стоимости $J(u, u)$.

В ходе исследования установлено, что с уменьшением значения параметра регуляризации $\lambda > 0$ на тот же порядок уменьшаются значения u, p и J . Точнее, что при стремлении параметра регуляризации к нулю согласно полученным данным значения u, p и J также стремятся к нулю.

Кроме того, произведены анализ ошибок и оценка скорости сходимости по различным переменным. Выяснено, что при уменьшении размера элемента в два раза ошибка в каждом случае уменьшается в 4 раза. В ходе исследования установлено, что для каждой переменной при различных значениях $\lambda > 0$ мы достигаем сходимости второго порядка линейных элементов Лагранжа по мере того, как сетки становятся достаточно мелкими.

Мы также определили максимальные и минимальные значения переменных и функционала при различных значениях λ и разных размерах элемента и получили одинаковые результаты в обоих реализованных способах.

Вычисления были произведены посредством программного обеспечение FEniCS – специального инструмента для автоматизированного численного решения дифференциальных уравнений методом конечных элементов. Для написания программного кода был использован язык Python.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С. О существовании в целом регулярного решения квазилинейной гиперболической системы // Ж.в.м. и м.ф. 1970. Т.10. N 4. С.969-980.
2. Белотелов Н.В., Саранча Д.А. Линейный анализ устойчивости двухуровневых систем с диффузией на экологическом примере // Биофизика. 1984. N 1. С.130-134.
3. Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М.: Мир, 19645.
4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
5. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
6. Варга Дж. Оптимальное управление функциональными и дифференциальными уравнениями. М.: Наука, 1977.
7. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л. ГИТТЛ, 1948
8. Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
9. Воробьева Е.В. Об устойчивости решении смешанной задачи для почти линейной гиперболической системы на плоскости // ОГТУ, Омск, 1999. Деп. в ВИНТИ 10.08.99. N 2610-B99.
10. Гайцгори В.Г. Управление системами с быстрыми и медленными движениями. М.: Наука. 1991.
11. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1977.
12. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

13. Годунов С.К. Уравнения математической физики (2-е изд.). М.: Наука 1979
14. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: Наука, 1974
15. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов / Д. П. Голоскоков. СПб.: Питер, 2004. 539 с.
16. Гурса Э. Курс математического анализа, том 3, часть 1. Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными. М.-Л.: ГТТИ, 1933
17. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967
18. Дубовицкий А.Я. Теоретико-функциональный аппарат общей задачи оптимального управления. Препринт ИХФ АН СССР. Черноголовка: ИХФ АН СССР, 1975.
19. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике. АИ.: Наука. 1981. С.6-17.
20. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: ФПЗМАТЛИТ, 2004.
21. Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В. Управляемость нелинейных систем. Двумерные системы. // Итоги науки и техники. Сер. Техн. кибернетика. М. ВИНТИ. 1987. Т. 21. С.3-39.
22. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: Курс лекций. М.: Едиториал УРСС, 2004.
23. Жепшов В.И. О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах // Изв. вузов. Мат. 2004. N 7. С.47-52.
24. Жестков С.В., Забрейко П.П. О нелокальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных нормальных систем в частных производных первого порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. N 7. С.1000-1002.

25. Заславский Б.Г., Полуэктов Р.А. Управление экологическими системами. М.: Наука, 1990.
26. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950
27. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
28. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
29. Ирисов А.Е., Тонко Е.Л. Достаточные условия оптимальности рекуррентных по Биркгофу движений дифференциального включения // Пестн. Удм. ун-та. Ижевск. 2005. N 1. С.59-75.
30. Искандеров Н.Ш. Задача рассеяния для гиперболической системы пяти уравнений первого порядка на полуоси // Изв. АН Азербайджана. Сер. физ.- техн. и мат. н. 1998. Т. 18. N 2. С.26-28.
31. Казаков К.Ю. Корректность начальной задачи для гиперболической системы квазилинейных законов сохранения на плоскости. 01.01.02 -диф. ур. и математическая физика: Автореферат диссерт. на соиск. уч. степ. к. ф.-м. наук. Горький, 1989.
32. Калман Р., Фал б П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
33. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966
34. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
35. Капцов О.В. Инвариантность характеристик систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. ж. 2004. Т. 45. N 3. С.577-591.
36. Капцов О.В., Заблуда А.В. Инварианты характеристик // Вести. Краснояр. гос. ун-та. Физ мат. п. 2004. N 3. С.57-61.
37. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

38. Кошляков Н.С. Глинер Э.Б. Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970
39. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
40. Кузенков О.А. Достаточные условия нуль-управляемости динамической системы на конечномерном симплексе // Методы прикладного функционального анализа. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. 1991. С.33-36.
41. Кузенков О.А. Исследование асимптотического поведения в некоторых моделях с нелинейной динамикой //Нелинейная динамика и управление. Вып.1. М.: Физматлит. 2002. С.333-335.
42. Кузенков О.А. Исследование динамической системы вероятностных мер Радона //Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. N 4. С.591-596.
43. Кузенков О.А. Математическое моделирование процесса выбора оптимальной стратегии: проблема критерия // Математическое моделирование и оптимальное управление. Сб. научи, тр. Под ред. Р.Г. Стронгина. Н.Новгород. 1994. С.48-59.
44. Кузенков О.А. Математическое моделирование, процессов отбора // Математическое моделирование и оптимальное управление. Сб. научи, тр. Под ред. Р.Г. Стронгина. Н.Новгород. 1994. С.120-131.
45. Кузенков О.А. Некоторые свойства динамических систем на конечномерном симплексе // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2(19) С.56-62.
46. Кузенков О.А. О системах оценок объективного критерия //Вести. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 1(18). С.1160-125.
47. Кузенков О.А. Проблема критерия в математическом моделировании процесса выбора для биологических систем //

Математическое моделирование и оптимальное управление. Сб. научн. тр. Под ред. Р.Г. Стронгина. П.Новгород. 1996. С.53-64.

48. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Исследование гиперболической системы первого порядка на конечномерном симплексе // Вести. ИНГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2(21). С.138-144.

49. Кузенков О.А., Рябова Е.А. О симметричной форме гиперболической системы первого порядка на конечномерном симплексе // VI Международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Тезисы докладов. Москва. 2000. С.46.

50. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Проблема отбора для гиперболической системы первого порядка на конечномерном симплексе // V Международная конференция "Нелинейные колебания механических систем". Тезисы докладов. Н. Новгород. 1999. С.130-131.

51. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Вести. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 1(20). С.63-72.

52. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964

53. Куренский М.К. Дифференциальные уравнения. Книга 2. Дифференциальные уравнения с частными производными. Л.: Артиллерийская академия, 1934

54. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. том VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, В. М. Лифшиц. Изд. четвертое, стереотипное. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 736 с.

55. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957

56. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976

57. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
58. Соболев С.Л. Уравнения математической физики (4-е изд.). М.: Наука, 1966
59. Тихонов А. А. Уравнения математической физики: учебное пособие / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. Изд. 7-е. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.
60. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, 7-е изд. М.: Издательство МГУ, 2004.
61. Фаддеев Л. Д. (ред). Математическая физика: Энциклопедия. М.: Большая российская энциклопедия, 1998.
62. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для вузов / А. Ф. Филиппов. 8-е изд. дополненное. М.: Интегралпресс, 1998. 208 с.
63. C. Meyer, U. Prufert, F. Troltzsch, On two Numerical Methods for StateConstrained Elliptic Control Problems. URL http://page.math.tu-berlin.de/~troeltz/arbeiten/mpt05_small.pdf
64. E. Casas, F. Troltzsch, Second Order Analysis for Optimal Control Problems: Improving Results Expected from Abstract Theory, SIAM J. Optim. 22 (2012) 261– 279. URL <http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/110840406>
65. F. Troltzsch, On Finite Element Error Estimates for Optimal Control Problems with Elliptic PDEs. URL <http://page.math.tu-berlin.de/~troeltz/arbeiten/sozopol09.pdf>
66. F. Troltzsch, Optimal Control of Partial Differential Equations Theory, Methods and Applications, Vol. 112, American Mathematical Society, United States of America, 2010
67. G. Da Prato, An introduction to infinite-dimensional analysis, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
68. L. Beilina, M. V. Klibanov, Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems, Springer, New York, 2012

- A. Logg, K.-A. Mardal, G. N. Wells, Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, 2011
69. Logg, Mardal, Wells, Automated Scientific Computing, 2009
70. N. Andreasson, A. Evgrafov, M. Patriksson, An Introduction to Continuous Optimization, 2005.
71. P. Philip, Optimal Control of Partial Differential Equations, 2009.
URL <http://www.math.lmu.de/~philip/publications/lectureNotes>
72. S. Larsson, V. Thomee, Partial Differential Equations with Numerical Methods, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
73. V. Thomee, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, 2nd Edition, Vol. 25 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006
74. W. Bangerth, R. Rannacher, Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations, Birkh auser Verlag, Basel, Switzerland, 2003

Приложение А

Код на языке Python для программного обеспечения FEniCS

```
from dolfin import *
from math import *
import sys
mesh = UnitSquare (nx,ny)
X = FunctionSpace (mesh , 'Lagrange', 1)
Y = FunctionSpace (mesh , 'Lagrange', 1)
Z = X*Y
(y,p) = TrialFunctions(Z)
(si,phi) = TestFunctions(Z)
# Define Source values
f = Expression (0*x[1]*x[1]/2-x[1]0)
y0 = Constant ('1')
d = Constant('1') # regularize parameter
lamc = Expression (0-sinh(1)/(1-p*sinh(1)*sinh(1))*(u0 +(1/sinh(1))-0.5)0,u0 =
1,d = 1)
a = inner(grad(phi),grad(p))*dx+phi*p*dx-phi*y*ds(1)+inner(grad(y),grad(si))*
dx + y*si*dx-(1/d)*p*si*ds(0)
L = f *si*dx-y0 *phi*ds(1)
#boundary
boundary parts = MeshFunction ('uint', mesh, 1)
#Mark lower boundary facets as subdomain 0
class LowerNeumannBoundary(SubDomain):
def inside(self, x, on boundary):
tol = 1E -14 # tolerance for coordinate comparisons
return on boundary and abs(x[1]) < tol
L = LowerNeumannBoundary()
L.mark(boundary parts, 0)
# Mark upper boundary facets as subdomain 1
class UpperNeumannBoundary(SubDomain):
def inside(self, x, on boundary):
tol = 1E -14 # tolerance for coordinate comparisons
return on boundary and abs(x[1]-1) < tol

U = UpperNeumannBoundary()
U.mark(boundary parts, 1)
#all of the Rest boundaries
class RestNeumannBoundary(SubDomain):
def inside(self, x, on boundary):
tol = 1E -14 # tolerance for coordinate comparisons
return on boundary and (abs(x[0]) < tol or abs (x[0]-1) < tol )
#Verification
```

```

Xe = FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 5)
y_e = interpolate(y_exact, Xe)
Ye = FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 5)
p_e = interpolate(p_exact, Ye)
ze = FunctionSpace(mesh, 'Lagrange', 5)
u_e = interpolate(u_exact, ze)
error_sq = (y-y_e)*(y-y_e)*dx
error = sqrt(assemble(error_sq))
#print "y error:", error
error_sq = (p-p_e)*(p-p_e)*dx
error = sqrt(assemble(error_sq))
#print "p error:", error
error_sq = (u-u_e)*(u-u_e)*dx
error = sqrt(assemble(error_sq))
R = RestNeumannBoundary()
R.mark(boundary_parts, 23)
M = assemble(y_0*phi*ds(1), exterior_facet_domains=boundary_parts)
# Compute solution
A = assemble(a, exterior_facet_domains=boundary_parts)
b = assemble(L, exterior_facet_domains=boundary_parts)
s = Function(Z)
solve(A, s.vector(), b)
(y, p) = s.split()
print '(y,p) :0', s.vector().array()
print 'n'
print '(y) :', y.vector().array()
print 'n' print '(p) :', p.vector().array()
print '(M) :', M.array()
#Verification
y_e = Expression(0*(cosh(x[1]-1)/(1-d*sinh(1)*sinh(1)))*(y_0 + 1/sinh(1)-.5)
-(cosh(x[1]-1)/sinh(1)) + x[1]*x[1]/2-x[1] + 10, y_0 = 1, d = g)#0.1)
p_e = Expression(0*((d*sinh(1)*cosh(x[1]))/(1-d*sinh(1)*sinh(1)))* (y_0 +
(1.0/sinh(1))- .5), y_0 = 1, d = g)#0.1)
B = (.5, .5)
print 'y_e at the center:', y_e(B)
print 'y at the center:', y(B)
print 'p_e at the center:', p_e(B)
print 'p at the center:', p(B)
cost = inner(y-y_0, y-y_0)*ds(1) + (1.0/d)*inner(p, p)*ds(0)
J_h = (1.0/2)*assemble(cost, exterior_facet_domains=boundary_parts)

coste = inner(y_e - y_0, y_e - y_0)*ds(1) + (1.0/d)*inner(p_e - y_0, p_e - y_0)*ds(0)
J_ex = (1.0/2)*assemble(coste, exterior_facet_domains=boundary_parts)
E5 = abs(J_h - J_ex)

```

```

t j=f pv+s pv
print '(y m) :', max (y.vector().array())
print '(y em) :', max (y e Ve.vector().array())
print '(y n) :', min (y.vector().array())
print '(y en) :', min (y e Ve.vector().array())
print 'n'
print 'f pv:', f pv print 's pv:',s pv
print 'tot:',t j print 'J h(y,u):',J h
print 'J e(y,u):',J ex
print '(p m) :', max (p.vector().array())
print '(p em) :', max (p e Ve.vector().array())
print '(p n) :', min (p.vector().array())
print '(p en) :', min (p e Ve.vector().array())
#Plot solution
plot(y,title="yplot")
plot(p,title="pplot")
plot(mesh,title="mesh")
interactive()

```