МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт **математики, физики и информационных технологий**

Кафедра **«Прикладная математика и информатика»**

01.03.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СИСТЕМНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Математическое моделирование конкуренции

Студентка	И.В Анопкина	______________
Руководитель	Г.А. Тырыгина	______________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой к.тех.н, доцент, А.В. Очеповский ________________

«_____»______________________20_____г.

Тольятти 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт **математики, физики и информационных технологий**
Кафедра **«Прикладная математика и информатика»**

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой«Прикладная
математика и информатика»
__________А.В.Очеповский

«____»____________2016 г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение бакалаврской работы

Студент_______Анопкина Илона Владимировна___________________________
1. Тема Математическое моделирование конкуренции___________
2. Срок сдачи студентом законченной бакалаврской: ______________________________24.06.2016_____________________________
3. Исходные данные к бакалаврской работе: Математическая модель Лотки–Вольтерра_________________________________
4. Содержание бакалаврской работы (перечень подлежащих разработке вопросов, разделов):

- Введение;
- Глава 1. Описание модели Лотки–Вольтерра и её модификаций;
- Глава 2. Математическое моделирование конкурентных процессов;
- Заключение;
- Список используемой литературы.

5. Ориентировочный перечень графического и иллюстративного материала: презентация Microsoft Power Point_______________________________________
6. Дата выдачи задания « 11 » января 2016 г.

Руководитель бакалаврской
работы ______________________ Г. А. Тырыгина

Задание принял к исполнению ______________________ И. В. Анопкина

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт **математики, физики и информационных технологий**

Кафедра **«Прикладная математика и информатика»**

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой«Прикладная
математика и информатика»
_________А.В.Очеповский

«____»___________2016 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН
выполнения бакалаврской работы

Студента______Анопкиной Илоны Владимировны________________________
по теме _______Математическое моделирование конкуренции______________

Наименование раздела работы	Плановый срок выполнения раздела	Фактический срок выполнения раздела	Отметка о выполнении	Подпись руководителя
Выбор и утверждение темы	11.01.2016	11.01.2016	Выполнено	
Поиск и изучение необходимого теоретического материала	23.01.2016	23.01.2016	Выполнено	
Написание введения	1.03.2016	1.03.2016	Выполнено	
Глава 1. Изучение классической модели Лотки–Вольтерра.	15.03.2016	15.03.2016	Выполнено	
Анализ существующих прикладных разработок на основе модели «хищник – жертва»	26.03.2016	26.03.2016	Выполнено	
Глава 2. Математическое моделирование конкурентных процессов	10.04.2016	10.04.2016	Выполнено	
Заключение и оформление	20.04.2016	20.04.2016	выполнено	

презентации				
Предзащита бакалаврской работы	30.05.2016	17.06.2016	Выполнено	
Проверка работы на наличие заимствованных частей (antiplagiat)	17.06.2016		Выполнено	
Сдача на кафедру отзыва научного руководителя и ознакомление с ним	20.06.2016	20.06.2016	Выполнено	
Сдача необходимого комплекта документов бакалаврской работы	24.06.2016	24.06.2016	Выполнено	
Защита бакалаврской работы	27.06.2016 – 30.06.2016	29.06.2016	Выполнено	

Руководитель бакалаврской работы ____________________ Г. А. Тырыгина

Задание принял к исполнению ____________________ И. В Анопкина

Аннотация

Тема: математическое моделирование конкуренции.

Объект исследования – математическая модель Лотки – Вольтерра.

Предмет исследования – математическая модель Лотки – Вольтерра, описывающая конкурентные процессы.

Целью работы является описание математических моделей конкурентных процессов в социально – экономической области на основе модели Лотки – Вольтерра.

Задачи:

1. Изучить основные типы биологического взаимодействия.
2. Изучить системы уравнений Лотки–Вольтерра.
3. Найти и описать математические модели конкурентных процессов на основе модели Лотки – Вольтерра.

Во введении определена актуальность темы, а так же цель исследования, изадачи, для её достижения.

В первой главе рассматриваются основные типы взаимодействия биологических популяций. Описывается классическая математическая модель Лотки – Вольтерра.

Вторая глава полностью посвящена описанию моделей конкурентных процессов на основе математической модели Лотки – Вольтерра.

В заключении подводится итог проделанной работы.

Бакалаврская работа состоит из 46 страниц, содержит 83 формулы, 4 рисунка и 1 таблицу. Список используемой литературы содержит 21 источник.

Оглавление

Введение

Модель Лотки – Вольтерра получившая огромную популярность и иногда называемая классической моделью взаимодействия популяций, позволяет решить многие практические задачи. Под популяцией понимается совокупность особей одного вида, длительное время занимающего определенное пространство. Уравнения Вольтерра послужили отправной точкой для создания большинства динамических моделей вплоть до сегодняшнего дня.

При исследовании динамики численности популяции и сообществ, плодотворными оказались методы общесистемного подхода. Один из них – выделение из системы составных структурных элементов, таких, как, принадлежащие различным трофическим уровням виды или возрастные и половые внутривидовые группы. Другой важный элемент системного подхода – установление характера процессов, в которых участвует каждый элемент (рост, размножение, хищничество, конкуренция). К биологическим системам применим принцип изоморфизма, позволяющий описывать исходными математическими уравнениями системы, разные по своей природе, но сходные по своей структуре и типу взаимодействия между элементами их составляющими. Поэтому представляется актуальным поиск и описание подходящих математических моделей конкурентных процессов на основе модели Лотки – Вольтерра в социально – экономической области.

При построении математических моделей в социально – экономической сфере, нужно учитывать, что большинство характеристик таких моделей нельзя определить точно. На их значения влияет «человеческий фактор» так как они являются результатом действий и решений множества людей, которые в одинаковых ситуациях ведут себя по-разному. Таким образом, социально – экономические модели по своей природе являются в той или иной степени неопределенными и описывают наиболее общие, осредненные закономерности.

Объект исследования – математическая модель Лотки – Вольтерра.

Предмет исследования – математическая модель Лотки – Вольтерра, описывающая конкурентные процессы.

Целью работы является описание математических моделей конкурентных процессов в социально – экономической области на основе модели Лотки – Вольтерра. Для этого определим следующие **задачи**:

1. Изучить основные типы биологического взаимодействия.

2. Изучить системы уравнений Лотки – Вольтерра.

3. Найти и описать математические модели конкурентных процессов на основе модели Лотки – Вольтерра.

Глава 1 Модель Лотки – Вольтерра

1.1 Классификация взаимодействий

Биологические популяции могут взаимодействовать между собой множеством различных способов с самыми различными последствиями для них. В биологической литературе принято классифицировать взаимодействия по биологическим процессам, которые в свою очередь могут быть симбионтными, конкурентными и т.д. Таким образом, получается, что единой классификации быть не может [1].

В 1949 году Хэснел предложил классифицировать взаимодействия между двумя видами, оценивая их как положительные, отрицательные или нейтральные. Оценка зависит от того, возрастает, убывает или остается неизменной численность популяции видов в присутствии друг друга.

Тип взаимодействий может изменяться на стадиях жизненного цикла или в зависимости от условий.

Рассмотрим отношения межвидовой конкуренции, ведущие к уменьшению численности обоих видов.

В отношениях типа «хищник–жертва» увеличение численности одного вида (хищника или паразита) ведет к уменьшению второго вида (жертвы или хозяина).

При симбионтных отношениях, ведущих к увеличению численности обоих видов, виды могут занимать совершенно независимые экологические ниши. Отсюда следует, что каждый вид можно рассматривать в отдельности.

Упрощенный вариант классификации представлен в следующей таблице:

Таблица 1.1 – Упрощенный вариант классификации типов взаимодействия популяций

		Воздействие вида 1 на вид 2		
		+	0	–
Воздействие вида 2 на вид 1	+	++	+0	+–
	0	0+	00	0–
	–	–+	–0	––

Для классификации взаимодействия между видами каждой паре видов рассматриваемого сообщества сопоставляется комбинация из двух символов: плюс («+»), ноль («0») или минус («–»), в зависимости от направления влияния численности одного на скорость роста другого вида. Эта классификация относится именно к случаю описания популяций на уровне полного популяционного агрегирование, так как проводится только в терминах численностей (плотностей) взаимодействующих популяций и их скоростей взаимодействия (коэффициентов прироста).

В результате получаем шесть категорий взаимодействий:

1. Симбиоз (++). Симбионтными отношениями между двумя видами называют взаимно положительное влияние, которое они оказывают на скорости прироста численности друг друга. Иногда в качестве синонима этого термина рассматривают понятие «мутуализма» двух видов.

2. Комменсализм (+0). К данной категории относят разнообразные случаи отношений между двумя видами, когда первый вид – «хозяин» – положительно воздействует на второй – «комменсал», хотя последний не оказывает никакого влияния на первый вид. Наиболее распространенная форма комменсализма состоит в том, что комменсал тем или иным способом получает от хозяина пищу, тем самым обеспечивая своё существование. Например, у льва имеется целый ряд комменсалов: гиены, шакалы и т.д.,

питающиеся объедками, которые оставляет этот хищник, но не приносящие этим ему пользы.

3. Хищник–жертва (+–). К этой категории отношений принадлежат любые отношения между двумя видами, при которых увеличение (уменьшение) численности одного вида («жертвы») ведет к увеличению (уменьшению) численности другого вида («хищника»). При этом увеличение (уменьшение) численности вида «хищника» ведет к уменьшению (увеличению) численности вида «жертвы».

4. Аммменсализм (0–). К этому виду взаимодействия относят межвидовые отношения, проявляющиеся в том, что один из видов взаимодействующей пары оказывает отрицательное влияние на численности второго, при этом сам не испытает существенного влияния с его стороны. Формально данные отношения описываются таким образом, что коэффициент прироста первого из видов тем меньше, чем больше численность другого, тогда как коэффициент прироста численности второго вида не зависит от численности первого.

5. Конкуренция (—). Конкуренцией называется любое взаимно отрицательное отношение между видами. Её частными случаями являются: конкуренция (в узком смысле) за тот или иной ограниченный ресурс, взаимное ингибирование (антагонизм) и непосредственная борьба между представителями разных видов (агрессия). Функции прироста коэффициентов численности этих двух видов монотонно убывают.

6. Нейтрализм (00). Популяции двух видов связаны отношениями нейтрализма, если они не оказывают непосредственного влияния друг на друга. Формально это выражается тем фактом, что скорости прироста каждого из видов не зависят от численностей этих видов. При этом косвенное влияние этих двух видов друг на друга может быть весьма существенным [10].

Пусть $N_1(t), N_2(t)$ –численности двух популяций. Введем понятия функции приспособленности для каждой из них:

$$\varepsilon_i(t,\theta,N_1,N_2,\dots) = \frac{1}{N_i}\dot{N}_i, \qquad i = 1,2. \tag{1.1}$$

В зависимости от того, каким фактором будет являться один вид для другого (нейтральным, лимитирующим или стимулирующим) можно описать основные типы взаимодействия: конкуренция, симбиоз, «хищник–жертва», нейтрализм.

Наиболее простой метод к построению математической модели межвидового взаимодействия заключается в том, что функции (1.1) предполагаются линейными по N_1 , N_2:

$$\begin{cases}\dot{N}_1 = (c_1 + a_{11}N_1 + a_{12}N_2)N_1 \\ \dot{N}_2 = (c_2 + a_{21}N_1 + a_{22}N_2)N_2\end{cases}. \tag{1.2}$$

Здесь $a_{12}N_1N_2$и $a_{22}N_1N_2$ в правой части системы соответствуют взаимодействию между видами. Предполагается, что скорость изменения численности видов от их взаимодействия пропорциональна вероятности встречи между особями двух видов, другими словами пропорциональна произведению N_1N_2.

Если рассматриваемые популяции конкурируют, то коэффициенты a_{12} и a_{21} отрицательны; если образуют симбиоз – положительны; если между популяциями уславливаются отношения типа «хищник–жертва», то – разных знаков.

c_1N_1 и c_2N_2 отражают интенсивность рождаемости или смертности отдельной популяции в отсутствии другой. Если коэффициент c_iположительный, то соответствующая популяция размножается в отсутствие другой, если отрицательный – вымирает. Наконец, члены $a_{11}N_1^2$и$a_{22}N_2^2$отражают факт внутривидовой конкуренции, поэтому a_{11} и a_{22}–отрицательны.

В соответствии с биологическим смыслом достаточно исследовать систему (1.2) только при $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$. Координатные оси ($N_1 = 0$ и $N_2 = 0$) являются инвариантными множествами системы (1.2). Поскольку правые части системы удовлетворяют условиям существования и единственности решений, то можно утверждать, что если начальные данные$N_1(0)$ и $N_2(0)$положительны, то и компоненты вектора решения $(N_1(t), N_2(t))^*$также остаются положительными при всех $t \geq 0$.Здесь и далее «звездочка» – транспонирование. Следовательно, и положительный ортант $(N_1 > 0, N_2 > 0)$ является для системы (1.2) инвариантным множеством.

Первые модели такого рода были рассмотрены А.Д. Лоткой (1925 г.) и В. Вольтерра (1926 г.).

Изученные В. Вольтерра системы описывают некоторые биологические виды, и запас пищи, который они используют. Приведем гипотезы В. Вольтерра, позволяющие описывать сложные биологические системы при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений [10]:

1. Пища либо имеется в неограниченных количествах, либо её поступление жестко ограничено.

2. Особи каждого вида отмирают так, что в единицу погибает постоянная доля особей.

3. Хищники поедают жертв. При этом количество съеденных жертв в единицу времени всегда пропорционально вероятности встречи хищников и жертв. То есть произведению количества хищников на количество жертв.

4. Если имеется неограниченное количество пищи и несколько видов, способных её потреблять, то доля пищи, то доля пищи, потребляемая в единицу времени каждым видом, пропорциональна количеству особей этого вида, взятого с некоторым коэффициентом вида (межвидовая конкуренция).

5. Если вид питается пищей, имеющейся в неограниченном количестве, прирост численности вида за единицу времени пропорционален численности вида.

6. Если вид питается имеющейся в неограниченном количестве пищей, то скоростью потребления пищи регулируется его размножение.

Прирост пропорционален количеству съеденной пищи за единицу времени [8].

1.2 Вольтерровские модели конкуренции

В случае конкуренции система уравнений (1.2) примет следующий вид [19]:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (c_1 - a_{11}N_1 - a_{12}N_2)N_1 \\ \dot{N}_2 = (c_2 - a_{21}N_1 - a_{22}N_2)N_2 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Приравняем правые части уравнений системы нулю, найдем её стационарные решения, те есть возможные стационарные численности этих видов. Их всего четыре. Первое решение:

$$\bar{N}_1^1 = 0,\ \bar{N}_2^1 = 0. \tag{1.4}$$

Оно будет неустойчивым узлом при любых коэффициентах системы. Второе решение соответствует нулевой численности вида:

$$\bar{N}_1^2 = 0,\ \bar{N}_2^2 = \frac{c_2}{a_{22}}. \tag{1 .5}$$

Определив местоположение особых точек, рассмотрим фазовый портрет системы (1.3). Для этого приравняем правые части системы уравнений (1.3) к нулю:

$$(c_1 - a_{11}N_1 - a_{12}N_2)N_1 = 0, \qquad (\dot{N}_1 = 0) \tag{1.6}$$

$$(c_2 - a_{21}N_1 - a_{22}N_2)N_2 = 0, \qquad (\dot{N}_2 = 0) \tag{1.7}$$

Получим уравнения для главных изоклин системы:

$$N_2 = -\frac{a_{21}N_1}{a_{22}} + \frac{c_2}{a_{22}}, \quad N_2 = 0 \tag{1.8}$$

– уравнение изоклин вертикальных касательных и

$$N_2 = -\frac{a_{11}N_1}{a_{12}} + \frac{c_1}{a_{12}}, \quad N_1 = 0 \tag{1.9}$$

– уравнение изоклин вертикальных касательных.

Точки попарного пересечения изоклин вертикальных и горизонтальных касательных систем представляют собой стационарное решение системы уравнений (1.3), а их координаты $\bar{N}_1^i, \bar{N}_2^i (i = 1 \div 4)$ суть стационарных численностей видов рассматриваемого биоценоза.

Если

$$\frac{c_1}{a_{12}} > \frac{c_2}{a_{22}}, \ \frac{c_1}{a_{11}} > \frac{c_2}{a_{21}} \ , \qquad (1.10)$$

то выживает только вид x_1. Если оба неравенства имеют противоположное значение, то выживает только вид x_2 .

Заменим неравенство (1.10) соотношениями

$$\frac{c_1}{a_{12}} > \frac{c_2}{a_{22}}, \frac{c_2}{a_{21}} > \frac{c_1}{a_{11}} \ , \qquad (1.11)$$

из которых следует неравенство

$$a_{12}a_{21} < a_{11}a_{22}. \qquad (1.12)$$

Неравенство (1.12) можно интерпретировать следующим образом.

Условием устойчивого сосуществования двух видов будет меньшая величина произведения коэффициентов межпопуляционного взаимодействия $a_{12}a_{21}$, по сравнению с произведением коэффициентов внутрипопуляционного,$a_{11}a_{22}$. Другими словами, в этом случае чрезмерно разросшаяся популяция сама ограничивает свой рост, давая тем самым возможность существовать соседней с ней популяции, пользующейся тем же источником питания, местами обитания или вступающей в иные конкурентные взаимоотношения [1].

Пусть естественные скорости роста двух видов c_1 и c_2 одинаковы. Тогда необходимым для устойчивости условием будут неравенства $a_{22} > a_{12}, a_{11} > a_{21}$. Эти неравенства показывают, что увеличение численности одного из конкурентов подавляет его собственный рост, чем рост другого конкурента. Если численность обоих видов ограничивается, полностью или частично, различными факторами и ресурсами, приведенные выше неравенства справедливы. Если же оба вида имеют совершенно одинаковые потребности, то один из них, оказавшись более жизнеспособным, вытеснит другого.

На этом основан принцип Гаузе (закон конкурентного исключения). Одна из формулировок этого принципа состоит в том, что два вида с одинаковыми экологическими потребностями не могут сосуществовать в пределах одного места обитания. Математическое доказательство этого принципа дано в книге В. Вольтерра (1976). Этот принцип позволил описать некоторые природные феномены.

Модель конкуренции (1.3) имеет недостатки, в частности из нее следует вывод, что сосуществование двух видов возможно лишь в том случае, если их численность ограничена различными факторами. Но эта модель не даёт никаких указаний на сколько величин должны быть эти различия для обеспечения длительного сосуществования. Модель подразумевает, что любого различия в соответствующих экологических потребностях достаточно, чтобы виды сосуществовали. Но для длительного сосуществования в изменчивой среде необходимо различие, достигающее определенной величины.

1.3 Система Лотки – Вольтерра «хищник – жертва»

Проведем анализ системы (1.2) на примере отношений типа «хищник–жертва». Пусть первая популяция служит пищей для второй, то есть $N_1(t)$– численность популяции жертв, а $N_2(t)$ –численность популяции хищников. В отсутствие хищников жертвы будут размножаться ($c_1 > 0$), а хищники в отсутствие жертв будут вымирать из–за отсутствия пищи ($c_2 < 0$) [17].

Встречи хищников и жертв благоприятны для хищников ($a_{21} > 0$)и неблагоприятны для жертв ($a_{12} < 0$). Для начала предположим, что внутривидовая конкуренция отсутсвует ($a_{11} = a_{22} = 0$). Таким образом, получим классическую модель Лотки–Вольтерра:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (c_1 + a_{12}N_2)N_1 \\ \dot{N}_2 = (c_2 + a_{21}N_1)N_2 \end{cases}, \tag{1.13}$$

где $c_1 > 0, c_2 < 0,\ a_{12} < 0,\ a_{21} > 0$.

Система (1.1) имеет два положительных равновесия: $M_0 = (0{,}0)^*$и $M_1 = (\overline{N}_1, \overline{N}_2)^*$, где $\overline{N}_1 = -\,c_2/a_{21}$, $\overline{N}_2 = -\,c_1/a_{12}$.

Система линейного приближения в окрестности точки M_0имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{N}_1 = c_1 N_1 \\ \dot{N}_2 = c_2 N_2\end{cases}. \tag{1.14}$$

Поскольку $c_1,\ c_2$имеют разные знаки, то это означает, что точкаM_0– неустойчивая особая точка типа «седло».

Теперь составим систему линейного приближения в окрестности точки M_1:

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_1 = -\frac{a_{12}c_2}{a_{21}}\varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{a_{21}c_1}{a_{12}}\varepsilon_1\end{cases}, \tag{1.15}$$

где $\varepsilon_1 = N_1 - \overline{N}_1,\ \varepsilon_2 = N_2 - \overline{N}_2$.

Матрица полученной линейной системы имеет чисто мнимые собственные числа. Таким образом, нельзя исследовать тип особой точки M_1и её устойчивость по линейному приближению.

Можем заметить, что у системы (1.13) существует интеграл

$$V(N_1, N_2) = N_1 - \overline{N}_1 - \overline{N}_1 \ln\frac{N_1}{\overline{N}_1} - \frac{a_{12}}{a_{21}}\left(N_2 - \overline{N}_2 - \overline{N}_2 \ln\frac{N_2}{\overline{N}_2}\right). \tag{1.16}$$

Введем полярные координаты с центром в точке M_1:

$$\begin{cases}N_1 = \overline{N}_1 + r\cos\varphi \\ N_2 = \overline{N}_2 + r\sin\varphi\end{cases} (r,\varphi) \in U, \tag{1.17}$$

где

$$U = \{(r,\varphi): r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi), \overline{N}_1 + r\cos\varphi > 0, \overline{N}_2 + r\sin\varphi > 0\}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим функцию $G(r,\varphi) = V(\overline{N}_1 + r\cos\varphi, \overline{N}_2 + r\sin\varphi)$. $G(0,\varphi) \equiv 0$.Несложно доказать, что $G(r,\varphi)$ строго возрастает по r при любом фиксированном φ из промежутка $[0, 2\pi)$. Таким образом, функция$G(r,\varphi) > 0$ при $r > 0$. Получается, что функция V удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об устойчивости.

Кроме того, $G(r,\varphi) \to \infty$ при приближении к границе области U. Значит, для любого $C > 0$ и любого $\hat{\varphi} \in [0,2\pi)$ существует единственное $\hat{r}$такое, что $G(\hat{r},\hat{\varphi}) = C, (\hat{r},\hat{\varphi}) \in U$. Получаем, что линии уровня$V(N_1, N_2) = Const > 0$.

Значит точка M_1– устойчивая особая точка типа «центр».

В результате исследования модели (1.13) В. Вольтерра сформулировал три закона [13].

1. Закон периодичности цикла: колебания численности двух видов являются периодическими с периодом, зависящим как от параметров системы, так и от начальных значений численностей.

2. Закон сохранения средних значений: средние значения численностей двух видов постоянны и не зависят от начальных численностей. Причем координаты точки M_1и являются этими средними значениями для N_1 и N_2соответственно.

Действительно, переписывая систему (1.13) в виде:

$$\frac{d\ln N_1}{dt} = c_1 + a_{12}N_2,\ \frac{d\ln N_2}{dt} = c_2 + a_{21}N_1, \tag{1.19}$$

и интегрируя её на промежутке $[0, T]$, где T – период колебаний, получим

$$0 = c_1T + a_{12}\int_0^T N_2(t)dt,\ 0 = c_2T + a_{21}\int_0^T N_1(t)dt. \tag{1.20}$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\frac{1}{T}\int_0^T N_1(t)dt = -\frac{c_2}{a_{21}},\ \frac{1}{T}\int_0^T N_2(t)dt = -\frac{c_1}{a_{12}}. \tag{1.21}$$

3. Закон смещения средних: пусть происходит внешнее истребление жертв и хищников, пропорциональное их количеству, то есть, система (1.13) выглядит:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (c_1 - \lambda_1 + a_{12}N_2)N_1 \\ \dot{N}_2 = (c_2 - \lambda_2 + a_{21}N_1)N_2 \end{cases}, \tag{1.22}$$

где $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ – коэффициенты истребления жертв и хищников.

Тогда если $\lambda_1 < c_1$, то в полученной системе сохранятся периодические колебания, только уже вокруг новой точки $(\frac{-c_2+\lambda_2}{a_{21}}, \frac{-c_1+\lambda_1}{a_{12}})^*$, это значит, что среднее число жертв увеличится, а среднее число хищников наоборот уменьшится.

Если $\lambda_1 > c_1$, то в отрицательном ортанте останется только нулевое положение равновесия, являющееся асимптотически устойчивым, то есть оба вида вымирают.

Отметим, что в основу модели положены следующие идеализированные представления о характере внутривидовых и межвидовых отношениях в системе хищник–жертва [20]:

1. В отсутствии хищника популяция жертвы распространяется экспоненциально.

2. Популяция хищника в отсутствии жертвы экспоненциально вымирает.

3. Суммарное количество жертвы, потребленное популяцией хищника в единицу времени, линейно зависит от плотности популяции жертвы, и от плотности популяции хищника.

4. Потребленная хищником биомасса жертвы перерабатывается в биомассу хищника с постоянным коэффициентом.

5. Какие либо дополнительные факторы, влияющие на динамику популяции, отсутствуют.

Основная особенность система Лотка – Вольтерра, благодаря которой она стала классической и в какой–то мере эталонной для многих последующих моделей математической биологии, состоит в том, что на основе упрощенных представлений о характере закономерностей, описывающих поведение системы, сугубо математическими средствами было выведено заключение о качественном характере поведения такой системы – о наличии в системе колебаний плотности популяций. Без построения математической модели и её исследования такой вывод сделать невозможно.

С биологической точки зрения недостатком модели является то, что в её рамки не включены принципиальные свойства, для любой пары взаимодействующих популяций по принципу хищник – жертва: эффект насыщения хищника, ограниченность ресурсов жертвы и т.п. [5].

Несмотря на то, что модель (1.13) объясняет многие реально наблюдавшиеся явления, у нее есть один большой недостаток – так называемая «негрубость». То есть, при любых сколь угодно малых возмущениях фазовых координат будет меняться цикл, по которому в сестеме присходят колебания. Это значит, что будет происходить перескок с одной траектории на другую. Кроме того, малые изменения правой части системы уравнений (1.13) могут приводить к изменению типа особой точки и, следовательно, характер фазовой траектории. Отсюда следует, что в рассмотренной модели отсутсвуют механизмы, сохраняющее её неривиальное устойчивое положение.

С целью устранения указанных недостатков были предложены различные модификации системы (1.13). Наиболее очевидной из них является модель, которая учитывает внутривидовую конкуренцию.

$$\begin{cases}\dot{N}_1 = (c_1 + a_{11}N_1 + a_{12}N_2)N_1 \\ \dot{N}_2 = (c_2 + a_{21}N_1 + a_{22}N_2)N_2\end{cases}, \qquad (1.23)$$

где $c_1 > 0, c_2 < 0, a_{12} < 0, a_{21} > 0, a_{11} < 0, a_{22} < 0$.

Система (1.23) в неотрицательном ортанте$(N_1 \geq 0, N_2 \geq)$ имеет не более трёх положений равновесия:

$$M_0 = (0{,}0)^*, M_1 = (c_1/a_{11}, 0)^*, M_2 = (N_1, N_2)^*, \qquad (1.24)$$

где $\overline{N}_1 = \frac{c_2a_{12} - c_1a_{22}}{\Delta}, \overline{N}_2 = \frac{c_2a_{21} - c_2a_{11}}{\Delta}$. $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

Из условий на коэффициенты следует, что точка M_2попадает в неотрицательный ортант, только если выполнено неравенство

$$c_1a_{21} - c_2a_{11} \geq 0, \qquad (1.25)$$

причем когда данное неравенство обращается в равенство, точка M_2 совпадает с точкой M_1.

Система линейного приближения, в окрестности положения равновесия M_2имеет следующие собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_{11}\overline{N}_1 + a_{22}\overline{N}_2 + \sqrt{(a_{11}\overline{N}_1 + a_{22}\overline{N}_2)^2 - 4\overline{N}_1\overline{N}_2\Delta}\right). \qquad (1.26)$$

Если выражение $(a_{11}N_1 + a_{22}N_2)^2 - 4\bar{N}_1\bar{N}_2\Delta$отрицательно, то M_2 особая точка типа устойчивый «фокус», если положительно – устойчивый «узел», если равно нулю – устойчивый «вырожденный узел». Значит, в любом случае положение равновесия M_2 асимптотически устойчиво.

Аналогичным образом доказывается, что положение равновесия M_0 всегда неустойчиво, а устойчивость точки M_1 будет определено знаком выражения $c_1a_{21} - c_2a_{11}$. Если это выражение отрицательно, то точка M_1 асимптотически устойчива, если положительно – не устойчива.

Исследование устойчивости системы (1.23) можно провести также с помощью метода Ляпунова. В частности, для доказательства асимптотической устойчивости точки M_2 (при $c_1a_{21} - c_2a_{11} > 0$) можно использовать ту же функцию Ляпунова V, что и раньше, только с новыми значениями $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$.

Несложно убедиться, что функция V положительно определена в окрестности точки M_2, а её производная в силу системы (1.23) отрицательно определена в окрестности этой точки. Таким образом, функция V удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [17].

Глава 2 Математическое моделирование конкурентных процессов

2.1 Модель Лотки – Вольтерра для описания социальных конкурентных процессов

2.1.1 Моделирование классовой борьбы

По своей сути модель Лотки–Вольтерра есть математическое описание дарвинского принципа борьбы за существование, который Чарлз Дарвин описал в своей автобиографии [16].

Для примера рассмотрим пример моделирования классовой борьбы на основе модели Лотки–Вольтерра «хищник–жертва».

Запишем уравнение модели «хищник–жертва» в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y_1 - y)x \\ \frac{dy}{dt} = -b(x - x_1)y \end{cases}, \tag{2.1}$$

где x, y – численность популяций,

x_1 и y_1 – их стационарные значения,

a и b – постоянные.

Эта модель используется для описания малых городских ареалов. В этом случае переменная x в системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y_1 - y)x \\ \frac{dy}{dt} = -b(x - x_1)y \end{cases} \tag{2.2}$$

означает площадь землепользования – земельную ренту, a, b, c, x_1, y_1 – некоторые параметры.

Интересное приложение модели описания классовой борьбы было дано Гудвином [1]:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = a - bP - c\varepsilon\rho, \frac{d\varepsilon}{dt} = r\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{K}\right) - d\varepsilon\rho \\ \frac{du}{dt} = \alpha - u - uv, \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим, следуя (2.3), два класса граждан: капиталистов и рабочих.

Рабочие тратят весь свой доход ωL на потребление, капиталисты накапливают свой доход $Y-\omega L$, где Y – продукция производства. Цена потребительских товаров, нормированная к единице.

Пусть K означает капитал, $a = a_0 e^{gt} = Y/L$ – производительность труда, возрастающую с постоянной скоростью $g, k = K/Y$ – коэффициент капиталоемкости продукции, $N = N_0 e^{nt}$ – предложение на рынке рабочей силы, которое увеличивается с темпом роста n. Для затрат на оплату труда по отношению к национальному доходу составляет $\frac{\omega L}{Y} = \frac{\omega}{a}$. Следовательно, доля прибыли капиталистов составляет $(1-\frac{\omega}{a})$. Поскольку сбережения можно определить как $S = Y - \omega L = \left(1-\frac{\omega}{a}\right)Y$, доля инвестиций составляет $\frac{dK}{dt} = S = \left(1-\frac{\omega}{a}\right)Y$ или $\left(\frac{dK}{dt}\right)\left(\frac{1}{K}\right) = (1-\frac{\omega}{a})(\frac{Y}{K})$; при этом выбытием капитала пренебрегаем.

При постоянном значении капиталозначимости $k = \frac{K}{Y}$получаем $\frac{dk}{dt} = 0$ и

$$Y\frac{dK}{dt} = K\frac{dY}{dt} \ . \qquad (2.4)$$

Далее, поскольку $a = a_0 e^{gt} = \frac{Y}{L}$, после дифференцирования по времени, имеем:

$$\frac{dY}{dt}\frac{1}{Y} - \frac{dL}{dt}\frac{1}{L} = g. \qquad (2.5)$$

Кроме того, из (2.1) с учетом того, что $\frac{dK}{dt} = \left(1-\frac{\omega}{a}\right)L$, следует

$$\frac{dY}{Ldt}\frac{1}{Y} = \frac{dK}{dt}\frac{1}{K} = \frac{\left(1-\frac{\omega}{a}\right)1}{k} - g. \qquad (2.6)$$

Из отношений (2.5) и (2.6) окончательно находим:

$$\frac{1}{Y}\frac{dL}{dt} = \frac{\left(1-\frac{\omega}{a}\right)1}{k} - g. \qquad (2.7)$$

Введем новые переменные: $y = \frac{\omega}{a}$ – доля затрат на оплату труда; $x = \frac{L}{N}$ – коэффициент занятости.

После простых преобразований, с учетом (2.6) получаем

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left[\dfrac{1-y}{k} - (g+n)\right] \\ \dfrac{dy}{dt} = y\left[\dfrac{1}{\omega}\dfrac{d\omega}{dt} - \dfrac{1}{a}\dfrac{da}{dt}\right] \end{cases}, \tag{2.8}$$

где $\left(\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = g$.

Будем считать ставку заработной платы быстрой переменной, удовлетворяющим условиям:

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega f(x),\ \lim_{x\to 1} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to 0} f(x) < 0,\ \frac{df}{dx} > 0. \tag{2.9}$$

Линейная аппроксимация $f(x)$в виде $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\left(\frac{1}{\omega}\right) = -r + bx$ превращает (2.8) в следующее условие:

$$\frac{dy}{dt}\frac{1}{y} = -r + px - g\ . \tag{2.10}$$

Объединяем (2.8) и (2.10) и приходим к модели Гудвина, описанной системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left[\dfrac{1}{k} - (g+n) - \dfrac{y}{k}\right] \\ \dfrac{dy}{dt} = y[-(g+r) + px] \end{cases}. \tag{2.11}$$

Очевидно, что система уравнений (2.11) эквивалентна системе уравнений (2.1), поэтому все выводы общего характера, справедливые для системы (2.1) , верны и для модели Гудвина.

Заметим, что модель Гудвина, учитывающая взаимодействие между уровнем занятости и законодально установленной нормой отчислений на оплату труда, очень напоминает классические модели политической экономии (неоаппроксимация). Модель вновь привлекает внимание к трудам экономистов–классиков, таких как Риккардо, Смит, Маркс [12].

2.1.2 Использование модели «хищник–жертва» для описания общества эпохи охотников–собирателей (бесклассовое общество)

Для этой эпохи характерна низкая плотность населения и родовая (общинная) организация сообщества. Человек полностью зависел от природы, шла постоянная борьба за выживание, главным добываемым ресурсом была пища [15].

Человек являлся частью экосистемы и отличался от других хищников, живущих стаями, по существу, только лишь умением использовать огонь и примитивные орудия труда для собственных нужд.

Изменение численности населения в определенном конкретном ареале, в основном, определялось состоянием ресурсной базы и может быть описано математической моделью «хищник–жертва».

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP \\ \frac{dP}{dt} = -dP + cNP \end{cases}, \tag{2.12}$$

где N – численность популяции объектов охоты («жертв»),

P – численность охотников («хищников») в данном ареале,

cNP – скорость рождения «хищников»,

dP – смертность «хищников»,

aN – скорость гибели «жертв» (будем считать, что их пищевая база неограниченна),

bNP – скорость гибели «жертв» за счет их истребления «хищниками» (будем считать, что это единственная причина смертности «жертв»).

Поскольку рассматриваемое общество потребляло то, что было произведено в природе без участия его представителей, численность популяции определялась внешними условиями, повлиять на которые они не могли.

В модели численность охотников – собирателей колеблется около среднего значения $P_0 = \frac{a}{b}$. Заметим, что именно этим объясняется относительная стабильность населения планеты на протяжении всего каменного века до эпохи неолита.

Когда человек приручил животных и научился возделывать культурные растения, он превратился из охотника–собирателя в скотоводов и земледельцев. Таким образом, значительно увеличился коэффициент a и равновесная численность людей, поскольку величина коэффициента b, характеризующая потребление, осталась примерно на том же уровне.

2.1.3 Модель описания военных действий

В своей книге английский эрудит и инженер Фредерик Ланчестер предлагает простую модель борьбы двух противников (армий), которая носит его имя. Заметим, что такая же модель была предложена офицером царской армии М. О. Осиповым в 1915 году. Поэтому справедливо называть эту модель моделью Ланчестера – Осипова [15]

В данной модели состояние системы описывается точкой(x, y)положительного квадрата плоскости. Координаты этой точки xи y – численности противостоящих армий. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by \\ \frac{dy}{dt} = -ax \end{cases}, \qquad (2.13)$$

где a иb – мощность оружия армии x и армии y, соответственно. Другими словами, каждый солдат армии x убивает за единицу времени aсолдат армии y, а каждый солдат армии у убивает b солдат армии x.

Таким образом, общая эффективность всех выстрелов армии x дается как ax, а для армии y – by.

«Жесткая», по В. И. Арнольду. Точное решение имеет вид:

$$ax^2 - bx^2 = const\ . \qquad (2.14)$$

Изменение численности армий x иy происходит вдоль гиперболы, заданной уравнением (2.14) и изображенной на рисунке 2.1 [14] .

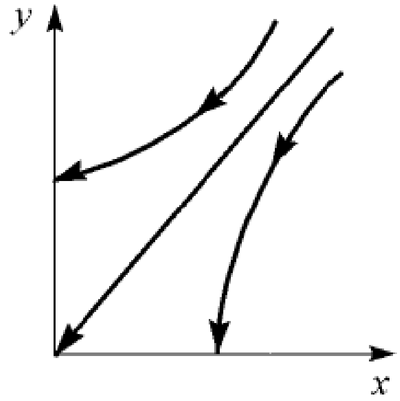

Рисунок 2.1 - «Жесткая» модель войны

По какой именно гиперболе будут развиваться военные действия зависит от начальной точки. Гипервболы разделены прямой $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это означает, что в ходе военных действий численность армии x уменьшается за конечное время до нуля. Армия y побеждает, противник уничтожен. Если же начальная точка лежит ниже прямой, побеждает армия x.

Если начальная точка лежит на прямой, то война заканчивается истреблением обеих армий. Но для этого потребуется бесконечно большее время, что приведет к обессиливанию обеих сторон противников. Из соотношения (2.14) следует, что на прямой $\sqrt{ax} = -\sqrt{by}$. Тогда первое уравнение системы принимает вид: $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{ab}x$. Его решением является $x = Ce^{-\sqrt{ab}t}$, где $C = const$, и очевидно, что $x \to 0$ при $t \to \infty$.

Из модели (2.14) следует, что для борьбы с вдвое многочисленным противником необходимо иметь в четыре раза более мощьное оружие, с втрое многочисленным – в девять раз больше и т.д. на это указывают квадратные корни в уравнении прямой.

Ясно, что данная модель слишком идеализирована, и её опастно применять на практике.

2.2 Модель Лотки – Вольтерра для экономических конкурентных процессов

Конкуренция в экономике – это борьба рыночных субъектов за наилучшие результаты деятельности и условия. Конкуренция в данной среде очень распространена и имеет множество видов. Например, это конкуренция банков за клиентов, когда каждый банк старается наиболее выгодными условиями привлечь к себе как можно больше людей и тем самым вырваться вперед. Иной яркий пример – это конкуренция продавцов, особенно в ситуации, когда предложение превышает спрос. Покупатели стараются привлечь к себе внимание покупателей, выделиться среди своих конкурентов: понижают цены на продукцию, проводят акции, расширяют рекламу, улучшают качество, дизайн и подачу товара [3].

Считается, что первая формализация динамики биологических популяций восходит к английскому учёному Мальтусу, выдвинувшему предположение, что скорость изменения числа особей N в популяции пропорциональна объему популяции

$$dN(t) = \varepsilon N(t)dt. \tag{2.15}$$

Естественно, это уравнение приводит к экспоненциальному росту объема популяции, чего не наблюдается в природе (в течение достаточно продолжительного времени).

Следующая модель исключила бесконечный рост и приняла во внимание эффект насыщения. Она появилась в 1838 году в работе бельгийского математика Пьера Ферхюльста и получила название «логическая модель» для описания динамики биологических популяций

$$dN(t) = [\varepsilon_0 - \gamma N(t)]N(t)dt. \tag{2.16}$$

Здесь коэффициент прироста ε заменен линейной функцией объема популяции, что интерпретируется так: если жизненные ресурсы популяции ограничены, т. е. пища, жизненное пространство, энергетические источники и т. д., то объем популяции должен с течением времени стабилизироваться, а не бесконечно расти. В последнем уравнении такой уровень объема популяции равен ε_0/γ.

В наиболее общей форме (без последствия) логическая модель рассматривалась А. Н. Колмогоровым для сообщества из n видов

$$\dot{N}_i(t) = N_i(t) f_i[N_1(t), \dots, N_n(t)],\ i = 1, \dots, n. \qquad (2.17)$$

Функции f_i удовлетворяют некоторым специальным свойствам, допускающим простую биологическую интерпретацию. Мы не будем останавливаться на этом обобщении.

Сам В. Вольтерра использовал линейные функции

$$\dot{N}_i(t) = N_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} N_k(t)\right], \qquad i = 1, \dots, n. \qquad (2.18)$$

Он исследовал случаи при n=2, 3, а также сделал несколько обобщений для системы с произвольным n.

Особую ценность работе В. Вольтерра придает то, что он ввел в рассмотрение последствие, т. е. он предположил, что взаимодействие видов на общих ресурсах через некоторое время изменяет коэффициент прироста. Так в задаче «хищник – жертва» предполагается, что объем популяции «жертв», являясь пищей для «хищников», определяет объем их популяции. В результате некоторых логических шагов получаем систему с распределённым запаздыванием:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(s) N_2(t-s) ds\right] N_1(t) \\ \dot{N}_2(t) = \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(s) N_1(t-s) ds\right] N_2(t) \end{cases}, \qquad (2.19)$$

где N_1, N_2 – объемы популяций «жертвы» и «хищника» соответственно. F_1 и F_2 – функции, характеризующие распределение «хищников» и «жертв» по возрастам.

Если считать, что запаздывание сосредоточенное и единственное, то без ограничений на коэффициенты модель Лотки – Вольтерра с последствием имеет вид:

$$\dot{N}_i(t) = N_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} N_k(t-\tau\right] i = 1, \dots, n. \qquad (2.20)$$

Именно этой системе дифференциальных уравнений с последствием далее будет уделено наибольшее внимание.

Для экономической интерпретации начнем с самого простого: пусть имеются две конкурирующие в одной экономической нише фирмы, т. е. с общими ресурсами, потребителями и одинаковыми товарами или услугами. Предположим, что при изменении объема товара на рынке цена не меняется, а товар не замещается. К примеру, такими конкурирующими фирмами могут оказаться две транспортные компании по перевозке людей или грузов в данном городе. Фирмы могут изменять организацию труда, технологию обслуживания, вводить скидки, тратиться на рекламу, покупать более совершенные транспортные средства, менять маршруты на более оптимальные, сокращать стоимость ремонта, сокращать стоимость хранения, для победы над конкурентами.

Их взаимодействие можно рассматривать на фоне существующего, не подверженного частым изменениям городского транспортного хозяйства. Предположив, что потребитель откажется от услуг рассматриваемых компаний, если городской транспорт для него окажется более предпочтителен по цене или качеству предоставляемых услуг.

Другими примерами могут выступать – производство хлебобулочных изделий, услуги по ремонту квартир, автомобилей или бытовой техники, туристический бизнес и т. д [4].

Такие конкурентные модели могут иметь большие размерности по количеству участвующих компаний, но эту сложность преодолевают, объединяя компании с близкими технологиями производства услуг или товаров, с помощью простого суммирования объемов товара, выпускаемого на рынок.

Моделирование описанной ситуации очень похоже на взаимодействие хищника и жертвы в биологии.

В данной работе рассматривается только взаимное конкурентное влияние.

2.2.1 Конкуренция предприятий на общем рынке

Рассмотрим динамическую модель одного предприятия. Пусть некоторая компания, обладая основными фондами $K(t)$, привлекая рабочую силу $L(t)$, используя природные ресурсы (энергия, земля, вода и т.п.) $R(t)$, получает объем товара $x(t)$. Для задач со сложной структурой использования природных ресурсов, можно условно считать, что $R(t)$ – это оборотный капитал, $K(t)$ – основной капитал. Объем товара $x(t)$ выражен в текущих ценах. Для упрощения расмотрения экономических предположений на первом этапе, фиксируем текущие цены [9].

Это означает, что рассматриваемая компания своим объемом товара не влияет на рыночную равновесную цену – не является монополистом.

Обозначив производственную функцию компании φ, получим первое математическое выражение:

$$x(t) = \varphi(K(t), L(t), R(t)). \tag{2.21}$$

Не будем останавливаться на подробном рассмотрении особенностей производственных функций, скажем лишь, что φ и все её первые производные строго положительны (дифференцируемость может быть и кусочной). Здесь и далееt непрерывное или дискретное время. Если время непрерывно, то скорость изменения любой переменной обозначаем $\dot{x}$ или dx/dt; если же время дискретно, то скорость изменения любой переменной по времени записываем как первую разность: Δx.

Для того чтобы увеличить производство, руководство фирмы должно увеличить основные фнды и использовать больше трудовых и природных ресурсов. Примем как простейший вариант исследования, что основные фонды на своё поддержание требуют амортизационных отчислений, пропорциональных объему основных фондов, а на развитие – инвестиций, I(t).

В дальнейшем, пусть используемые ресурсы пропорциональны основным фондам, включенным в производство:

$$L(t) = lK(t), R(t) = rK(t). \tag{2.22}$$

Компания не тратит прибыль ни на что другое, кроме развития (налоговую составляющую примем пропорциональной выходу и включённой в производственную функцию):

$$I(t) = x - lK - rK. \tag{2.23}$$

Добавляя к этим предположениям требования линейной функции φ, получим уравнение изменения основных фондов:

$$\dot{K}(t) = [-\beta + \varphi k + (\varphi_L - 1)l + (\varphi_R - 1)r]K(t), \tag{2.24}$$

где β – коэффициент износа основных фондов,

$$\varphi_K = \frac{\partial\varphi}{\partial K}, \varphi_L = \frac{\partial\varphi}{\partial L}, \varphi_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R}. \tag{2.25}$$

Последнее уравнение даёт экспоненциальный рост основных фондов, если

$$\varepsilon = -\beta + \varphi_K + (\varphi_L - 1)l + (\varphi_R - 1)r > 0. \tag{2.26}$$

Соответсвенно и выход продукции будет расти или убывать экспоненциально:

$$x(t) = x(0)\exp(\varepsilon t). \tag{2.27}$$

Таким образом, модель

$$\dot{x}(t) = \varepsilon x(t), \tag{2.28}$$

с постоянным коэффициентом роста ε, характеризует динамику одного предприятия при отсутсвии каких либо экономических ограничений.

Однако ограничения всегда присутствуют:

- рост производства приводит к насыщению рынка и снижению спроса;
- со временем происходит устаревание товаров и услуг;
- расширение производства требует привлечение новой рабочей силы, но при ограниченном рынке труда, то расширение достигает верхнего предела;

- природные ресурсы всегда ограничены по объёму или цене, если растет спрос на ресурсы.

Для того, чтобы перейти к модели Лотки–Вольтерра, достаточно в последнем уравнении коэффициент ε представить в виде убывающей линейной функции растущего значения $x(t)$: $\varepsilon = \dot{\varepsilon} - \gamma x(t)$, с постоянными $\dot{\varepsilon}, \gamma$. Функция линейна, поскольку это простейшая убывающая функция. Так как логика этих действий понятна, проделаем это сразу в двумерном случае [11].

Итак, первая компания имеет производственную хункцию $x = \varphi(K_x, L_x, R_x)$, а вторая $y = \psi(K_y, L_y, R_y)$, где φ и ψ – однородные линейные функции. Предположим, что каждая компания тратит прибыль только на инвестиции, а затраты на трудовые ресурсы и оборотный капитал пропорциональны соответсвующим привлекаемым основным фондам. Коэффициенты пропорциональности вследствии предположения об ограниченности ресурсов (на общем рынке труда и сырья) будем считать линейными убывающими функциями K_x, K_y. Тогда изменения основных фондов обеих компаний складываются из износа и инвестиций:

$$\begin{cases} \dot{K}_x = -\beta_x K_x + \varphi(K_x, L_x, R_x) - L_x - R_x \\ \dot{K}_y = -\beta_y K_y + \psi\left(K_y, L_y, R_y\right) - L_y - R_y \end{cases}. \tag{2.29}$$

Подставляя линейные выражения в качестве коэффициентов для труда и сырья:

$$L_x = \left(l_{0x} - l_{1x}K_x - l_{2x}K_y\right)K_x, \dots, R_y = \left(r_{0y} - r_{1y}K_x - r_{2y}K_y\right)K_y, \tag{2.30}$$

получим систему относительноK_x, K_y:

$$\begin{cases} \dot{K}_x(t) = \begin{bmatrix} -\beta_x + \varphi_K + (\varphi_L - 1)l_{0x} + (\varphi_R - 1)r_{0x} \\ -(\varphi_L l_{1x} + \varphi_R r_{1x})K_x - (\varphi_L l_{2x} + \varphi_R r_{2x})K_y \end{bmatrix} K_x \\ \dot{K}_x(t) = \begin{bmatrix} -\beta_y + \psi_K + (\psi_L - 1)l_{0y} + (\psi_R - 1)r_{0y} \\ -\left(\psi_L l_{1y} + \psi_R r_{1y}\right)K_x - \left(\psi_L l_{2y} + \psi_R r_{2y}\right)K_y \end{bmatrix} K_y \end{cases}. \tag{2.31}$$

Для того, чтобы перейти к системе (2.18), переобозначим коэффициенты:

$$\varepsilon_1 = \beta_x + \varphi_k + (\varphi_L - 1)L_{0x} + (\varphi_R - 1)r_{0x}, \tag{2.32}$$

$$\gamma_{11} = \varphi_L l_{1x} + \varphi_R r_1, \gamma_{12} = \varphi_L L_{2x} + \varphi_R r_{2x}, \tag{2.33}$$

$$\varepsilon_2 = -\beta_y + \psi_k + (\psi_L - 1)L_{0y} + (\psi_R - 1)r_{0y}, \tag{2.34}$$

$$\gamma_{21} = \psi_L l_{1y} + \psi_R r_1, \gamma_{22} = \psi_L L_{2y} + \psi_R r_{2y}. \tag{2.35}$$

Экономический смысл коэффициента β понятен. Остановимся на интерпретации остальных параметров. Величины $\varphi_K, \varphi_L, \varphi_R, \psi_K, \psi_L, \psi_R$ характеризуют производственные функции обеих компаний, следовательно, можно считать их заданными. По предположению о производственных функциях эти величины положительны. Коэффициенты ε и γ должны быть определены по информации об объемах основных фондов K_x, K_y. Оставшихся коэффициентов l и r 12 на 6 приведенных выше уравнений. Поэтому при определении им должно быть уделено особое внимание.

Ограниченность общих ресурсов приводит к тому, что с ростом основных фондов K_x, K_y коэффициенты возобновления капитала становятся равными нулю, а затем отрицательными. Это означает, что фонды начинают убывать. Область в плоскости переменных K_x, K_y, когда основные фонды еще не выбывают из производства, аналитически выражается неравенствами:

$$l_{0x} - l_{1x}K_x - l_{2x}K_y > 0,\ r_{0x} - r_{1x}K_x - r_{2x}K_y > 0, \tag{3.36}$$

$$l_{0y} - l_{1y}K_x - l_{2y}K_y > 0,\ r_{0y} - r_{1y}K_x - r_{2y}K_y > 0. \tag{2.37}$$

При достаточно малых K_x, K_y эти неравенства выполняются, увеличение какого-нибудь из них приводит к уменьшению коэффициента пропорциональности между стоимостью ресурсов и привлекаемых основных фондов на единицу продукции.

К примеру, если первое из указанных выше неравенств перестает выполняться, при некоторых значениях K_x, K_y, это значит, что первая из компаний получает продукцию вообще без привлечения рабочей силы, что в принципе исключено. Более подробно такие особенности модели необходимо рассматривать отдельно [14] .

2.2.2 Конкуренция без запаздывания

Рассмотрим случай деятельности двух компаний, конкурирующих за общие ресурсы. Как следует из сказанного выше, динамика их деятельности без запаздывания ($\tau = 0$) описывается уравнениями:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t) - \gamma_{12}x_2(t)] \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t) - \gamma_{22}x_2(t)]\end{cases}, \qquad (2.38)$$

где шесть коэффициентов ε, γ обязательно положительны.

Заменой масштаба измерения величин:

$$y_1 = \frac{\gamma_{11}}{\varepsilon_1}x_1,\ y_2 = \frac{\gamma_{12}}{\varepsilon_1}x_2, \qquad (2.39)$$

приводим систему к виду, содержащему только два параметра, существенно влияющих на поведение решения:

$$\begin{cases}\dot{y}_1(t) = \varepsilon_1 y_1(t)[1 - y_1(t) - y_2(t)] \\ \dot{y}_2(t) = \varepsilon_2 y_2(t)[1 - \alpha y_1(t) - \beta y_2(t)]\end{cases}, \qquad (2.40)$$

где параметры α и β положительны и выражаются через исходные коэффициенты по формулам:

$$\alpha = \frac{\gamma_{21}\varepsilon_1}{\gamma_{11}\varepsilon_2}, \quad \beta = \frac{\gamma_{22}\varepsilon_1}{\gamma_{12}\varepsilon_2}. \qquad (2.41)$$

Непосредственное вычисление нетривиального положительного равновесия системы (2.1) даёт результат:

$$y^*{}_1 = \frac{\beta-1}{\beta-\alpha},\ y^*{}_2 = \frac{1-\beta}{\beta-\alpha}. \qquad (2.42)$$

На Рисунке 2.16 эта точка получена в пересечении прямых линий, уравнения которых могут быть взяты в квадратных скобках системы (2.40) [14]:

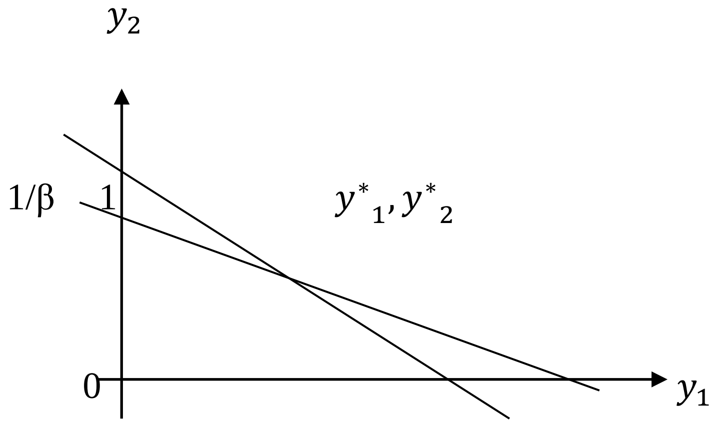

Рисунок 2.1 - Нелинейное положение системы (2.40).

Из последних вычислений следует вывод: нетривиальная положительная стационарная точка системы (2.40) существует и единственна, если:

$$\alpha < 1, \qquad \beta > 1, \tag{2.43}$$

или

$$\alpha > 1, \qquad \beta < 1, \tag{2.44}$$

Если $\alpha = \beta = 1$, то стационарные решения $\left(y^*{}_1, y^*{}_2\right)$ составляют прямую линию с уравнением $y^*{}_1 + y^*{}_2 = 1$; и условие $\alpha = \beta \neq 1$ приводит к отсутствию нетривиальных стационарных точек вообще [18].

Положительное равновесие $\left(y^*{}_1, y^*{}_2\right)$ может быть притягивающим (асимптотически устойчивым) или отталкивающим (неустойчивым). Для определения свойства устойчивости используем функцию Ляпунова:

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{\varepsilon_1}(y_1 - y^*{}_1 - y^*{}_1 \ln\frac{y_1}{y^*{}_1}) + \frac{1}{\varepsilon_2}(y_2 - y^*{}_2 - y^*{}_2 \ln\frac{y_2}{y^*{}_2}). \tag{2.45}$$

Так как мы рассматриваем только положительные y_1 и y_2, то Vопределена, непрерывна и $V\left(y^*{}_1, y^*{}_2\right) = 0$. При всех остальных положительных y_1 и y_2 функция Vстрого положительна. Отсюда следует, что она является определенно положительной для равновесия $(y^*{}_1, y^*{}_2)$.

Так как подобные функции редко используются аналитиками, покажем на рисунке 2.2 примерный график в одномерном случае.

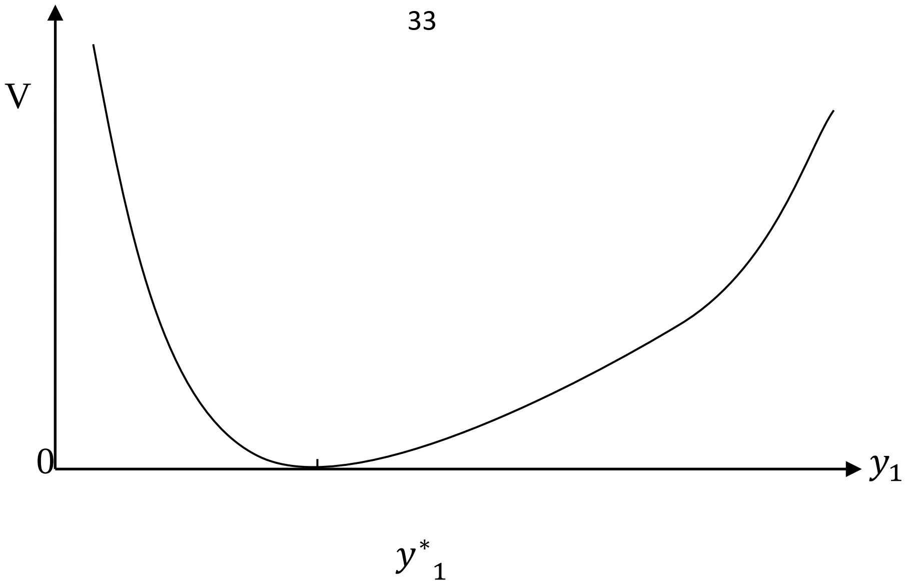

Рисунок 2.2 - Примерное изображение функции Ляпунова (2.45) в одномерном случае

В двумерном пространстве изобразим поверхности уровня функции.

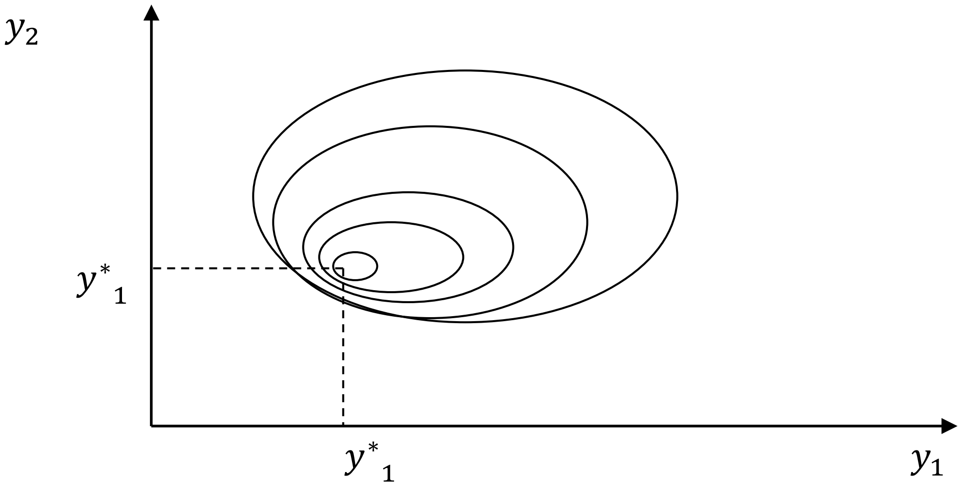

Рисунок 2.3 - Примерное изображение функции Ляпунова (2.45) в двумерном случае

Производная функции (2.45) по времени и в силу системы (2.40) принимает вид:

$$\dot{V}|_{(5)} = -\left(y_1 - y^*{}_1\right)^2 - (1+\alpha)\left(y_1 - y^*{}_1\right)\left(y_2 - y^*{}_2\right) - \beta\left(y_2 - y^*{}_2\right)^2. \quad (2.46)$$

Она определенно отрицательна, если $4\beta > (1+\alpha)^2$. Последнее неравенство выполняется, когда верно (2.43), и не выполняется при (2.44).

Таким образом, справедлив следующий вывод: если верно условие (2.43), то для любых положительных начальных данных решение с течением времени асимптотически стремится к $(y^*{}_1, y^*{}_2)$.

Положение равновесия неустойчиво (точнее говоря – особая точка тип «седло»). В этом случае на плоскости переменных y_1 и y_2 притягивающими будут точки координатных осей $(0, 1/\beta), (1{,}0)$.

Последнее утверждение легко установить, выписав систему в отклонениях относительно указанных точек. Линейные части этих систем имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{y}'_1 \approx \varepsilon_1\left(1-\frac{1}{\beta}\right)y'_1, \\ \dot{y}'_2 \approx \varepsilon_2\frac{1}{\beta}\left(-\alpha y'_1-\beta y'_2\right); \end{cases} \begin{cases} \dot{y}'_1 \approx -\varepsilon_1\left(y'_1+y'_2\right) \\ \dot{y}'_2 \approx \varepsilon_2(1-\alpha)y'_2 \end{cases}. \qquad (2.46)$$

где штрих показывает отклонение переменной от соответсвующего равновесного значения. Как известно, через точку в этом случае проходит сепаратриса, делящая положительный квадрат плоскости на две части: в первой части собраны все траектории, стремящиеся к одной координатной оси, во второй – к другой. Движение по этой сепаратрисе осуществляется к точке $({y^*}_1, {y^*}_2)$.

Таким образом, делаем вывод, что траектория системы (2.40) с любыми неотрицательными начальными данными и любыми коэффициентами с течением времени асимптотически приблизится либо к нетривиальному положению равновесия, либо к одной из равновесных точек на координатных осях.

При конкуренции двух экономических агентов за общие ресурсы с течением времени возможны следующие результаты:

- при $\gamma_{12}/\gamma_{22} < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < \gamma_{11}/\gamma_{21}$объемы производства обеих компаний стремятся к величинам $\frac{\gamma_{22}\varepsilon_1-\gamma_{12}\varepsilon_2}{\gamma_{22}\gamma_{11}-\gamma_{12}\gamma_{21}}$ и $\frac{\gamma_{11}\varepsilon_2-\gamma_{21}\varepsilon_1}{\gamma_{22}\gamma_{11}-\gamma_{12}\gamma_{21}}$ соответственно. Их начальное состояние не играет ни какой роли, объемы производства могут сокращаться или возрастать, так же изменяется их суммарный объем;
- при $\gamma_{11}/\gamma_{21} < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < \gamma_{12}/\gamma_{22}$ одна из компаний (за исключением крайне редкого случая сепаратрисы) с течением времени прекратит производство, другая же либо сократит, либо увеличит выпуск в соответствии с наличием ресурсов. Окончательный выпуск для первой

компании численно равен $\varepsilon_1/\gamma_{11}$, а для второй $-\varepsilon_2/\gamma_{22}$. Этот случай даём руководителям компаний возможность управлять процессом конкуренции. Если изменить начальное состояние производства так, чтобы оказаться в предпочтительной части плоскости, то появляется шанс выжить. Достичь этого можно, например, если взять большой кредит и резко расширить производство. Однако расширение не должно превосходить равновесного значения;

- при иных соотношениях коэффициентов модели следует отказаться от её использования, так как система не будет иметь положительного равновесия.

Из асимптотической устойчивости положения равновесия следует ограниченность и продолжимость на бесконечный интервал времени решений системы. В случае неустойчивости такой вывод не очевиден.

Итак, рассмотрим систему в интегральной форме. Из продолжительности ε, γ, x_i следует неравенство:

$$x_i(s) = x_i(0) exp \int_0^3 [\varepsilon_i - \sum_{k=1}^2 \gamma_{ik} x_k(t)] dt < x_i(0) e^{\varepsilon_i s}, \;\; i = 1,2, \quad (2.47)$$

это влечёт продолжимость решений. Но можно показать и ограниченность всех решений при всех положительных коэффициентах и начальных данных.

Предположим, что какая–либо переменная $x_i(s)$от положительного начального значения неограниченно возрастает. Тогда можно найти два достаточно близких момента времени $\hat{s} < \tilde{s}$, что$x(\hat{s}) < x(\tilde{s})$и

$$\varepsilon_i - \gamma_{11} x_i(\hat{s}) - \sum_{k=1, k \neq i}^2 \gamma_{ik} x_k(\hat{s}) < 0, \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_i - \gamma_{11} x_i(\tilde{s}) - \sum_{k=1, k \neq i}^2 \gamma_{ik} x_k(\tilde{s}) < 0, \quad (2.49)$$

отсюда, учитывая гладкость решения, получим противоречие: с одной стороны монотонное возрастание, т. е. $\dot{x}_i(\hat{s}) > 0$, с другой стороны – правые части системы (2.38) при данных значениях переменных отрицательны.

Следует отметить, что за пределами положительных значений пространства переменных система (2.38) имеет непродолжимые решения, уходящие на бесконечность при конечных значениях времени. В этом контексте очень важным является анализ правых частей при различных обобщениях систем Литки–Вольтерра. К примеру, обобщенная логическая модель Колмогорова для всех вариантов f_iтребует проверки продолжимости.

В случае неустойчивости нетривиального положения равновесия (и в то же время ограниченности решений в продолжительном ортанте) интересно было бы исследовать вопрос о колебании решений. В плоском случае сепаратриса неустойчивого равновесного состояния проходит через начало координат и делит положительный квадрат на две части, в каждой из которых есть притягивающие точки на координатных осях и, следовательно, колебаний нет. Это не является справедливым в пространстве размерностью более двух.

2.2.3 Конкуренция деятельности с запаздыванием

Вернёмся к уравнениям (2.40), предполагая, что запаздывание τстрого положительно:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \varepsilon_1 y_1(t)[1 - y_1(t-\tau) - y_2(t-\tau)] \\ \dot{y}_2(t) = \varepsilon_2 y_2(t)[1 - \alpha y_1(t-\tau) - \beta y_2(t-\tau)] \end{cases}. \qquad (2.50)$$

И нетривиальное положение равновесия так же останется прежним $({y^*}_1, {y^*}_2)$. При малом положительном запаздывании все выводы о качественном поведении решений системы (2.38) продолжают иметь место, но с увеличением запаздывания картина меняется: неустойчивые стационарные точки сохраняют неустойчивость, а устойчивые её теряют [15].

В последнем случае вокруг нетривиального равновесного центра $({y^*}_1, {y^*}_2)$ возникает притягивающий предельный цикл (или другими словами – стабильное колебание).

Обсудим эти изменения свойств траекторий с увеличением запаздывания более подробно.

Если выполнено условие (2.43), то для любого фиксированного запаздывания τ существует область в положительном квадранте фазовой проскости, содержащая треугольки ABE и DEF и четырёхугольник CBED, изображенных на следующем рисунке, и такая, что все траектории изнутри этой области в ней и остаются, и любая траектория снаружи её входит внутрь.

Для доказательства заметим, что из (2.50) следуют следующие неравенства:

- если точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)) \in \Delta ABE,$ то $\dot{y}_1(t) > 0, \dot{y}_2(t) < 0;$
- если точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)) \in \Delta DEF,$ то $\dot{y}_1(t) < 0, \dot{y}_2(t) > 0;$
- если точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau)) \in \Delta DEDC,$ то $\dot{y}_1(t) > 0, \dot{y}_2(t) <$ $0;$
- если точка $(y_1(t-\tau), y_2(t-\tau))$не принадлежит указанным областям, то обе производные отрицательны.

Будем рассматривать только непрерывную часть траектории. Пусть в начальный момент времени t^* первая переменная имеет любое, сколь угодно большое значение, а запаздывающая точка, определяющая знак производной, расположена сколь угодно близко к началу координат (точка C), что соответствует наибольшему значению производной.

Тогда за время τ переменная$y_1(t^*)$ возрастает не более чем в $e^{\varepsilon_1 \tau}$ раз, а запаздывающая точка $\left(y_1(t^* - \tau), y_2(t^* - \tau)\right)$перейдет непременно в $\left(y_1(t^*), y_2(t^*)\right)$, в силу непрерывности траектории. Так как последняя по предположению имеет большое значение первой переменной, то и производная первой переменной станет отрицательной. Знак указанной производной сохраняется до тех пор, пока запаздывающая точка не вернётся к началу координат. Вторая переменная имеет аналогичное поведение и поэтому все удаленные точки движутся к началу системы координат, а затем на некоторое расстояние отходит в сторону.

Если считать, вторую переменную y_2 близкой к нулю то первое уравнение системы можно заменить на

$$\dot{y}_1(t) = \varepsilon_1 y_1(t)[1 - y_1(t-\tau)]. \qquad (2.51)$$

И аналогично пологая очень малой первую переменную, получим приближённое второе уравнение системы:

$$\dot{y}_2(t) = \varepsilon_2 y_2(t)[1 - \beta y_2(t - \tau)]. \tag{2.52}$$

Появление временного лага способно изменить всю качественную картину траекторий на фазовой плоскости: так с возрастанием запаздывания притягивающие точки становятся отталкивающими. Сформулируем все возможные ситуации в одном утверждении: положение равновесия (1,0) системы (2.21) будет асимптотически устойчиво, если $\alpha > 1, \varepsilon_1 \tau < \frac{\pi}{2}$; и неустойчиво, если либо $\alpha < 1,$ либо $\alpha > 1, \varepsilon_1 \tau > \frac{\pi}{2}$.

Положение равновесия $(0,1/\beta)$ будет асимптотически устойчивым, если $\beta < 1, \varepsilon_2 \tau < \frac{\pi}{2}$; и неустойчиво, если либо $\beta > 1$, либо $\beta < 1, \varepsilon_2 \tau > \frac{\pi}{2}$.

Положение равновесия $({y^*}_1, {y^*}_2)$ будет асимптотически устойчивым, если $\alpha < 1, \beta > 1, -z_1 \tau < \frac{\pi}{2}$; и неустойчиво, если либо $\alpha > 1,$ либо $\beta < 1,$ либо $\alpha < 1,\ \beta > 1, -z_1 > \frac{\pi}{2}$.

Здесь

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\left({y^*}_1\varepsilon_1 - {y^*}_2\varepsilon_2\beta\right)^2 + 4\alpha {y^*}_1\varepsilon_1 {y^*}_2\varepsilon_2 - {y^*}_1\varepsilon_1 - {y^*}_2\varepsilon_2\beta}\right) < 0. \tag{2.53}$$

Для каждой стационарной точки составляется система уравнений в отклонениях и рассматривается её линейная часть.

Например, первая стационарная точка порождает линейное приближение системы в отклонениях вида:

$$\begin{cases} \dot{y'}_1 = -\varepsilon_1\left({y'}_{1\tau} + {y'}_{2\tau}\right) \\ \dot{y'}_2 = -\varepsilon_2(1-\alpha){y'}_2 \end{cases}. \tag{2.54}$$

Очевидно, что второе уравнение даёт затухание до нуля при $\alpha > 1$, а первое уравнение при этом становится неоднородным линейным с экспоненциально затухающей неоднородностью. Его однородная часть будет асимптотически устойчивой, при не очень большом запаздывании, а именно, если $\varepsilon_1 \tau < \frac{\pi}{2}$.

Несколько более сложно решается вопрос с нетривиальной стационарной точкой $({y^*}_1, {y^*}_2)$. В этом случае система в отклонениях (а именно её линейная часть) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}'_1 = -\varepsilon_1 {y^*}_1 \left({y'}_{1\tau} + {y'}_{2\tau} \right) \\ \dot{y}'_2 = -\varepsilon_2 {y^*}_2 \left(\alpha {y'}_{1\tau} + \beta {y'}_{2\tau} \right) \end{cases}. \qquad (2.55)$$

Таким образом, приведенное выше утверждение полностью описывает асимптотическое поведение траекторий во всей положительной четверти фазовой плоскости.

Рассмотрим две экономические модели для того, чтобы представить себе значения параметров, входящих в модель. Мы будем строить систему (2.50) для двух компаний. Сначала предположим, что эти производственные компании работают на общем рынке и используют одни и те же источники производственных факторов (трудовые, сырьевые и капитальные ресурсы). Это могут быть строительные комбинаты, предприятия легкой промышленности и т.п.

Следует напомнить, что речь идёт о системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11} x_1(t-\tau) - \gamma_{12} x_2(t-\tau)] \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21} x_1(t-\tau) - \gamma_{22} x_2(t-\tau)] \end{cases}. \qquad (2.56)$$

Оценим параметры модели, которые отвечают за собственные возможности предприятий, без учета конкурирующей компании. Пусть технологические и управленческие возможности первого предприятия таковы, что оно способно удвоить выпуск продукции за 5 лет. Тогда из первого уравнения модели получим при малых значениях x_1

$$x_1(5) = x_1(0) e^{\varepsilon_1 5}. \qquad (2.57)$$

Из чего имеем приближенное равенство $\varepsilon_1 \approx 0{,}14$. Аналогично предположим, что второе предприятие при малых собственных объемах выпуска способно устроить за 5 лет объем производства. Тогда из второго уравнения модели получим $\varepsilon_1 \approx 0{,}22$.

Каждый из управляющих может оценить оптимальный размер предприятия, пользуясь известным критерием через цены на факторы производства и вид производственной функции. Пусть из этих оценок следует, что без учета конкуренции первое предприятие способно выпускать 20 единиц продукции, а второе – 10. Но, при отсутствии конкуренции предельный объем выпуска на первом предприятии будет равен $\varepsilon_1/\gamma_{11}$, а на втором $\varepsilon_2/\gamma_{22}$. Тогда вычисляются соответствующие γ: $\gamma_{11} = 0{,}007$; $\gamma_{22} = 0{,}022$. Самое сложное – это оценить взаимное влияние двух компаний γ_{12} иγ_{21}. Или же следует предположить, что управляющие компаний имеют возможность об объемах поставок товара на общий рынок, либо делают регулярные маркетинговые исследования, из которых можно судить о равновесии в конкурентных отношениях. Предположим, что равновесие достигается при ${x^*}_1 = 15$; ${x^*}_2 = 8$; тогда вычисляем оставшиеся параметры: $\gamma_{12} = 0{,}0044$; $\gamma_{21} = 0{,}003$.

Итак, модель взаимодействия двух производственных компаний построена.

Для того чтобы применить полученные выводы, нам необходимо знать α, β, z_1. Согласно приведенным выше формулам $\alpha = 0{,}27$; $\beta = 3{,}18$; $z_1 = -0{,}19$. Таким образом, нетривиальное положение равновесия на рынке двух производственных компаний (15, 8) будет асимптотически устойчивым. Из этого следует, что какими бы ни были начальные условия с течением времени, оба производства достигнут равновесной точки, при этом они могут не волноваться относительно временных лагов в их технологических процессах или в финансовых стратегиях, так как устойчивость стационарной точки будет гарантирована до запаздывания, равного 8 годам. Никаких колебательных процессов в динамике наблюдаться не должно.

В качестве следующего примера конкурентной борьбы предприятий на общем рынке ресурсов рассмотрим взаимное влияние мелкой, уличной торговли (первая компания) и торговли, располагающей стационарными помещениями, складами, залами для демонстрации и т.п.

Так как каждая из компаний не способна закрыть весь рынок: уличная ближе к покупателю и мобильней, но не может охватить все товары и предоставить более удобные и современные способы торговли, примем условно, что уличная торговля в принципе может охватить 30% рынка, а стационарная – 80%(далее в этих единицах будет измеряться деятельность торговли).

Кроме того предположим, что первая компания может увеличить свои торговые точки в десять раз за год, если стационарная торговля вдруг перестанет существовать. Для последней возможно лишь удвоение за год, поскольку строительство, аренда, регистрация, подготовка продавцов, оптовые закупки – всё это требует временных затрат. Таким образом, как и в первом примере получим для коэффициентов модели значения:

$\varepsilon_1 \approx 2{,}3$; $\varepsilon_2 \approx 0{,}69$; $\gamma_{11} = 0{,}077$; $\gamma_{22} = 0{,}086$. В результате различных видов конкурентной борьбы (рекламы, влияние на городские власти и т.п.) сформировалось равновесие: $x^*{}_1 = 25\%$; $x^*{}_2 = 75\%$, из которого можно получить недостающие параметры: $\gamma_{12} = 0{,}005$; $\gamma_{21} 0{,}0018$. Модель готова.из неё следует: так как $\alpha = 0{,}078$; $\beta = 5{,}73$; и $z_1 = -1{,}94$, то стационарная точка(25%, 75%) будет асимптотически устойчивой только в том случае, если реакция рынка на действие каждой компании будет происходить без большого запаздывания, а именно временной лаг не должен превышать 0,81 года. В противном случае вокруг стационарной точки начнутся колебания. Или уличная торговля захватит более 25% рынка, или стационарная торговля превысит свои 75%. Чем больше запаздывание, тем больше период колебаний и их амплитуда. Когда запаздывание превысит критические 0,81, период колебаний будет несколько больше трёх лет.

К примеру, при временном лаге 0,82 уличная торговля начинает испытывать колебания амплитудой 7% от всего рынка, т.е. примерно 255 от своего объема. С увеличением лага амплитуда быстро растёт и при $\tau = 0{,}9$ в течение четырёх лет уличная торговля изменяется от нуля до 45% рынка. Также колебания охватывают и стационарную торговлю. Так, при запаздывании 0,82 амплитуда составляет 2% всего рынка или 3,2% от всего стационарного объема. Такие явления более заметны на сборе налогов и на городском бюджете. С ростом запаздывания амплитуда колебаний и период растут экспоненциально. Следует отметить, что на продолжительность запаздывания оказывают влияние сроки кредитов в банковской системе, политическое устройство городских властных структур, удаленность от мировых и отечественных торговых потоков и т.д.

Заключение

В ходе бакалаврской работы были описаны математические модели конкурентных процессов на основе модели Лотки – Вольтерра.

Изучены основные типы биологического взаимодействия, такие как симбиоз, комменсализм, «хищник – жертва», амменсализм, конкуренция, нейтрализм.

Изучена система уравнений Лотки – Вольтерра, с помощью которой могут быть описаны рассматриваемые конкурентные процессы.

Найдены и описаны математические модели конкурентных процессов в социально – экономической области на основе модели Лотки – Вольтерра. Описаны конкретные примеры применения модели к решению конкурентных задач в социально – экономической сфере: модель классовой борьбы, модель, описывающая взаимоотношения внутри бесклассового общества и модель хода военных действий, а так же описаны две модели конкурентной борьбы предприятий на общем рынке ресурсов.

Список используемой литературы

1. Александров, А.Ю. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ / А.Ю. Александров, А.В. Платонов, В.Н. Старков, Н.А. Степенко. – СПб.: Лань, 2016. – 272 с. [Электронный ресурс]: сайт издательства Лань: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67480

2. Блинов, Ю.Ф. Методы математического моделирования часть 1 / Ю.Ф. Блинов, В.В. Иванцов, П.В. Серба. – Т.: Таганрог, 2012. – 320 с.

3. Власов, М.П. Моделирование экономических систем и процессов: Учебное пособие / М.П. Власов, П.Д. Шимко. – М.: НИЦ ИНФРА–М, 2013. – 336 с.

4. Волгина, О.А. Математическое моделирование экономических процессов и систем: учебное пособие / О.А. Волгина, Н.Ю. Голодная, Н.Н. Одияко. – М.: КноРус, 2012. – 200 с.

5. Гераськин, М.И. Математическая экономика. / М.И. Гераськин.– С.: СГАУ, 2011. – 200 с.

6. Гинзбург, А.И. Экономический анализ: Предмет и методы. Моделирование ситуацией. Оценка управленческих решений: учебник / А.И. Гинзбург, А.И. Гинзбург. – СПб.: Питер, 2011. – 448 с. [Электронный ресурс]: сайт издательства Питер: http://www.piter.com/collection/all/product/ekonomicheskiy-analiz-uchebnik-dlya-vuzov

7. Жабко, А.П. Дифференциальные уравнения и устойчивость. Учебник / А.П. Жабко. – Гриф УМО – М.: Лань, 2015. – 450 с.

8. Колокольцов, В.Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации: учебное пособие / В.Н. Колокольцов, О.А. Малафеев. – СПб.: Лань, 2012. – 624 с.[Электронный ресурс]: сайт издательства Лань: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3551

9. Красс, М.С. Моделирование эколого–экономических систем: учебное пособие / М.С. Красс. – М.: НИЦ ИНФРА–М, 2013. – 272 с.

10. Печерских, И.А. Математические модели в экономике: учебное пособие для студентов ВУЗов / И.А. Печерских, А.Г Семенов. – Кемерово, 2011. – 340 с.

11. Попов, А.М. Экономико–математические методы и модели / А.М. Попов, В.Н Сотников. – М.: Юрайт, 2011. – 245 с.

12. Прасолов, А.В. Математические методы экономической динамики. / А.В. Прасолов. – М.: Лань, 2015. – 352 с. [Электронный ресурс]: сайт издательства Лань: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67480

13. Резниченко, Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. – Изд. 2, испр. и доп / Г.Ю. Резниченко.– М.: Ижевск, 2011 – 560 с.

14. Трубецков, Д.И. Феномен математической модели Лотки–Вольтерры и сходных с ней // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. Т. 19.№ 2. 2011. – С. 69-88.

15. Хавинсон, М.Ю. Математическое моделирование динамики численности разновозрастных групп, занятых в экономике региона компьютерные исследования и моделирование / М.П. Кулаков, Т.6 №3, 2014. – С.441-454

16. Курилова, Е.В. Последствия синхронизации колебаний численностей в двух взаимодействующих сообществах типа "хищник–жертва" при насыщении хищника и лимитировании численности жертвы / Е.В. Курилова, М.П. Кулаков, Е.Я. Фрисман // Информатика и системы управления. № 3, 2015. — С. 24-34

17. Salisbury A. Mathematical models in population dynamics, Sarasota FL, 2011. [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://www.emis.de/journals/GMN/yahoo_site_admin/assets/docs/1_GMN-5232-V25N2.42232344.pdf

18. Rahmani M. Doust H. Gholizade S. An Analysis of Modified Lotka – Volterra Predator – Prey Model, 2014[Электронный ресурс]: Режим доступа:

19. Baigent S. Lotka–Volterra Dynamics – An introduction, 2010. [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://www.ltcc.ac.uk/courses/BioMathematics/LTCC_LV2010.pdf

20. Vadasz V. Economic Motion: An Economic Application of the Lotka–Volterra Predator – Prey Model, 2009. [Электронный ресурс]: Режим доступа:

21. Hoppensteadt F. Predator – Prey Model, 2006 [Электронный ресурс]: Режим доступа http://www.saylor.org/site/wp-content/uploads/2011/06/MA221-4.1.2.pdf