

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

01.03.02 Прикладная математика и информатика

профиль Системное программирование и компьютерные технологии

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Численное исследование эффектов
распространения волн шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе

Студентка К.В. Фатеева _____

Руководитель д.ф.-м.н., доцент С.В. Талалов _____

Допустить к защите

Заведующий кафедрой к.тех.н, доцент, А.В. Очеповский _____

« _____ » _____ 20 _____ г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой «Прикладная
математика и информатика»
А.В.Очеповский

« ____ » _____ 2016 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение бакалаврской работы

Студент ПМИб–1201 Фатеева Ксения Владимировна

1. Тема «Численное исследование эффектов распространения волн шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе».
2. Срок сдачи студентом законченной выпускной квалификационной работы 23.05.16
3. Исходные данные к выпускной квалификационной работе размеры и геометрические формы резонатора, начальные данные волнового уравнения.
4. Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов, разделов)
1)ознакомление с теорией о распространении волн в пространстве
2) численное исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи при различных начальных данных
3)поиска оптимальных методов визуализации распространения различных мод шепчущей галереи в заданном резонаторе
5. Ориентировочный перечень графического и иллюстративного материала формулы, таблицы, графики, рисунки, блок –схема, презентация
6. Дата выдачи задания « 11 » января 2016 г.

Руководитель выпускной
квалификационной работы
д.ф.–м.н., доцент

С.В. Талалов

Задание принял к исполнению

К.В. Фатеева

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой «Прикладная
математика и информатика»
А.В.Очеповский

«___» _____ 2016 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН
выполнения бакалаврской работы

Студента ПМИб–1201 Фатеевой Ксении Владимировны
по теме «Численное исследование эффектов
распространения волн шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе»

Наименование раздела работы	Плановый срок выполнения раздела	Фактический срок выполнения раздела	Отметка о выполнении	Подпись руководителя
1. Постановка целей и задач на выпускную квалификационную работу. Обзор проблемной области.	15.01.16	15.01.16	выполнено	
2. Поиск литературных источников и сбор материала по теме выпускной квалификационной работы.	17.01.16	18.01.16	выполнено	
3. Теоретическое изучение особенностей распространения волн в цилиндрическом резонаторе.	25.01.16	30.01.16	выполнено	
4. Поиск оптимальной среды программирования для визуализации отдельных	10.02.16	12.02.16	выполнено	

эффектов.				
5. Реализация программ на MatLab и их тестирование.	25.02.16	1.03.16	выполнено	
6. Создание графической части. Визуализация.	25.03.16	25.03.16	выполнено	
7. Проведение анализа полученных результатов.	1.04.16	2.04.16	выполнено	
8. Разработка и согласование с руководителем текстовой документации: введение, главы работы, заключение.	7.04.16	7.04.16	выполнено	
9. Проведение предварительной защиты выпускной квалификационной работы.	11.05.16	11.05.16	выполнено	
10. Проверка выпускной квалификационной работы в системе «Антиплагиат. ВУЗ»	14.06.16	14.06.16	выполнено	
11. Сдача пояснительной записки выпускной квалификационной работы и реализованного продукта.	19.06.16	19.06.16	выполнено	

Руководитель выпускной
квалификационной работы

С.В. Талалов

Задание принял к исполнению

К.В. Фатеева

Аннотация

Объектом исследования при написании работы послужили волны различных частот в цилиндрическом резонаторе.

Предметом исследования работы является процесс численного исследования эффектов распространения волн шепчущей галереи в указанной области. Исследовано решение задачи Коши для волнового уравнения с начальными данными, соответствующими возбуждению различных мод резонатора говорящим человеком. Предложен способ графического анализа (визуализации) различных мод резонатора.

В выпускную квалификационную работу входит введение, две главы и итоговое заключение.

Во введении ставится цель и задачи исследования, определяется актуальность выбранного направления, формулируется объект и предмет исследования. В первой главе изучается теоретический материал выбранной темы. Во второй главе осуществляется практическая работа в программной среде MatLab. Заключение содержит основные выводы по проделанной работе и описывает итог по выполненным задачам.

Объём выпускной квалификационной работы составляет 40 страниц, на которых размещены 19 рисунков и 5 таблицы, имеется 2 приложения с реализацией программного кода. При написании выпускной квалификационной работы использовалось 20 источников, 5 из которых на английском языке.

Ключевые слова: шепчущая галерея, волновой фронт, цилиндрический резонатор.

Оглавление

Введение.....	7
Глава 1 Распространение волн в цилиндрическом резонаторе	10
1.1 Волновое уравнение (с акцентом на частные решения, описывающие моды ШГ).....	10
1.2 Уравнение Гельмгольца.....	10
1.3 Уравнение Бесселя. Функции Бесселя	13
Глава 2 Численное исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи.....	16
2.1 Выбор параметров для возникновения эффекта шепчущей галереи при заданных начальных условиях	16
2.2 Задача Коши	21
2.2 Выбор оптимальной среды программирования	25
2.4 Построение «волнового фронта» в цилиндрическом резонаторе	28
Заключение	40
Список используемой литературы	41
Приложение А Реализация программного кода для визуализации волнового фронта одной частоты.....	43
Приложение Б Реализация программного кода для визуализации дисперсии волновых фронтов.....	46

Введение

Исследование и математическое моделирование волновых процессов в их различных аспектах являются важнейшей частью современной математической физики. Классифицируются такие процессы по различным признакам. Так, выполняя классификацию по типу среды, в которой распространяются колебания, можно выделить электромагнитные (колебания электромагнитного поля) или упругие (колебания сплошной среды) волны. Упругие волны в диапазоне от 10^{-10} мкВт/см² до 10^2 мкВт/см², воспринимаемом человеческими органами слуха, называют акустическими. Важнейшим направлением исследования акустических волн является исследование распространения таких волн в присутствии направляющих поверхностей. Если такие поверхности ограничивают конечную часть пространства – некоторую полость, – то мы имеем дело с акустическим резонатором. В таких структурах могут существовать только волны определённого типа («моды резонатора»). Интересный и практически важный класс таких специальных решений – моды шепчущей галереи. Впервые эффект шепчущей галереи был обнаружен в Соборе Святого Павла в Лондоне. Рэлей, британский физик, поясняет, что звук «хватается за плоскость стены» и «тянется вдоль неё» [13]. Вогнутая поверхность не даёт пучку из посылаемых звуков быстро расшириться, как это наблюдается в свободном пространстве.

Актуальность выбранной темы: исследование мод шепчущей галереи различной природы и в различных диапазонах является актуальной задачей. Это связано с широким спектром применимости как оптических [16–20], так и акустических резонаторов, работающих на различных модах, в том числе – на модах шепчущей галереи. Так, в работах [2], [7–9], [11–12] исследуются вопросы, связанные с конструированием оптических резонаторов на таких модах. Данные исследования важны для приложений к

оптоэлектронике, которая сейчас бурно развивается. В акустическом диапазоне исследование данных волн также представляет интерес (см, например, [4]). Такие исследования актуальны, например, в связи с проектированием замкнутых помещений, в которых важно учесть все особенности распространения звуковых волн: например, в концертных залах.

Цель выпускной квалификационной работы: провести численное исследование особенностей возникновения и распространения звуковых волн шепчущей галереи акустического диапазона в цилиндрическом резонаторе при начальных условиях специального вида.

Объект исследования: волны различных частот в цилиндрическом резонаторе.

Предмет исследования: процесс численного исследования эффектов распространения волн шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе.

Исходя из поставленной цели данной выпускной квалификационной работы, были поставлены следующие задачи:

Задачи:

1. Найти все частные решения («моды») краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в заданном цилиндрическом резонаторе радиуса R и высоты H (с акцентом на частные решения, описывающие моды ШГ).

2. Учитывая особенности восприятия человеком звуковых волн, установить критерии, согласно которым отдельные найденные моды могут быть классифицированы как моды шепчущей галереи.

3. Выявить, при каких начальных данных задачи Коши для волнового уравнения, отвечающих генерации звуковых волн гортанью человека, возможно возникновение эффекта шепчущей галереи.

4. Ввести аналог понятия волнового фронта для найденных решений и выполнить с его помощью визуализацию рассматриваемого эффекта.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, ставится цель, выявляются задачи, и определяется примерный план действий для реализации задуманного.

В первой главе приводятся основные понятия и термины, решения необходимых уравнений математической физики. Посредством решения уравнения Гельмгольца в цилиндрической системы координат находятся все решения задачи Дирихле для данного уравнения в цилиндрической области, а также решение задачи Коши для волнового уравнения с начальными данными специального вида.

Во второй главе показывается визуализация распространения волн шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе при помощи прикладной программы MatLab.

В заключении подводятся итоги исследования, формируются окончательные выводы по рассматриваемой теме.

Глава 1 Распространение волн в цилиндрическом резонаторе

1.1 Волновое уравнение (с акцентом на частные решения, описывающие моды ШГ)

Человек одарён природой органами чувств, при помощи которых он воспринимает информацию извне. Голос, крик, песня, шёпот – всё это звуки, которые вызваны колебаниями внутри полости рта, а со временем распространяющиеся по пространству.

Звук – это явление на стыке физики и физиологии человека, которое заключается в том, что механические упругие колебания воздушной среды (распространяющиеся в пространстве волнами) воспринимаются и идентифицируются человеческим организмом.

Волновые процессы, вызванные малыми возмущениями упругой среды, описываются линейным волновым уравнением – уравнением в частных производных второго порядка гиперболического типа, а именно, волновым уравнением. Данное уравнение имеет вид:

$$\Delta U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, а функция

$U = U(t, x, y, z)$ – искомая функция, смысл которой различен в различных задачах,

v – постоянная, имеющая смысл фазовой скорости волны.

1.2 Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим частные решения волнового уравнения (1) вида

$$U(t, \mathbf{r}) = e^{i\omega t} U(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где ω фиксированная константа, имеющая смысл частоты гармонических колебаний частиц среды. Подставив в уравнение (1), находим:

$$(\Delta + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

где $k = \frac{\omega}{v}$.

Полученное уравнение эллиптического типа является уравнением Гельмгольца. Мы полагаем, что звуковые волны, источник которых находится внутри нашей области (резонатора), за пределы данной области не проникают. В этой связи мы будем искать решения задачи Дирихле для уравнения (3) с нулевыми граничными условиями:

$$U(r) = 0, r \in S \quad (4)$$

Рассмотрим рисунок 1.1, на котором изображена область S , ограниченная цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = R^2$ и двумя плоскостями $z = 0$ и $z = H$.

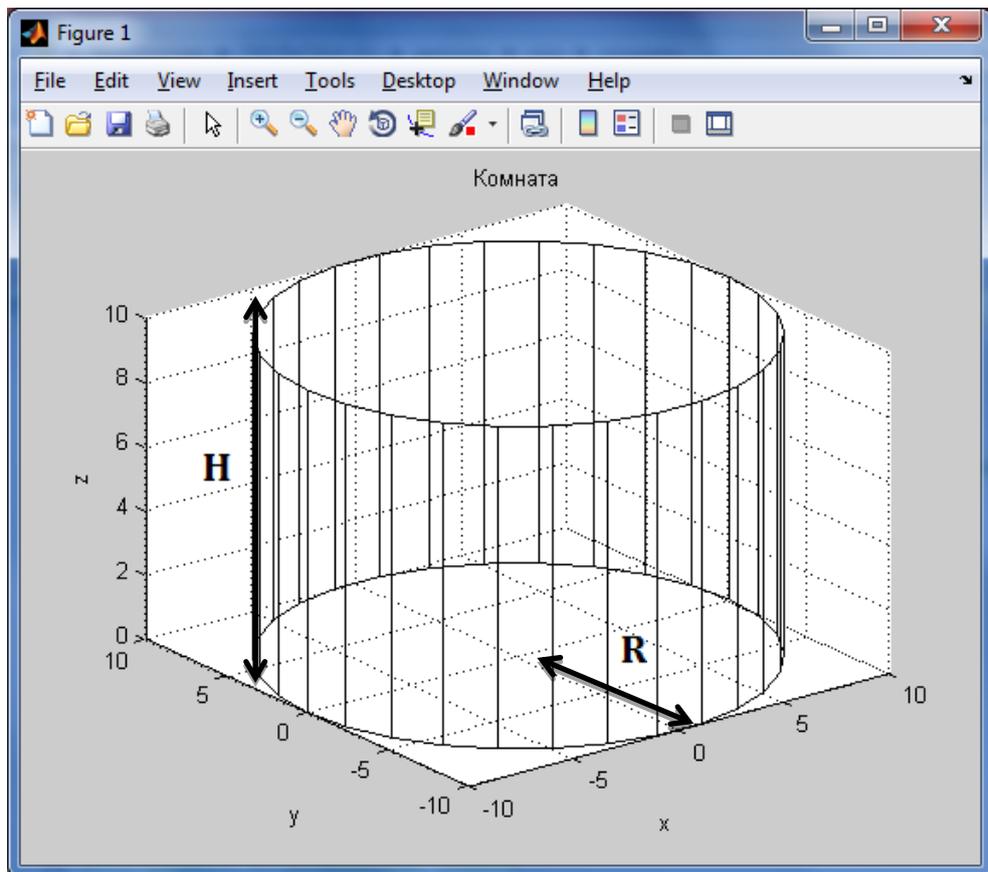


Рисунок 1.1 – Цилиндрический резонатор

Поскольку область, в которой мы рассматриваем решение нашей задачи, имеет цилиндрическую симметрию, рассмотрим решение данного уравнения в цилиндрической системе координат.

Применяем метод разделения переменных. Пусть решение имеет вид $U(r) = W(\rho, \varphi)Z(z)$, тогда подставив в уравнение Гельмгольца получаем

$$Z(z) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial (W(\rho, \varphi))}{\partial \rho} \right) + W(\rho, \varphi) \frac{\partial^2 (Z(z))}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (W(\rho, \varphi))}{\partial \varphi^2} Z(z) + k^2 W(\rho, \varphi) Z(z) = 0 \quad (5)$$

Стандартная процедура разделения переменных [1] приводит к уравнению гармонических колебаний для функции $Z(z)$. С учетом граничных условий (4) на плоскости $z = 0$, находим

$$Z(z) = \sin hz, \quad (6)$$

где h – константа разделения переменных на данном этапе.

Пусть $W(\rho, \varphi) = J(\rho)\Phi(\varphi)$, тогда

$$\frac{1}{\rho J(\rho)\Phi(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \Phi(\varphi) \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 J(\rho)\Phi(\varphi)} J(\rho) \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 = -h^2 \quad (7)$$

Выполняя разделение переменных для функции $\Phi(\varphi)$, находим

$$\Phi(\varphi) = e^{in\varphi}, \quad (8)$$

где число n является целым. Данный факт следует из однозначности искомого решения.

Пусть $k^2 + h^2 = \lambda^2$, тогда оставшееся для функции $J(\rho)$ уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) J(\rho) = 0 \quad (9)$$

Полученное уравнение является уравнением Бесселя, его решение имеет следующий вид

$$J(\rho) = J_n(\lambda\rho), \quad (10)$$

где $J_n(x)$ функция Бесселя.

Из этого следует, что искомое решение $U(r)$, обращающееся в ноль на плоскости $z = 0$, имеет вид

$$U(r) = J_n(\lambda\rho) e^{in\varphi} \sin hz \quad (11)$$

Найдём решения задачи Дирихле в области цилиндрического резонатора, учтя граничные условия на плоскости $z = H$, а также боковой цилиндрической поверхности.

Вначале учтем граничные условия на плоскости $z = H$. Имеем:

$$Z(z) = \sin hz \quad (12)$$

$$\sin hH = 0 \Rightarrow hH = \pi m \Rightarrow h = \frac{\pi m}{H}, \quad (13)$$

где H – высота цилиндрического резонатора.

Далее учитываем граничные условия на боковой поверхности. Имеем:

$$J(\rho) = J_n(\lambda\rho) \quad (14)$$

$$\lambda R = b_k^{(n)} \Rightarrow \lambda_k^{(n)} = \frac{b_k^{(n)}}{R}, \quad (15)$$

где $b_k^{(n)}$ – k -ый ноль функции Бесселя J_n n -го порядка,

R – радиус цилиндрического резонатора.

Таким образом, все частные решения сформулированной выше задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в рассматриваемой области имеют вид:

$$U(r) = J_n\left(b_k^{(n)} \frac{\rho}{R}\right) e^{in\varphi} \sin\left(\pi m \frac{z}{H}\right), \quad (16)$$

где n, k, m – целые числа.

Какие из данных решений соответствуют модам шепчущей галереи, мы выясним дальше.

1.3 Уравнение Бесселя. Функции Бесселя

В предыдущем параграфе при решении уравнения мы столкнулись с уравнением Бесселя. Поскольку сам факт существования мод шепчущей галереи связан со специфическими свойствами функций Бесселя, обратимся к нему подробнее.

Рассмотрим уравнение Бесселя. Оно имеет следующий вид [3].

$$J(\ddot{\rho}) + \frac{1}{\rho} \dot{J} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) J(\rho) = 0, \quad \lambda^2 = 1 \quad (17)$$

Его решение можно найти в виде ряда

$$J(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^{k+s} \quad (18)$$

Если $s = +n$, то

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+n)^2 - n^2} = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2n)} \quad (19)$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2)^{2k} k!(1+n)(2+n)\dots(k+n)} \quad (20)$$

Используя полученное равенство, возвращаемся к формуле (18) и получаем частное решение уравнения Бесселя

$$J(\rho)_1 = J_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \rho^{2k+n}}{(2)^{2k} k!(1+n)(2+n)\dots(k+n)}, \quad (21)$$

где $J_n(\rho)$ бesselева функция первого рода порядка n .

Рассмотрим рисунок 1.2, на котором изображены бesselевы функции первого рода различных порядков.

Зелёным цветом выделена функция Бесселя 1-го порядка, синим цветом функция Бесселя 10-го порядка, чёрным цветом функция Бесселя 50-го порядка, а красным 100-го порядка.

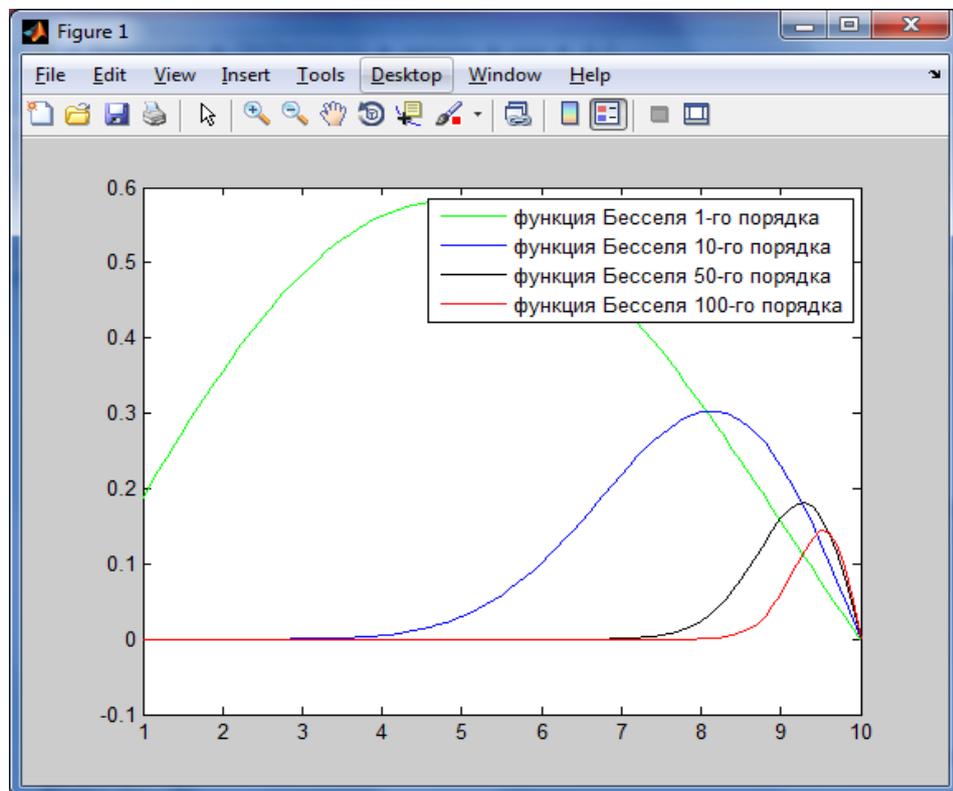


Рисунок 1.2 – Бesselевы функции различных порядков

Из графиков видно, что каждый график, до первого нуля, содержит (условно) два подмножества: интервал **A** («плато»), на котором функция «почти» равна нулю, и интервал **B**, где соответствующая функция отлична от нуля существенно. Важным для нас фактом является то, что отношение $\frac{|A|}{|B|}$ растет с ростом порядка бесселевой функции (здесь $| \cdot |$ обозначает длину интервала). Таким образом, для функций Бесселя больших порядков мы имеем: функция «почти» равна нулю вплоть до значения $b_1^{(n)}$, и имеет существенный рост вблизи данного значения. Именно данному свойству функций Бесселя мы обязаны существованием мод шепчущей галереи в цилиндрических областях. Данные моды – это те частные решения рассматриваемой задачи Дирихле, которые отвечают большим значениям порядка бесселевой функции n . Они и будут соответствовать звуковым волнам, имеющим «заметную» интенсивность только вблизи цилиндрической поверхности («стены галереи»). В следующей главе мы уточним данные понятия («почти», «заметную») применительно к нашему случаю – возбуждению и восприятию звуковых волн человеком.

Глава 2 Численное исследование эффекта распространения волн шепчущей галереи

2.1 Выбор параметров для возникновения эффекта шепчущей галереи при заданных начальных условиях

Как было показано в предыдущей главе, частными решениями уравнения (1), соответствующими поставленной задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца, являются функции вида

$$U(t, r) = e^{i\omega t} J_n(b_k^{(n)} \frac{\rho}{R}) e^{in\varphi} \sin(\pi m \frac{z}{H}).$$

Таким образом, при произношении звуков возбуждаются, вообще говоря, различные моды (как шепчущей галереи, так и другие). Рассмотрим условия, при которых моды шепчущей галереи являются доминирующими.

Проанализируем рисунок 2.1, на котором изображен цилиндрический резонатор сверху.

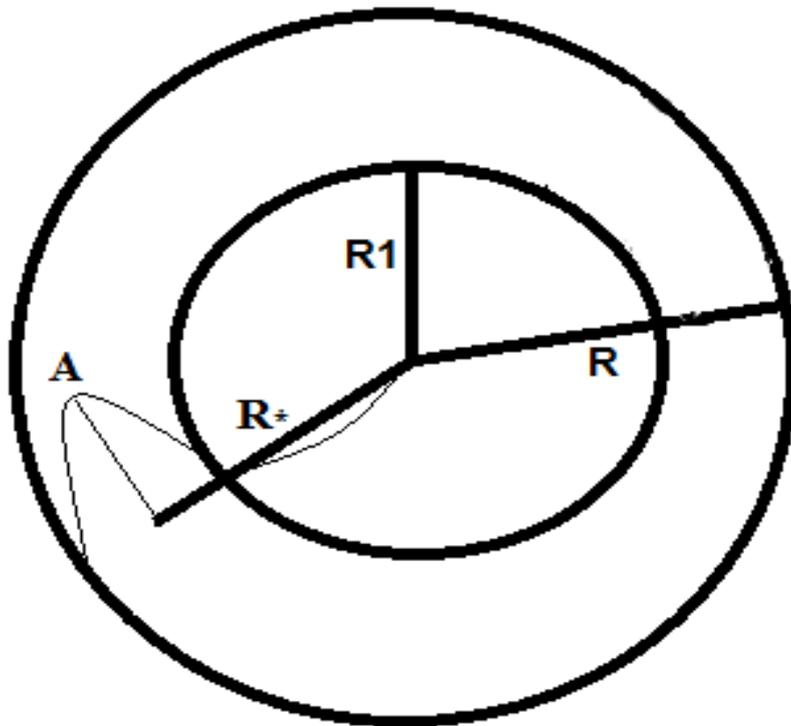


Рисунок 2.1 – Цилиндрический резонатор сверху

R – радиус цилиндрического резонатора;

R_1 – радиус области резонатора, в которой интенсивность звуковых волн предполагается ниже порога слышимости звука человеком (см. ниже);

R_* – расстояние от центра резонатора до точки A (A – точка, в которой достигается максимальная амплитуда колебаний).

Звук распространяется по всему резонатору, при этом возбуждаются моды шепчущей галереи независимо от места, но с разными по значению амплитудами. Таким образом, например, в центре тоже будут слышны звуки, но вдоль стен они будут громче.

Итак, выделим условно внутри рассматриваемой области подобласть радиуса $R_1 < R$ в которой, как мы предполагаем, интенсивность звуковых волн будет ниже порога слышимости.

При распространении звуковая волна переносит энергию. Интенсивность звука (усредненная по времени энергия на единицу площади) – величина, которая имеет единицы измерения $Вт/м^2$. С точки зрения восприятия данной энергии (т.е. звука) человеком, данная величина имеет свои граничные значения, которые описаны в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Интенсивность звука

Звук	Интенсивность звука, $мкВт/см^2$
порог слышимости	10^{-10}
шёпот	10^{-8}
негромкая музыка	10^{-6}
разговорная речь на расстоянии 1 м.	10^{-4}
шумная улица	10^{-2}
большой оркестр	10
порог болевого ощущения	10^2

Следовательно, порог слышимости достигает 10^{-10} $мкВт/см^2$, а болевое ощущение барабанной перепонки 10^2 $мкВт/см^2$. Значит, интенсивность должна удовлетворять следующему неравенству $I_{\min} < I < I_{\max}$, где

$$I_{\min} = 10^{-10} \text{ мкВт/см}^2,$$

$$I_{\max} = 10^2 \text{ мкВт/см}^2.$$

Напомним, что эффект шепчущей галереи состоит в том, что интенсивность I_{\max} звуковых волн вблизи «стены» (в нашем случае – цилиндрической поверхности резонатора) существенно больше интенсивности I_{\min} звуковых волн в центральной области резонатора (то есть человек, стоящий в центре комнаты не слышит человека, говорящего у стены). Поскольку, отношение интенсивностей воспринимаемых человеком составляет 10^{12} , то мы исходим из соответствия $\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = 10^{12}$.

Отношение расстояния от центра резонатора до «границы минимальной слышимости» R_1 к радиусу самого резонатора R выбиралось так, что отношение амплитуд колебаний при $\rho < R_1$ и при $\rho > R_1$ должно быть приблизительно равно величине 10^6 (т.к. интенсивность звука пропорциональна квадрату амплитуды).

Из того, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды вытекает

$$\left(\frac{U(R_*)}{U(R_1)}\right)^2 \geq \frac{I_{\max}}{I_{\min}} \quad (22)$$

$$\left(\frac{J_n(R_*) e^{in\varphi} \sin hz}{J_n(R_1) e^{in\varphi} \sin hz}\right)^2 \geq \frac{I_{\max}}{I_{\min}} \quad (23)$$

Производя сокращения в левой части неравенства и подставляя численные значения интенсивностей в правой, получаем

$$\frac{J_n(q_1^{(n)})}{J_n\left(\frac{R_1}{R} b_1^{(n)}\right)} \geq 10^6, \quad (24)$$

где $q_1^{(n)}$ – производная первого нуля функции Бесселя n -го порядка,

$b_1^{(n)}$ – первый нуль функции Бесселя n -го порядка.

Для того чтобы найти подходящее отношение $\frac{R1}{R}$, при котором выполняется неравенство (24) построим рисунок 2.2.

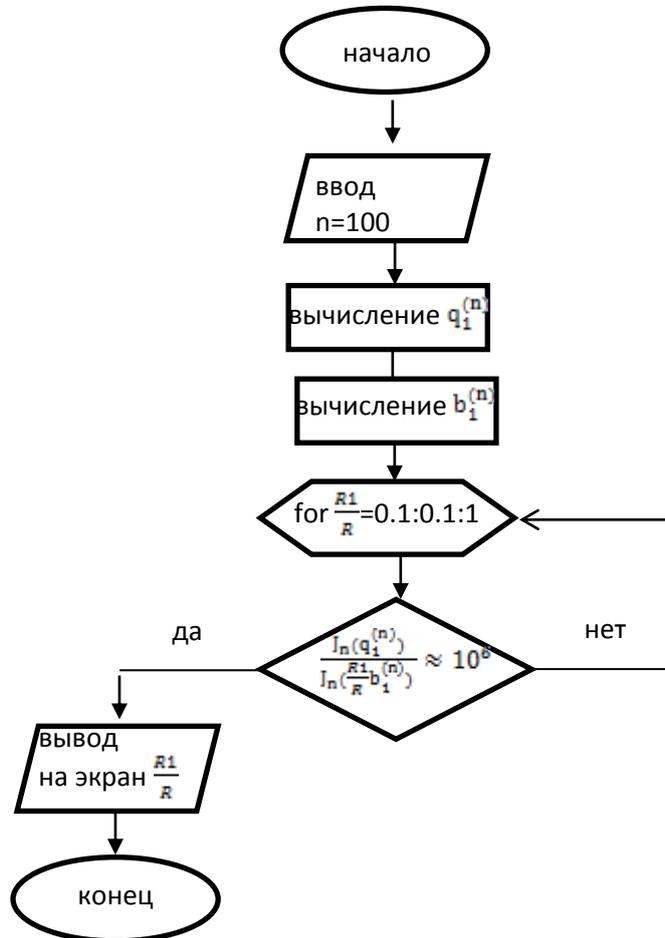


Рисунок 2.2 – Алгоритм для нахождения оптимального отношения $\frac{R1}{R}$

Приведём рисунок 2.3, на котором изображен фрагмент реализованного в программной среде MatLab [10] кода. Вначале задаётся радиус цилиндрического резонатора R , порядок функции Бесселя равен 100. Вычитывается первый нуль функции Бесселя 100-го порядка и его производная по формулам [6]. После чего, необходимо создать цикл, который будет перебирать возможные значения для $\frac{R1}{R}$. При успешном выполнении поставленного условия на экран будет выведено оптимальное

отношение $R1$ к R . Иначе, значение $\frac{R1}{R}$ будет увеличено на 0.1, а поставленное условие будет проверяться вновь.

```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
fx >>
R=10
b=R1/R
n=100
%первый нуль функции Бесселя n-го порядка
j(n,1)=n+1.8557571*n^(1/3)+1.03315*n^(-1/3)-0.00397*n^(-1)

%производная первого нуля функции Бесселя 100-го порядка
j1(n,1)=n+0.8086165*n^(1/3)+0.072490*n^(-1/3)-0.05097*n^(-1)

for b=0.1:0.1:1

if ((bessely(n,j1(v,1))) / (bessely(n,j(v,1)*b))>10^6
disp(n);
end

end

```

Рисунок 2.3 – Фрагмент кода для нахождения оптимального отношения $\frac{R1}{R}$

Рассмотрим, таблицу 2.2, в которой представлены данные после выполнения программы.

Таблица 2.2 – Данные, после выполнения программы

$\frac{R1}{R}$	n	$\frac{I_{max}}{I_{min}}$
0,5	100	92 987 920 526 675 128,8
0,55	100	36 406 975 947 880,8
0,6	100	39 958 261 388,6
0,65	100	109 359 892,7
0,7	100	687 220,1

При реализации программного кода в среде MatLab, было выявлено, что отношение $R1$ к R должно быть больше, чем 0.7, при порядке функции Бесселя, равным 100. Соответственно, если порядок функции Бесселя

больше 100, эффект также наблюдается, при этом пороговое значение больше, чем 0.7.

2.2 Задача Коши

Задача Коши – одна из основных задач теории дифференциальных уравнений. Она состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения, которое соответствует начальным условиям.

В нашем случае задача Коши состоит в том, чтобы найти решения дифференциального уравнения, при данных обстоятельствах это волновое уравнение $\Delta U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$, которые удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} U(0, r) = \alpha(\rho, \varphi, z), \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0}(r) = \beta(\rho, \varphi, z). \end{cases} \quad (25)$$

Для упрощения формул примем в дальнейшем, что $\beta(\rho, \varphi, z) \equiv 0$.

Начальные данные задачи Коши для волнового уравнения выбираем так, что носитель соответствующих функций сосредоточен в компактной области вблизи цилиндрической поверхности («стены»), которая изображена на рисунке 2.4. Это соответствует возбуждению в резонаторе («цилиндрической комнате») звуковых волн говорящим человеком, который стоит у стены.

При этом мы ограничимся компактификацией носителя функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ только по переменной φ .

Компактификацию начальных данных по переменной z (которая также имеет место при произнесении звуков человеком у стены) мы договоримся не учитывать.

Угол φ на рисунке выделен прямоугольником, который заштрихован. Именно в этом месте будут возбуждаться волны, которые возникают из-за человека, который говорит.

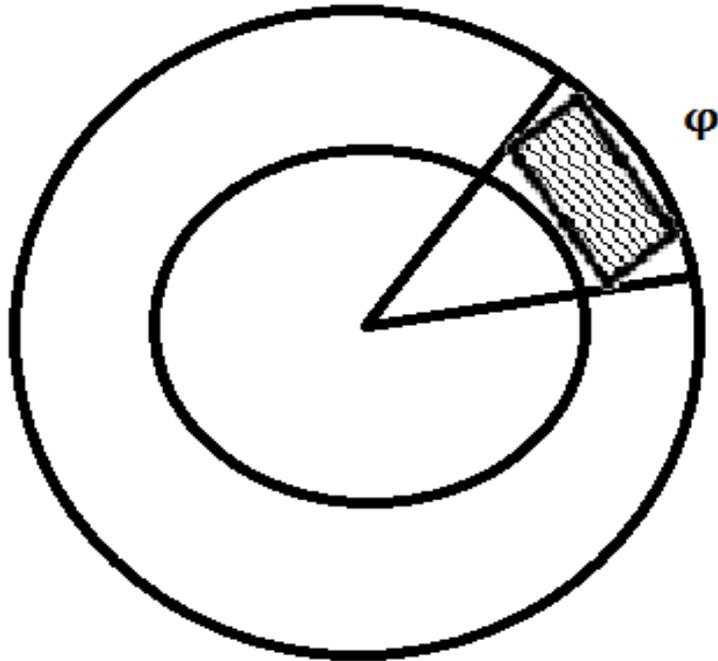


Рисунок 2.4 – Область вдоль стены резонатора

Решения волнового уравнения (1), соответствующие тем ограничениям, которые мы наложили на начальные данные Коши, имеет вид:

$$U(t, r) = \sum C_{n,k,m}^+ [e^{+i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}] U_{n,k,m}(r), \quad (26)$$

где $U_{n,k,m}(r)$ – найденные выше функции решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, а константы

$C_{n,k,m}^+$ – некоторые константы, определяемые явным видом функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$.

Таким образом, мы видим, что условием разрешимости задачи Коши в нашем случае является представимость функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ в виде

$$\alpha(\rho, \varphi, z) = 2 \sum_{n>100, k=1} [C_{n,k,m}^+] U_{nkm}(\rho, \varphi, z) \quad (27)$$

Суммирование, начиная от индекса $n = 100$ отражает здесь тот факт, что носитель функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ по переменной ρ сосредоточен в области $\rho > R1$.

Наша следующая задача – определить константы $C_{n,k,m}^+$, которые:

1. Соответствуют предположениям о функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$ (компактность по φ);
2. Приводят к возникновению эффекта шепчущей галереи.

При этом мы учтем ограничения по интенсивности звука, проанализированные выше.

Для нахождения данных коэффициентов используем соотношения ортогональности.

$$1) \quad \int_0^\pi e^{in_1\varphi} e^{-in_2\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n_1 \neq n_2 \\ 2\pi, & n_1 = n_2 \end{cases} \quad (28)$$

$$2) \quad \int_0^H \sin\left(\pi m_1 \frac{z}{H}\right) \sin\left(\pi m_2 \frac{z}{H}\right) dz = \begin{cases} 0, & m_1 \neq m_2 \\ \frac{H}{2}, & m_1 = m_2 \end{cases} \quad (29)$$

$$3) \quad \left(\int_0^1 t J_\nu(b_{k1}t) J_\nu(b_{k2}t) dt\right) = \begin{cases} 0, & k1 \neq k2 \\ \frac{1}{2} [J_{\nu+1}(b_k)]^2, & k1 = k2 \end{cases} \quad (30)$$

В соответствии с нашей гипотезой о структуре функции $\alpha(\rho, \varphi, z)$, имеем:

$$\alpha(\rho, \varphi, z) \propto f(\varphi), \quad (31)$$

где периодическая функция $f(\varphi)$ имеет вид:

$$f(\varphi) = \begin{cases} f_1(\varphi), & -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ 0, & \varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi \end{cases} \quad (32)$$

Выберем функцию $f_1(\varphi)$ в виде:

$$f_1(\varphi) = f_0 e^{iN\varphi}, \quad (33)$$

где N – некоторое целое число.

В соответствии с соотношениями ортогональности имеем для коэффициентов C_n Фурье функции $f(\varphi)$:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{f_0}{2\pi} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} e^{iN\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{f_0}{2\pi} \frac{1}{i(N-n)} e^{i(N-n)\varphi} \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = \frac{f_0}{\pi(N-n)} \sin(N-n)\varphi_0$$

(34)

Рассмотрим рисунок 2.5, на котором изображен график зависимости амплитуды моды C_{nkm} от n : здесь мы выбрали $N = 100$. По оси Ox откладывается n , а по оси Oy C_{nkm} .

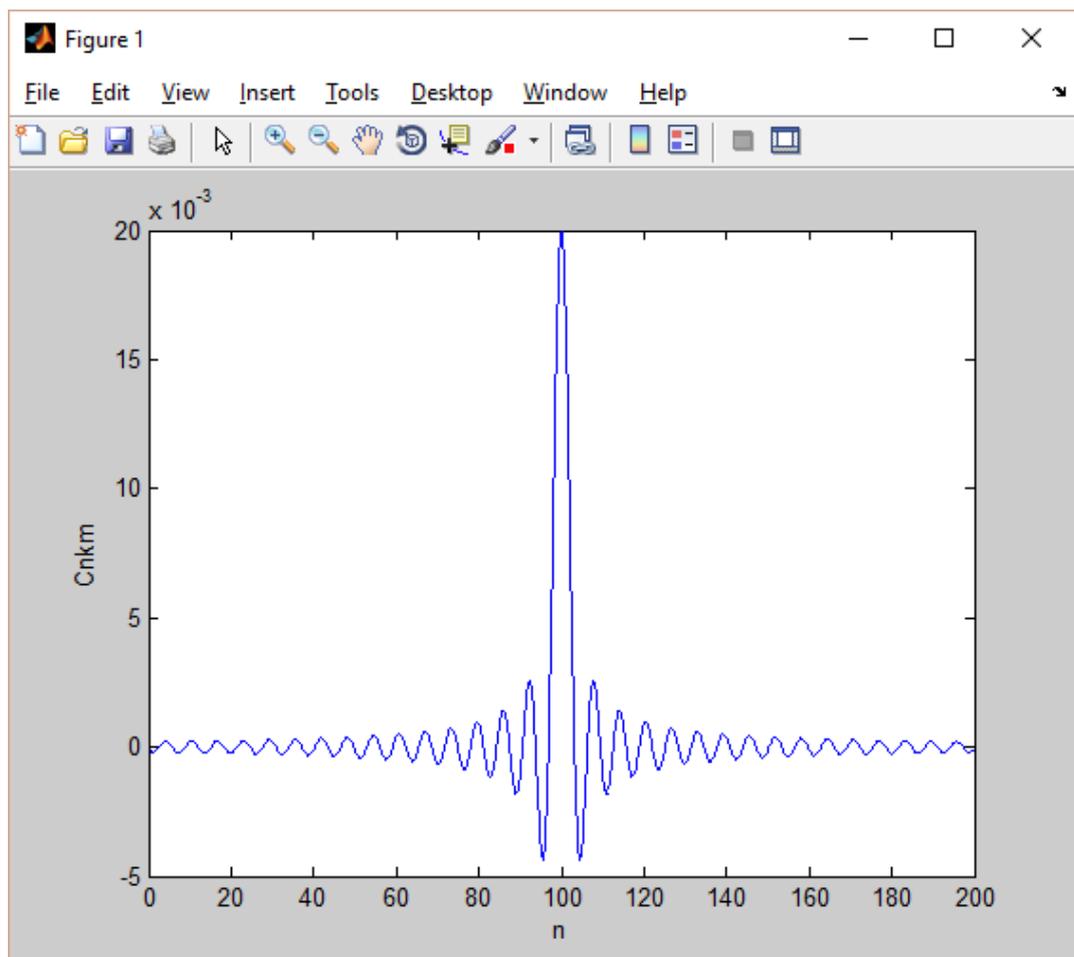


Рисунок 2.5 – График зависимости C_{nkm} от n

Таким образом, мы видим, что при таком выборе начальных данных Коши коэффициент Фурье при разложении в ряд по угловой переменной

имеет ярко выраженный максимум при заданном $N = 100$. Как показано выше, порядок Бесселевой функции в общем разложении решения по модам (см. формулу (26)) совпадает с номером Фурье коэффициента при разложении по углу. Поэтому такой выбор начальных данных отвечает доминированию моды с порядком Бесселевой функции $n = N$. Как показано выше, такие порядки соответствуют модам шепчущей галереи для звуковых волн, воспринимаемых человеком.

Итак, в разложении (27) имеем

$$C_{nkm} \propto \frac{1}{(N-n)} \sin(N-n)\varphi_0 \quad (35)$$

2.2 Выбор оптимальной среды программирования

При выборе оптимальной среды программирования для достижения поставленной цели будем ориентироваться на два аспекта.

Во-первых, для представленной работы важны стандартные математические функции, например такие как: квадратный корень и функция Бесселя. Время выполнения программы играет существенную роль, поскольку расчётные формулы достаточно громоздкие.

Рассмотрим таблицу 2.3, в которой исследуется сравнение различных программ по стандартным математическим функциям [14].

Таблица 2.3 – Сравнение математических программ по стандартным математическим функциям

Functions (Version)	GAUSS	Macysma	Maple	Mathe- matica	Matlab	MuPAD	O-Matrix	Ox	R-Lab	Scilab	S-Plus
	(3.2.38)	(2.4)	(V5.1)	(4.0)	(5.3)	(1.4.1)	(4.0)	(2.1)	(2.0.12)	(2.4.1)	(V4.5)
Square root	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Log / Ln / Exp	+/+/+	+/+/+	+/+/+	+/+/+	+/+/+	-+/+/+	+/+/+	+/+/+	+/+/+	+/+/+	+/+/+
Trig. functions	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Hyperbolic trig. function	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+
Gamma function	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+
Incomplete Gammafunc.	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-
Poly gamma	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-
Log-Gammafunc.	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+
Beta function	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
Bessell	+	+	+	+	+	-	-	+	-	+	-
Bessel J	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-
BesselK	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+	-
Bessel Y	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-
<i>Implemented functions</i>	86.67% (13/15)	100.00% (15/15)	100.00% (15/15)	100.00% (15/15)	93.33% (14/15)	80.00% (12/15)	66.67% (10/15)	100.00% (15/15)	33.33% (5/15)	80.00% (12/15)	53.33% (8/15)

Таким образом, мы видим, что в среде MatLab присутствуют необходимые для реализации поставленных задач пункты.

Во-вторых, для данной работы важен процесс построения графиков и визуализации объёмных фигур [5]. Несколько графиков должны быть изображены на одном листе, при этом должна быть возможность их подписать и раскрасить в свой цвет. Для построения цилиндрического резонатора необходим 3D формат и должен быть осуществлён выбор ракурса обзора фигуры [15].

Рассмотрим таблицу 2.4, на которой исследуется сравнение различных программ по возможным графическим видам.

Таблица 2.4 – Сравнение математических программ по возможным графическим видам

Functions (Version)	GAUSS	Mapcsyma	Maple	Mathe- matica	Matlab	MaPAD	O-Matrix	Ox	R-Lab	Scilab	S-Plus
	(3.2.38)	(2.4)	(V5.1)	(4.0)	(5.3)	(1.4.1)	(4.0)	(2.1)	(2.0.12)	(2.4.1)	(V4.5)
<i>2D-Graphics</i>											
Area charts	.	.	.	+	+	+
Bar charts	+	+	+	+	+	+	+	.	.	.	+
Bubble Plot	+	.	.	+
Other charts	+	.	.	+	+	.	+	+	.	+	+
Error bars	.	.	.	+	+	.	+	+	.	+	+
High-Low-Average Plot	.	.	.	m	m	+
Histograms	+	+	+	+	+	.	+	+	.	+	+
Log Plot	+	+	+	+	+	+	+	.	.	+	+
Log-log Plot	+	+	+	+	+	+	+	.	.	+	+
Pie charts	.	.	.	+	+	+	+
Polar Plot	+	+	+	+	+	+	+	.	.	.	+
Weibull Plot	m
X-Y Plot	+	+	+	+	+	+	+	+	.	+	+

Таким образом, мы видим, что в среде MatLab присутствуют необходимые для реализации поставленных задач пункты.

Итак, оптимальная среда программирования выбрана. Дадим основные понятия и команды.

MatLab(MATrixLABoratory) – универсальная, математическая среда, имеющая свой язык программирования, предназначенная для решения инженерных задач. Эта система имеет множество стандартных функций, математических операций, графических средств.

Если существует определённое условие, при выполнении которого должны происходить действия, то следует использовать следующую конструкцию, которую показывает рисунок 2.6.

```
if (условие)
команды;
end
```

Рисунок 2.6 – Условие на языке MatLab

Если определённое действие должно повториться несколько раз, то следует использовать следующую конструкцию, которую показывает рисунок 2.7.

```

for N=start:step:final
команды;
end

```

Рисунок 2.7 – Цикл на языке MatLab

N – счётчик цикла;
start – начальное значение;
step – шаг изменения;
final – конечное значение.

Графика в этой среде может быть проиллюстрирована весьма мощно. Существуют команды для визуализации двумерных и трёхмерных изображений.

Для построения графика в 2D существуют следующая команда: plot(x,y) – график будет изображен в линейном масштабе

Для построения графика, плоскости или изображения в 3D существуют следующая команда: plot3(x,y,z) – построение линий и точек в трехмерном пространстве.

Для создания надписей и пояснений к графикам следует применять следующие команды:

- title – заголовки для графиков;
- xlabel, ylabel, zlabel – обозначение осей;
- text – добавление к текущему графику текста;
- legend – пояснение к графику;
- alpha – прозрачность.

2.4 Построение «волнового фронта» в цилиндрическом резонаторе

Напомним, что частными решениями волнового уравнения (1) являются выражения (2). Решением уравнения Гельмгольца (3) является выражение вида (11). Таким образом, подставив (11) в (2) получаем

$$U = J_n \left(b_k^{(n)} \frac{\rho}{R} \right) e^{i(n\varphi \pm \omega_{nk} m t)} \sin \left(\pi m \frac{z}{H} \right) \quad (36)$$

Понятие волнового фронта вводится для плоских (а также близких к ним) волн (волны, у которых фронт имеет форму плоскости).

Для волн в резонаторе, строго говоря, понятия волнового фронта не существует. В данной работе мы условно определяем «волновой фронт» как геометрическое место точек, удовлетворяющих условию

$$n\varphi - \omega_{nkm}t + \pi m \frac{z}{H} = \text{const}, \quad (37)$$

где ω_{nkm} – частота волны,

t – задано.

$$\text{Так как } k^2 + h^2 = \lambda^2 \Rightarrow k = \sqrt{\lambda^2 + h^2},$$

где $h = \frac{\pi m}{H}$, как следует из соотношения (13), а

$$\lambda = \frac{b_k^{(n)}}{R} \text{ из формулы (15).}$$

Учитывая формулу для волнового числа,

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (38)$$

Получаем формулу допустимых частот:

$$\omega_{nkm} = v \sqrt{\left(\frac{b_k^{(n)}}{R}\right)^2 + \frac{\pi^2 m^2}{H^2}} \quad (39)$$

Таким образом, каждой моде (решению задачи Дирихле) соответствует своя частота для волнового уравнения, характеризующаяся тройкой n, k, m . Поскольку скорость распространения «волнового фронта» по угловой переменной обратно пропорциональна частоте, мы имеем дисперсию мод.

Начнём с визуализации волнового фронта с фиксированной частотой, позже перейдём к их дисперсии. Таким образом, для первой задачи тройка чисел n, k, m будет постоянной. Волновой фронт будет строиться по одной частоте, следовательно, с одной скоростью распространения волн.

Предварительно нужно построить цилиндрический резонатор, в котором позже будет распространяться волновой фронт. Для этого

необходимо воспользоваться вспомогательной командой `cylinder` в программной среде MatLab. При этом задаём радиус цилиндра и количество его рёбер. Для того чтобы было возможно рассмотрение волн внутри резонатора, его стенки должны быть прозрачными. На рисунке 2.8 представлен фрагмент кода для построения цилиндрического резонатора. Зелёным цветом выделены комментарии к программе.



```

>> %10-радиус,30-количество стенок
[X,Y,Z]=cylinder(10,30);
%выводит на экран сетчатую поверхность для значений массива Z, определенных на множестве значений массива X
surf(X, Y, Z*10,X)
%прозрачность
alpha .0
%размещение шкалы
colorbar
%цвет комнаты
colormap(white)
title('Комната')
%подпись осей
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')

```

Рисунок 2.8 – Фрагмент кода для построения цилиндрического резонатора

После компиляции кода мы получаем прозрачный цилиндрический резонатор с $R = 10$ и $H = 10$, расположенный в координатных осях x, y, z . Он представлен на рисунке 2.9.

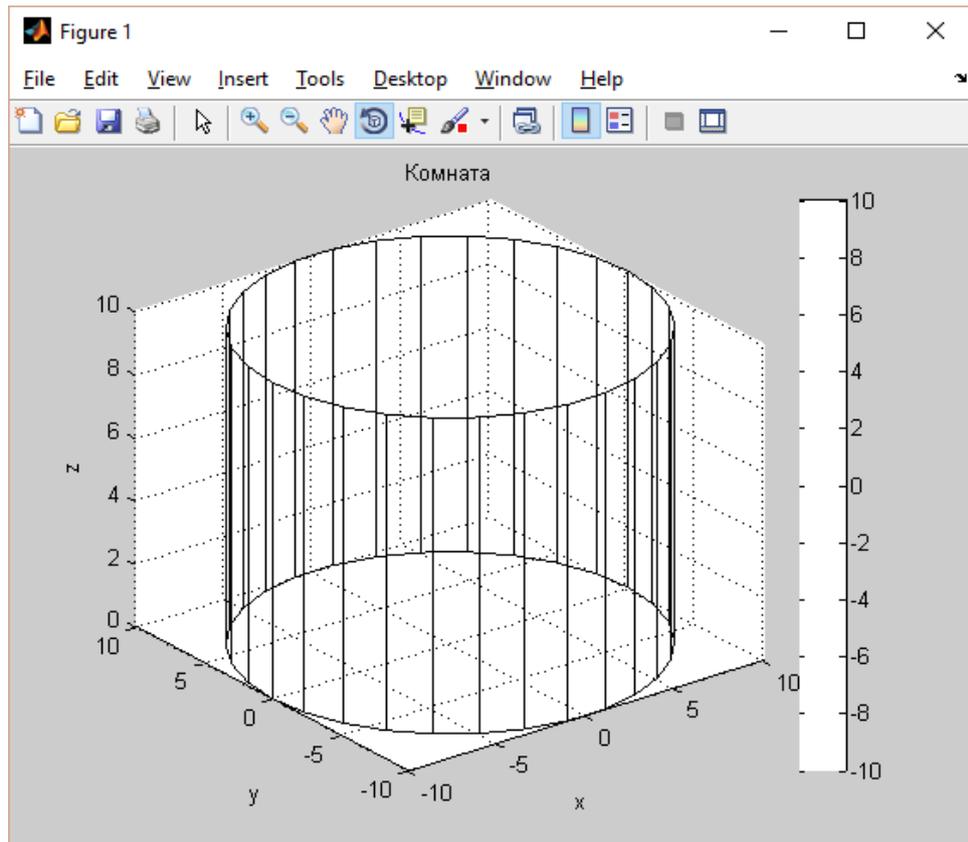


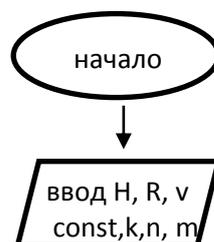
Рисунок 2.9 – Цилиндрический резонатор

Для того чтобы показать как распространяется волновой фронт одной частоты в цилиндрическом резонаторе, построим рисунок 2.10.

Для начала нужно ввести начальные значения для H , R , const , v , k , n , m . После этого, запустить три цикла: первый – для отсчёта времени, второй – для распространения волн от $0.7R$ до R , третий – для распространения волн по всей высоте резонатора. Для каждого значения высчитываем значение φ , а потом находим цилиндрические координаты X, Y, Z по формулам

$$X = \rho \cos \varphi, Y = \rho \sin \varphi, Z = z \quad (40)$$

Затем, по найденным координатам строим волновой фронт, распространяющийся со временем вдоль стен резонатора.



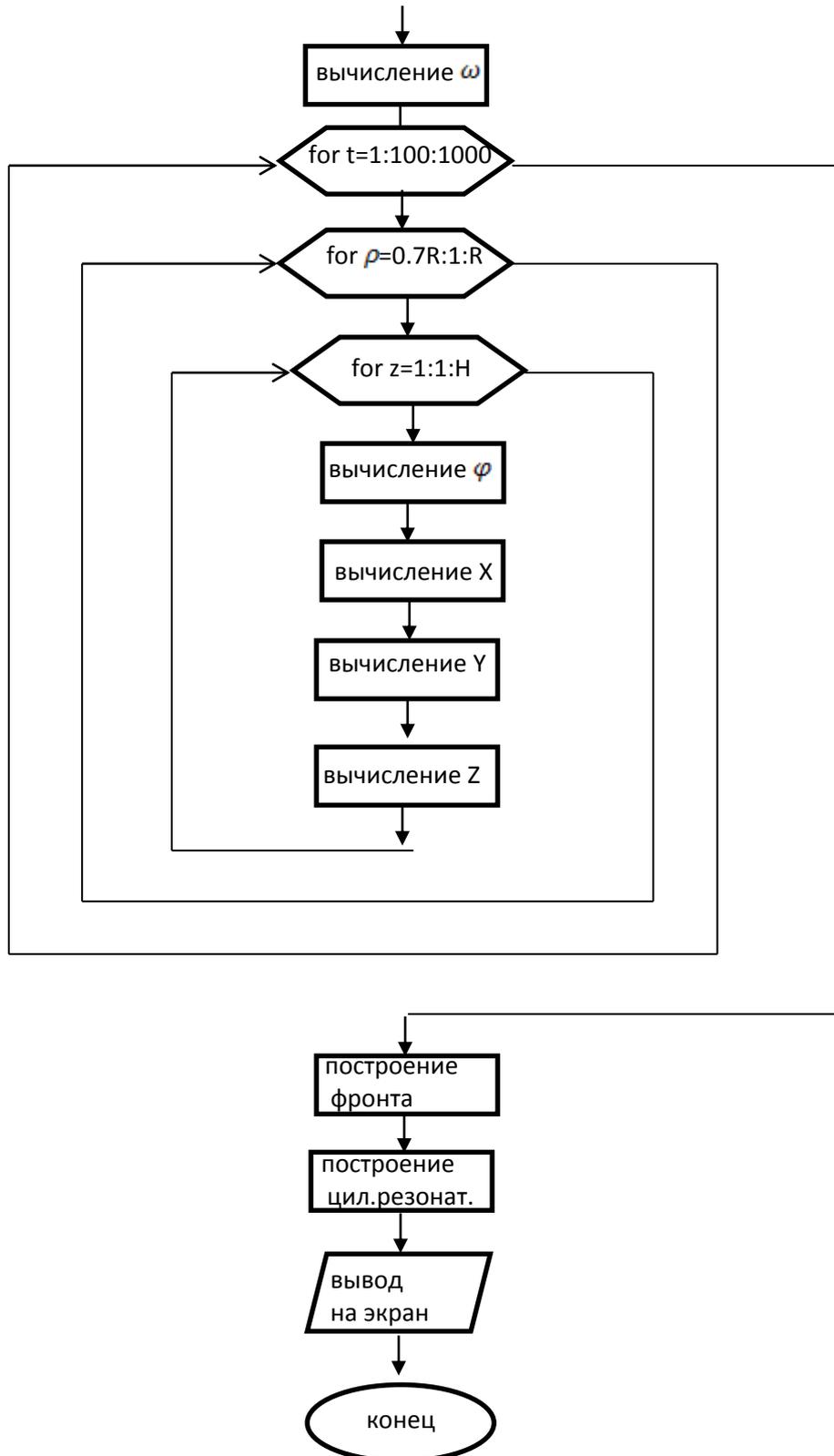
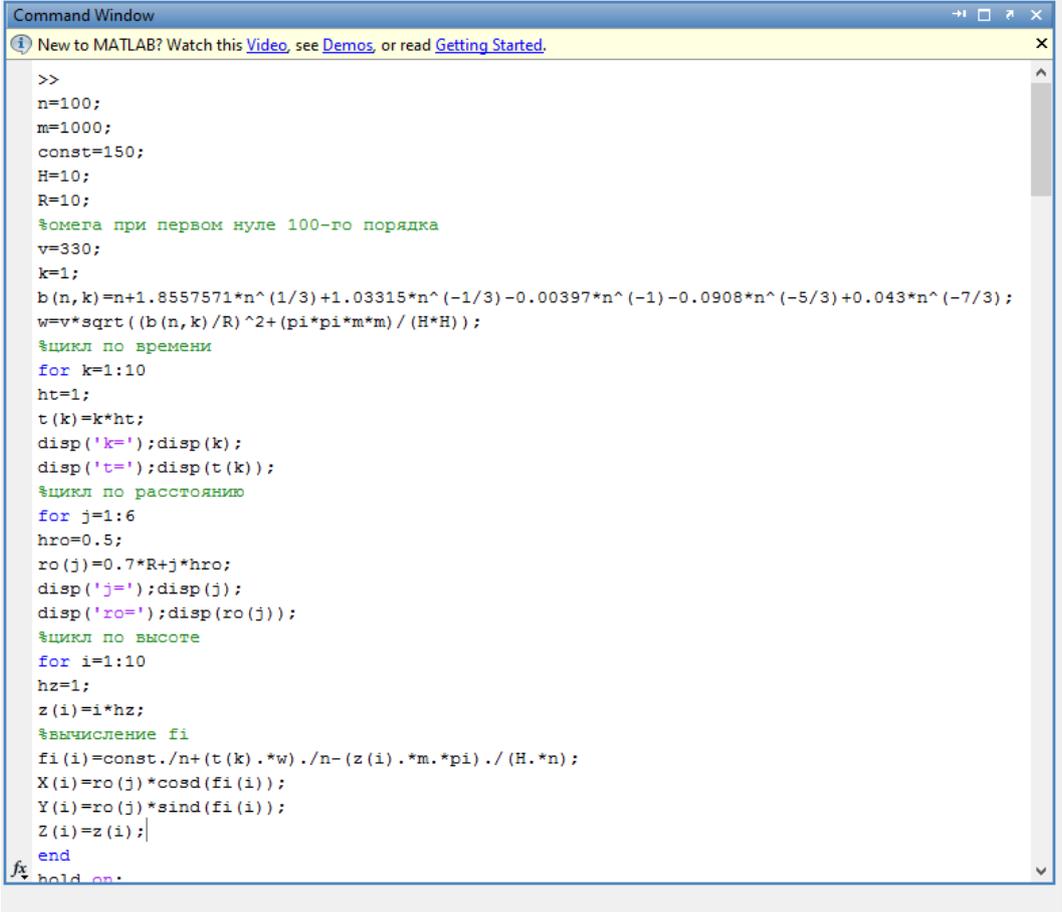


Рисунок 2.10 – Алгоритм визуализации волнового фронта одной частоты

Приведём рисунок 2.11, на котором изображён фрагмент кода для визуализации волнового фронта одной частоты.

После введения начальных значений высчитывается частота, при которой будет построен волновой фронт. Далее запускаются три цикла и рассчитываются цилиндрические координаты.



```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>>
n=100;
m=1000;
const=150;
H=10;
R=10;
%омега при первом нуле 100-го порядка
v=330;
k=1;
b(n,k)=n+1.8557571*n^(1/3)+1.03315*n^(-1/3)-0.00397*n^(-1)-0.0908*n^(-5/3)+0.043*n^(-7/3);
w=v*sqrt((b(n,k)/R)^2+(pi*pi*m*m)/(H*H));
%цикл по времени
for k=1:10
ht=1;
t(k)=k*ht;
disp('k=');disp(k);
disp('t=');disp(t(k));
%цикл по расстоянию
for j=1:6
hro=0.5;
ro(j)=0.7*R+j*hro;
disp('j=');disp(j);
disp('ro=');disp(ro(j));
%цикл по высоте
for i=1:10
hz=1;
z(i)=i*hz;
%вычисление fi
fi(i)=const./n+(t(k).*w)./n-(z(i).*m.*pi)./(H.*n);
X(i)=ro(j)*cosd(fi(i));
Y(i)=ro(j)*sind(fi(i));
Z(i)=z(i);
end
hold on;

```

Рисунок 2.11 – Фрагмент кода для визуализации волнового фронта одной частоты

После компиляции кода мы получаем движение волнового фронта в цилиндрическом резонаторе.

Рассмотрим рисунок 2.12, на котором изображен волновой фронт в цилиндрическом резонаторе, и рисунок 2.13, который показывает вид сверху.

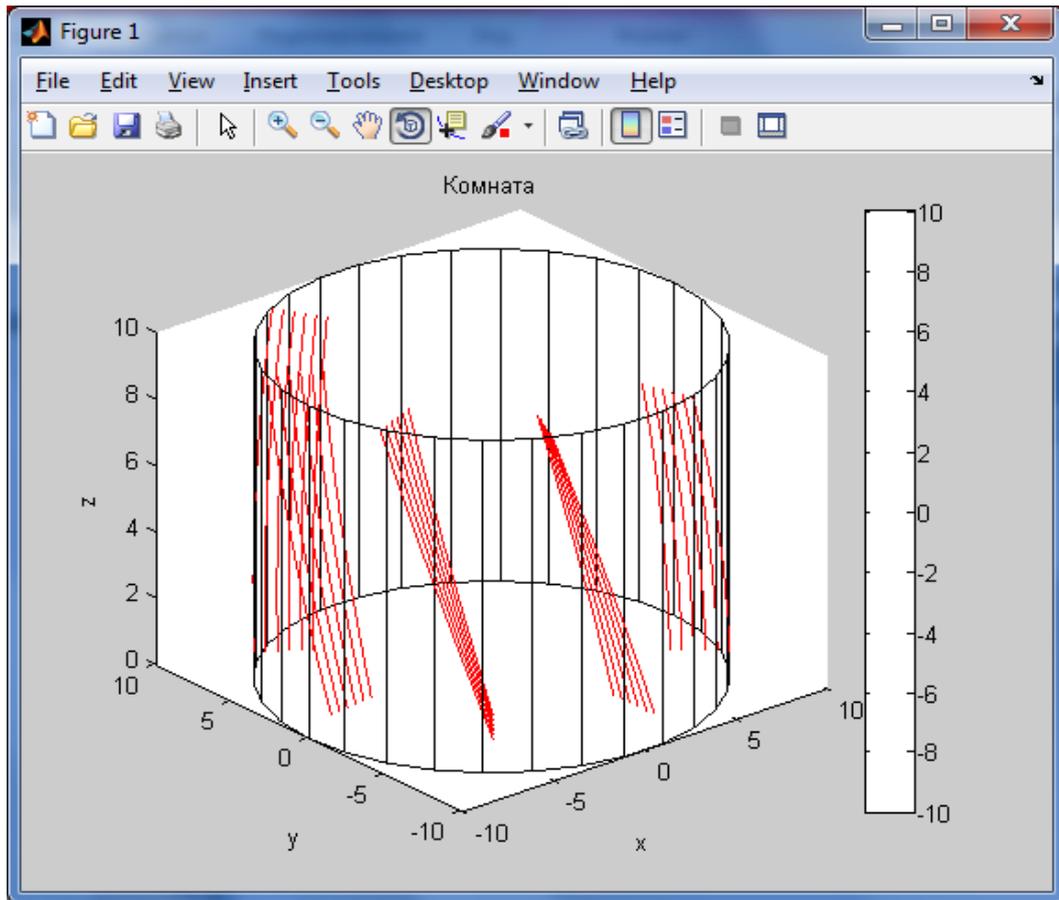


Рисунок 2.12 – Волновой фронт в цилиндрическом резонаторе

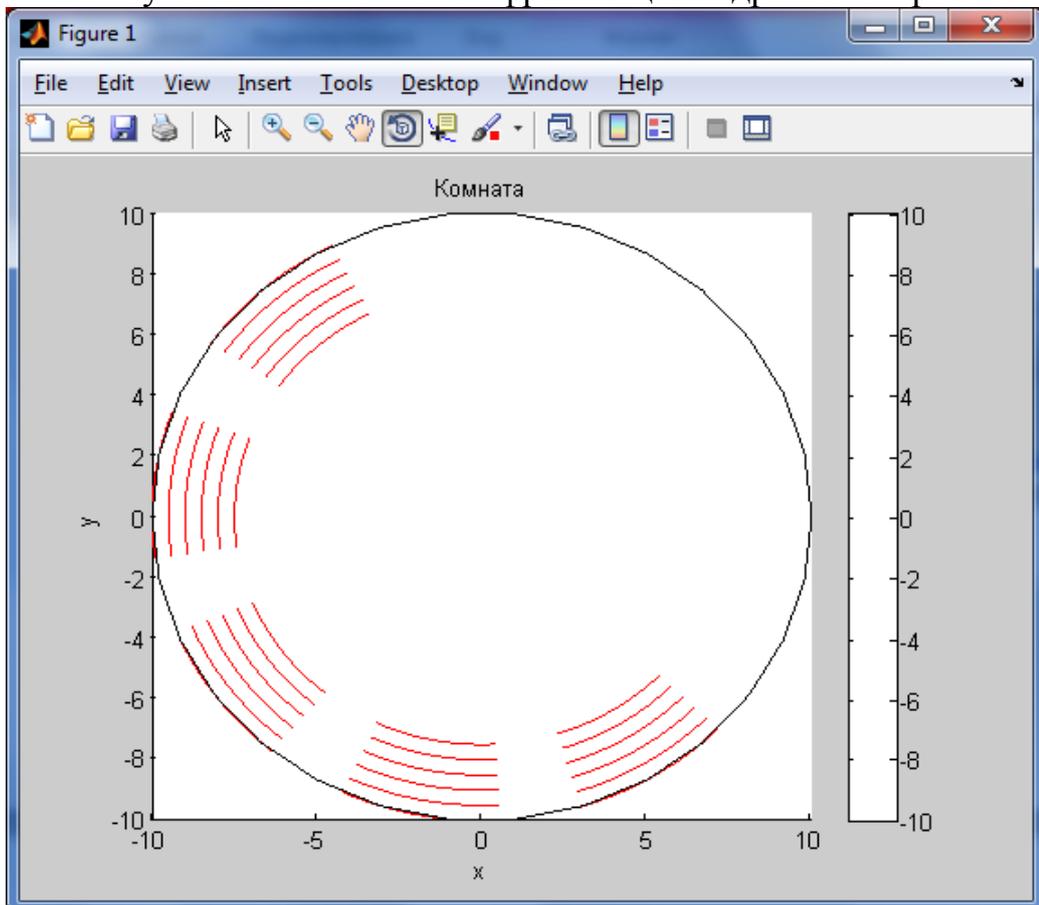


Рисунок 2.13 – Волновой фронт вид сверху

Таким образом, мы видим, что волны шепчущей галереи распространяются вдоль стен и по всей высоте резонатора, со временем двигаясь по всему пространству внутри, но на расстоянии $0.7R$ до R .

При этом можно рассмотреть дисперсию волн, используя различные моды, то есть различные частоты распространяющихся волн.

В таблице 2.5 представлены заданные значения n, m .

Таблица 2.5 – Заданные значения n, m

n	m
100	500
600	1500
1100	2500

Если $n=100, m=500$, то цвет красный.

Если $n=600, m=1500$, то цвет зелёный.

Если $n=1100, m=2500$, то цвет синий.

Для того чтобы достигнуть визуализации волновых фронтов с различными частотами, построим рисунок 2.14.

Для начала нужно ввести начальные значения для H, R, const, v, k . После этого, запустить три цикла: первый – для отсчёта времени, второй – для распространения волн на расстоянии от $0.7R$ до R , третий – для распространения волн по всей высоте резонатора. Вводим значения $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$, для которых будем высчитывать частоты. Для каждой получившейся частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ высчитываем значение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, а потом находим цилиндрические координаты X, Y, Z по формулам (40).

Затем, по найденным координатам строим три волновых фронта с различными частотами, распространяющихся со временем вдоль стен резонатора.

При этом они должны иметь различные цвета, а начинать своё движение одновременно.

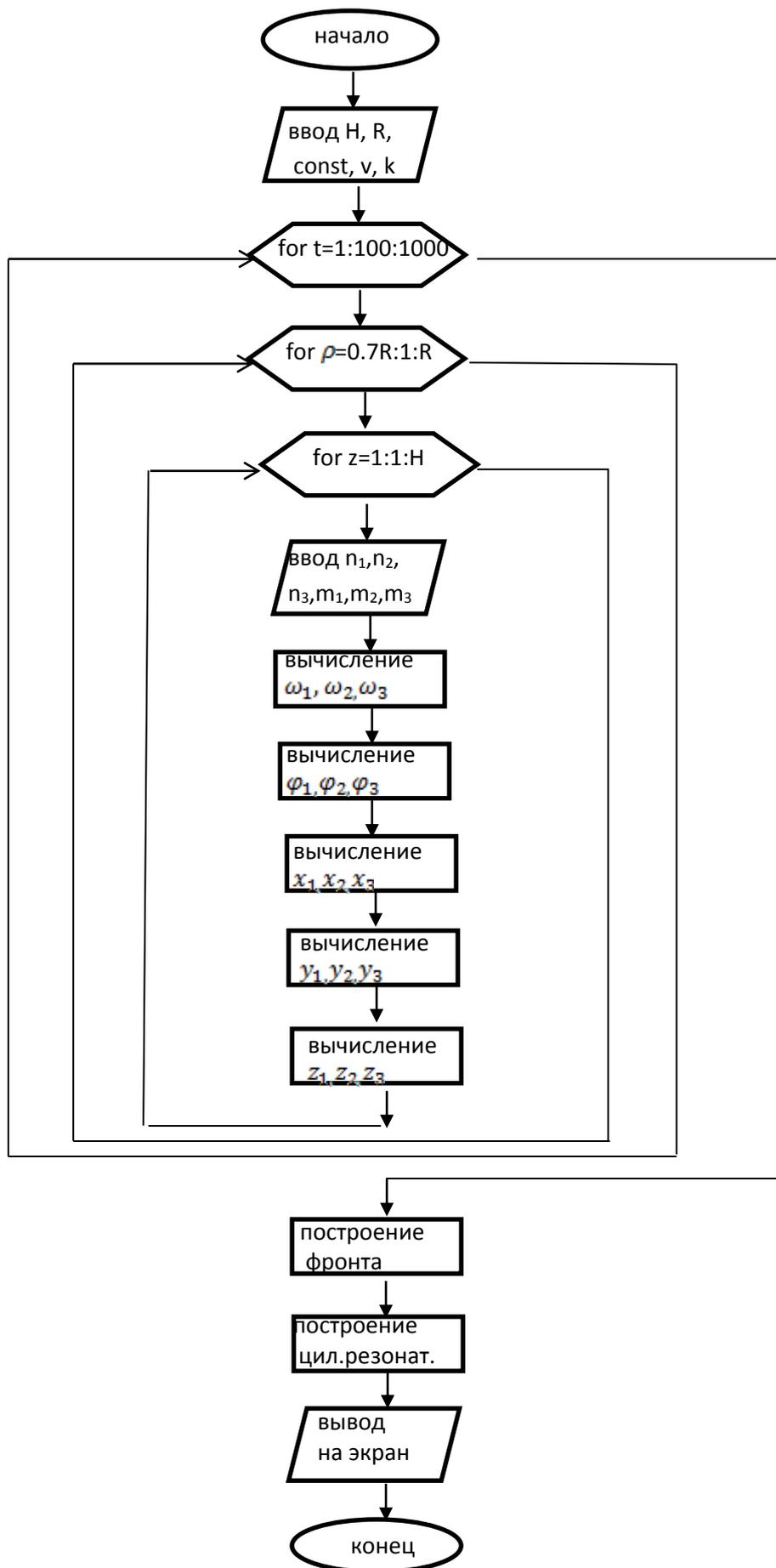
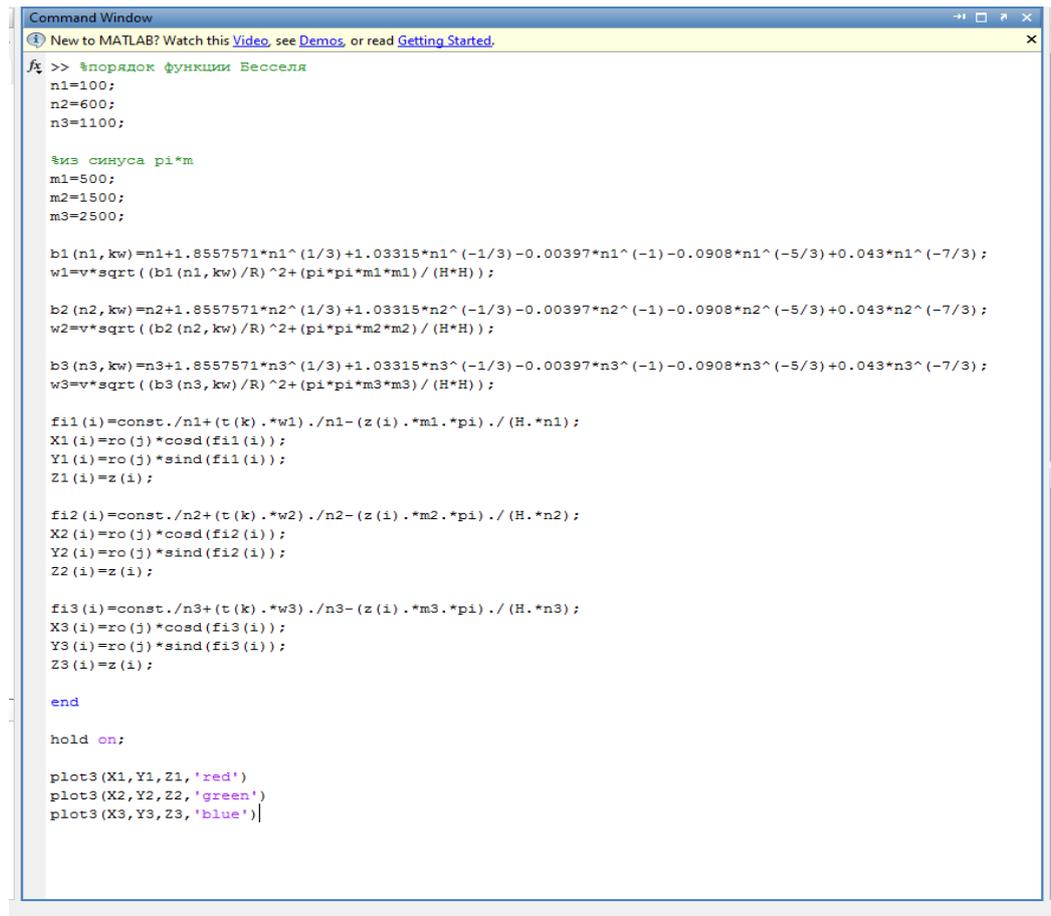


Рисунок 2.14 – Алгоритм визуализации волнового фронта разных частот

Приведём рисунок 2.15, на котором изображён фрагмент кода для визуализации волнового фронта разных частот.

После введения начальных и выполнения трёх циклов вводятся различные порядки функции Бесселя, для дальнейшего вычисления частот, по которым будут построены волновые фронты трёх цветов: красный, зелёный, синий.



```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> %порядок функции Бесселя
n1=100;
n2=600;
n3=1100;

%из синуса pi*m
m1=500;
m2=1500;
m3=2500;

b1(n1, kw)=n1+1.8557571*n1^(1/3)+1.03315*n1^(-1/3)-0.00397*n1^(-1)-0.0908*n1^(-5/3)+0.043*n1^(-7/3);
w1=v*sqrt((b1(n1, kw)/R)^2+(pi*pi*m1*m1)/(H*H));

b2(n2, kw)=n2+1.8557571*n2^(1/3)+1.03315*n2^(-1/3)-0.00397*n2^(-1)-0.0908*n2^(-5/3)+0.043*n2^(-7/3);
w2=v*sqrt((b2(n2, kw)/R)^2+(pi*pi*m2*m2)/(H*H));

b3(n3, kw)=n3+1.8557571*n3^(1/3)+1.03315*n3^(-1/3)-0.00397*n3^(-1)-0.0908*n3^(-5/3)+0.043*n3^(-7/3);
w3=v*sqrt((b3(n3, kw)/R)^2+(pi*pi*m3*m3)/(H*H));

f11(i)=const./n1+(t(k).*w1)./n1-(z(i).*m1.*pi)/(H.*n1);
X1(i)=ro(j)*cosd(f11(i));
Y1(i)=ro(j)*sind(f11(i));
Z1(i)=z(i);

f12(i)=const./n2+(t(k).*w2)./n2-(z(i).*m2.*pi)/(H.*n2);
X2(i)=ro(j)*cosd(f12(i));
Y2(i)=ro(j)*sind(f12(i));
Z2(i)=z(i);

f13(i)=const./n3+(t(k).*w3)./n3-(z(i).*m3.*pi)/(H.*n3);
X3(i)=ro(j)*cosd(f13(i));
Y3(i)=ro(j)*sind(f13(i));
Z3(i)=z(i);

end

hold on;

plot3(X1, Y1, Z1, 'red')
plot3(X2, Y2, Z2, 'green')
plot3(X3, Y3, Z3, 'blue')

```

Рисунок 2.15 – Фрагмент кода для визуализации волнового фронта разных частот

После компиляции кода мы получаем одновременное движение трёх волнового фронтов в цилиндрическом резонаторе.

Рассмотрим рисунок 2.16, на котором изображены волновые фронты в цилиндрическом резонаторе, и рисунок 2.17, который показывает вид сверху.

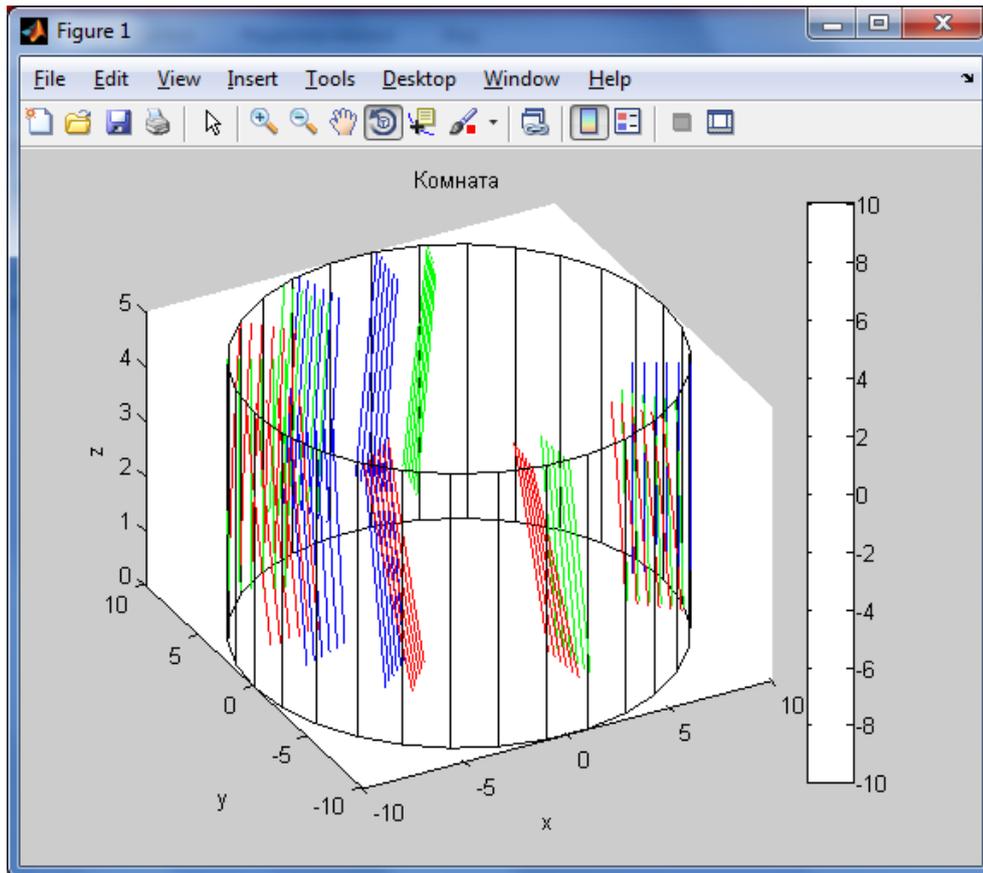


Рисунок 2.16 – Волновые фронты в цилиндрическом резонаторе

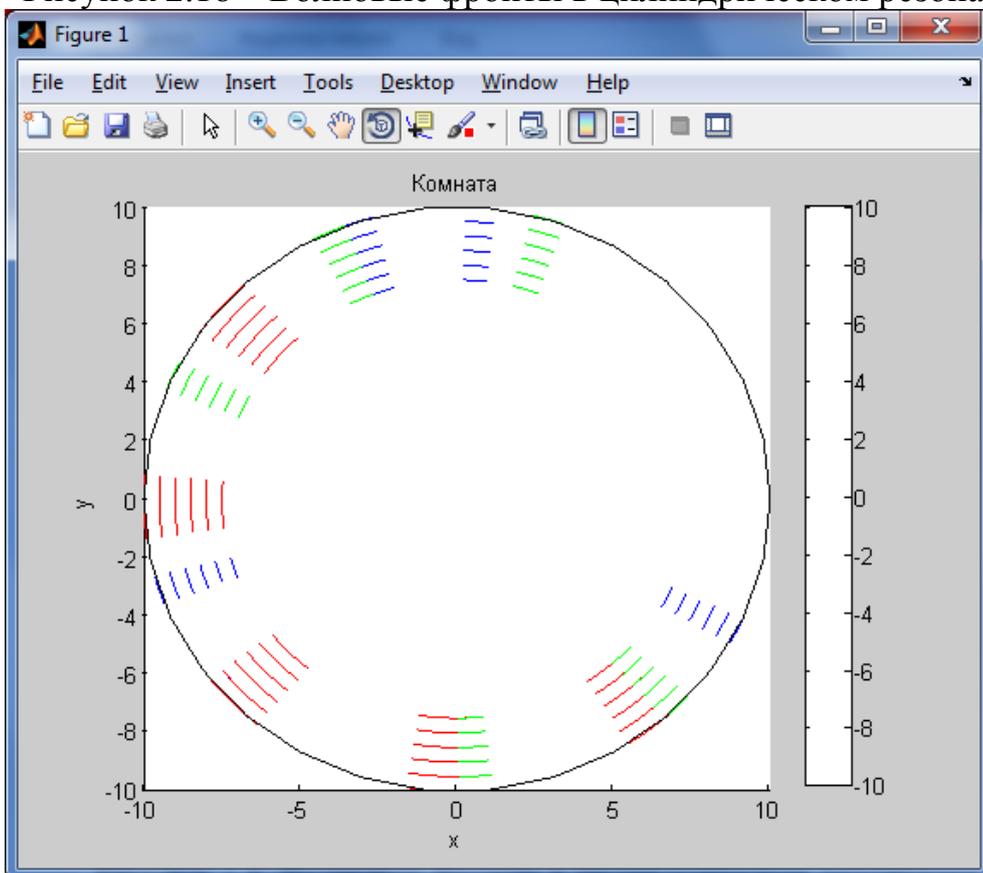


Рисунок 2.17 – Волновые фронты вид сверху

Таким образом, мы видим, что волны шепчущей галереи трёх фронтов (условно выбранных нами для наглядности) распределяются по цилиндрическому резонатору с разными скоростями в зависимости от соответствующих им частот.

Заключение

В ходе выпускной квалификационной работы было проведено численное исследование особенностей возникновения и распространения звуковых волн шепчущей галереи акустического диапазона в цилиндрическом резонаторе при начальных условиях специального вида.

В результате исследования были найдены все частные решения краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в цилиндрическом резонаторе высоты H и радиуса R .

При этом выявлены критерии, согласно которым отдельные найденные моды могут быть классифицированы как моды шепчущей галереи, учитывая особенности восприятия человеком звуковых волн (интенсивность болевого порога и порога слышимости).

Также определены начальные данные задачи Коши для волнового уравнения, при которых возможен эффект возникновения шепчущей галереи.

Одним из итогов проделанной работы является также визуализация эффекта шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе. Для этого был введён аналог понятия волнового фронта для решений, которые были найдены.

Список используемой литературы

1. Бутко, Я.А. Элементы функционального анализа и методы математической физики: учеб. пособие/ Я.А. Бутко. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана (Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана), 2011. – 68 с.
2. Городецкий, М.Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью/ М.Л. Городецкий. – Монография – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
3. Горюнов, А.Ф. Методы математической физики в примерах и задачах: учеб. пособие / А.Ф. Горюнов. – М. : Физматлит, 2015. – 868 с.
4. Гринченко, В.Т. Основы акустики: учеб. пособие/ В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура.– Киев: Наукова думка, 2007. – 640 с.
5. Дьяконов, В. П. MATLAB: Самоучитель / В. П. Дьяконов. – ДМК Пресс, 2009. – 768 с.
6. Кафтанова, Ю.В. Специальные функции математической физики/ Ю.В. Кафтанова. – «Новое слово». – Харьков, 2009. – 91 с.
7. Кондратьев, Н. М. Электрооптическое взаимодействие в резонаторах с модами шепчущей галереи и СВЧ модуляторы на его основе/ Н. М. Кондратьев, М. Л. Городецкий. – журнал радиоэлектроники, №11, 2012. – 8 с.
8. Ораевский, А. Н. К теории мод шепчущей галереи шарового слоя/ Д. В. Гузатов, А. Н. Ораевский.– Квантовая электроника, том 33, №4, 2003. – 8 с.
9. Полупроводниковые лазеры: физика и технология/ материалы 3–го симпозиума – Санкт-Петербург, 2012. – 70 с.
10. Поршневу, С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB/ С.В. Поршневу. – СПб.: Лань, 2011. – 727 с.
11. Прокопенко, Ю.В. Моды «шепчущей галереи» в полушаровом изотропном диэлектрическом резонаторе с идеально проводящей

- плоской поверхностью/ Ю.В. Прокопенко, Ю.Ф.Филиппов, И.А. Шипилова, В.М. Яковенко. – журнал технической физики, том 76, вып. 2, 2006. – 10 с.
12. Сахненко, Н. К. Установление волн шепчущей галереи в диэлектрическом цилиндре при возбуждении импульсным источником/ Н. К. Сахненко. – Всеукраинский межведомственный научно – технический сборник. – Харьков: ХНУР, 2008. – 355 с.
 13. Сухинин, С. Эффект шепчущей галереи/ С. Сухинин. – журнал «Наука из первых рук», №3, 2006. – 3 с.
 14. Тарасевич, Ю. Ю. Использование пакетов Maple, Mathcad и LATEX2 при решении математических задач и подготовке математических и естественно-научных текстов/ Ю.Ю. Тарасевич.– Либроком, 2009. – 136 с.
 15. Юшков, Ю.В. Инженерная и компьютерная графика/ Ю.В. Юшков.– Курс лекций. – Красноярск.: СибГТУ, – 2011. – 171 с.
 16. Giuseppe Annino, Mario Cassettari, and Massimo Martinelli: Study on planar whispering gallery dielectric.– March 05, 2002.
 17. Gorodetsky L., Fomin E.: Geometric optics of whispering gallery modes, 2006//arXiv:physics/0603050.
 18. Gorodetsky L., Fomin E.: Geometrical theory of whispering gallery modes, 2005//arXiv:physics/0509226.
 19. Matsko A. B., Savchenkov A. A., Ilchenko V. S., Seidel D., and Maleki L.: Opto-mechanics with surface acoustic wave whispering gallery modes, 2009//arXiv:0908.0306[physics.optics].
 20. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis. – Germany: University of Frankfurt, 1999. – p. 48.

**Реализация программного кода для визуализации волнового фронта
одной частоты**

```

n=100;
m=1000;
const=150;
H=10;
R=10;
%омега при первом нуле 100-го порядка
v=330;
k=1;
b(n,k)=n+1.8557571*n^(1/3)+1.03315*n^(-1/3)-0.00397*n^(-1)-0.0908*n^(-
5/3)+0.043*n^(-7/3);
w=v*sqrt((b(n,k)/R)^2+(pi*pi*m*m)/(H*H));
%цикл по времени
for k=1:10
ht=1;
t(k)=k*ht;
disp('k=');disp(k);
disp('t=');disp(t(k));
%цикл по расстоянию
for j=1:6
hro=0.5;
ro(j)=0.7*R+j*hro;
disp('j=');disp(j);
disp('ro=');disp(ro(j));

```

```

%ЦИКЛ ПО ВЫСОТЕ

for i=1:10

hz=1;

z(i)=i*hz;

%ВЫЧИСЛЕНИЕ fi

fi(i)=const./n+(t(k).*w)./n-(z(i).*m.*pi)./(H.*n);

X(i)=ro(j)*cosd(fi(i));

Y(i)=ro(j)*sind(fi(i));

Z(i)=z(i);

end

hold on;

plot3(X,Y,Z,'red')

end

hold on;

hM=plot3(X,Y,Z,'red')

pause(1)

refreshdata(hM)

end

hold on

%10-радиус,30-количество стенок

[X,Y,Z]=cylinder(10,30);

%ВЫВОДИТ НА ЭКРАН СЕТЧАТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ МАССИВА Z,
определенных на множестве значений массивов X и Y

surf(X, Y, Z*10,X)

%прозрачность

alpha .0

```

```
%размещение шкалы
```

```
colorbar
```

```
%цвет комнаты
```

```
colormap(white)
```

```
title('Комната')
```

```
%подпись осей
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
```

```
zlabel('z')
```

Реализация программного кода для визуализации дисперсии волновых фронтов

```
const=150;
H=5;
R=10;
v=330;
%kw-первый ноль функции Бесселя
kw=1;
%цикл по времени
for k=1:5
ht=1;
t(k)=k*ht;
%disp('k=');disp(k);
%disp('t=');disp(t(k));
%цикл по расстоянию
for j=1:6
hro=0.5;
ro(j)=0.7*R+j*hro;
%disp('j=');disp(j);
%disp('ro=');disp(ro(j));
%цикл по высоте
for i=1:5
hz=1;
z(i)=i*hz;
%порядок функции Бесселя
n1=100;
n2=600;
n3=1100;
```

```

m1=500;
m2=1500;
m3=2500;
b1(n1,kw)=n1+1.8557571*n1^(1/3)+1.03315*n1^(-1/3)-0.00397*n1^(-1)-
0.0908*n1^(-5/3)+0.043*n1^(-7/3);
w1=v*sqrt((b1(n1,kw)/R)^2+(pi*pi*m1*m1)/(H*H));
b2(n2,kw)=n2+1.8557571*n2^(1/3)+1.03315*n2^(-1/3)-0.00397*n2^(-1)-
0.0908*n2^(-5/3)+0.043*n2^(-7/3);
w2=v*sqrt((b2(n2,kw)/R)^2+(pi*pi*m2*m2)/(H*H));
b3(n3,kw)=n3+1.8557571*n3^(1/3)+1.03315*n3^(-1/3)-0.00397*n3^(-1)-
0.0908*n3^(-5/3)+0.043*n3^(-7/3);
w3=v*sqrt((b3(n3,kw)/R)^2+(pi*pi*m3*m3)/(H*H));
% частоты
disp('w1=');disp(w1);
disp('w2=');disp(w2);
disp('w3=');disp(w3);
disp('b1=');disp(b1(n1,kw));
disp('b2=');disp(b2(n2,kw));
disp('b3=');disp(b3(n3,kw));
fi1(i)=const./n1+(t(k).*w1)./n1-(z(i).*m1.*pi)/(H.*n1);
X1(i)=ro(j)*cosd(fi1(i));
Y1(i)=ro(j)*sind(fi1(i));
Z1(i)=z(i);
fi2(i)=const./n2+(t(k).*w2)./n2-(z(i).*m2.*pi)/(H.*n2);
X2(i)=ro(j)*cosd(fi2(i));
Y2(i)=ro(j)*sind(fi2(i));
Z2(i)=z(i);
fi3(i)=const./n3+(t(k).*w3)./n3-(z(i).*m3.*pi)/(H.*n3);
X3(i)=ro(j)*cosd(fi3(i));
Y3(i)=ro(j)*sind(fi3(i));

```

```
Z3(i)=z(i);
disp('i=');disp(i);
disp('fi1=');disp(fi1(i));
disp('fi2=');disp(fi2(i));
disp('fi3=');disp(fi3(i));
end
hold on;
plot3(X1,Y1,Z1,'red')
plot3(X2,Y2,Z2,'green')
plot3(X3,Y3,Z3,'blue')
end
hold on;
hM=plot3(X1,Y1,Z1,'red')
pause(1)
refreshdata(hM)
hN=plot3(X2,Y2,Z2,'green')
pause(1)
refreshdata(hN)
hF=plot3(X3,Y3,Z3,'blue')
pause(0.001)
refreshdata(hF)
end
hold on
% 10-радиус,30-количество стенок
[X,Y,Z]=cylinder(10,30);
%выводит на экран сетчатую поверхность для значений массива Z,
определенных на множестве значений массивов X и Y
surf(X, Y, Z*5,X)
%прозрачность
alpha .0
```

```
%размещение шкалы
```

```
colorbar
```

```
%цвет комнаты
```

```
colormap(white)
```

```
title('Комната')
```

```
%подпись осей
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
```

```
zlabel('z')
```