Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Гуманитарно-педагогический институт
Кафедра «Педагогика и методики преподавания»

Г.В. Ахметжанова
Е.С. Павлова
Н.Н. Кошелева

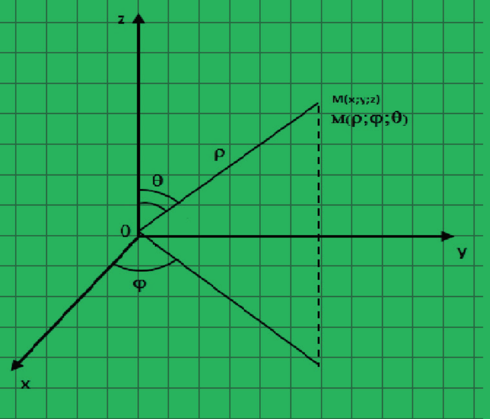
МАТЕМАТИКА

Электронное учебное пособие

В трёх частях

Часть 2

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$



ISBN 978-5-8259-1397-1

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73

Рецензенты:
канд. пед. наук, доцент кафедры «Высшая математика»
Поволжского государственного университета сервиса
Г.А. Киричек;
д-р пед. наук, профессор кафедры «Прикладная математика
и информатика» Тольяттинского государственного университета
А.Н. Ярыгин.

Ахметжанова, Г.В. Математика : электронное учебное пособие : в 3 ч. / Г.В. Ахметжанова, Е.С. Павлова, Н.Н. Кошелева. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2019. – Ч. 2. – 1 оптический диск.

Часть 1 издана в 2018 году.

Во 2-й части учебного пособия содержится весь необходимый материал для изучения модулей «Дифференциальные уравнения», «Кратные интегралы», «Криволинейные и поверхностные интегралы». В каждом модуле представлен теоретический материал, примеры для практических заданий и самостоятельного решения, теоретический и практический тест для проверки уровня знаний студентов. Предложены инновационные формы обучения.

Предназначено для изучения дисциплины «Высшая математика» студентами различных направлений подготовки бакалавриата.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *О.И. Елисеева*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 01.08.2019.
Объем издания 11,8 Мб.
Комплектация издания:
компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-55-17.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Математика» по своей структуре и содержанию соответствует федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования (ФГОС ВО) и программе курса высшей математики для различных направлений подготовки бакалавриата.

Цель учебного пособия – оказать студентам помощь в овладении теоретическим материалом с наименьшей затратой времени, привить им навыки самостоятельного изучения литературы, научить решать задачи.

Материал в учебном пособии излагается доступно, его разделы согласованно и соразмерно наполнены учебной информацией, содержательная сложность отвечает современным требованиям. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров, даны задания для самостоятельного решения.

Особенность данного пособия состоит в том, что в нем представлены межпредметные связи математики с другими науками. Кроме этого, описаны виды тестов, применяемых в образовательном процессе высшей школы. Пособие содержит также описание образовательных технологий, которые можно использовать для повышения качества изучения предмета как в вузе, так и на других ступенях образования.

Данное пособие может быть использовано студентами заочной формы обучения и студентами, обучающимися по программам дистанционного обучения, при выполнении индивидуальных домашних заданий.

Учебное пособие может быть успешно использовано начинающими педагогическую деятельность в области преподавания высшей математики преподавателями и старшими преподавателями вузов для организации аудиторных и внеаудиторных занятий по математике.

В пособии представлен материал, в результате изучения которого студент должен сформировать и продемонстрировать общепрофессиональные и профессиональные компетенции (ОПК и ПК), представленные ФГОС ВО.

Студентам направления подготовки бакалавра 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии» курс высшей математики поможет сформировать способность использовать основные естественно-научные законы для понимания окружающего мира и явлений природы (ОПК-3).

Студенты направления подготовки бакалавра 04.03.01 «Химия» получат способность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности (ОПК-3).

Студенты направления подготовки бакалавра 08.03.01 «Строительство» смогут продемонстрировать:

– способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий (ОПК-6);

– владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией (ОПК-4);

– способность выявить естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2);

– способность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-1).

Студентам, обучающимся по направлению подготовки бакалавра 44.03.02 «Психолого-педагогическое образование», курс поможет выработать готовность:

– применять качественные и количественные методы в педагогических и психологических исследованиях (ОПК-2);

– использовать методы диагностики развития, общения, деятельности детей разных возрастов (ОПК-3);

– проводить диагностику уровня освоения детьми содержания учебных программ с помощью стандартных учебных заданий, внося (совместно с методистами) необходимые изменения в построение образовательной деятельности (ПК-8).

Студенты, обучающиеся по направлению подготовки бакалавра 44.03.01 «Педагогическое образование», после изучения курса сформируют:

– способность использовать естественно-научные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве (ОК-3);

– способность использовать современные методы и технологии в обучении и диагностике (ПК-2);

– готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11).

Условные обозначения

⇨	Запомнить
$\underline{\mathfrak{I}}$	Теорема
?	Вопросы
✍	Выполните самостоятельно
$\mathfrak{R}$	Задача
•	Начало и окончание решения задачи или доказательства теоремы
!	Важно

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Основные понятия дифференциальных уравнений первого порядка

1.1.1. Общие понятия дифференциальных уравнений 1-го порядка

⇨ **Определение 1.** Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и её производную $y'(x)$.

При изложении теории дифференциальных уравнений чаще всего рассматриваются уравнения, разрешенные относительно производной $y'(x)$:

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

или уравнения в так называемой симметричной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{1.3}$$

✍ Среди данных уравнений указать обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка:

а) $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u)$; б) $\dfrac{\partial y}{\partial x} + y^2 = x^3 + 1$; в) $a\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + b\dfrac{\partial y}{\partial x} + cy = f(x)$;

г) $5\dfrac{d^2 y}{\partial x^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 3y = \sin x$; д) $(x + y)dx + (x^2 + y^2)dx = 0$; е) $y' = \dfrac{x}{y}\ln\dfrac{x}{y}$.

⇨ **Определение 2.** Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставленной вместе со своей производной в уравнение, обращает его в тождество

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0.$$

Любое дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

⇨ **Определение 3**. Множество всех частных решений дифференциального уравнения называется его *общим решением*.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка является функцией, зависящей от одной произвольной постоянной

$$y = \varphi(x, c).$$

Если решение найдено в неявной форме

$$\Phi(x, y) = c,$$

то его называют *общим интегралом* дифференциального уравнения.

✍ Дано уравнение $y' = 2x$ и функции

а) $y = x^2$; б) $y = 2$;

в) $y = x^2 + c$; г) $y = (x + c)^2$.

? Какая из функций является частным решением уравнения? Какая из функций является общим решением уравнения?

! Задача Коши для уравнения 1-го порядка: найти решение, которое удовлетворяло бы начальным условиям $y|_{x = x_0} = y_0$, где x_0, y_0 – заданные числа.

1.1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

⇨ **Определение 4**. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его правая часть есть произведение функций, одна из которых зависит от переменной x, другая – от y: $y' = f_1(x)f_2(y)$.

Уравнение, записанное в симметричной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

является уравнением с разделяющимися переменными, если множители $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ представляют собой произведение функций, из которых одна зависит только от переменной x, другая – от переменной y: $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) \cdot dx + \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot dy = 0$.

! Разделить переменные – значит преобразовать уравнение так, чтобы каждая переменная содержалась только в том слагаемом, которое содержит её дифференциал.

Стандартная форма записи	Особенности	Метод решения
$\varphi_1(x)\varphi_2(y)dx+$ $+\psi_1(x)\psi_2(y)dy=0$	При дифференциалах – произведения функций, зависящих одна от x, другая – от y	$\int\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\psi_2(y)}dy=c$
$y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$	Правая часть – произведение функций, зависящих одна от x, другая – от y	$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+c$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Решить уравнение $y'=\frac{x}{y}$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$, откуда $ydy = xdx$.

Проинтегрируем обе части равенства $\int ydy=\int xdx$,

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C_1.$$

Ответ можно записать в виде $x^2 - y^2 = C$.

$\underline{\mathfrak{R}}$ Найти решение задачи Коши для уравнения $(x^2 - 1)y' - 2xy = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$.

Решение.

1. $y'=\frac{2x}{x^2-1}\cdot y$ – уравнение с разделяющимися переменными.
2. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-1}y,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x}{x^2-1}dx.$$

3. Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2x}{x^2-1}dx,$$

$$\ln|y| = \ln|x^2 - 1| + \ln|C_1|.$$

Для удобства преобразований постоянная выбрана в логарифмической форме.

4. Упростим результат интегрирования: $|y| = |c_1(x^2 - 1)|$, $y = \pm c_1(x^2 - 1)$, где $\pm c_1 = c$, тогда $y = c(x^2 - 1)$.
5. Подставим начальные условия. При $x = 0$, $y = 1$ получаем $c = -1$.
6. Запишем ответ: $y = 1 - x^2$ – частное решение дифференциального уравнения.

! При преобразованиях могут использоваться следующие формулы:

1) $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

2) $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

✍ **1.** Среди предложенных уравнений выберите дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$	$(x^2 + 2x + 5)y' = y^2$	$(2 - x)^2 y' - \sqrt{y} + 1 = 0$
$xy' = y + \sqrt{9x^2 + y^2}$	$(4x - y)y' = 3x + 4y$	$y' + \sin^2 x \cos^2 y = 0$

2. Найдите решение дифференциального уравнения $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ при условии $y(2) = 1$.

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = y^2 \cos x.$$

1.1.3. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

⇨**Определение 5**. Дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' = f(x, y)$ называется *однородным дифференциальным уравнением*, если его правая часть – однородная функция нулевого порядка, т. е. функция отношения $\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (или $\left(\dfrac{x}{y}\right)$), или $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

⇨**Определение 6**. Уравнение, записанное в симметричной форме $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, является *однородным дифференциальным уравнением*, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового порядка.

! Любое однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $\dfrac{y}{x} = u(x)$, откуда $y = ux$, $y' = u'x + u$.

✍ Среди данных уравнений указать однородные дифференциальные уравнения:

а) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

б) $xy' - y - x\,\mathrm{ctg}\dfrac{y}{x} = 0$;

в) $(x^2 + y^2 + xy)dx = x^2dy$;

г) $(x + y)dx + (x + y + 2)dy = 0$.

<u>$\mathfrak{R}$</u> Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$.

Решение. Введем вспомогательную функцию u:

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Получаем

$$u'x + u = u(\ln u + 1);$$
$$u'x + u = u\ln u + u;$$
$$u'x = u\ln u.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x};$$
$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C;$$
$$\ln u = Cx;$$
$$u = e^{Cx}.$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение: $y = xe^{Cx}$.

<u>$\mathfrak{R}$</u> Решить уравнение $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

Решение. Преобразуем дифференциальное уравнение, получим

$$y' = \frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}.$$

Запишем подстановку: $\dfrac{y}{x} = u(x)$, $y = ux$, $y' = u'x + u$.

Осуществим подстановку в уравнение:

$$u'x + u = u\ln u.$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x = u(\ln u - 1),$$
$$u' = \frac{1}{x}\cdot u(\ln u - 1),$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot u(\ln u-1),$$

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}.$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln u-1|=\ln|cx| \ .$$

$$\ln u-1=cx,$$

$$u=e^{cx+1}.$$

$$\frac{y}{x}=e^{cx+1},$$

$$y=xe^{cx+1}.$$

✍ **1.** Найдите решение для дифференциального уравнения

$$xy'-y-x\operatorname{ctg}\frac{y}{x}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x = 1$, $y = 0$.

2. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$(x^2+y^2+xy)dx=x^2dy.$$

3. Определите тип дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

и найдите его общее решение.

1.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка

1.2.1. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

⇨**Определение 7.** *Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка* называется уравнение, линейное относительно функции и её производной:

– уравнение, линейное относительно $(y)x$:

$$y'+P(x)y=Q(x);$$

– уравнение, линейное относительно $(x)y$:

$$x' + P(y)x = Q(y).$$

Здесь $P(x)$, $Q(y)$ – заданные функции или константы. При $Q = 0$ уравнение называется однородным, при $Q \neq 0$ – неоднородным.

Стандартная форма записи	Особенности	Особенности решения
$y' + P(x)y = Q(x)$	Уравнения первой степени относительно y и y_x'	$y = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$x' + P(y)x = Q(y)$	Уравнения первой степени относительно x и x_y'	$x = u(y) \cdot v(y)$, $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Неоднородные линейные уравнения можно свести к последовательности двух уравнений с разделяющимися переменными.

Метод решения: в уравнении сделать замену $x = u(y) \cdot v(y)$.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$
$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$
$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Затем решить два уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' + P(x)v = 0$$
$$u'v = Q(x).$$

$\mathfrak{R}$ Найти решение дифференциального уравнения $xy' - y - x^3 = 0$.

Решение. Приведём к стандартной форме записи делением на x, получим $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ – линейное дифференциальное уравнение относительно функции $(y)x$.

Запишем подстановку:

$$y = u(x) \cdot v(x),$$
$$y = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2,$$

$$\underline{u'v} + uv' \underline{- \frac{1}{x}uv} = x^2.$$

Сгруппируем первое и третье слагаемые:

$$\left(u' - \frac{1}{x}u\right)v + uv' = x^2.$$

Запишем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} u' - \frac{1}{x}u = 0, \\ uv' = x^2. \end{array}\right.$$

Решим оба уравнения:

$$u' - \frac{1}{x}u = 0,$$

$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| = \ln|x|,$$

$$u = x;$$

$$uv' = x^2,$$

$$xv' = x^2,$$

$$v' = x,$$

$$v = \int x dx,$$

$$v = \frac{x^2}{2} + C.$$

Запишем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = uv = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

✍ **1.** Решите уравнение $(2x + y^2)y = y$.

Указание:

а) сделайте замену:

$$y' = \frac{1}{x'};$$

б) получится линейное дифференциальное уравнение относительно $x(y)$ вида

$$x' + P(y)x = Q(y);$$

в) сделайте замену

$$x = u(y) \cdot v(y),$$

$$x' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

2. Среди данных уравнений укажите линейные дифференциальные уравнения и решите их:

а) $xy' + y = x\cos x$;

б) $(x - y)y' = 3x + 4y$;

в) $y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^3 x$;
г) $y^2 dx = (y^2 - 2xy)dy$;
д) $xy'' - 2y' = x^3 e^{-x}$.

3. Определите тип дифференциального уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

и решите его.

1.2.2. Уравнение Бернулли

⇨**Определение 8.** Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n \quad \text{или} \quad x' + P(y)\cdot x = Q(y)\cdot x^n .$$

Уравнение Бернулли отличается от линейного дифференциального уравнения правой частью и сводится к решению уравнений с разделяющимися переменными по той же схеме, что и линейное, подстановкой

$$\begin{array}{lcl} y = u(x)\cdot v(x), & & x = u(y)\cdot v(y), \\ & \text{или} & \\ y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x); & & x' = u'(y)\cdot v(y) + u(y)\cdot v'(y). \end{array}$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0 .$$

1. $y' - \dfrac{4}{x}\cdot y = x\cdot y^{1/2}$ – уравнение Бернулли.

2. Запишем подстановку:

$$y = u(x)\cdot v(x),$$

$$y = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

3. Осуществим подстановку в данное уравнение:

$$\underline{u'\cdot v} + u\cdot v' - \underline{\frac{4}{x}\cdot uv} = x\sqrt{uv}.$$

4. Сгруппируем первый и третий члены уравнения:

$$\left(u' - \frac{4}{x}\cdot u\right)\cdot v + u\cdot v' = x\sqrt{uv}.$$

$$\left[\begin{array}{l} u' - \dfrac{4}{x}\cdot u = 0, \\ u\cdot v' = x\sqrt{uv}. \end{array}\right.$$

5. Решим каждое из полученных уравнений.

$$u' - \frac{4}{x} \cdot u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u}{x},$$

$$\int \frac{du}{u} = 4\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| = \ln x^4,$$

$$u = x^4;$$

$$u \cdot v' = x\sqrt{uv},$$

$$x^4 \cdot v' = x\sqrt{x^4 \cdot v},$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$2\sqrt{v} = \ln|x| + C,$$

$$v = \left(\ln\sqrt{x} + C\right)^2.$$

6. Запишем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = u \cdot v,$$

$$y = x^4\left(\ln\sqrt{x} + c\right)^2.$$

✍ **1.** Среди данных уравнений укажите уравнения Бернулли и решите их:

1) $y'y + 4xy^2 = 2x$ 2) $10y'' - y' = 0$

3) $(y' + y)(1 + e^{2x}) = 1$ 4) $y' - y = \sqrt[3]{y}e^x$.

2. Определите тип дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = 2x^2y^2$ и решите его.

3. Является ли дифференциальное уравнение $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x}y^3$ уравнением Бернулли? Если да, решите его.

1.2.3. Уравнения в полных дифференциалах

⇨**Определение 9.** Уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть – полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y).$$

Необходимым и достаточным условием полного дифференциала является равенство частных производных

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $u(x, y) = c$, где функция $u(x, y)$ может быть найдена по одной из формул:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy;$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

$\mathfrak{R}$ Найти решение дифференциального уравнения

$$(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0.$$

Дифференциальное уравнение записано в симметричной форме, где $P(x,y) = \ln y - 2x$, $Q(x,y) = \frac{x}{y} - 2y$.

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(\ln y - 2x)}{\partial y} = \frac{1}{y} - 2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{x}{y} - 2y\right)}{\partial x} = \frac{1}{y} - 2.$$

Получили уравнение в полных дифференциалах, где

$$u(x,y) = C.$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy;$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} (\ln y_0 - 2x)dx + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy =$$

$$= (x\ln y_0 - x^2)\Big|_{x_0}^{x} + x\ln y\,\Big|_{y_0}^{y} - y^2\,\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= \ln y_0(x - x_0) - (x^2 - x_0^2) + x(\ln y - \ln y_0) - (y^2 - y_0^2) =$$

$$= x\ln y - x^2 - y^2 - x_0\ln y_0 + x_0^2 + y_0^2.$$

Запишем общий интеграл уравнения:

$$x\ln y - x^2 - y^2 - x_0 \ln y_0 + x_0^2 + y_0^2 = C_1,$$

$$x\ln y - x^2 - y^2 = \underbrace{x_0\ln y_0 - x_0^2 - y_0^2 + C_1}_{C},$$

$$x\ln y - x^2 - y^2 = C.$$

1.3. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общие понятия

⇨**Определение 10.** *Обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка* называется уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и её производные 1-го и 2-го порядков.

⇨**Определение 11.** *Частным решением дифференциального уравнения 2-го порядка* называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставленной в уравнение вместе со своими производными, обращает его в тождество

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)] \equiv 0.$$

Дифференциальное уравнение 2-го порядка, как и любое дифференциальное уравнение, имеет бесчисленное множество решений.

⇨**Определение 12.** Множество всех решений уравнения 2-го порядка называется *его общим решением*; оно содержит две произвольные постоянные: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

! ***Задача Коши для уравнения 2-го порядка*** есть задача о нахождении частного решения, которое удовлетворяло бы начальным условиям $y|_{x = x_0} = y_0$, $y'|_{x = x_0} = y_0'$, где x_0, y_0, y_0' — заданные числовые значения.

1.3.1. Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

! В таблице приведены типы уравнений 2-го порядка, допускающие понижение порядка.

Тип уравнения	Особенности	Метод решения
$y'' = f(x)$	Разрешено относительно второй производной. Правая часть зависит только от x	Последовательное интегрирование
$F(x, y', y'') = 0$	Отсутствует явно функция y	Подстановка: $y' = P(x)$; $y'' = P'(x)$
$F(y, y', y'') = 0$	Отсутствует явно независимая переменная x	Подстановка: $y' = P(y)$; $y'' = P'(y) \cdot P(y)$

$\mathfrak{R}$ Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y'' = \sin^2 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Решение:

$y'' = \sin^2 2x$ – уравнение, допускающее понижение порядка. Решается последовательным интегрированием:

$$y' = \int \sin^2 2x dx,$$

$$y' = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 4x) dx,$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C_1.$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C_1\right) dx,$$

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{32}\cos 4x + C_1 x + C_2.$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{32}\cos 4x + C_1 x + C_2, \\ y' = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{4}\sin 4x\right) + C_2. \end{cases}$$

Найдём произвольные постоянные: при $x = 0,\ y = 0,\ y' = 1$ получаем $C_2 = -\frac{1}{32};\ C_1 = 1$.

Запишем ответ – частное решение уравнения:

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{32}\cos 4x + x - \frac{1}{32}.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Найти решение дифференциального уравнения $xy'' = y' \cdot \ln\frac{y'}{x}$.

Решение:

$xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}$ – уравнение, допускающее понижение порядка; отсутствует переменная *y*.

Запишем подстановку

$$y' = P(x),$$
$$y'' = P'(x).$$

$$x \cdot P' = P \cdot \ln\frac{P}{x}.$$

$P' = \frac{P}{x} \cdot \ln\frac{P}{x}$ – однородное уравнение.

Запишем подстановку

$$\frac{P}{x} = u(x),\ P = u \cdot x, \quad P' = u' \cdot x + u;$$

$$u' \cdot x + u = u \cdot \ln u;$$

$$u' = (u \cdot \ln u - u) \cdot \frac{1}{x};$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|C_1 x|;$$

$$\ln u - 1 = C_1 x;$$

$$u = e^{C_1 \cdot x + 1}.$$

Запишем общее решение:

$$P = ux = xe^{C_1 x + 1};$$

$$y' = xe^{c_1 x + 1}.$$

$\mathfrak{R}$ Найти решение дифференциального уравнения

$$2yy'' - (y')^2 - 1 = 0.$$

Решение:

$2yy'' - (y')^2 - 1 = 0$ — уравнение, допускающее понижение порядка; отсутствует переменная x.

Запишем подстановку: $y' = P(y)$, $\quad y'' = P(y) \cdot P'(y)$.

$$2yy'' - (y')^2 - 1 = 0$$

$$2y \cdot P \cdot P' - P^2 - 1 = 0.$$

$2yPP' - P^2 - 1 = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int \frac{2PdP}{P^2+1} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln(P^2+1) = \ln C_1 y;$$

$$P^2 + 1 = C_1 y;$$

$$P^2 = C_1 y - 1;$$

$$(y')^2 = C_1 y - 1;$$

$$y' = \sqrt{C_1 y - 1};$$

$$y' = \sqrt{y-1};$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int dx;$$

$$2\sqrt{y-1} = x + C_2;$$

$$y = \frac{1}{4}(x + C_2)^2 + 1.$$

✍**1.** Среди предложенных уравнений выберите уравнение второго порядка:

1. $y''' = \sqrt{1-2x}$	2. $y' \cos^2 x - \sin y = 0$
3. $xy'' - y' = x^3 \sin x$	4. $(8x^2 + 6xy - y^4)dx + (3x^2 - 4xy^3 + \sqrt{y})dy = 0$

2. Решить дифференциальное уравнение $xy'' - y' = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Является ли функция $y = \operatorname{ctg} x$ частным решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' \operatorname{ctg} x = 0$?

1.3.2. Однородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

⇨**Определение 13.** *Однородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида $y'' + Py' + gy = 0$, где P, g – заданные числа.

⇨**Определение 14.** *Общее решение* линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка есть линейная комбинация частных решений его фундаментальной системы: $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

! Для отыскания фундаментальной системы решений составляют так называемое характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + g = 0.$$

В зависимости от вида корней (вещественные различные, вещественные равные, комплексные) фундаментальная система решений имеет различный вид.

Дискриминант характеристического уравнения	Корни характеристического уравнения	Фундаментальная система частных решений	Общее решение
$D > 0$	Вещественные различные $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1x}$ $y_2 = e^{k_2x}$	$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$
$D = 0$	Вещественные равные $k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{kx}$ $y_2 = xe^{kx}$	$y = e^{k\cdot x}(c_1 + c_2x)$
$D < 0$	Комплексные $k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x +$ $+ c_2\sin\beta x)$

$\mathfrak{R}$ Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y'' - 13y' - 30y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 6$, $y'(0) = 5$.

Решение.

1. $y'' - 13y' - 30y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

2. Запишем формулу общего решения:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

3. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k_2 - 13k - 30 = 0,$$

$$k_1 = -2,\ k_2 = 15$$

(корни вещественные, различные).

4. Запишем фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} k_1 = -2 \Rightarrow y' = e^{-2x} \\ k_2 = 15 \Rightarrow y_2 = e^{15x} \end{cases}.$$

5. Запишем общее решение уравнения:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{15x}.$$

6. Найдём значения произвольных постоянных c_1 и c_2:

$$\begin{cases} y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{15x}, \\ y' = -2c_1 e^{-2x} + 15c_2 e^{15x}. \end{cases}$$

При $x = 0$, $y = 6$, $y' = 5$ получаем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 6, \\ -2c_1 + 15c_2 = 5, \end{cases} \Rightarrow c_1 = 5,\quad c_2 = 1.$$

7. Запишем ответ – частное решение уравнения:

$$y = 5e^{-2x} + e^{15x}.$$

$\underline{\Re}$ Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 14y' + 49y = 0.$$

Решение.

1. $y'' - 14y' + 49y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

2. Запишем формулу общего решения:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

3. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 14k + 49 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = 7$$

(корни вещественные, равные).

4. Запишем фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{7x},\quad y_2 = xe^{7x}.$$

5. Запишем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x},$$

$$y = e^{7k}\left(c_1 + c_2 x\right).$$

$\Re$ Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Решение.

1. $y'' + 4y' + 13y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

2. Запишем формулу общего решения:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

3. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 13 = 0,$$

$$k_{1,2} = -2 \pm 3i$$

(корни комплексные).

4. Запишем фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{-2x}\cos 3x, \qquad y_2 = e^{-2x}\sin 3x.$$

5. Запишем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = c_1 e^{-2x}\cos 3x + c_2 e^{-2x}\sin 3x,$$

$$y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x).$$

✍**1.** Решите уравнение $y'' + 2y' + y = 0$.

2. При начальных условиях $y(0) = y'(0) = 1$ решите дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 3y = 0$.

3. Является ли дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 8y = 0$ однородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами? Если да, решите его.

1.3.3. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера (метод вариации произвольных постоянных)

⇨**Определение 15.** Неоднородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + gy = f(x),$$

где $f(x) \neq 0$.

$\Im$ ***О структуре решения***. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка равно сумме общего решения $(\bar{y})$ соответствующего однородного дифференциального уравнения и какого-либо частного решения (y^*) данного неоднородного дифференциального уравнения: $y = \bar{y} + y^*$.

Рассмотрим *метод Эйлера*.

Он является общим, универсальным методом в том смысле, что может применяться для уравнений с произвольной правой частью. Суть его в следующем:

1) сначала записывают общее решение $(\overline{y})$ $\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + gy = 0$;

2) затем конструируют функцию $y^* = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$, где $c_1(x)$, $c_2(x)$ – теперь уже функции переменной x.

Функция y^* является частным решением уравнения

$$y'' + py' + gy = f(x),$$

если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1 + c_2'(x) \cdot y_2 = 0, \\ c_1'(x) \cdot y_1' + c_2'(x) \cdot y_2' = f(x). \end{cases}$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}.$$

Решение.

1. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$ – линейное неоднородное 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

2. Формула общего решения: $y = \overline{y} + y^*$.

3. Найдём общее решение однородного уравнения $\overline{y}$:

$$y'' + y' = 0,$$

$$k^2 + k = 0,$$

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = -1,$$

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

4. Сконструируем формулу частного решения уравнения y^*:

$$y^* = c_1(x) + c_2(x) e^{-x}.$$

5. Запишем систему уравнений относительно функций $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) e^{-x} = 0, \\ c_1'(x) \cdot 0 - c_2(x) e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^x}. \end{cases}$$

6. Решим систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x},$$

$$\Delta\, c_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{1}{1+e^x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{e^2}{1+e^x},$$

$$\Delta\, c_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+e^x} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^x};$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta c_1'}{\Delta} = \frac{1}{1+e^x},$$

$$c_1(x) = \int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln\left(1+e^x\right);$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta c_2'}{\Delta} = -\frac{e^x}{1+e^x},$$

$$c_2(x) = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = -\ln\left(1+e^x\right).$$

7. Запишем частное решение y^*:

$$y^* = x - \ln\left(1+e^x\right) - e^{-x}\ln\left(1+e^x\right),$$

$$y^* = x - \left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^x\right).$$

8. Запишем ответ – общее решение уравнения:

$$y = \overline{y} + y^*,$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + x - \left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^x\right).$$

✍**1.** Выберите из нижеперечисленных дифференциальных уравнений неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' + 17y = 0$;

2) $25y'' + 10y' + y = 0$;

3) $9y'' - 6y' + y = 0$;

4) $y'' + y' = \dfrac{5}{1+e^x}$.

2. Решите дифференциальное уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

3. Является ли дифференциальное уравнение $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ неоднородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами? Если да, решите его.

1.3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа (метод неопределенных коэффициентов)

Продолжаем рассматривать методы решения уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$:

1) $y = \overline{y} + y^*$ – общее решение линейного неоднородного уравнения;
2) $\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; $y'' + py' + gy = 0$.

Имеются случаи, когда частное решение y^* можно найти проще, не прибегая к интегрированию.

Речь пойдет о широко применяемых в науке дифференциальных уравнениях, у которых правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_x(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta(x)\right],$$

где $P_x(x)$, $Q_m(x)$ – заданные многочлены одной или разных степеней.

Поставим в соответствие уравнению $y'' + py' + qy = f(x)$ с правой частью $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_x(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta(x)\right]$ число $\alpha \pm \beta i$ и назовем его основным параметром уравнения.

Сконструируем функцию вида

$$y^* = e^{\alpha x}\left[M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta(x)\right]x^r,$$

где $M_n(x)$, $N_n(x)$ – многочлены степени $n = \max\{k, m\}$, записанные пока с неопределенными коэффициентами (отсюда название метода); r – кратность корня характеристического уравнения, равного параметру $\alpha \pm \beta i$.

Как видим, конструкция функции y^* определяется как формой правой части уравнения – функцией $f(x)$, так и видом левой его части – корнями характеристического уравнения. Доказано, что при соответствующем выборе значений коэффициентов для многочленов $M_n(x)$ и $N_n(x)$ функция y^* является частным решением уравнения.

! В таблице приведены различные формы правой части $f(x)$ (частные случаи $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = \beta = 0$) и соответствующие решения уравнения y^*.

Правая часть уравнения $f(x)$	Основной параметр $\alpha \pm \beta i$	Сравнение параметра с корнями характеристического уравнения	Конструкция частного решения y^*
A	$\alpha = \beta i = 0$ $\alpha \pm \beta i = 0$	0 не является корнем 0 – однократный корень 0 – двукратный корень	B Bx Bx^2
$P_n(x)$	$\alpha = \beta i = 0$ $\alpha \pm \beta i = 0$	0 не является корнем 0 – однократный корень 0 – двукратный корень	$M_n(x)$ $M_n(x) \cdot x$ $M_n(x) \cdot x^2$
$Ae^{\alpha x}$	$\beta = 0$ $\alpha \pm \beta i = \alpha$	α не является корнем α – однократный корень α – двукратный корень	$Be^{\alpha x}$ $Be^{\alpha x} \cdot x$ $Be^{\alpha x} \cdot x^2$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$\beta = 0$ $\alpha \pm \beta i = \alpha$	α не является корнем α – однократный корень α – двукратный корень	$M_n(x)e^{\alpha x}$ $M_n(x)e^{\alpha x} \cdot x$ $M_n(x)e^{\alpha x} \cdot x^2$
$A\cos\beta x +$ $+ B\sin\beta x$	$\alpha = 0$ $\alpha \pm \beta i = \beta$	$\pm\beta i$ не являются корнями $\pm\beta i$ – корни	$C\cos\beta x + D\sin\beta x$ $(C\cos\beta x + D\sin\beta x) \cdot x$
$P_x(x)\cos\beta x +$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	$\alpha = 0$ $\alpha \pm \beta i = \beta$	$\pm\beta i$ не являются корнями $\pm\beta i$ – корни	$M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x$ $(M_n(x)\cos\beta x +$ $+ N_n(x)\sin\beta x) \cdot x$ $n = \max\{k, m\}$
$(A\cos\beta x +$ $+ B\sin\beta x)e^{\alpha x}$	$\alpha \pm \beta i$	$\alpha \pm \beta i$ не являются корнями $\alpha \pm \beta i$ – корни	$(C\cos\beta x + D\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $(C\cos\beta x + D\sin\beta x)e^{\alpha x} \cdot x$
$(P_x(x)\cos\beta x +$ $+Q_m(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$	$\alpha \pm \beta i$	$\alpha \pm \beta i$ не являются корнями $\alpha \pm \beta i$ – корни	$(M_n(x)\cos\beta x +$ $+ N_n(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $(M_n(x)\cos\beta x +$ $+ N_n(x)\sin\beta x)e^{\alpha x} \cdot x$ $n = \max\{k, m\}$

$\mathfrak{R}$ Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y' = x^3 + 1.$$

Решение.

$y'' + y' = x^3 + 1$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, со специальной правой частью.

Общее решение: $y = \overline{y} + y^*$.

1. Найти общее решение однородного уравнения $\overline{y}$:

$$y'' + 4y' = 0,$$

$$k^2 + 4k = 0,$$

$$k_1 = 0,\ k_2 = -4,$$

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^{-4x}.$$

2. Провести анализ правой части уравнения:

$$x^3 + 1 = e^{0x}((x^3 + 1)\cos 0x + 0 \cdot \sin 0x),$$

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ f(x) = p_3(x).$$

Основной параметр $\alpha \pm \beta i = 0$ является однократным корнем характеристического уравнения, следовательно $r = 1$.

3. Сконструировать частное решение y^*:

$$y^* = M_s(x)x = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cdot x.$$

4. Вычислить коэффициенты функции y^*:

а) найти производные от функции y^*:

$$y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx,$$

$$(y^*)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + Dx,$$

$$(y^*)'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C;$$

б) подставить функцию y^* и ее производные в данное уравнение:

$$16Ax^3 + (12A + 12B)x^2 + (6B + 8C)x + (2C + 4D) = x^3 + 1;$$

в) приравнять коэффициенты при подобных членах левой и правой части равенства:

$$\begin{cases} 16A = 1 \\ 12A + 12B = 0 \\ 6B + 8C = 0 \\ 2C + 4D = 1; \end{cases}$$

г) решить систему: $A = \dfrac{1}{16},\ B = \dfrac{1}{16},\ C = \dfrac{3}{64},\ D = \dfrac{29}{128}$.

5. Записать частное решение y^*:

$$y^* = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{64}x^2 + \frac{29}{128}x.$$

6. Записать ответ – общее решение дифференциального уравнения:

$$y = c_1 + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{64}x^2 + \frac{29}{128}x.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 8\sin x.$$

$y'' + y = 8\sin x$ — линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, со специальной правой частью.

1. Запишем формулу общего решения

$$y = \overline{y} + y^*.$$

2. Найдём общее решение однородного уравнения $\overline{y}$:

$$y'' + y = 0,$$

$$k^2 + 1 = 0,$$

$$k_{1,2} = \pm i,$$

$$\overline{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

3. Проведём анализ правой части уравнения:

$$8\sin x = e^{0x}\left(0\cos x + 8\sin x\right),$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1,$$

$$f(x) = p_0 \cos x + Q_0 \sin x.$$

Тогда основной параметр $\alpha \pm \beta_i = \pm i$.

4. Определим параметр r: значения основного параметра $\pm i$ являются однократными корнями характеристического уравнения, следовательно $r = 1$.

5. Сконструируем частное решение y^*:

$$y^* = \left(A\cos x + B\sin x\right)x .$$

6. Вычислим коэффициенты функции y^*:

а) найдём производные от функции y^*:

$$y^* = \left(A\cos x + B\sin x\right)x;$$

$$\left(y^*\right)' = \left(A + Bx\right)\cos x + \left(B - Ax\right)\sin x;$$

$$\left(y^*\right)'' = \left(2B - Ax\right)\cos x + \left(2A - 8x\right)\sin x;$$

б) подставим функцию y^* и её производные в данное уравнение:

$$2B\cos x - 2A\sin x = 8\sin x;$$

в) приравняем коэффициенты при подобных членах левой и правой части равенства:

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 8; \end{cases}$$

г) решим систему:

$$A = -4, B = 0.$$

7. Запишем частное решение y^*:

$$y^* = -4x\cos x.$$

8. Запишем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = (c_1 - 4x)\cos x + c_2 \sin x.$$

✍**1.** Выберите из нижеперечисленных дифференциальных уравнений неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, решаемое методом Лагранжа:

1) $y'' - 8y' + 16y = 0$;	2) $y'' + y' = \dfrac{5}{1+e^x}$;
3) $y'' + y = 15\sin x$;	4) $2y'' - y' = 0$.

2. Найдите решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$.

3. Является ли дифференциальное уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$$

неоднородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами? Если да, решите его методом Лагранжа.

? Теоретический тест

1. Дифференциальные уравнения связывают

1) независимую переменную и искомую функцию
2) искомую функцию и ее производную
3) независимую переменную, искомую функцию и ее производную
4) производные функции различных порядков

2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка символически записывается в виде

1) $F(x, y, y') = 0$	2) $F(x, y, y', y'') = 0$
3) $F(y, y', y'') = 0$	4) $F(x, y', y'') = 0$

3. Решением дифференциального уравнения является
1) число
2) аргумент функции
3) производная функции
4) функция

4. Порядком дифференциального уравнения называется
1) наивысший порядок переменной x
2) наивысший порядок функции y
3) наивысший порядок производной функции
4) число производных, входящих в уравнение

5. Дифференциальное уравнение первого порядка решается с помощью
1) однократного интегрирования
2) дифференцирования
3) двукратного интегрирования
4) двукратного дифференцирования

6. Частным решением дифференциального уравнения 2-го порядка является функция

1) $y=\varphi(x,c_1,c_2)$	2) $y=\varphi(x,y,c)$
3) $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$	4) $y=\varphi(x,c_1^0)$

7. В дифференциальных уравнениях высших порядков замена переменной используется для
1) устранения независимой переменной
2) понижения порядка дифференциального уравнения
3) определения типа дифференциального уравнения
4) повышения порядка дифференциального уравнения

8. Частное решение y^* неоднородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью конструируется в виде $y^*=e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x+N_n(x)\sin\beta x)x^r$, где r –
1) кратность корня соответствующего характеристического уравнения, равного параметру $\alpha \pm i\beta$
2) кратность параметра $\alpha \pm i\beta$, равного корню соответствующего характеристического уравнения

3) корень соответствующего характеристического уравнения, равный параметру $\alpha \pm i\beta$
4) параметр $\alpha \pm i\beta$, равный корню соответствующего характеристического уравнения

9. Обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка называется уравнение вида

1) $F(x, y, y', y'', y''') = 0$	2) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0$
3) $y' = f(x, y)$	4) $F(x, y, y', y'') = 0$

10. Общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – заданные числа, когда корни характеристического уравнения комплексные, представимо в виде

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	2) $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
3) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$	4) $y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$

✍Практический тест

1. Если при умножении каждого аргумента функции на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n, т. е. $f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x, y)$, то это дифференциальное уравнение
1) с разделяющимися переменными
2) однородное
3) в полных дифференциалах
4) линейное

2. С помощью подстановки $x = u \cdot v$ решается дифференциальное уравнение
1) с разделяющимися переменными
2) Бернулли
3) линейное
4) однородное

3. Общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$, где p и q — заданные числа, когда корни характеристического уравнения действительные и равны, представимо в виде

1) $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$	2) $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$
3) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$	4) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

4. Общим решением дифференциального уравнения $(x^2 - 1)y' - 2xy = 0$ является

1) $y = \mathrm{tg}(x + C) - x$	2) $y = Ce^{\frac{-1}{x^2}}$
3) $y = C(x^2 - 1)$	4) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = C$

5. Стандартную форму записи $y' + P(x)y + Q(x) = 0$ имеет уравнение

1) линейное
2) Бернулли
3) с разделяющимися переменными
4) однородное

6. Общее решение дифференциального уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ имеет вид

1) $y = Ce^{-ax} + \dfrac{bx}{a} - \dfrac{b}{a^2}$	2) $y = -x - 1 + Ce^{y}$
3) $y = x \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$	4) $y = e^{-x^2}(-x\cos x + \sin x + C)$

7. Общее решение дифференциального уравнения $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$ имеет вид

1) $y = 1 + \dfrac{\ln \mathrm{ctg}(0{,}5x)}{\cos x}$	2) $y = \dfrac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$
3) $y = \sqrt{1 - x^2}\,(C + \arcsin x)$	4) $y = Ce^{-ax} + \dfrac{bx}{a} - \dfrac{b}{a^2}$

8. С помощью подстановки $\frac{y}{x}=u$ решается дифференциальное уравнение

1) с разделяющимися переменными

2) однородное

3) линейное

4) Бернулли

9. Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{f_1(y)}=f_2(x)dx$ является уравнением

1) с разделяющимися переменными

2) однородным

3) Бернулли

4) линейным

10. Общее решение дифференциального уравнения $xy'=y+\frac{x^2}{2}$ имеет вид

1) $y=x$	2) $y=\frac{x^2}{2}+c$
3) $y=\frac{x}{2}+c$	4) $y=\frac{x^2}{2}+cx$

11. Общее решение дифференциального уравнения $y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$ имеет вид

1) $y=2\,\mathrm{arctg}(2u-1)$	2) $2\,\mathrm{arctg}(2u-1)=\ln x+c$
3) $y=2u-1+c$	4) $y=x-\frac{2x}{\ln x+C}$

12. Общее решение дифференциального уравнения $xy'-y=0$ имеет вид

1) $y^2+x^2=c^2$	2) $y=Cx$
3) $y=x^2+C$	4) $y=Ce^{\frac{1}{x}}$

13. Общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ имеет вид

1) $x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3 = C$	2) $y = x \ln Cy$
3) $y = \frac{x}{C - \ln x}$	4) $y^2 = x^2 \ln Cx^2$

14. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' - 6y = 0$ имеет вид

1) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$	2) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$
3) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-6x}$	4) $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x)$

15. Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$ имеет вид

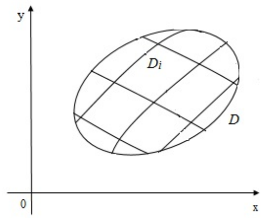
1) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$	2) $y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$
3) $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	4) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Двойной интеграл

2.1.1. Понятие двойного интеграла

Обобщением определенного интеграла на случай функций двух переменных является так называемый *двойной интеграл*.



Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Разобьём область D на n «элементарных областей», площади которых обозначим через $\Delta\sigma_{\iota}$.

В каждой области $\Delta\sigma_{\iota}$ выберем произвольную точку P_i (x_i, y_i), умножим значение $f(x_i, y_i)$ функции в этой точке на $\Delta\sigma_{\iota}$ и составим сумму всех таких произведений:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i .$$

Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x_i, y_i)$ в области D. Рассмотрим предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$, когда n стремится к бесконечности.

⇨**Определение 1**. Если предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$ или $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Таким образом, двойной интеграл определяется равенством

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x, y)dxdy .$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой в области D*; *D – область интегрирования*; *x и y – переменные интегрирования*; *$dxdy$ или $\Delta\sigma_{\iota}$ – элемент площади*.

$\Im$ **Теорема существования двойного интеграла**

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и ограничена замкнутой линией, то её n-я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей.

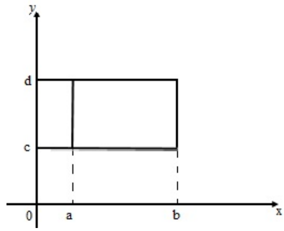
Этот предел $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, т. е. двойной интеграл, не зависит от способа разбиения области D на частичные области σ и от выбора в них точек P_i.

2.1.2. Основные свойства двойного интеграла

Перечислим свойства двойного интеграла, считая подынтегральные функции интегрируемыми.

1. $\iint\limits_D c \cdot f(x, y)\,dx\,dy = c \cdot \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, c – const.
2. $\iint\limits_D \left(f_1(x, y) \pm f_1(x, y)\right)dx\,dy = \iint\limits_D f_1(x, y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_D f_2(x, y)\,dx\,dy$.
3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2, такие что $D_1 \cup D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей, то
$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$
4. Если в области D имеет место неравенство $f(x, y) \geq 0$, то и $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \geq 0$.
5. $\iint\limits_D d\sigma = S$, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = S$.
6. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то $mS \leq \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leq MS$, где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области D.
7. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то в этой области существует такая точка $(x_0; y_0)$, что $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = f(x_0; y_0) \cdot S$. Величину $f(x_0; y_0) = \frac{1}{S} \cdot \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ называют *средним значением функции* $f(x, y)$ *в области* D.

2.1.3. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах



Предположим, что область интегрирования представляет собой прямоугольник, ограниченный линиями $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить интеграл $I = \iint\limits_D 2x^2 \cos\frac{y}{3}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $1 \le x \le 2$, $0 \le y < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Поскольку область интегрирования прямоугольная, пределы интегрирования в двойном интеграле постоянные, а так как подынтегральная функция есть произведение множителей, каждый из которых зависит только от одной переменной, то порядок интегрирования выбираем произвольно, например:

$$\iint\limits_D 2x^2\cos\tfrac{y}{3}\,dxdy = 2\int\limits_1^2 x^2dx\int\limits_0^{\pi/2}\cos\tfrac{y}{3}dy = 2\int\limits_1^2 x^2dx\left(3\sin\frac{y}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 6\int\limits_1^2 x^2\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right)dx = 3\int\limits_1^2 x^2dx = x^3\Big|_1^2 = 8 - 1 = 7.$$

✍**1.** Можно ли двойной интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, в котором область D ограничена линиями $y = 2$, $x = 4$, $y = 4$ и осью Оy, вычислить по формуле $\int\limits_2^4 dy\int\limits_0^4 xdx$?

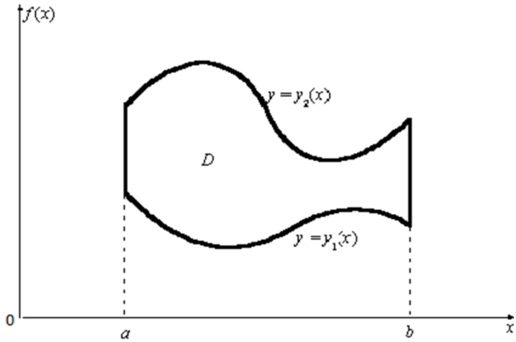
2. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy$, если D: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi/2$;

б) $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dx$, если D: $y = \ln 3$, $y = \ln 4$, $x = 1/2$, $x = 1$.

3. Каким способом можно сравнить два интеграла $\int\limits_1^4 xdx\int\limits_2^5 dy$ и $\int\limits_2^5 dy\int\limits_1^4 xdx$, не вычисляя их?

⇨**Определение 2.** Область D *правильная относительно оси Ox*, если она ограничена снизу линией $y = y_1(x)$, сверху линией $y = y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$, и с боков ограничена отрезками прямых $x = a$, $x = b$. При этом



$y = y_1(x)$ – линия входа в область;
$y = y_2(x)$ – линия выхода из области.

В отдельных случаях отрезки прямых вырождаются в точки.

Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

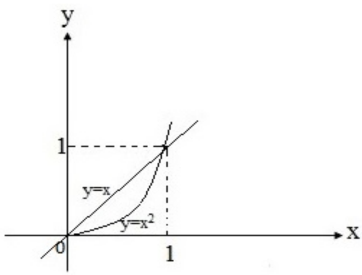
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy.$$

$\mathfrak{R}$ Вычислим двойной интеграл $\iint_D (x + y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x$.

Решение.

1. Строим область D. Линии $y = x^2$ и $y = x$ пересекаются в точках $x = 0$ и $x = 1$. Снизу область D ограничена кривой $y = x^2$, а сверху – кривой $y = x$.

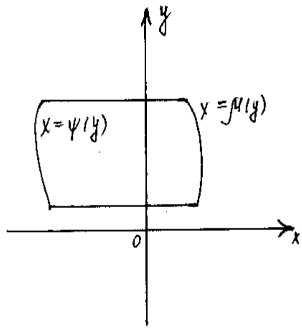
2. Область является правильной относительно оси Ox, поэтому вычисляем интеграл:



$$\iint_D (x + y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x + y)dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{4} \right)dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

⇨**Определение 3.** Область D *правильная относительно оси Oy*, если она ограничена слева линией $x = \psi(y)$, справа линией $x = \mu(y)$, сверху отрезком прямой $y = d$, а снизу отрезком прямой $y = c$. При этом



$x = \psi(y)$ – линия входа в область;
$x = \mu(y)$ – линия выхода из области.

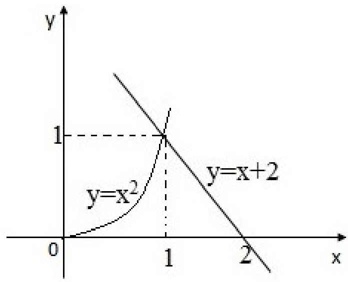
Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi(y)}^{\mu(y)} f(x, y)\,dx.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить $\iint\limits_D y\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = 0$, $y = x^2$ и $x + y = 2$.

Решение.

1. Строим область D. Линии $y = x^2$ и $x + y = 2$ пересекаются в точках $y = 0$ и $y = 1$. Слева область D ограничена кривой $y = x^2$, а справа – кривой $x + y = 2$.



2. Область является правильной относительно оси Оy, поэтому вычисляем интеграл:

$$\iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} dx = \int\limits_0^1 y\,dy\; x\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int\limits_0^1 y\left(2 - y - \sqrt{y}\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2y - y^2 - y^{3/2}\right)dy = \left(y^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{2y^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

✍**1.** Является ли область D, ограниченная линиями $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$, правильной относительно оси Ox?

2. Вычислите двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D (x + y^2)\,dxdy$, если D: $x = 1$, $y = 0$, $y = 2x$;

б) $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\,dxdy$, если D: $y = 2$, $x = y$, $xy = 1$.

3. Укажите, по какой из представленных формул можно произвести вычисление для данного интеграла.

$\iint\limits_D (0{,}8 + 8xy)\, dxdy$, если D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$	1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} (0{,}8 + 8xy)dy$
	2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{-\sqrt{x}} (0{,}8 + 8xy)dy$

Замечания.

1. Если область D правильная в обоих направлениях, то в двойном интеграле можно менять пределы интегрирования.

2. Если область D не является правильной в обоих направлениях, то данную область нужно разбить на части, правильные в одном из направлений.

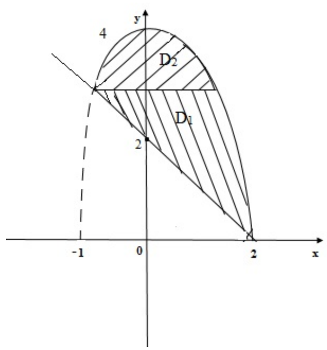
3. Внешние пределы в двойном интеграле постоянные, а внутренние – переменные.

$\underline{\Re}$ **1.** Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{4-x^2} f(x, y)dy$.

Решение.

1. Определяем уравнения границы области, выписывая пределы изменения каждой из переменных: $-1 \le x \le 2$, $2 - x \le y \le 4 - x^2$.

2. Строим область, ограниченную линиями $y = 2 - x$, $y = 4 - x^2$.



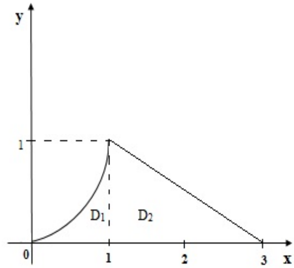
3. Искомый интеграл будет выглядеть как сумма двух интегралов по областям:

- D_1, где $0 \le y \le 3,\ 2 - y \le x \le \sqrt{4 - y}$;
- D_2, где $3 \le y \le 4,\ -\sqrt{4 - y} \le x \le \sqrt{4 - y}$.

$$\int_{-1}^{2} dx \int_{2-x}^{4-x^2} f(x,y)dy = \int_{-1}^{2} dx \int_{2-x}^{4-x^2} f(x,y)dy = \int_{0}^{3} dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y}} fdx + \int_{3}^{4} dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} fdx.$$

2. Записать выражение $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$ в виде одного двойного интеграла, изменив порядок интегрирования.

Решение. Напишем уравнения линий, ограничивающих области, на которые распространены данные двойные интегралы:



$$D_1 \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 1, y = x^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad D_2 \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = 3, y = \dfrac{3-x}{2} \end{cases}$$

Тогда область $D = D_1 + D_2$ является правильной.

Область D ограничена снизу прямой $y = 0$, сверху – прямой $y = 1$, слева – линией $x = \sqrt{y}$, справа – прямой $x = 3 - 2y$.

Таким образом, получаем

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$$

✍**1.** Можно ли в данном интеграле $\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{x}} dy$ изменить порядок интегрирования и почему?

2. Измените порядок интегрирования в интеграле $\int_0^4 dx \int_x^{2+\sqrt{x}} dy$.

3. Вычислите интеграл, изменив вначале пределы интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_0^x x^2 dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} x^2 dy.$$

2.1.4. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах

Для вычисления двойного интеграла $I = \iint\limits_D f(x, y) d\sigma$ мы пользовались до сих пор системой декартовых координат. Отнесём теперь плоскость к системе полярных координат r, φ и предположим, как обычно, что полюс лежит в начале координат и полярная ось совпадает с осью абсцисс. Тогда декартовы координаты точки выражаются через полярные по формулам:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Формула замены переменных имеет вид

$$I = \iint\limits_D f(x, y) dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Выражение $d\sigma = r\,dr\,d\varphi$ называется *элементом площади* в полярных координатах.

D^* – область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Для вычисления двойного интеграла в полярной системе координат нужно:

1) переменные x и y в подынтегральной функции заменить соответственно на $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$;
2) произведение $dx \cdot dy$ заменить произведением $r\,dr d\varphi$;
3) определить область D^* как область, ограниченную линиями φ_1 и φ_2 и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$.

Учитывая, что $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, получаем двойной интеграл

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

$\mathfrak{R}$ Преобразовать в полярных координатах и вычислить $\iint\limits_D (x^2 + y^2)^2 dxdy$, если D: $x^2 + y^2 = 4$, $x \le 0$, $y \le 0$.

Решение.

1. Область D – это часть круга с центром в начале координат, радиусом 2, лежащая в третьем квадранте.

2. Область D ограничена линиями $0 \le r \le 2$ и $\pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$.

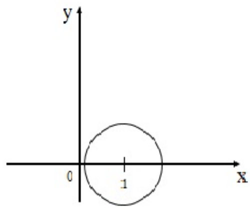
3. Получаем интеграл, переходя к полярной системе:

$$\iint_D (x^2+y^2)^2\,dxdy = \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^5 dr = \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \frac{r^6}{6}\bigg|_0^2 = \frac{64}{6}\int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\varphi\Big|_{\pi}^{3\pi/2} = \frac{32}{3}\left(\frac{3}{2}\pi - \pi\right) = \frac{16}{3}\pi.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить $\iint_D dxdy$, если D: $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Решение.



1. Преобразуем уравнение области D $x^2 + y^2 - 2x = 0$, выделив полный квадрат:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

2. Получаем, что область D — это окружность с центром в точке (1; 0) и радиусом 1.

3. Строим область D. Для этого находим линии, которыми ограничена область D. Область D лежит в четвертом и первом квадрантах, поэтому угол поворота изменяется: $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Центр окружности — это точка (1; 0), поэтому радиус изменяется по формуле $x^2 + y^2 = 2x$.

Отсюда

$$r^2 = 2r\cos\varphi,\ \ 0 \le r \le 2\cos\varphi;$$

$$r = 2\cos\varphi.$$

4. Получаем интеграл в полярной системе координат:

$$\iint_D dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{2\cos\varphi} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

✍**1**. Поставьте в соответствие каждому двойному интегралу форму его символьной записи в различных системах координат.

1. Двойной интеграл в декартовой системе координат	1. $\iint_D f(r,\varphi) r dr d\varphi$

2. Двойной интеграл в полярной системе координат	2. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$
	3. $\iint\limits_D f(r,\varphi)r\varphi dr d\varphi$

2. Преобразуйте в полярных координатах и вычислите:

а) $\iint\limits_D \dfrac{2y}{x^2+y^2}dxdy$, если D: $x^2+y^2+2y=0$, $x\geq 0$;

б) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, если D: $x^2+y^2\geq\pi^2$, $x^2+y^2\leq 4\pi^2$.

3. Областью D для вычисления двойного интеграла является круг. Соотнесите в таблице формулу круга с координатами его центра.

$x^2+y^2\leq 4$	(1; 0)
$x^2+y^2-2y=0$	(0; 0)
$x^2+y^2+2y=0$	(–1; 0)
$x^2+y^2-2x=0$	(0; 1)
$x^2+y^2+2x=0$	(0; –1)

2.2. Тройной интеграл

2.2.1. Основные понятия

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является тройной интеграл.

Пусть в замкнутой области V пространства Oxyz задана непрерывная функция $u=f(x, y, z)$. Разбив область V сеткой поверхностей на n частей и выбрав в каждой из них произвольную точку $M_i=f(x_i, y_i, z_i)$, составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i y_i z_i)\Delta V_i$ для функции $u=f(x, y, z)$ по области V.

⇨**Определение 4**. Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n, то его называют *тройным интегралом* от функции $u=f(x, y, z)$ по области V и обозначают

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)d\text{v}=\lim\sum_{i=1}^{n} f(x_i y_i z_i)\Delta V_i=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Здесь $dv=dxdydz$ – элемент объема.

2.2.2. Свойства тройного интеграла

1. $\iiint\limits_V c\cdot f(x,y,z)dv = c\cdot\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$, c – const.

2. $\iiint\limits_V (f_1(x,y,z)\pm f_2(x,y,z))dv = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)dv \pm \iiint f_2(x,y,z)dv.$

3. Если область V разбить линией (плоскостью) на две области V_1 и V_2, такие что $V_1\cup V_2 = V$, а пересечение V_1 и V_2 состоит лишь из линии (плоскости), их разделяющей, то
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dv.$$

4. Если в области V имеет место неравенство $f(x, y, z) \geq 0$, то и
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv \geq 0.$$

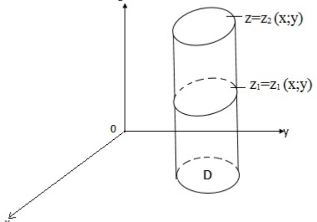
5. $\iiint\limits_V dv = V$, так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i = V$.

6. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области V, объем которой V, то $mV \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dv \leq MV$, где m, M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области V.

7. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области V, объем которой V, то в этой области существует такая точка $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, что $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = f(x,y,z)\cdot V$. Величину $f(x_0;y_0;z_0) = \frac{1}{V}\cdot\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$ называют средним значением функции $f(x, y)$ в области D.

2.2.3. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

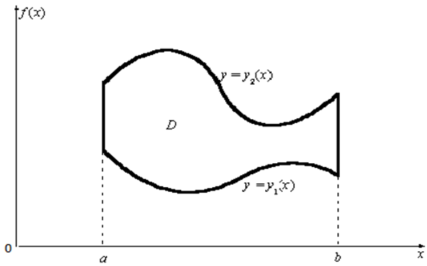


1. Пусть областью интегрирования является тело, ограниченное снизу плоскостью $z = z_1(x, y)$, а сверху – плоскостью $z = z_2(x, y)$, причем $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ непре-

рывные в замкнутой области D – проекции области V на плоскость xOy. В этом случае считаем, что область V – правильная относительно оси Oz. Тогда имеет место формула вычисления тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz\,.$$

2. В случае когда D – правильная область, тройной интеграл вычисляется по формуле

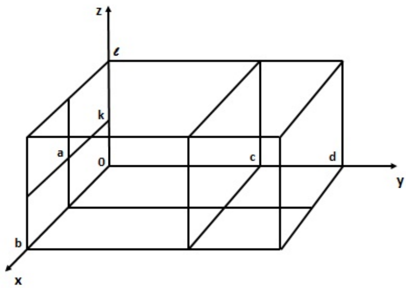


$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

где $V:\begin{cases} a < x < b \\ y_1(x) < y < y_2(x) \\ z_1(x,y) < z < z_2(x,y) \end{cases}$.

3. Если областью интегрирования служит внутреннее пространство параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, то пределы интегрирования постоянны во всех трёх интегралах и тройной интеграл вычисляется по формуле



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x,y,z)dz.$$

<u>ℜ</u> Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx$.

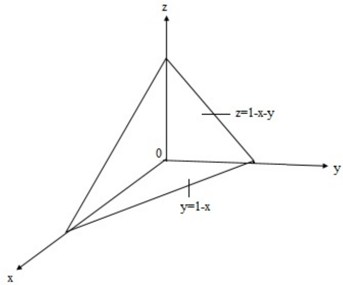
$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} \right) dydx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 yx^2 y^2 dydx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4 y^3 dydx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^4 \left(\frac{y^4}{4} \Big|_0^{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^4 x^8}{4} dx = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{13} x^{13} \Big|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

$\mathfrak{R}$ Вычислим тройной интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, где V – область, ограниченная координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и плоскостью $x + y + z = 1$.

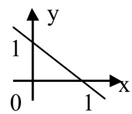
Решение.

1. Строим область V, это пирамида, лежащая в первом октанте и отсекающая по осям координат единичные отрезки.



2. Проекция на плоскость Oxy – треугольник, ограниченный осями координат Ox, Oy и прямой $x + y = 1$.

3. Получаем область интегрирования V:



$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}.$$

4. Вычисляем интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} =$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left[\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6} \right]\Bigg|_0^{1-x} = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right] dx = \frac{1}{8}.$$

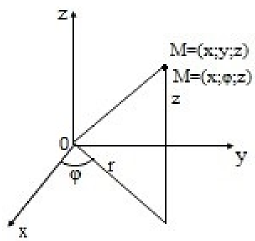
✍**1**. Вычислите $\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz$, если область V – призма, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$, $x + y = 2$.

2. Можно ли данный интеграл $\iiint\limits_V (3y^2 - z\sin x)dxdydz$, если V: $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 2$, вычислить по формуле

$$\int\limits_0^x dy \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (3y^2 - z\sin x)dz\,?$$

3. Относительно какой оси область V, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2\pi$, $z = 4$, будет правильной?

2.2.4. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах



Для вычисления тройных интегралов часто используют цилиндрические координаты.

Положение точки $M(x; y; z)$ в пространстве $Oxyz$ можно определить заданием трех чисел r, φ, z, где r – длина радиуса-вектора проекции точки M на плоскость Oxy, φ – угол, образованный этим радиусом-вектором с осью Ox, z – аппликата точки M.

Эти три числа (r, φ, z) называются *цилиндрическими координатами* точки M.

Цилиндрические координаты точки связаны с ее декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$

Формула перехода от декартовых к цилиндрическим координатам выглядит так:

$$\iiint\limits_{v} f\,(x, y, z,)dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{v^*} f\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,drd\varphi dz.$$

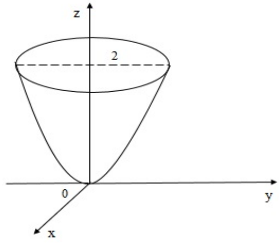
Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах сводится к интегрированию по r, по φ и по z на основании тех же принципов, что и в случае декартовых координат.

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{V}\left(x^2 + y^2\right)dv$, где область V ограничена параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$ и плоскостью $z = 2$.

Решение.

1. Строим область V.

2. Проекцией тела на плоскость xOy является круг с радиусом 2. Удобно выполнить вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах:



$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$z = dv = r\,drd\varphi dz$, $x^2 + y^2 = r^2$.

3. Уравнения поверхностей принимают вид $z = \dfrac{r^2}{2}$, $z = 2$.

4. Находим границы интегрирования:

$$\begin{cases} z = \dfrac{r^2}{2}, \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$$

Итак, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le r \le 2$; $\dfrac{r^2}{2} \le z \le 2$.

5. Вычисляем интеграл:

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dV = \iiint\limits_V r^3 dr d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr \int\limits_{r^2/2}^{2} dz = 2\pi \int\limits_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi.$$

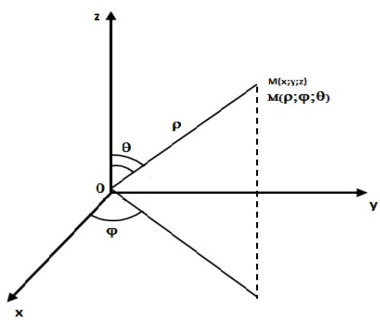
✍**1**. Вычислите интеграл $\iiint\limits_V z dx dy dz$, преобразовав его в цилиндрических координатах, если область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 1$.

2. Соответствует ли данный тройной интеграл в декартовой системе координат $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0} z^2 dz$ тройному интегралу в цилиндрической системе координат $\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{-\sqrt{4-r^2}}^{0} r \cdot z^2 dz$?

3. Можно ли вычислить интеграл $\iiint\limits_V \dfrac{x+y}{z^2} dx dy dz$, если V: $4z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, приведя его к цилиндрическим координатам?

2.2.5. Вычисление тройных интегралов в сферических координатах

Определение 5. Сферическими координатами точки $M(x;\ y;\ z)$ пространства $Oxyz$ называется тройка чисел ρ, φ, θ, где ρ – длина радиуса-вектора точки M; φ – угол, образованный проекцией радиуса-вектора OM на плоскость Oxy и осью Ox; θ – угол отклонения радиуса-вектора OM от оси Oz.



! Сферические координаты ρ, φ, θ связаны с декартовыми координатами:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \cos\theta \sin\varphi,\ z = \rho \cos\theta,$$

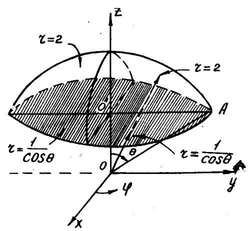
где $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \rho \le \infty$.

! Формула перехода от декартовых к сферическим координатам выглядит так:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Переходить к сферическим координатам удобно, когда область интегрирования – шар или его часть, а также если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$. Также полезно знать:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$



$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить $\iiint\limits_V z dz dx dy$, если область V ограничена сферической поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскостью $z \ge 1$.

1. Строим область V.

2. Проекцией области V на плоскость xOy является круг $r = 2$, поэтому $0 \le \varphi \le 2\pi$.

3. Найдем пределы угла θ. Рассмотрим $\Delta OO'A$, тогда $\cos\theta = \dfrac{OO'}{OA} = \dfrac{1}{2} \to \theta = \dfrac{\pi}{3}$, значит, переменная θ изменяется в интервале $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$.

4. Перейдем к сферическим координатам:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4\ \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = 4$;
$\rho^2 = 4 \to \rho = 2$;

б) $z = 1 \to \rho\cos\theta = 1 \to \rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

Следовательно, радиус изменяется в пределах $\dfrac{1}{\cos\theta} \le \rho \le 2$.

5. Вычисляем тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V zdzdxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_{1/\cos\theta}^{2} \rho^2 \rho d\rho \cos\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta d\theta \left(\left. \frac{\rho^4}{4} \right|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta \left(4 - \frac{1}{4\cos^4\theta} \right) d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} 4\sin\theta d(\sin\theta) +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \frac{d\cos\theta}{\cos^3\theta} = 2\pi \left(2\sin^2\theta \Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{4} \left. \frac{\cos\theta^{-2}}{-2} \right|_0^{\pi/3} \right) = 2\pi \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{1}{8\cdot\frac{1}{4}} + \frac{1}{8} \right) = \frac{9}{4}\pi.$$

✍**1**. Преобразуйте в сферических координатах и вычислите: $\iiint\limits_V (4 - z)\, dxdydz$, если V: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

2. Можно ли данный тройной интеграл $\iiint\limits_V xydxdydz$ вычислить в сферических координатах, если его область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = z^2$ (внутри конуса)?

3. Поставьте в соответствие каждому тройному интегралу форму его символьной записи в различных системах координат.

Тройной интеграл в декартовой системе координат	$\iiint\limits_D f(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz$
Тройной интеграл в цилиндрической системе координат	$\iiint\limits_D f(x,y,z) dxdydz$
Тройной интеграл в сферической системе координат	$\iiint\limits_D f(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$

? Теоретический тест

1. Двойной интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)dx$ вычисляется сначала

1) сначала по переменной y
2) по любой переменной
3) сначала по переменной x

2. Если $f(x, y) > 0$ в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ равен

1) площади области D
2) массе тела, при условии что $f(x, y)$ – плотность в каждой точке
3) объему цилиндрического тела

3. Как перевести декартову координату x в полярную систему координат?

1	2	3	4
$r\sin\varphi$	$r\,\mathrm{tg}\,\varphi$	$r\cos^2\varphi$	$r\cos\varphi$

4. В полярной системе координат двойной интеграл имеет вид

1) $\iint\limits_D f(r\sin\varphi, r\cos\varphi)rdrd\varphi$	2) $\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi$
3) $\iint\limits_D f(\sin\varphi, \cos\varphi)rdrd\varphi$	4) $\iint\limits_D f(r\sin\varphi, r\cos\varphi)drd\varphi$

5. Формула перехода от декартовой координаты точки y к цилиндрической системе координат

1	2	3	4
$y = r\cos\varphi$	$y = \sin\varphi$	$y = y$	$y = r\sin\varphi$

6. Тройной интеграл обозначается

1) $\iiint\limits_V f(x,y)dxdydz$	2) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdy$
3) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydr$	4) $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

7. Вычисление тройного интеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ начинается

1) по переменной y
2) по переменной y
3) по переменной z
4) по любой переменной

8. Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ в области D обозначается

1) $\iint\limits_{f(x,y)} Ddxdy$	2) $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$
3) $\iint\limits_{D} f(x,y)dx$	4) $\int D \int f(x,y)$

9. С помощью двойного интеграла можно находить

1) массу плоской пластины
2) координаты центра масс плоской пластины
3) площадь плоской пластины
4) массу трёхмерного тела

10. Тройной интеграл в цилиндрических координатах от функции $f(r, \varphi, z)$ по области V имеет вид

1) $\iiint\limits_{V} f(r,\varphi,z)rdrd\varphi dz$	2) $\iiint\limits_{V} f(r,\varphi,z)\varphi d\varphi drdz$
3) $\iiint\limits_{V} f(r,\varphi,z)drd\varphi dz$	4) $\iiint\limits_{V} f(r,\varphi,z)r\varphi zdrd\varphi dz$

✍ Практический тест

1. Вычислить $\iint\limits_{D}(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy$, если область D – квадрат: $0 \le x \le \pi/4$; $0 \le y \le \pi/4$.

1	2	3	4
π^2	$\pi^2/2$	$\pi^2/4$	$\pi^2/16$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{x^2}{3}$ и $y=4-\dfrac{2x^2}{3}$.

1	2	3	4
32/3	3/32	64/3	16/3

3. Вычислить в полярной системе координат $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, если D – I четверть круга $x^2 + y^2 \le a^2$.

1	2	3	4
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi a^3}{6}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{\pi a^2}{6}$

4. Вычислить в полярной системе координат $\iint\limits_D (3y-2x)dxdy$, если D: $x^2 + y^2 \le 16$.

1	2	3	4
$64\pi/3$	64	64π	0

5. Вычислить в сферических координатах $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, где V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

1	2	3	4
$\frac{2\ln 2}{3}$	$\frac{4\pi\ln 2}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi\ln 2}{4}$

6. Вычислить в сферических координатах $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, где V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

1	2	3	4
$\frac{2R^4\pi}{3}$	$\frac{4R^4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3R^4}{4}$

7. Если область D ограничена линиями: $y = x + 4$, $x = 4$, $y = 4 - x$, то $\iint\limits_D (x+2)dxdy$ равен

1	2	3	4
$\frac{224}{3}$	$\frac{64}{3}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{243}{3}$

8. Если D – круг $r = 4$, то $\iint\limits_D r\sqrt{4-r^2}\,d\varphi dr$ равен

1	2	3	4
$\dfrac{16\pi}{3}$	$\dfrac{8\pi}{3}$	$-\dfrac{16\pi}{3}$	$\dfrac{4\pi}{3}$

9. Изменить порядок интегрирования для $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$.

1) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{0.5y} f(x,y)dx$	2) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{0.5y} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)dx$
3) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y}^{6-y} f(x,y)dx$	4) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_{2y}^{6-y} f(x,y)dx$

10. Изменить порядок интегрирования для $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{4} f(x,y)dy$.

1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2x}^{4} f(x,y)dx$	2) $\int\limits_{2x}^4 dy \int\limits_0^{2} f(x,y)dx$
3) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{0.5y} f(x,y)dx$	4) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2y}^{4} f(y,x)dx$

11. Вычислите $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где T: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$. Ответ запишите без π.

12. Чему равен повторный интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{4-x^2}} xdy$?

13. Чему равен повторный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} dx \int\limits_0^{\sin x} 4dy$?

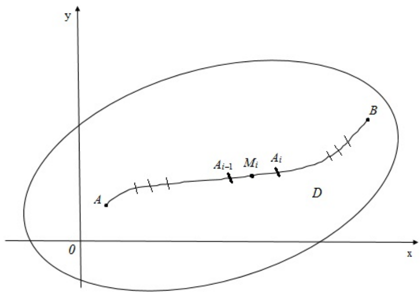
14. Область D ограничена линиями: $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$.

15. Вычислите $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_0^{1-y} 2dx$.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги)

3.1.1. Понятие криволинейного интеграла первого рода



Пусть в некоторой области D плоскости xOy задана непрерывная функция $f(x, y)$ и гладкая незамкнутая кривая L между точками A и B.

Составим интегральную сумму по уже известному алгоритму. Разобьём кривую L точками $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$ на n произвольных участков l_i, обозначив через Δl_i длину i-го участка кривой между точками A_{i-1}, A_i, где $I = 1, 2, ..., n$.

В каждом i-м участке выберем произвольно точку $M_i = (\xi_i, \eta_i)$ и подсчитаем в ней значение функции $f_i = f(M_i)$.

Просуммировав произведения $f_i \cdot \Delta l_i$ по всем $i = 1, 2, ..., n$, получим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i .$$

⇨**Определение 1**. Предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i ,$$

если он существует и не зависит от типа разбиения дуги L и способа нахождения точек M_i, где $i = 1, 2, ..., n$, называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$, взятым по кривой L, и обозначается

$$\lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta l_i = \int_L f(x, y) dl,$$

где $d = \max \Delta l_i$.

3.1.2. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl.$$

2. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждого слагаемого по тому же пути интегрирования:

$$\int\limits_{L} \left[f_1(M) \pm f_2(M)\right]dl = \int\limits_{L} f_1(M)dl \pm \int\limits_{L} f_2(M)dl.$$

3. Константа выносится за знак интеграла:

$$\int\limits_{L} cf(M)dl = c\int\limits_{L} f(M)dl,$$

где $c = \text{const}$.

4. Если путь интегрирования L разбить на участки L_1, L_2 ..., L_n, то интеграл по всей дуге равен сумме интегралов по участкам L_i, где $i = 1, 2, ..., n$:

$$\int\limits_{L} f(M)dl = \int\limits_{L_1} f(M)dl + \int\limits_{L_2} f(M)dl + \cdots + \int\limits_{L_n} f(M)dl.$$

3.1.3. Вычисление криволинейных интегралов первого рода в декартовых координатах

В случае когда кривая L может быть задана в явном виде $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, дифференциал дуги вычисляем по формуле

$$dl = \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx\,.$$

Формула вычисления криволинейного интеграла может быть записана в виде

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx,$$

где правая часть равенства – определённый интеграл по переменной x.

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить $\int\limits_{\text{L}} \frac{dL}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0; –2)$ и $B(4; 0)$.

Решение. Так как $y' = \frac{1}{2}$, то

$$\int\limits_L \frac{dl}{x-y} = \int\limits_0^4 \frac{1}{x - \frac{1}{2}x + 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \sqrt{5}\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5}\ln(x+5)\Big|_0^4 = \sqrt{5}\ln\frac{8}{4} = \sqrt{5}\ln 2.$$

3.1.4. Вычисление криволинейных интегралов первого рода в параметрических координатах

Представим уравнение кривой L в параметрической форме:

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t_0 \le t \le T. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Дифференциал дуги вычисляем по формуле

$$dl = \sqrt{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))\right]^2}\,dt,$$

записываем формулу для вычисления криволинейного интеграла:

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f\left[x(t), y(t), z(t)\right]\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt,$$

где правая часть равенства – определённый интеграл по переменной t.

<u>$\mathfrak{R}$</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})dS$ от точки $E(-1, 0)$ до точки $H(0, 1)$ по дуге астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Решение.

1) $x' = -3\cos^2 t \sin t$; $y' = 3\sin^2 t \cos t$;

2) $dl = 3\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\,dt = 3\cos t \sin t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \frac{3}{2}\sin 2t dt$;

3) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t - 3\sqrt{\sin^3 t})3\sin t \cos t dt = -12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d\cos t - 9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} t d\sin t = -\frac{46}{7}$.

3.1.5. Вычисление криволинейных интегралов первого рода в полярных координатах

Представим уравнение кривой L в полярной системе координат, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Дифференциал дуги вычисляем по формуле

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Записываем формулу для вычисления криволинейного интеграла

$$\int_L f(x,y)dl = \int f\left(r\cos\varphi; r\sin\varphi\right)\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

✍**1**. Соотнесите формулу для вычисления дифференциала дуги с представленной кривой L.

L – дуга лемнискаты $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, лежащая в четвертом квадранте	$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$
L – отрезок прямой от точки $A(0;\,0)$ до точки $B(2;\,1)$	$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\gamma)^2}\,d\varphi$
L – дуга окружности $x = b\sin t$, $y = b\cos t$, лежащая в третьем квадранте	$dl = \sqrt{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))\right]^2}\,dt$,

2. Вычислите предложенные интегралы:

а) $\int\limits_L ydl$ по дуге окружности $r = a\cos\varphi$, лежащей в четвертом квадранте;

б) $\int\limits_L xydl$ по дуге окружности $x = b\sin t$, $y = b\cos t$, лежащей в третьем квадранте.

3. Верна ли формула $\int\limits_L \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_L \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$ по дуге $y = \cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$?

3.2. Криволинейные интегралы второго рода

3.2.1. Основные понятия криволинейного интеграла второго рода

Пусть $\vec{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ – векторная функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой L. И пусть точки $A_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, ..., n$, разбивают эту кривую на элементарные дуги. На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку $M_k(\xi_k, \eta_k, \nu_k)$ и составим сумму $\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\nu_k)\Delta x_k$.

⇨**Определение 2.** *Криволинейным интегралом по координате* x называется предел интегральных сумм $\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\nu_k)\Delta x_k$ при $\max\Delta x_k \to 0$, если он не зависит от способов разбиения кривой L и выбора на ней точки M_k. Пишут

$$\int_L P(x,y,z)dx=\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\nu_k)\Delta x_k,$$

где левая часть формулы – обозначение, правая – его определение. Аналогично определяются интегралы по координатам y и z:

$$\int_L Q(x,y,z)dy=\lim_{\max\Delta y_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k,\nu_k)\Delta y_k$$

$$\int_L R(x,y,z)dz=\lim_{\max\Delta z_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,\nu_k)\Delta z_k.$$

Полный криволинейный интеграл второго рода есть сумма трех интегралов:

$$\int_L \vec{a}d\vec{r}=\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_L Pdx+\int_L Qdy+\int_L Rdz,$$

где $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$.

Если кривая γ задана вектором-функцией

$$\vec{F}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\chi(t)\vec{k},\ t\in[\alpha,\beta],$$

то криволинейный интеграл вычисляется по формуле

$$\int_L \vec{a}d\vec{r}=\int_\alpha^\beta\begin{bmatrix}P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)+\\ +R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\end{bmatrix}dt,$$

где в правой части стоит определенный интеграл по переменной t.

В случае когда кривая может быть задана в явном виде $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, формула может быть записана

$$\int_L \vec{a}d\vec{r}=\int_a^b\left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))+R(x,y(x))\right]dx.$$

3.2.2. Свойства криволинейного интеграла

1. При изменении направления дуги AB на противоположное криволинейный интеграл меняет свой знак, сохраняя абсолютную величину:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

2. Составной интеграл равен сумме трёх простых линейных интегралов:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} Pdx + \int\limits_{AB} Qdy + \int\limits_{AB} Rdz.$$

3. Если дугу AB разбить точками A_1, A_2, ..., A_k на конечное число составляющих дуг, то криволинейный интеграл по кривой AB равен сумме интегралов по составляющим дугам (свойство аддитивности), т. е.

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AA_1} + \int\limits_{A_1A_2} + \cdots + \int\limits_{A_kB}.$$

4. Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ непосредственно зависит от самой линии L, не зависит от формы пути, а только от его начальной и конечной точек.

<u>$\mathfrak{R}$</u> Вычислить $\oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, где γ — окружность:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = R \end{cases},\ t \in [0, 2\pi].$$

Решение:

$$\begin{cases} x'(t) = -R\sin t \\ y'(t) = R\cos t \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\oint\limits_L ydx + zdy + xdz = \int\limits_0^{2\pi} (R\sin t(-R\sin t) + R \cdot R\cos t)dt =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \right) dt = R^2 \left(\sin t - \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = -\pi R^2.$$

<u>$\mathfrak{R}$</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ от точки $A(1;\,0)$ до точки $B(0;\,2)$ по прямой $2x + y = 2$.

Решение:

1) $y = 2 - 2x$; $dy = -2dx$;

2) $I_1 = \int\limits_{x_A}^{x_B} [x(2-2x)-1]dx + x^2(2-2x)(-2dx) = \int\limits_{1}^{0}(4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)dx =$

$= x^4 - 2x^3 + x^2 - x\Big|_1^0 = 1$.

✍**1**. Даны точки $A(3; 6; 0)$ и $B(-2; 4; 5)$. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$ по прямолинейному отрезку AB.

2. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L y\cos x dx + \sin x dy$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1; 0)$, $B(0; 2)$ и $C(2; 0)$.

3. Вычислить $\int\limits_L ydx - (y + x^2)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая против часовой стрелки.

3.2.3. Формула Грина

Установим связь криволинейного интеграла по замкнутому контуру L (гладкому или кусочно-гладкому) с двойным интегралом по плоской области D, ограниченной этим контуром.

$\underline{\mathfrak{I}}$ **Теорема Грина**

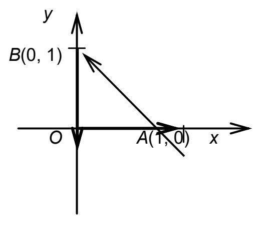
Если:

1) D – односвязная область плоскости xOy, ограниченная контуром L;
2) гладкий или кусочно-гладкий контур L ориентирован против часовой стрелки, т. е. при обходе контура область остаётся слева;
3) $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – непрерывные функции в $\overline{D}$ вместе со своими частными производными первого порядка,

то имеет место формула Грина

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить $\oint\limits_L (x^2 - y)dx + (x+y)dy$, где L – контур треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$.



Решение. Область D в данном случае – плоскость треугольника OAB. Найдём частные производные функций и убедимся в их равенстве:

$$P(x,y)=x^2-y,\ \frac{\partial P}{\partial y}=-1;$$

$$Q(x,y)=x+y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Отметим, что $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны и дифференцируемы в области D. Таким образом, все условия теоремы Грина выполнены. Применим теорему:

$$I=\iint\limits_D(1+1)dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy=2\int_0^1(1-x)dx=-2\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_0^1=1.$$

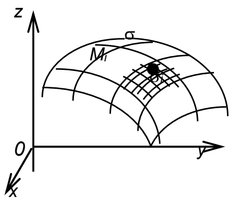
✍**1**. Докажите, что данный интеграл можно вычислить по формуле Грина: $\oint(x+y)dx-(x-y)dy$, где L – замкнутый контур, образованный линиями $y = 3x$ и $y = 3(x - 1)^2$.

2. Можно ли предложенный интеграл $\int\limits_{(1;0)}^{(6;8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вычислить по формуле Грина? Почему?

3. Вычислите $\oint\limits_L(x+y)dx-(x-y)dy$, где L – замкнутый контур, образованный линиями $y = 3x$ и $y = 3(x - 1)^2$, непосредственно применяя формулу Грина.

3.3. Поверхностные интегралы

3.3.1. Понятие поверхностных интегралов первого рода



Разобьём поверхность σ произвольным образом на n частей σ_i и выберем в каждой из них (также произвольно) точку M_i. Если части σ_i достаточно малы, то за их массу можно принять произведение $f(M_i)\cdot\Delta\sigma_i=m_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь i-го участка поверхности (т. е. мы предполагаем, что каждый из участков σ_i однородный с плотностью $f(M_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$), тогда масса всей поверхности $m\approx\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\cdot\Delta\sigma_i$.

Это значение тем точнее, чем меньше участки σ_i. Переходя к пределу при $n\to\infty$, а значит, уменьшая размер каждого участка, получим точное значение массы поверхности $m=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\max\Delta\sigma_i\to 0)}}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\sigma_i$.

Этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода*.

⇨**Определение 3**. Если при стремлении диаметров всех частей σ_i к нулю интегральная сумма $m \approx \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta\sigma_i$ имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ на части, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* и обозначается

$$\iint_{\sigma} f(M)d\sigma = \iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma.$$

3.3.2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода

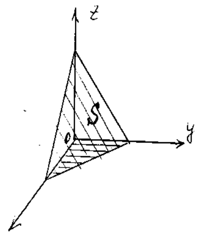
Формулы вычисления поверхностного интеграла 1-го рода:

1) $\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$ — выражает интеграл по поверхности σ через двойной интеграл по проекции поверхности σ на плоскость *Oxy*;

2) $\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}\,dxdz$ — выражает интеграл по поверхности σ через двойной интеграл по проекции поверхности σ на плоскость *Oxz*;

3) $\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}\,dydz$ — выражает интеграл по поверхности σ через двойной интеграл по проекции поверхности σ на плоскость *Oyz*.

$\mathfrak{R}$ Вычислить $\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{\left(1+x+z\right)^2}$, где σ – часть плоскости $x + y + z = 1$, заключенная в первом октанте.



Решение. Запишем уравнение данной плоскости в виде $z = 1 - x - y$. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1$, то

$$\partial\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy;$$

$$\partial\sigma = \sqrt{1+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}\,dxdy = \sqrt{3}dxdy.$$

Проекцией *S* на плоскости *Oxy* является треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. В этом треугольнике x меняется от 0 до 1, а при каждом фиксированном x ордината меняется от $y = 0$ до $y = 1 - x$.

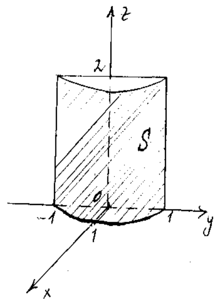
Поэтому по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

имеем

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{ds}{(1+x+z)^2}=\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+1-x-y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(2-y)^2}=\sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{2-y}\Big|_0^{1-x}dx=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\right)dx=\sqrt{3}\left[\ln(1+x)-\frac{1}{2}x\right]\Big|_0^1=\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$$



✍**1**. Является ли представленная цилиндрическая поверхность частью решения интеграла $\iint\limits_{\sigma} x(y+z)d\sigma$, где σ – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$, $z = 2$?

2. Вычислите $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y+z)^2}$ по поверхности тетраэдра $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

3. Какая фигура является проекцией части поверхности $2z = 1 - x^2 - y^2$ на плоскость xOy? Найдите ее и вычислите интеграл $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma$.

3.3.3. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в каждой точке двухсторонней поверхности σ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Выберем на поверхности определённую сторону, разобьём её сетью произвольных кривых на n участков, на каждом из которых произвольно выберем точку $M_i(x_i, y_i. z_i) \in \sigma$, где $i = 1, 2, ..., n$. Вычислим значения функции $f_i = f(M_i)$, где $i = 1, 2, ..., n$.

На каждом из участков σ_i в выбранной точке M_i построим к выбранной стороне поверхности нормаль $\overline{N}_i$.

Спроектируем каждый из участков σ_i на плоскость xOy, обозначив ΔS_i площадь проекции i-го участка. Составим произведения $f_i\Delta S_i$, причём, если нормаль $\overline{N}_i$ образует острый угол с осью Oz, берём произведение со знаком «плюс», если нормаль образует тупой угол с осью Oz, берём произведение со знаком «минус». Суммируем все произведения: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\Delta S_i$.

⇨**Определение 4.** Если существует конечный предел интегральной суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta S_i$ при стремлении к нулю диаметров всех частей σ_i (или $\max d_i \to 0$), не зависящий от типа разбиения и выбора точек M_i, то его называют ***поверхностным интегралом второго рода***, распространённым на выбранную сторону поверхности, и обозначают

$$\iint_{\sigma} f(M)dxdy = \iint_{\sigma} f(x,y,z)dxdy.$$

Наиболее общим видом поверхностного интеграла второго рода является составной интеграл

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy,$$

где P, Q, R – функции трёх переменных, определённые и непрерывные на поверхности σ.

3.3.4. Вычисление поверхностных интегралов второго рода

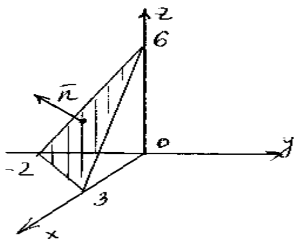
Формулы вычисления поверхностного интеграла 2-го рода:

1) $\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D} R(x,y,z(x,y))dxdy$, где поверхность σ задана уравнением $z = z(x, y)$ и однозначно проектируется в область D_{xy} плоскости xOy;
2) $\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz = \pm\iint_{D} Q(x,y(x,z),z)dxdz$, где поверхность σ задана уравнением $y = y(x, z)$ и однозначно проектируется на плоскость xOz в область D_{xz};
3) $\iint_{\sigma} P(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D} P(x(y,z),y,z)dydz$, где поверхность σ задана уравнением $x = x(y, z)$, D_{yz} – проекция поверхности σ на плоскость yOz.

Знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности σ.

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить $\iint_{\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy$ по верхней стороне части плоскости $2x - 3y + z = 6$, лежащей в 4-м октанте.

Решение. На рисунке изображена задняя часть плоскости. Нормаль n, соответствующая указанной стороне поверхности, образует с осью Oy тупой угол, а с осями Ox и Oz – острые. В этом можно убедиться, найдя направляющие косинусы нормального вектора $\bar{n} = (2; -3; 1)$плоскости $|\bar{n}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$:



$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} > 0, \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}} < 0, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}} > 0.$$

Поэтому перед двойными интегралами в формулах

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

и $\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D} P(x(y,z),y,z)dydz$

следует брать знак «плюс», а в формуле

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz = \pm\iint\limits_{D} Q(x,y(x,z),z)dxdz$$

– знак «минус». Следовательно,

$$\iint\limits_{\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy = +\iint\limits_{D_{yz}}\left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right)dydz - \iint\limits_{D_{xz}} zdzdx + 5\iint\limits_{D_{xy}} dxdy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{3y+6}\left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z\right)dz - \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{6-2x} zdz + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = -9.$$

✍**1**. Вычислить $\iint\limits_{\sigma}(x^2 + z^2 + ay)dxdz$, где σ – внешняя сторона поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостью $y = 6$.

2. Какой знак будет стоять перед интегралом $\iint\limits_{\sigma}(x^2 + 2y^2 + 2z^2)dydz$ при вычислении, если σ – внутренняя сторона поверхности $y^2 + z^2 = x^2$, отсеченной плоскостью $x = 3$?

3. Проверьте, может ли предложенный интеграл $\iint\limits_{\sigma}(2x^2 - 3y^3 + z)dxdy$, где σ – внешняя сторона замкнутой поверхности $x^2 + y^2 = 4 - z$, $z = 0$, перейти в своем решении к двойному интегралу

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2}(4 - r^2)rdr = [\varphi]_0^{2\pi}\cdot\left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8-4) = 8\pi.$$

3.3.5. Формула Остроградского – Гаусса

Связь между поверхностным интегралом 2-го рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью, устанавливается благодаря теореме Остроградского – Гаусса.

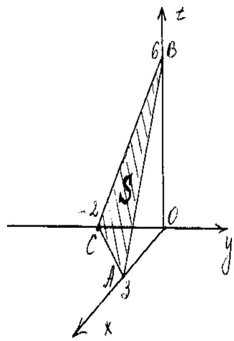
Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области V, то имеет место формула

$$\oiint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить $\oiint\limits_{\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy$, где σ – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x - 3y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.

Решение. По формуле

$$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$



где σ – граница области V, находим

$$\oiint\limits_{\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy = \iiint\limits_{V}(-1+0+0)dxdydz =$$

$$= -\iiint\limits_{V} dv = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 = -6.$$

✍**1**. Докажите, что данный интеграл

$$\oiint\limits_{\sigma}\left(z + x^2\right)dzdy + (y+z)dzdx + \left(2x^2 - 3y^3 + z\right)dxdy$$

можно вычислить, применив формулу Остроградского – Грина.

2. Вычислите

$$I = \oiint\limits_{\sigma}\left(z + x^2\right)dzdy + (y+z)dzdx + \left(2x^2 - 3y^3 + z\right)dxdy,$$

где σ – внешняя сторона замкнутой поверхности, ограниченной параболоидом $x^2 + y^2 = 4 - z$ и плоскостью xOy, применив формулу Остроградского – Грина.

3. Проверьте, может ли при вычислении интеграла

$$\iint\limits_{\sigma} zdxdy + xdxdz + ydydz,$$

где σ – часть треугольника, образованного пересечением плоскости $x - y + z = 1$ с координатными плоскостями, по формуле Остроградского – Грина получиться двойной интеграл $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{1+x}(1 - x + y)dy$.

? Теоретический тест

1. Криволинейный интеграл по длине дуги записывается в виде

1	2	3	4
$\int_L f(x,y)d\ell$	$\int_{AB} P(x,y)dx$	$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$	$\int_{AB} f(x,y)d\ell$

2. Криволинейный интеграл по пространственной кривой, заданной параметрически, вычисляется по формуле

1. $\int_{AB} f(x,y)d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x_t^1)^2+(y_t^1)^2}\;dt$

2. $\int_{AB} f(x,y,z)d\ell = \int_{AB} \sqrt{(x_t^1)^2+(y_t^1)^2+(z_t^1)^2}\,dt$

3. $\int_{AB} f(x,y,z)d\ell = \int_{\lambda}^{B} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x_t^1)^2+(y_t^1)^2+(z_t^1)^2}\;dt$

4. $\int_{AB} f(x,y,z)d\ell = \int_{\lambda}^{B} f(x(t),y(t),z(t))dt$

3. Формула Остроградского – Грина имеет вид

1. $\iint_Д f(x,y)d\ell = \int_{AB} Pdx+Qdy$

2. $\iint_Д f(x,y)ds = \oint_{\lambda} Pdx+Qdy$

3. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

4. $\oint_L Pdx+Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

4. Формула Остроградского – Гаусса имеет вид

1. $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint Pdx+Qdy$

2. $\iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$

3. $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint Pdx+Qdy$

4. $\iint_Д (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial \imath})dydz + (\frac{\partial P}{\partial \imath} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz =$
$= \oint Pdx + Qdy + Rdz$

5. Криволинейный интеграл 1-го рода от функции трех переменных f(x, y, z) имеет вид

1. $\int\limits_L f(x,y)d\ell$	2. $\int\limits_L f(x,y,z)ds$
3. $\int\limits_L Q(x,y,z)dy$	4. $\int\limits_L R(x,y,z)dz$

6. Криволинейный интеграл 2-го рода общего вида обозначается

1. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$	2. $\iint\limits_{\lambda} f(x,y)dxdy$
3. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$	4. $\int\limits_{AB} P(x,y)dy$

7. Поверхностный интеграл 1-го рода по поверхности S, заданной уравнением $x = x(y, z)$, вычисляется по формуле

1. $\iint\limits_D f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(y'_z\right)^2}\, dxdz$

2. $\iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dxdy$

3. $\iint\limits_D f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2 + \left(x'_z\right)^2}\, dydz$

4. $\iint\limits_D xf(x, y, z)ds$

8. Площадь поверхности S вычисляется с помощью поверхностного интеграла по формуле

1. $S = \iint\limits_D f(x(y,z),y,z)ds$	2. $S = \iint\limits_D f(x,y(x,z),z)ds$
3. $S = \iint\limits_{Д} z\gamma(x,y,z)ds$	4. $S = \iint\limits_S \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$

9. Криволинейный интеграл 2-го рода общего вида по явно заданной кривой AB имеет вид

1. $\int\limits_a^b \left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]dx$

2. $\int\limits_a^в (P(x(t), y(t))x^1(t) + Q(x(t), y(t))y(t))dt$

3. $\int\limits_{AB}(P\cos\alpha + Q\cos\beta)d\ell$

4. $\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x,\varphi(x))dx$

10. Криволинейный интеграл по координате y (или второго рода) обозначается

1. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$	2. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$
3. $\int Q(x,y)dx$	4. $\int Q(x,y)dy$

✍Практический тест

1. Вычислить $\int\limits_{K}(x-y)dl$, где K – отрезок прямой от $A(0;\,0)$ до $B(4;\,3)$.

1	2	3	4
$\frac{5}{4}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{2}$

2. Вычислить $\int\limits_{L} xyd\ell$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$.

1	2	3	4
$\frac{ab}{2}$	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$	$\frac{a^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}$	$\frac{b^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

3. Вычислить $\int\limits_{L}(x+y)d\ell$, где L – лепесток лемнискаты, $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенный в первом координатном углу.

1	2	3	4
0	–3	$\frac{1}{2}$	2

4. Вычислить $I=\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;\,0;\,2)$ до точки $B(3;\,1;\,4)$.

1	2	3	4
3	28	95/3	14/3

5. Найти работу силы $\overline{F}=4x^6\cdot\bar{i}+x\cdot y\cdot\bar{j}$ вдоль кривой $y=x^3$ от точки $O(0,\,0)$ до точки $B(1,\,1)$.

1	2	3	4
1	2	3	4

6. Вычислить $I=\iint\limits_S(x-3y+2z)ds$, где S – часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенной в 1-м октанте.

1	2	3	4
9	$\sqrt{29}$	$\dfrac{\sqrt{29}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{29}}{9}$

7. Вычислить $I=\iint\limits_S x(y+z)ds$, где S – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=2$.

1	2	3	4
1	2	3	4

8. Вычислить $\iint\limits_S -xdydz+zdzdx+5dxdy$.

1	2	3	4
1	3	–5	8

9. Вычислить $\oint\!\!\!\oint\limits_S -xdydz+zdzdx+5dxdy$, где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x-3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

1	2	3	4
2	6	4	–6

10. Площадь поверхности вычисляется с помощью поверхностного интеграла по формуле

1. $S=\iint_D f(x(y,z),y,z)ds$	2. $S=\iint_D f(x,y(x,z),z)ds$
3. $S=\iint_D \gamma(x,y,z)ds$	4. $S=\iint_S \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$

11. Найти $I=\int_{(0.0)}^{(1.1)} ydx+xdy.$

1	2	3	4
0	–1	1	2

12. Вычислить $\int_L xy^2dl$, где L – отрезок прямой между точками $O(0;\ 0)$ и $A(4;\ 3)$.

1	2	3	4
45	30	–30	15

13. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

1	2	3	4
$\frac{a^2\pi}{8}$	$\frac{8a^2\pi}{3}$	$\frac{3a^2\pi}{8}$	$\frac{a\pi}{3}$

14. Вычислить $\int_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$ по дуге кривой $y=\sin x$ от $x=0$ до $x=\pi$.

1	2	3	4
$\pi/2$	$\pi/3$	π	2π

15. Вычислить $\iint_\sigma x^2y^2zdxdy$ по внутренней стороне половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1	2	3	4
$\pi/2$	$\pi/3$	π	2π

4. МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ

Дисциплина «Математика» тесно связана с другими науками. Некоторые задачи из различных предметных областей невозможно решить без математических знаний.

4.1. Применение дифференциальных уравнений

Многие задачи **физики** приводят к необходимости решения дифференциальных уравнений. Это обусловлено тем, что практически все физические законы, описывающие физические процессы, являются дифференциальными уравнениями относительно некоторых функций, характеризующих эти процессы. В частности, второй закон Ньютона является не чем иным, как дифференциальным уравнением второго порядка:

$$m = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Колебание струны задается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u = u(x, t)$ – отклонение струны в точке с координатой x в момент времени t; параметр a задает свойства струны.

Первой содержательной математической моделью дифференциального уравнения в **биологии** была *модель Лотки – Вольтерры*. Она описывает популяцию, состоящую из двух взаимодействующих видов. Первый из них, именуемый *хищниками*, при отсутствии второго вымирает по закону $x' = -ax$ ($a > 0$), а второй – *жертвы* – при отсутствии хищников неограниченно размножается в соответствии с *законом Мальтуса*. Взаимодействие двух этих видов моделируется так. Жертвы вымирают со скоростью, равной числу встреч хищников и жертв, которое в данной модели предполагается пропорциональным численности обеих популяций, т. е. равным dxy ($d > 0$). Поэтому $y' = by - dxy$. Хищники же размножаются со скоростью, пропорциональной числу съеденных жертв: $x' = -ax + cxy$. Полученная система дифференциальных уравнений

$$x' = -ax + cxy,$$
$$y' = by - dxy,$$

описывающая *систему «хищник – жертва»,* и называется моделью Лотки – Вольтерры.

Применение дифференциальных уравнений в **медицине** можно продемонстрировать на примере простейшей *математической модели эпидемии*.

В модели описывается распространение инфекционного заболевания в изолированной популяции. Особи популяции делятся на три класса. Инфицированный класс численностью $x(t)$ (t – время) состоит из инфицированных особей, каждая из этих особей заразна. Второй класс численностью $y(t)$ составляют восприимчивые особи, то есть особи, которые могут заразиться при контакте с инфицированными особями. И, наконец, третий класс состоит из невосприимчивых особей. Его численность обозначается $z(t)$. Предполагается также, что общая численность популяции n постоянна (т. е. не учитываются рождения, естественные смерти и миграция). Две гипотезы, лежащие в основе модели, таковы:

1) заболеваемость в момент времени t равна $x(t)\,y(t)$ (эта гипотеза основывается на правдоподобном предположении, что число заболевающих пропорционально числу встреч между больными и восприимчивыми особями, которое в свою очередь в первом приближении пропорционально $x(t)y(t)$); таким образом, численность класса x растет, а численность класса y убывает со скоростью $ax(t)\,y(t)$ ($a > 0$);

2) численность становящихся невосприимчивыми особей (приобретших иммунитет или погибших) растет со скоростью, пропорциональной численности заболевших, т. е. со скоростью $bx(t)$ ($b > 0$).

В результате мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x' &= axy - bx, \\ y' &= -axy, \\ z' &= bx, \end{aligned}$$

которая описывает распространение инфекционного заболевания в изолированной популяции.

4.2. Физические и геометрические приложения кратных интегралов

Физические приложения кратных интегралов – это нахождение объемов различных фигур, центра тяжести, массы, статических моментов и моментов инерции тела. В геометрии двойные и тройные интегралы применяются для вычисления площадей.

4.2.1. Приложения двойных интегралов в физике

Объем тела

Объем цилиндрического тела находится по формуле

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

Масса плоской фигуры

Масса плоской пластины *D*, если известна ее поверхностная плотность $\gamma(x; y)$, находится по формуле

$$m = \iint_D \gamma(x, y)dxdy .$$

Статические моменты плоской фигуры

Статический момент пластинки относительно оси *Oy*

$$S_y = \iint_D x\gamma(x, y)dxdy .$$

Статический момент пластинки относительно оси *Ox*

$$S_x = \iint_D y\gamma(x, y)dxdy ,$$

где $\gamma(x; y)$ – поверхностная плотность пластинки.

Центр тяжести плоской фигуры

Координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\iint_D x\gamma(x; y)dxdy}{\iint_D \gamma(x; y)dxdy}, \; y_c = \frac{\iint_D y\gamma(x; y)dxdy}{\iint_D \gamma(x; y)dxdy} .$$

Моменты инерции плоской фигуры

Момент инерции пластинки относительно оси *Oy*

$$M_y = \iint_D x^2\gamma(x, y)dxdy .$$

Момент инерции пластинки относительно оси *Ox*

$$M_x = \iint_D y^2\gamma(x, y)dxdy ,$$

где $\gamma(x; y)$ – поверхностная плотность пластинки.

Момент инерции относительно начала координат

$$M_0 = M_x + M_y.$$

4.2.2. Геометрические приложения двойных интегралов

Площадь плоской фигуры

Площадь S области D вычисляется по формуле $S = \iint\limits_D dxdy$ или в полярных координатах $S = \iint\limits_D r dr d\varphi$.

Вычисление площади поверхности

1. Площадь поверхности $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

2. Площадь поверхности в виде $x = \mu(y, z)$ вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz.$$

3. Площадь поверхности в виде $y = \chi(x, z)$ вычисляется по формуле

$$\sigma = \iint\limits_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz.$$

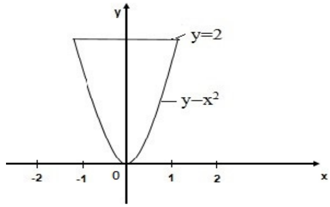
$\mathfrak{R}$ Вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$; $x - 4 = 0$.

Решение. Построив данные линии, получим область D, правильную относительно оси Ox, тогда

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^4 \left(y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \right) dx = \int\limits_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}.$$

$\mathfrak{R}$ Найти координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2$.

Решение. Построив линии, ограничивающие пластину, замечаем, что пластина симметрична относительно оси Oy. Следовательно, $x_c = 0$, а $y_c = \dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}$.



$$\iint\limits_D ydxdy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} ydy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{2} \right) dx = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(2x - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{16\sqrt{2}}{5};$$

$$\iint_D dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2} dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(y \Big|_{x^2}^{2} \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3};$$

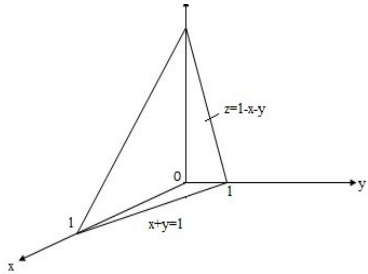
$$y_c = \frac{\dfrac{16\sqrt{2}}{5}}{\dfrac{8\sqrt{2}}{3}} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

$\mathfrak{R}$ Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

Решение.

1. Строим тело.

2. $V = \iint_D (1 - x - y)\, dx\, dy$, область D – заштрихованная треугольная область в плоскости Oxy, ограниченная прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Расставляя пределы в двойном интеграле, вычислим объём:



$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left[(1 - x) y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x^2)\, dx = \frac{1}{6}.$$

✍**1**. Найти массу пластинки D, если плотность $\mu = 3y^2x^2$, D: $xy = 4$, $x + y + 5 = 0$.

2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 4$.

3. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями $x^2 = y + 4$, $x = 0$, $y + 3x = 0$.

4.2.3. Приложения тройного интеграла в физике

Объем тела

Объем тела выражается формулой $V = \iiint\limits_V dv$:

– в декартовых координатах

$$V = \iiint\limits_V dxdydz;$$

– в сферических координатах

$$V = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta;$$

– в цилиндрических координатах

$$V = \iiint\limits_V r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

Масса тела

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz,$$

где $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – плотность.

Статические моменты

Статический момент относительно координатной плоскости Oxy

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz.$$

Статический момент относительно координатной плоскости Ozy

$$S_{zy} = \iiint\limits_V x \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz.$$

Статический момент относительно координатной плоскости Ozx

$$S_{zx} = \iiint\limits_V y \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz.$$

Центр тяжести тела

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz}, \quad y = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz}, \quad z = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x, y, z) dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dxdydz}.$$

Моменты инерции тела

Момент инерции относительно оси координат Ox

$$I_{Ox} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dxdydz;$$

момент инерции относительно оси координат Oy

$$I_{Oy} = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dxdydz;$$

момент инерции относительно оси координат Oz

$$I_{Oz} = \iiint_V (y^2 + x^2)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

момент инерции относительно координатной плоскости Oxy

$$I_{xy} = \iiint_V (z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

момент инерции относительно координатной плоскости Ozy

$$I_{zy} = \iiint_V (x^2)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

момент инерции относительно координатной плоскости Ozx

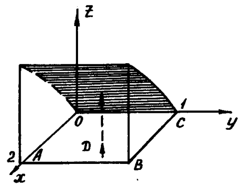
$$I_{xz} = \iiint_V (y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

момент инерции относительно начала координат

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 6x$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, если плотность равна $\gamma(x, y, z) = z$.

Решение.



1. Строим область V.

2. Проекцией области V на плоскость xOy будет прямоугольник $OABC$, поэтому пределы интегрирования будут иметь вид

$$0 \le x \le 2;$$
$$0 \le y \le 1;$$
$$0 \le z \le 6x.$$

По формуле $m = \iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz$ имеем

$$m = \iiint_V zdxdydz = \int_0^2 dx\int_0^1 dy\int_0^{6x} zdz = \int_0^1 dy\int_0^2 \left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{6x} \right) dx = \int_0^1 dy\int_0^2 18x^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(6x^3\Big|_0^2 \right) dy = \int_0^1 48dy = 48y\Big|_0^1 = 48.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить объём шара радиуса R.

Решение.

1. Имеем формулу в сферических координатах:

$$V = \iiint_V \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

2. Найдем пределы интегрирования V:

$$0 \le \rho \le R,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$0 \le \theta \le \pi,$$

так как шар стандартный с центром в начале координат.

3. Вычисляем интеграл

$$V = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \rho^2 d\rho = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} R^3 \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3} R^3 (1+1) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

✍**1**. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = 9 - y$, $y = 0$.

2. Найти массу тела плотностью $\mu = x + y$, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y + z = 3$.

3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2x$, $x + y + z = 3$.

4.3. Приложение криволинейных и поверхностных интегралов

Криволинейные и поверхностные интегралы незаменимы в физике при нахождении работы переменной силы, центра тяжести, массы, статических моментов и моментов инерции тела. В геометрии данные интегралы применяются для вычисления объёмов и площадей.

4.3.1. Приложения криволинейного интеграла первого рода

1. Если $\mu = \mu(x, y)$ – линейная плотность плоской материальной кривой AB, то численное значение массы кривой AB равно интегралу

$$m = \int_{AB} \mu(x, y)\, dl.$$

В случае пространственной кривой AB соответственно

$$m = \int_{AB} \mu(x, y, z)\, dl.$$

2. Координаты центра тяжести (x_0, y_0) плоской кривой вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\mu(x,y)\,dl,\quad y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\mu(x,y)\,dl;$$

для пространственной кривой AB

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\mu(x,y,z)dl,\quad y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\mu(x,y,z)dl,\quad z_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} z\mu(x,y,z)dl.$$

3. Статические моменты материальной кривой относительно оси Ox и оси Oy соответственно определяются интегралами

$$M_x = \int\limits_{AB}\mu y\,dl,\quad M_y = \int\limits_{AB}\mu x\,dl.$$

4. Моменты инерции относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$I_x = \int\limits_{AB}\mu r_x^2\,dl,\quad I_y = \int\limits_{AB}\mu r_y^2\,dl,\quad I_z = \int\limits_{AB}\mu r_z^2\,dl,$$

где r_x, r_y, r_z – расстояния от точки до соответствующих осей координат.

5. Длина кривой находится по формуле $m = \int\limits_{AB} dl.$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить массу отрезка прямой, заключённого между точками $A(0; -2)$ и $B(4; 0)$, если плотность $\mu = \frac{1}{x-y}$.

Решение. Запишем уравнение пути интегрирования как прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1},\quad \frac{x-0}{4-0} = \frac{y+2}{0+2},\quad y = \frac{1}{2}x-2;$$

$$y' = \frac{1}{2},\ dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{1}{4}}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}dx.$$

Отсюда

$$m = \int\limits_{AB}\frac{dl}{x-y} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 \frac{dx}{x-\frac{1}{2}x+2} = \sqrt{5}\int_0^4\frac{dx}{x+4} = \sqrt{5}\ln(x+4)\Big|_0^4 =$$

$$= \sqrt{5}(\ln 8 - \ln 4) = \sqrt{5}\ln 2.$$

4.3.2. Приложение криволинейного интеграла второго рода

Работа переменной силы $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, изменяющейся от точки к точке (в этом случае пространство *Oxyz* называется силовым векторным полем), по перемещению материальной точки по дуге *AB* вычисляется с помощью криволинейного интеграла по формуле

$$A = \int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{l} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

$\mathfrak{R}$ Найти работу силового поля, в каждой точке (x, y) которого напряжение (сила, действующая на единицу массы) $\vec{p} = (x+y)\vec{i} - x\vec{j}$, когда точка массы m описывает окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, двигаясь по ходу часовой стрелки.

Решение. Подставляя в формулу проекцию силы $\vec{F} = m\vec{p}$, действующей на точку:

$$F_x = m(x + y), \quad F_x = -mx,$$

и преобразуя криволинейный интеграл в обыкновенный с переменной t, получим

$$A = \oint_{-C} Pdx + Qdy = \oint_{-C} m(x+y)dx - mxdy = \int_0^{-2\pi} m(a\cos t + a\sin t)d(a\cos t) -$$

$$- ma\cos t d(a\sin t) = -ma^2 \int_0^{-2\pi} (1 + \sin t\cos t)dt = -ma^2\left(1 + \frac{\sin^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{-2\pi} = 2\pi ma^2.$$

✍**1**. Вычислить массу неоднородной дуги *AB*: $y^2 = 2x$ с плотностью $\mu = \frac{x}{y}$, $A\left(1, \sqrt{2}\right)$, $B(2, 2)$.

2. Найти длину кардиоиды

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \quad y = 2a\sin t - a\sin 2t.$$

3. Вычислить работу, совершаемую силой тяжести при перемещении точки массы m по дуге *AB* некоторой кривой.

4.3.3. Приложения поверхностных интегралов первого рода

1. Масса поверхности $m = \iint_S \gamma(x,y,z)ds$, где γ — плотность распределения массы материальной поверхности.

2. Площадь поверхности $S = \iint_S ds$.

3. Статические моменты материальной поверхности S:

$$S_{xy} = \iint_S z\gamma(x,y,z)ds,\ S_{yz} = \iint_S x\gamma(x,y,z)ds\ ,\ S_{xz} = \iint_S y\gamma(x,y,z)ds\ .$$

4. Координаты центра тяжести материальной поверхности S:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, y_c = \frac{S_{xz}}{m}, z_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

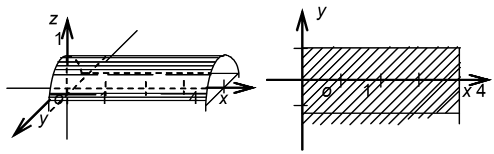
5. Моменты инерции материальной поверхности S:

$$M_x = \iint_S (y^2 + z^2)\gamma(x,y,z)ds\ ,\ M_y = \iint_S (x^2 + z^2)\gamma(x,y,z)ds\ ,$$

$$M_z = \iint_S (x^2 + y^2)\gamma(x,y,z)ds\ .$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ Вычислить массу цилиндрической поверхности $z = \sqrt{1-y^2}$, отсечённой плоскостями $x = 0$, $x = 4$, если плотность в каждой её точке есть функция $\mu(x, y, z) = z(x + y^3)$.

Решение. Построим поверхность и выберем координатную плоскость для проектирования xOy.



Подсчитаем дифференциал $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_y)^2 + (z'_x)^2}\,dxdy$;

$$z = \sqrt{1-y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}};\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0;\ \ d\sigma = \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2}}dxdy = \frac{dxdy}{\sqrt{1-y^2}};$$

$$m = \iint_\sigma \mu d\sigma = \iint_\sigma z(x+y^3)d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1-y^2}\,(x+y^3)\frac{dxdy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \int_{-1}^{1} dy \int_0^4 (x+y^3)dx = \int_{-1}^{1} dy \left[\frac{x^2}{2} + y^3 x\right]_0^4 = \int_{-1}^{1}(8 + 4y^3)dy = 16.$$

5. ВИДЫ ТЕСТОВ

Тест (от англ. *test* – испытание, проверка) – стандартизованные, краткие, ограниченные во времени испытания, предназначенные для установления количественных и качественных индивидуальных различий [2].

По мере использования тестов была сформирована их классификация по цели и содержанию:

- тесты личности – для оценки эмоционально-волевых качеств индивидуума;
- тесты интеллекта – для анализа уровня развития познавательных процессов и функций мышления;
- тесты способностей – для оценки возможностей в овладении различной деятельностью;
- тесты достижений, с помощью которых оценивают развитие знаний, умений, навыков после обучения.

Для отечественной системы образования наиболее приемлемый и используемый педагогами термин – «тестирование для входного и итогового контроля».

Основная цель **итогового тестирования** – обеспечение объективной оценки результатов обучения, которая ориентирована на характеристику освоения содержания курса (критериально-ориентированные тесты) или на дифференциацию учащихся (нормативно-ориентированные тесты).

При **входном контроле** с помощью тестов можно ответить на вопрос, насколько обучаемые владеют базовыми знаниями, умениями и навыками для успешного усвоения нового материала, а также определить степень владения новым материалом до начала его изучения.

Тесты для входного контроля **первого типа** позволяют выявить готовность к усвоению новых знаний. Они разрабатываются в рамках критериально-ориентированного подхода и содержат задания для проверки базовых знаний, умений и навыков, необходимых для усвоения нового материала. В основном эти тесты предназначены для недостаточно подготовленных студентов, находящихся на границе между явно подготовленными и явно не подготовленными к началу усвоения нового материала.

Тесты **второго типа** разрабатываются в рамках нормативно-ориентированного подхода. Они охватывают планируемые результаты предстоящего обучения и построены полностью на новом материале. По результатам выполнения теста преподаватель принимает решение, позволяющее внести элементы индивидуализации в массовый учебный процесс. Если студент показал некоторые предварительные знания по новому материалу, то план его обучения необходимо перестроить и начать с более высокого уровня, чтобы учебный материал имел для него действительный характер новизны. Иногда роль входного теста выполняет итоговый тест, который предназначен для будущей оценки результатов усвоения нового материала после завершения его изучения.

В тестовых заданиях **с выбором** можно выделить основную часть, содержащую постановку проблемы, и готовые ответы, сформулированные преподавателем. Среди ответов правильным чаще всего бывает только один, хотя не исключаются и другие варианты с выбором нескольких правильных ответов.

Задания с двумя и тремя ответами обычно используют для экспресс-диагностики, например, в автоматизированных контрольно-обучающих программах для входа в обучающий модуль при адаптивном тестировании или для самоконтроля, когда испытуемому необходимо оперативно выявить пробелы в собственных знаниях.

Задания с выбором имеют ряд преимуществ, связанных с быстротой их выполнения, простотой подсчета итоговых баллов, возможностью автоматизации процедур проверки ответов обучающихся и вытекающей отсюда минимизацией субъективного фактора при оценивании результатов выполнения теста. С их помощью можно более полно охватить содержание проверяемой учебной дисциплины и, следовательно, повысить содержательную валидность теста. Несомненным достоинством формы заданий с выбором является ее универсальность, так как их можно использовать практически для любого предмета.

К числу недостатков заданий с выбором следует отнести эффект угадывания, характерный для слабо подготовленных студентов при ответах на наиболее трудные задания теста.

В заданиях с **конструируемым ответом** готовые ответы не даются, их должен придумать или получить сам студент. Задания с конструируемым ответом бывают двух видов. Первый предполагает получение студентами правильных ответов, строго **регламентированных** по содержанию и форме представления. Второй – задания со **свободно** конструируемыми ответами, в которых студенты составляют развернутые ответы, произвольные по длине и форме представления и содержащие полное решение задачи с пояснениями.

В заданиях первого вида заранее определяется то, что однозначно считается правильным ответом, и задается степень полноты его представления. Обычно ответ бывает достаточно кратким – в виде слова, числа, формулы, символа и т. д. Регламентированная краткость ответов накладывает определенные ограничения на сферу применения, поэтому задания первого вида в основном используются для оценки довольно узкого круга учебных умений. Обычно с их помощью проверяется умение воспроизводить и применять знания в знакомой ситуации, а также выявляется уровень понимания изученного фактологического материала.

Для разработки заданий с конструируемым регламентированным ответом необходимо мысленно сформулировать вопрос, затем записать четкий и краткий ответ, в котором на месте ключевого слова, символа или числа ставится прочерк. В силу однозначности правильного ответа проверка результатов выполнения заданий с конструируемым регламентированным ответом носит довольно объективный характер.

Тестовые задания **на установление соответствия** имеют специфический вид, они представлены элементами двух множеств, соответствие между которыми предлагается установить студенту: слева обычно приводятся элементы задающего множества, содержащего постановку проблемы, справа – элементы, подлежащие выбору.

Соответствие между элементами двух столбцов может быть взаимно однозначным, когда каждому элементу слева соответствует только один элемент справа. Если число элементов в двух столбцах одинаковое, то для последнего элемента задающего множества выбора не произойдет, поэтому во множество для выбора возможно включить несколько дистракторов.

Тестовые задания **на установление правильной последовательности** предназначены для оценки уровня владения последовательностью действий, процессов и т. п. Элементы, связанные с определенной задачей, приводятся в заданиях в произвольном порядке, а обучающийся должен установить правильный порядок предложенных элементов и указать его заданным способом в специально отведенном для этого месте.

Достоинства и недостатки различных форм тестовых заданий

Формы тестовых заданий	Достоинства	Недостатки
Задания с двумя ответами	Благодаря краткости позволяют охватить большой объем материала, легко разрабатываются (только один дистрактор), результаты выполнения обрабатываются быстро с высокой объективностью	Стимулируют механическое запоминание, поощряют угадывание, требуют увеличения количества заданий и, соответственно, времени тестирования для компенсации эффекта угадывания
Задания с выбором из четырех-пяти ответов	Применимы для самых различных учебных предметов; в силу краткости формулировок в тесте позволяют охватить большой объем содержания; обеспечивают возможность автоматизированной проверки и высокую объективность оценок, позволяют провести развернутый статистический анализ своих характеристик, скорректировать их и значительно повысить надежность педагогических измерений	Требуют значительной работы авторов при подборе дистракторов, не годятся для проверки продуктивного уровня деятельности и когнитивных умений
Задания с конструируемыми регламентированными ответами	Просты в разработке, исключено угадывание, частично годятся для автоматизированной проверки	Проверяют в основном знание фактологического материала и приводят к неоднозначным правильным и частично правильным ответам

Формы тестовых заданий	Достоинства	Недостатки
Задания со свободно конструируемыми ответами	Позволяют оценивать сложные учебные достижения, в том числе творческий уровень деятельности, легко формулируются, исключают угадывание	Требуют длительной дорогостоящей процедуры проверки, значительного времени выполнения, не позволяют охватить значительный объем содержания предмета, снижают надежность педагогических измерений
Задания на соответствие	Просты в разработке, идеально подходят для оценивания ассоциативных знаний и проведения текущего контроля, уменьшают эффект угадывания	В основном используются лишь для проверки репродуктивного уровня деятельности и алгоритмических умений, громоздки по форме представления

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лекция-визуализация – это лекция, представляющая собой подачу материала с помощью современных технических средств обучения. Основной целью лекции-визуализации является формирование у студентов профессионального мышления через восприятие устной и письменной информации, преобразованной в визуальную форму. Этот вид лекции наиболее эффективен на этапе введения студентов в новый раздел, тему, дисциплину.

Лекция-консультация – лекция, в которой преподаватель излагает материал по важным проблемам практической направленности, включая студентов в активное обсуждение проблемы с помощью формулируемых ими вопросов по проблеме.

Лекция «пресс-конференция» предназначена для обнаружения пробелов в знаниях студентов и диагностирования уровня их подготовки. Лекция «пресс-конференция» помогает управлять вниманием и стимулировать активность студентов, учитывать уровень знаний студентов и корректировать содержание в ходе проведения лекции. Она выполняет контрольно-стимулирующую и демонстрационную функцию.

Контекстно-научная лекция – разновидность контекстной лекции, которая выстраивается в логике раскрытия научных фактов при анализе методов и результатов специальных исследований и проводимых экспериментов, а также непосредственным включением студентов в моменты решения различных задач.

Мастер-класс (от англ. *master class*; *master* – лучший в какой-либо области и *class* – занятие) – современная форма проведения обучающего тренинга для отработки практических навыков по решению различных задач и обмена опытом решения задач.

При проведении мастер-класса следует обратить особое внимание на контингент, так как взаимодействие нужно рассматривать для разных категорий обучающихся, участвующих в образовательном процессе.

Технология проблемного обучения – технология моделирования заданных преподавателем проблемных ситуаций и организация активной самостоятельной деятельности студентов по их разрешению, в результате чего происходит творческое овладение методами решения задач и развитие мыслительных способностей. Предназначение технологии проблемного обучения – стимулирование поисковой самостоятельной деятельности студентов как субъектов учебного процесса, развитие их логического, рационального, критического и творческого мышления и познавательных способностей.

Технология модульного обучения предполагает организацию процесса обучения для полного овладения содержанием образовательных программ в разной последовательности, разном объеме и темпе через отдельные и независимые учебные модули с учетом индивидуальных интересов и возможностей субъектов образовательного процесса.

Технология обучения в сотрудничестве – технология, в которой студенты работают совместно в малых группах для достижения общей цели, принимая на себя ответственность за работу каждого члена группы и за свою собственную, а успех каждого помогает добиться успеха всем остальным членам группы. Предназначение технологии обучения в сотрудничестве – формирование у студентов умений эффективно работать сообща во временных командах и добиваться качественных образовательных результатов.

Интерактивные технологии подразумевают обучение, построенное на взаимодействии обучающегося с учебным окружением, учебной средой, которая служит областью осваиваемого опыта и знаний.

При интерактивном обучении учебный процесс организован таким образом, что практически все студенты оказываются вовлеченными в процесс познания, они имеют возможность понимать и рефлексировать по поводу того, что они знают и думают. Совместная деятельность обучающихся в процессе познания, освоения учебного материала означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности.

Интерактивные технологии предполагают, что в процессе диалогового обучения студенты учатся критически мыслить, решать сложные задачи на основе анализа соответствующей информации, взвешивать альтернативные мнения и принимать продуманные решения. Для этого на занятиях организуется индивидуальная, парная и групповая работа, реализуются исследовательские проекты, идет работа с различными источниками информации, используются творческие работы.

Технология дифференцированного обучения – это способ организации учебного процесса, обеспечивающий включение каждого студента в деятельность, соответствующую его личностному развитию.

Дифференцированная организация учебной деятельности, с одной стороны, учитывает уровень умственного развития, психологические особенности студентов, абстрактно-логический тип мышления. С другой стороны, во внимание принимаются индивидуальные запросы личности, ее возможности и интересы в конкретной образовательной области.

Библиографический список

1. Баврин, И.И. Высшая математика : учеб. для студ. естественнонауч. спец. педвузов / И.И. Баврин. – М. : Академия : Высш. шк., 2012. – 611 с.
2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – Изд. 14-е, стер. – СПб. : Лань, 2011. – 736 с.
3. Бугров, Я.С. Высшая математика : учеб. для вузов. В 3 т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский ; под ред. В.А. Садовничего. – Изд. 5-е, стер. – М. : Дрофа, 2003. – 511 с. – (Высшее образование. Современный учебник).
4. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд. – М. : АСТ, 2014. – 816 с.
5. Дорофеев, С.Н. Высшая математика [Электронный ресурс] : полный конспект лекций / С.Н. Дорофеев. – М. : Мир и Образование, 2011. – 590 с.
6. Ильин, В.А. Основы математического анализа : учеб. для вузов. В 2 ч. Ч. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – Изд. 6-е, стер. – М. : Физматлит, 2011. – Ч. 2. – 464 с.
7. Камынин, Л.И. Курс математического анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / Л.И. Камынин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – Т. 1. – 432 с. – Электронно-библиотечная система «Библиотех».
8. Крупин, В.Г. Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление [Электронный ресурс]: сборник задач с решениями : учебное пособие для вузов / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. – М. : МЭИ, 2012. – 304 с.
9. Крупин, В.Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы [Электронный ресурс]: сборник задач с решениями : учебное пособие для вузов / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. – М. : МЭИ, 2013. – 408 с.
10. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. – Изд. 14-е, испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 336 с.

11. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М. : АЙРИС-пресс, 2017. – 608 с.
12. Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов. В 3 т. Т. 1 / В.Д. Черненко. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Политехника, 2011. – 710 с.
13. Шипачев, В.С. Высшая математика: базовый курс : учеб. пособие для студ. вузов / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2011. – 447 с.
14. MathSerfer. Решение высшей математики онлайн. – URL: http://mathserfer.com/
15. OnlineMSchool. Изучение математики онлайн. – URL: http://ru.onlinemschool.com/

Глоссарий

Логический символ	Обозначение
$\exists$	существует
$\forall$	для любого, для каждого
$\in$	принадлежит
$\notin$	не принадлежит
N	множество натуральных чисел
Z	множество целых чисел
R	множество рациональных чисел
$\Rightarrow$	следует
ε	бесконечно малая величина
∞	бесконечность
$\cup$	объединение
$\cap$	пересечение
$\rightarrow$	стремиться
$D(x)$	область определения функции
E(**y**)	множество значений функции
|à|	модуль числа
$(a; b)$	интервал
$[a; b)$ $(a; b]$	полуинтервал
$[a; b]$	отрезок
$\int$	неопределенный интеграл
$\int_a^b$	определенный интеграл
$(\ )'$	производная

Ответы к тестам

Теоретический тест к теме «Дифференциальные уравнения»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Верный ответ	2	1	4	3	1	3	2	1	4	4

Практический тест к теме «Дифференциальные уравнения»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	2	3	1	3	1	3	2	2	1	4	4	2	4	1	1

Теоретический тест к теме «Кратные интегралы»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Верный ответ	3	3	4	1	4	1	4	2	1, 2, 3	1

Практический тест к теме «Кратные интегралы»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	3	3	4	1	4	4	1	1	2	3	4	0	2	2	3

Теоретический тест к теме «Криволинейные и поверхностные интегралы»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Верный ответ	1	3	4	4	2	1	3	4	1	4

Практический тест к теме «Криволинейные и поверхностные интегралы»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Верный ответ	4	3	4	1	1	4	4	3	4	4	3	1	3	1	3